Différentes méthodes d’approximation de PI de l’antiquité à nos jours

Table des matières

Chapitre 1

La méthode d'Archimède

1.1 Introduction

Archimède de Syracuse était un scientifique grec de l'antiquité né deux siècles avant J-C.
Il a touché à beaucoup de domaines scientifiques tels que la physique, mathématiques ou encore l'astronomie qu'il a étudié dans la célébre école de mathématiques et astronomie d'Alexendrie.
Cependant il etait plus connu pour ses talents d'ingenieur qui lui permettait de travailler dans la cour du roi de cette époque. Nous allons donc étudier ses recherches mathématiques sur l'approximation de PI.
Sa recherche fondamentale consistait à encadrer la valeur de PI contenue dans la longueur d'un cercle.

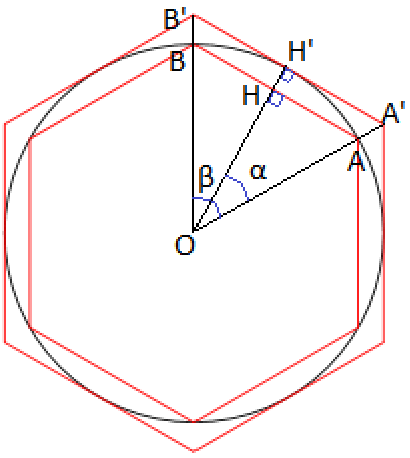
1.2 Propriétés à connaître

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}},\ \tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

1.3 Encadrement

On sait que le périmètre d'un cercle de rayon 1 cm est 2*PI cm. Archimède encadre la valeur de PI en calculant le périmètre de deux polygones réguliers inscrits et circonscrits à ce cercle.

1.3.1 Cas particulier : hexagone



$$\beta = \frac{360}{6} = 60, \alpha = \frac{\beta}{2} = 30, |OH| = 1$$

Soient P(int) le périmètre de l'hexagone inscrit au cercle et P(ext) le périmètre de l'hexagone circonscrit au cercle.
Calculons le périmètre de l'hexagone inscrit :

$$P_{int} = 6 * |AB| = 12 * |AH|$$

où |AB| est la longueur d'un côté de l'hexagone inscrit
or

$$\sin\alpha = \frac{|AB|}{|OH|} = |AH|$$

Donc

$$P_{ext} = 12 * \sin 30$$

Calculons le périmètre de l'hexagone circonscrit :

$$P_{ext} = 6 * |A'B'| = 12 * |A'H'|$$

où |A'B'| est la longueur d'un côté de l'hexagone circonscrit
or

$$\tan\alpha = \frac{|A'B'|}{|OH|} = |A'H'|$$

Donc

$$P_{ext} = 12 * \tan\alpha$$

On sait que le périmètre du cercle est compris entre P(int) et P(ext) :
Donc

$$\begin{aligned} P_{int} \leq & P_{cercle} \leq p_{ext} \\ 12\sin 30 \leq & \quad 2\pi \leq 12\tan 30 \\ 6\sin 30 \leq & \quad \pi \leq 6\tan 30 \\ 3 \leq & \quad \pi \leq 3,464... \end{aligned}$$

Ainsi une approximation de PI peut être observée par encadrement.

1.3.2 Cas général

On peut se rapporter à un cas général où les polygones ont n côtés :

$$\begin{aligned} n\sin\frac{360}{2n} \leq & \pi \leq n\tan\frac{360}{2n} \\ n\sin\frac{180}{n} \leq & \pi \leq n\tan\frac{180}{n} \end{aligned}$$

La valeur de PI est donc comprise entre les deux suites u(n) et v(n) tel que :

$$\begin{cases} u_n & = & n\sin\frac{180}{n} \\ v_n & = & n\tan\frac{180}{n} \end{cases}$$

Chapitre 2

Produit infini de Viète

2.1 Introduction

François Viète est un mathématicien français du 16ème siècle.
Issu d'une famille bourgeoise, il travaillait d'abord en tant qu'avocat pour au final devenir un maître des requêtes et déchiffreur pour Henri IV.
Viète vivait dans une époque de conflits sous le règne du Roi, il fût éxilé et ses grandes recherches datent de la période de son éxil.
Il faisait des mathématiques en parallèle où il a énormément contribué en algèbre et a approfondi de nombreux travaux de célèbres scientifiques.
Nous allons cependant nous intéresser à ses travaux sur l'approximation de PI :

$$\pi = 2 * \frac{2}{\sqrt{2}} * \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} * \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} * ...$$

2.2 Implementation numérique

Le language utilisé est le Caml. Le programme utilisé permet de donner la valeur de la suite v(n) à un rang n donné :

$$\forall n \geq 1, \left\{ \begin{array}{rcr} u_1 & = & \sqrt{2} \\ u_{n+1} & = & \sqrt{2+u_n} \\ v_n & = & 2^{n+1} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \end{array} \right.$$

2.2.1 Programme

```
let viete n = let f x = sqrt(2. +. x)
    in let rec func acc1 acc2 acc3 n = match acc3 with
        |0 -> 2.** float_of_int(n+1) /. acc2
        |_ -> func (f acc1) (acc2 *. f acc1) (acc3-1) n
    in func 0. 1. n n ;;
```

Chapitre 3

La formule de Machin

3.1 Introduction

John Machin est un mathématicien peu connu du 18ème siècle ayant approximé le nombre PI à une centaine de décimale en 1706. Voici l'approximation qui a été faite :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Ce scientifique était un professeur particulier de mathématiques notamment pour le scientifique Brook Taylor, et fréquentait régulièrement De Moivre. Machin a aussi travaillé dans l'astronomie puis a lutté pour l'évolution et l'amélioration des connaissances naturelles mathématiques à travers différentes commissions jusqu'à sa mort au milieu du siècle. Son approximation a été réécrite de manière plus moderne :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\frac{16}{5^{2n+1}} - \frac{4}{239^{2n+1}})$$

3.2 Propriétés à connaître

Développement limité de arctan en 0 :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3}) \tag{3.1}$$

Formules de trigonométrie :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \tag{3.2}$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - (\tan a)^2} \tag{3.3}$$

Développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \tag{3.4}$$

3.3 La formule

3.3.1 Démonstration

Pour tout x appartentant à l'intervalle $]-1, 1[$, la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

est développable en série entière telle que :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Or d'après le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit f une fonction développable en série entière, telle que pour tout $z \in]-R, R[$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$*

La primitive de f qui s'annule en 0 est la somme de la série intégrée terme à terme, qui converge sur $]-R, R[$. $\int_0^z f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \cdots$

On en déduit que : $\forall x \in]-1, 1[$,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

par application direct du théorème.
Notamment pour $x = 1$, on a

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

A partir de là, nous pouvons calculer termes à termes cette série qui approxime PI. Mais l'approximation n'est pas optimale car il faut un grand nombre de termes pour avoir juste 2 décimales de PI. Ainsi, nous pouvons continuer à traiter cette série pour une meilleure approximation.

Pour cela, il nous faut passer par la propriété de trigonométrie (3.3).
Posons $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad a = \arctan x$ et $b = \arctan y$,
On prend l'arctangente des deux membres de l'égalité. Ainsi, on a :

$\arctan(\tan(a-b)) = \arctan(\frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a . \tan b})$

$\Leftrightarrow \quad \arctan x - \arctan y{=}\arctan(\frac{x-y}{1+x.y}), \quad \forall xy \neq -1$

On peut alors vérifier que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{239}$

D'une part, pour $x = 1$ et $y = \frac{1}{239}$, on a donc $\arctan(1) - \arctan(\frac{1}{239}) = \arctan(\frac{1-\frac{1}{239}}{1+\frac{1}{239}}) = \arctan(\frac{120}{119})$

D'autre part, d'après la propriété (3.4), posons X = $2\arctan(\frac{1}{5})$, ainsi $\tan(2X) = \frac{2\tan X}{1-(\tan X)^2}$.
Or si l'on pose x = $\arctan(\frac{1}{5})$ soit X = 2x, alors on a $\tan(2X) = \frac{2\tan 2x}{1-(\tan 2x)^2}$.

Ainsi, au numérateur, on a : $2(\frac{2\tan x}{1-(\tan x)^2})$ tandis qu'au dénominateur $1-(\frac{2\tan x}{1-(\tan x)^2})$.

En remplaçant x par $\arctan\frac{1}{5}$ et en simplifiant, on a $\tan(4\arctan\frac{1}{5}) = 2\frac{\frac{10}{25-1}}{1-\frac{10}{(25-1)^2}} = \frac{120}{119}$. On retouve bien la même valeur que précédemment.

Désormais, nous pouvons à partir de cette égalité, faire l'approximation sous forme de série de PI. Nous réécrivons cette égalité, en remplaçant la fonction $\arctan$ par son développement en série entière aux points respectifs $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{239}$.

$$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{1}{5})^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{1}{239})^{2n+1}}{2n+1}$$
$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(\frac{16}{5^{2n+1}} - \frac{4}{239^{2n+1}})$$

Cette formule approximative PI de manière assez précise, la formule de Machin a permis au scientifique de trouver une centaine de décimales de PI au 18ème siècle. Mais cette formule a aussi développé de nombreuses recherches aux alentours de la fonction $\arctan$.

3.4 Implementation numérique

Le Programme utilisé pour implémenter numériquement la formule de machin dépend de n qui représente le rang de la serie qui permet d'approximer PI donc plus n sera grand et plus l'approximation sera précise :

3.4.1 Programme

```
let machin n = let flo n = float_of_int n
    in let f n = ((-.1.)**flo n /.(2.*.(flo n)+.1.))*.
((16./.(5.**(2.*.(flo n) +.1.)))-.(4./.239.**(2.*.(flo n)+.1.)))
        in let rec func acc1 acc2 n =
            if acc1 = n then acc2
            else func (acc1 + 1) (acc2 +. f acc1) n
                in func 0 0. n;;
```

Chapitre 4

La somme d'Euler

4.1 Introduction

Leonhard Euler est un mathématicien et physicien suisse du 18ème siècle. Il côtoie le célèbre scientifique Bernoulli qui lui donne le gôut des sciences. Il vit en Russie, où il est entouré d'un environnement scientifique exemplaire, qui va lui permettre d'apporter énormément dans la science. Il est intervenu dans les domaines de l'astronomie, des mathématiques où il a été un des pères fondateurs de ce que l'on appelle communément les "fonctions", et dans celui de la physique. Nombreux sont les théorèmes qu'Euler a pu inventer avec d'autres, mais nous allons nous intéresser à ce que l'on appelle la somme d'Euler :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

4.2 Propriété à connaître

Développement en série entière de la fonction $\arcsin$:

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{4.1}$$

4.3 Démonstration

On sait que $\forall x<|1|, \arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ car le rayon de convergence est 1.
On effectue ensuite un changement de variable tel que $x=\sin y$.

Il en résulte que $\arcsin(\sin y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}\frac{(\sin y)^{2n+1}}{2n+1}$

$\forall y<\frac{\pi}{2}$, nous intégrons les deux termes de l'égalité tels que :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\mathrm{dy} = \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)^{2n+1}\mathrm{dy}$

Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)^{2n+1}\mathrm{dy}$

$$I_{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)^{2n+1}\mathrm{dy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)^{2n} * \sin(y)\mathrm{dy}$$

Faisons une Intégration Par Partie :

$$I_{2n+1} = [-(\sin y)^{2n} \cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \sin(y)^{2n-1} \cos y\mathrm{dy} = 0 + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^2 \sin(y)^{2n-1}\mathrm{dy}$$

$$I_{2n+1} = 2n[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)^{2n-1}\mathrm{dy} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)^{2n+1}\mathrm{dy}] = 2n[I_{2n-1} - I_{2n+1}]$$

$$I_{2n+1}(1+2n) = 2nI_{2n-1} \iff I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

En descendant cette relation de récurrence comme par exemple :
$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$
$I_{2n-1} = \frac{2(n-1)}{2n+1} I_{2n-2}$ ...
En faisant une élimination en diagonale des termes de ces égalités, on arrive à déterminer que $I_{2n+1} = \frac{2.4...2n}{3.5...2n+1}$ (entiers pairs/impairs)

Ainsi, par simplification, $[\frac{1}{2}y^2]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

D'où $\frac{\pi^2}{8} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Il faut remarquer de plus, que $\sum_0^{\infty} \frac{1}{(n)^2} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$(Somme des entiers pairs et impairs). Ainsi,

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(n)^2} - \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \iff \sum_0^{\infty} \frac{1}{(n)^2} - \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} \iff \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\iff \frac{3}{4} \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \iff \sum_0^{\infty} \frac{1}{(n)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

La somme d'Euler permet ainsi d'approximer PI

4.4 Implementation numérique

Nous avons implémenté la somme d'Euler en langage Caml afin de pouvoir comparer sa vitesse de convergence avec d'autres méthodes d'approximation de PI :

4.4.1 Programme

```
let euler1 n = let rec func acc1 acc2 n =
match acc1 with
|0 -> acc2
|_ -> func (acc1 - 1) (acc2 +. (1. /. (float_of_int(acc1) ** 2.))) n
in func n 0. n ;;

let euler2 n = sqrt(6. *. euler1 n) ;;
```

Chapitre 5

Produit infini de Wallis

5.1 Introduction

John Wallis est un mathématicien anglais du XVIIIème siècle. Il étudia la théologie et les mathématiques à Cambridge.
Ce scientifique réputé pour ses travaux de calculs différentiels et d'intégrales ainsi que dans le domaine phonétique pour l'éducation des sourds-muets. Nous connaissons notamment les célèbres "intégrales de Wallis".
Il a souvent été comparé au célèbre Newton étant perçu comme l'un des plus grands scientifique de l'époque. Il travailla également sur l'approximation de π :

$$\pi = 2 * \frac{2*2}{1*3} * \frac{4*4}{3*5} * \frac{6*6}{5*7} * ... = 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

5.2 Propriétés à connaître

Intégrale de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\pi} sin^n(x)dx \tag{5.1}$$

Propriété de trigonométrie :

$$cos^2(x) = 1 - sin^2(x) \tag{5.2}$$

5.3 Démonstration

Il faut remarquer que $sin^n(x) = sin^{n-1}(x) * sin(x)$
Nous intégrons par partie la propriété (5.1).

On a donc $I_n = [sin^{n-1}(x)*cos(x)]_0^{\pi} - (-\int_0^{\pi} cos(x)*cos(x)*(n-1)sin^{n-2}(x)dx$
Soit $I_n = 0 + \int_0^{\pi} cos^2(x) * (n-1)sin^{n-2}(x)dx$

Or d'après la propriété (5.2),
$I_n = (n-1)\int_0^{\pi}(1-sin^2(x))sin^{n-2}(x)dx$
$\Longleftrightarrow$
$I_n = (n-1)\int_0^{\pi} sin^{n-2}(x)dx - \int_0^{\pi} sin^n(x)dx$
On remarque la relation de récurrence suivante : $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ ce qui équivaut à $I_n * n = (n-1)I_{n-2}$

On a par application direct, $I_0 = \pi$ et $I_1 = 2$
Séparons désormais les entiers pairs et impairs. D'après $I_n = \frac{(n-1)I_{n-2}}{n}$
Nous avons donc :

Une relation de récurrence pour les entiers pairs : $I_{2n} = \frac{(2n-1)I_{2n-2}}{2n}$
En développant cette relation on obtient :
$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}I_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)*...*5*3*1}{2n*(2n-2)*...*6*4*2}\pi = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$

Une relation de récurrence pour les entiers impairs :$I_{2n+1} = \frac{(2n)I_{2n-1}}{2n+1}$
En dévéloppant de la même manière cette relation :
$I_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)}I_{2n-1} = \frac{2n*(2n-2)*...*6*4*2}{(2n+1)(2n-1)*..*7*5*3} * 2 = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

On voit que la suite I(n) est positive et décroissante car : Soit n ≥ 0
$0 < \sin x < 1$
$\Rightarrow 0 < \sin x^{n+1} < \sin x^n$
$\Rightarrow 0 < \int_0^{\pi} \sin x^{n+1}dx < \int_0^{\pi} \sin x^n dx$
$\Rightarrow 0 < I_{n+1} < I_n$
Nous avons donc :$I_{2n+2} < I_{2n+1} < I_{2n}$
$\Rightarrow \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} < \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} < 1$
$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ est compris entre deux suites qui tendent vers 1 donc d'après le théorème des gendarmes :
$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$
Donc :
$I_{2n} \sim_{+\infty} I_{2n+1} \Rightarrow \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi \sim_{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \Rightarrow \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$

Or :

$2\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1} = 2\frac{(\prod_{k=1}^{n}2)^2(\prod_{k=1}^{n}k)^2}{(\prod_{k=1}^{n}(2k-1))(\prod_{k=1}^{n}(2k+1))} = 2\frac{2^2n(n!)^2}{(2n)(2n+1)(\prod_{k=1}^{n}(2k-1))^2}$

Cependant
$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = 1*3*5*..*(2n-1) = \frac{(2n-1)!}{2*4*6*...*2n-2} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}$

Donc :
$2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} = 2\frac{2^{2n}(n!)^2 2^{2n-2}((n-1)!)^2}{(2n)(2n+1)((2n-1)!)^2} = \frac{2^{4n-1}(n!)^2((n-1)!)^2}{2n(2n+1)((2n-1)!)^2}$

$= \frac{2^{4n-1}(n!)^4(2n)^2}{n^2(2n+1)((2n)!)^2} = \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2} = \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n+1!)(2n)!} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$

Par conséquent :
$2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} = \pi$

5.4 Implementation numérique

Le language utilisé est le Caml. Le programme utilisé permet de donner la valeur du produit de Wallis à un rang n donné.

5.4.1 Programme

```
let wallis n = let f a b c d = (a *. b) /. (c *. d) in
    let rec func x y z t acc n =
    match n with
        |0 -> acc
        |_ -> func (x +. 2.) (y +. 2.) (z +. 2.) (t +. 2.) (acc *. (f x y
    in func 2. 2. 1. 3. 2. n ;;
```

Chapitre 6

Comparaison des vitesses de convergence vers PI

L'entier n représenté est l'entier qui est contenu dans chaque formule.

Nous avons donc comparé les différentes méthodes en fonction du nombre d'itérations suffisantes par nombre de décimales correctes.

6.1 Programme

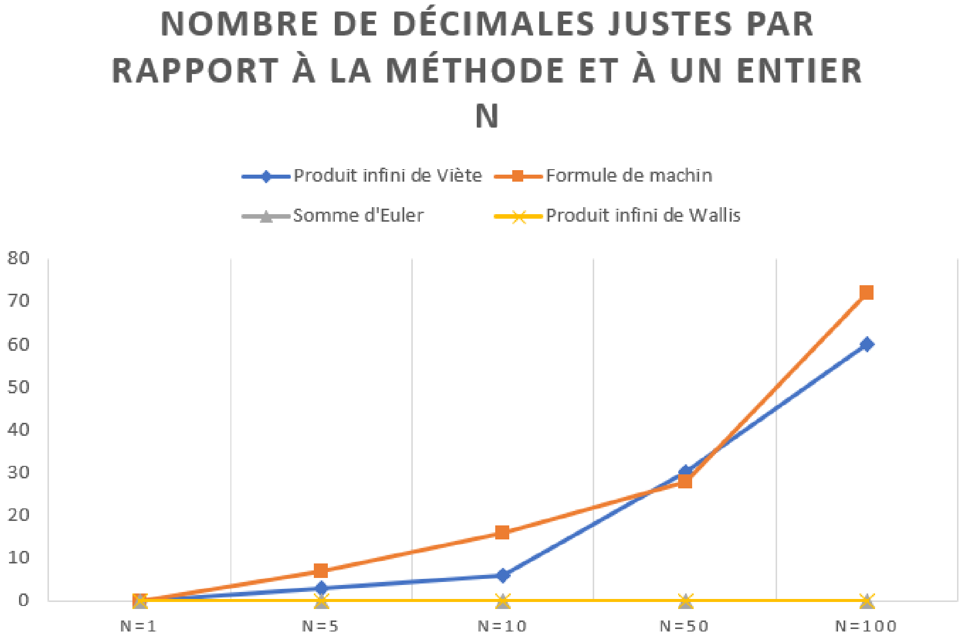
Ce programme est écrit en langage Caml. Pour le compiler, il faut le saisir sur un terminal Caml comme l'application OCaml par exemple.

```
let approx x = let nbdecimal x = let rec f acc x =
    if x >= 1. then acc
    else f (acc+1) (x*.10.)
in f 0 x
    in let pi = 3.14159265358979323
        in let rec f acc1 acc2 x =
            if acc2 = x then acc1
            else f (acc1 + 1) (nbdecimal(pi -. viete acc1)-1) x
        in f 1 (nbdecimal(pi -. viete 1)-1) x ;;
```

Le programme approx premet de donner le nombre d'itérations minimal nécésaire en fonction du nombre de décimales correctes que l'on veut.
On peut voir que ce programme ne fonctionne que pour la méthode de Viète, il faut donc le modifier pour qu'il fonctionne pour une autre méthode.

6.2 Comparaison

Nous avons représenté sur ce graphique (ci dessous), les différentes méthodes analytiques. Nous pouvons constater que le produit infini de Wallis et la somme d'Euler sont des méthodes qui nécessitent bien plus qu'un entier n=100 pour avoir au moins une décimale bonne. En effet, ces deux méthodes sont plus approximatives quant à l'estimation de PI, pour un entier n=10 000, la somme d'Euler a alors 3 décimales justes par exemple.



Cependant, le produit infini de Viète se rapproche de la valeur de PI doucement puis rapidement pour atteindre une soixantaine de décimales pour n=100. Mais la formule de Machin semble être encore plus efficace, cette série converge plus rapidement que les autres techniques étudiées. Pour un entier n= 100, la formule nous renvoie 72 décimales justes de PI.

Voici le tableau des échantillons que nous avons étudié :

Nombre de décimales justes selon la méthode et un entier n

Méthode utilisée :	Produit infini de Viète	Formule de Machin	Somme d'Euler	Produit infini de Wallis
Pour un entier n =				
1	0	0	0	0
5	3	7	0	0
10	6	16	0	0
50	30	28	0	0
100	60	72	0	0

La méthode d'Archimède reste à part, car il s'agit d'un encadrement de PI et non d'une manière analytique d'approximer PI. Mais plus le nombre de côté des figures est nombreux, plus l'approximation se rapproche de PI. Pour se faire une idée, pour deux figures à 10 côtés, les suites approximent 6 décimales du nombre PI.

Ainsi, après notre étude sur ces différentes méthodes d'approximation de PI, nous remarquons la rapidité de convergence de la formule de Machin, qui nous paraît plus efficace.

Bibliographie

https://melusine.eu.org/syracuse/bc/archimede/doc-a4.pdf

http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./a/archimede.html

http://www.cspu.be/~baudhuina/4M5/Chap_3_Trigonometrie/ApproxPI_Archimede.pdf

https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/dl/node15.html

http://www.pi314.net/fr/machin.php

http://www.cerpi-officiel.be/Nombres/machin.html

http://serge.mehl.free.fr/anx/pi_machin.html

http://www.math15minutes.fr/arctan-a-arctan-b-comment-retrouver-la-formule/

http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Identite/SomInvCa.htm

http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=euler

https://www.parisnanterre.fr/medias/fichier/zeta2__1141939428707.pdf

https://fr.wikipedia.org/wiki/François_Viète

https://fr.wikipedia.org/wiki/John_Wallis

https://fr.wikipedia.org/wiki/Archimède

https://melusine.eu.org/syracuse/bc/archimede/doc-a4.pdf

http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./a/archimede.html

http://www.cspu.be/~baudhuina/4M5/Chap_3_Trigonometrie/ApproxPI_Archimede.pdf

http://serge.mehl.free.fr/anx/form_wallis.html

http://www.pi314.net/fr/wallis.php