Construction à la règle et au compas : l'impossible «quadrature du cercle» et autres problèmes Antiques

BERREGARD Gaël
ROSELIE Lina
VEJDOVSKY Paul

Projet étoile L2, Juin 2020

Table des matières

Introduction

De l'antiquité à nos jours

Depuis l'Antiquité jusqu'à présent, de nombreux problèmes mathématiques n'ont cessés d'être étudiés. Les grecs de l'Antiquité furent les premiers à étudier des problèmes de construction géométrique avec pour seuls instruments une règle non graduée et un compas. La géométrie grecque, considérant la droite et le cercle comme les figures fondamentales, ne validait un problème de construction que s'il était réalisé à la règle et au compas.

En mathématiques, les trois grands problèmes de l'Antiquité posés par des mathématiciens de la Grèce antique sont : la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle. C'est au $XIX^{ème}$ siècle seulement que l'on démontra l'impossibilité de résoudre ces problèmes à la règle et au compas. Ces derniers n'ont été résolus (tous trois par la négative car impossibles) qu'avec les développements de l'algèbre. Nous nous intéresserons à ces trois problèmes antiques qui ont résisté longtemps aux mathématiciens, qui ont mis plus de trois millénaires à les étudier.

Dès le $V^{ème}$ siècle avant J-C, la Grèce Antique se plonge dans des problèmes quelques fois insolubles. C'est, en effet, le cas du célèbre problème de la "Quadrature du cercle", qui a été démontré comme insoluble en 1882 par le mathématicien allemand Ferdinand Von Lindemann (1852 - 1939). Ce problème consiste à construire un carré de même aire qu'un disque donné, à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas. Ce qui nécessiterait la construction (à la règle et au compas) de la racine carrée du nombre π, ce qui est impossible en raison de la transcendance (au sens de non algébrique) de π.

L'objectif de notre étude est alors de regarder les fondations de ce problème mathématique, notamment par l'approche géométrique, analytique et algébrique de la construction à la règle et au compas.

Chapitre 1

Introduction des points RC, Construction de $\mathbb{Z}^2$

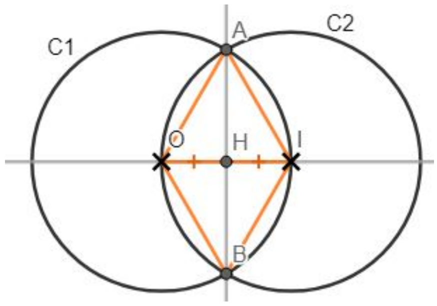
1.1 Introduction

On se munit du plan euclidien.
A partir de deux points, on écrira les droites entre parenthèses, les segments entre crochets et les distances sans symboles.
On définit un point RC (constructible à la règle et au compas) comme tout point pouvant être construit en un nombre fini d'intersections de droites et de cercles passant par des points ou ayant des centres déjà RC et des rayons calculés comme la distance entre deux points déjà RC. Par abus de langage, on pourra dire dans la suite qu'une distance d est RC si et seulement si, il existe deux points RC séparés par une distance d. On se munit de deux points RC : O et I. On définit la distance OI comme étant égale à 1.
Des schémas peuvent accompagner les démonstrations.

1.2 Construction de $\mathbb{Z}^2$

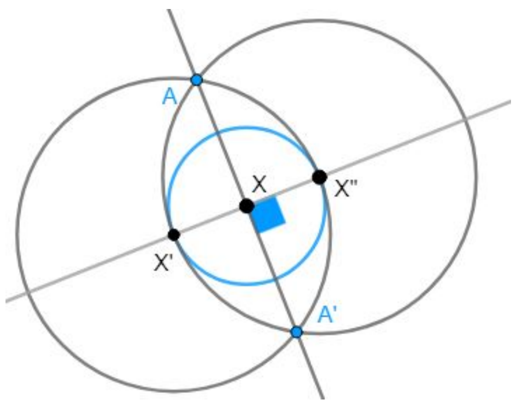
Tout d'abord, montrons que l'on peut construire RC le milieu de deux points RC : nous savons donc construire 1/2 $(Figure1)$.
On place O comme l'origine du repère que nous allons construire. On trace le cercle de rayon OI et de centre O puis le cercle de même rayon et de centre I.
On appelle A l'une des deux intersections des deux cercles. Le triangle OIA est isocèle de base [OI] car AI = AO par construction.
De même, on nomme B l'autre intersection entre les deux cercles et le triangle OIB est aussi isocèle. La droite (AB) intersecte (OI) en un point appelé H. Ainsi, H est RC.

Montrons que OH $= \frac{1}{2}$: par construction, A est le symétrique de B par rapport à (OI). Ainsi (AB) est perpendiculaire à (OI), d'où [AH] est la hauteur de OIA par définition. Donc par propriété des triangles isocèles, $OH = HI = \frac{OI}{2} = \frac{1}{2}$



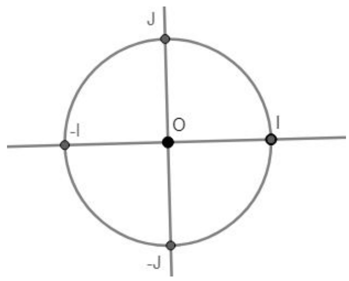
$Figure\ 1\ :\ Construction\ du\ milieu\ de\ deux\ points$

Ensuite, montrons que l'on peut construire RC la perpendiculaire à une droite passant par un point RC $(Figure 2)$.
Soit X un point RC et D une droite passant par X. Construisons le cercle de rayon OI et de centre X. On appelle X' et X" ses deux intersections avec D.
Construisons maintenant, les cercles de rayon X'X" et de centre respectifs X' et X". On appelle A et A' leurs deux intersections.
Comme vu précédemment, (AA') est perpendiculaire à (X'X") et (AA') intersecte (X'X") en un point H tel que $X'H = HX'' = \frac{X'X''}{2}$
Or, comme X' et X" sont sur la droite D, alors (X'X") = D.
De plus, X est le centre du cercle passant par X' et X", de plus X $\in$ D, donc H = X.
Ainsi (AA') est RC et est perpendiculaire à D passant par X, et ce pour tout X RC.



$Figure\ 2\ :\ Construction\ de\ la\ perpendiculaire\ à\ une\ droite$

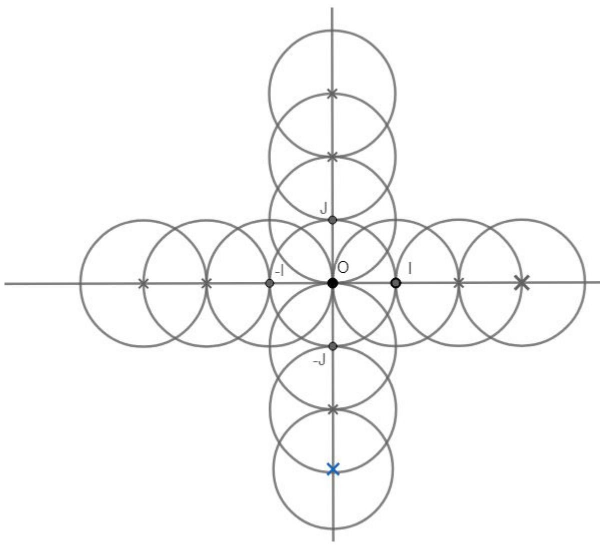
On sait donc construire le repère OIJ $(Figure 3)$.
Construisons la droite perpendiculaire à (OI) passant par O.
Traçons le cercle de centre O et de rayon OI. Nous définissons, par habitude, le point J étant l'intersection du cercle et de la droite tracée. Ainsi J=(0,1) et OJ=OI.
Avec le même procédé que sur (OI), on construit $\mathbb{Z}$ sur (OJ).



$Figure\ 3\ :\ Construction\ du\ repère\ OIJ$

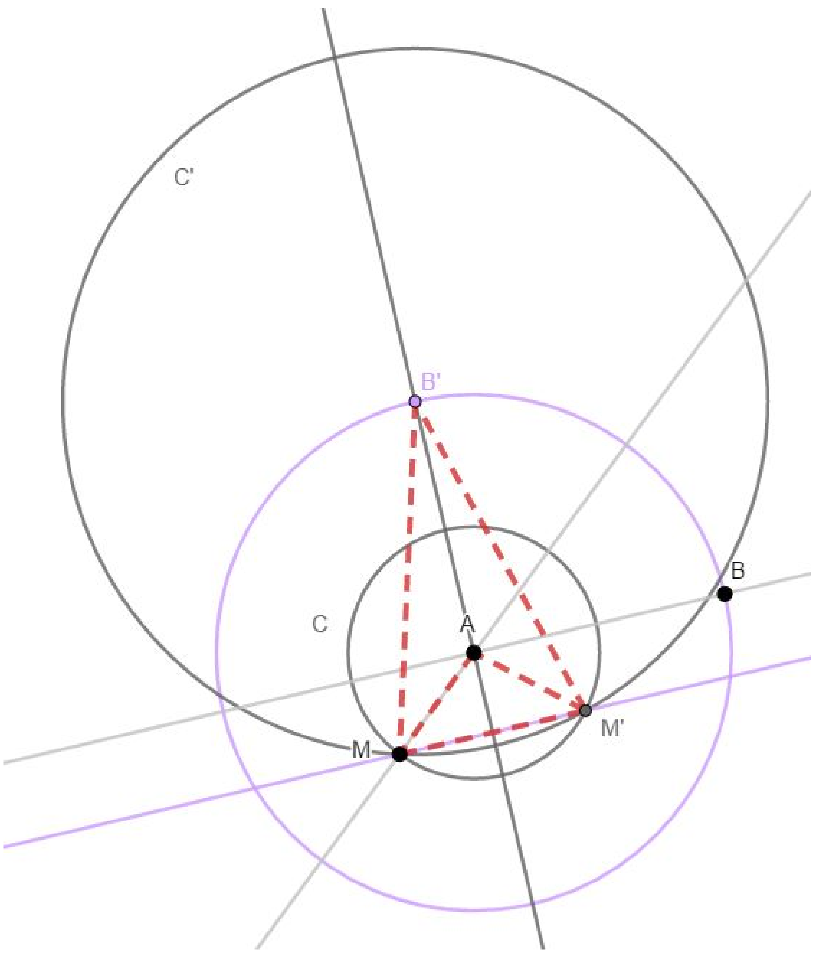
Occupons nous de notre but principal, construire $\mathbb{Z}^2$:
Nous pouvons construire tout point (x,y) $\in (\mathbb{Z}^*)^2$ de la manière suivante :
- nous traçons la perpendiculaire à (OI) passant par (x,0) qui est RC car x $\in \mathbb{Z}$.
- nous traçons de même la perpendiculaire à (OJ) passant par (0,y) qui est RC car y $\in \mathbb{Z}$.

(OI) et (OJ) étant perpendiculaire, elles ont une unique intersection (x,y) par construction du repère OIJ. Ainsi $\mathbb{Z}^2$ est RC $(Figure 4)$.



$Figure\ 4\ :\ Construction\ de\ \mathbb{Z}^2$

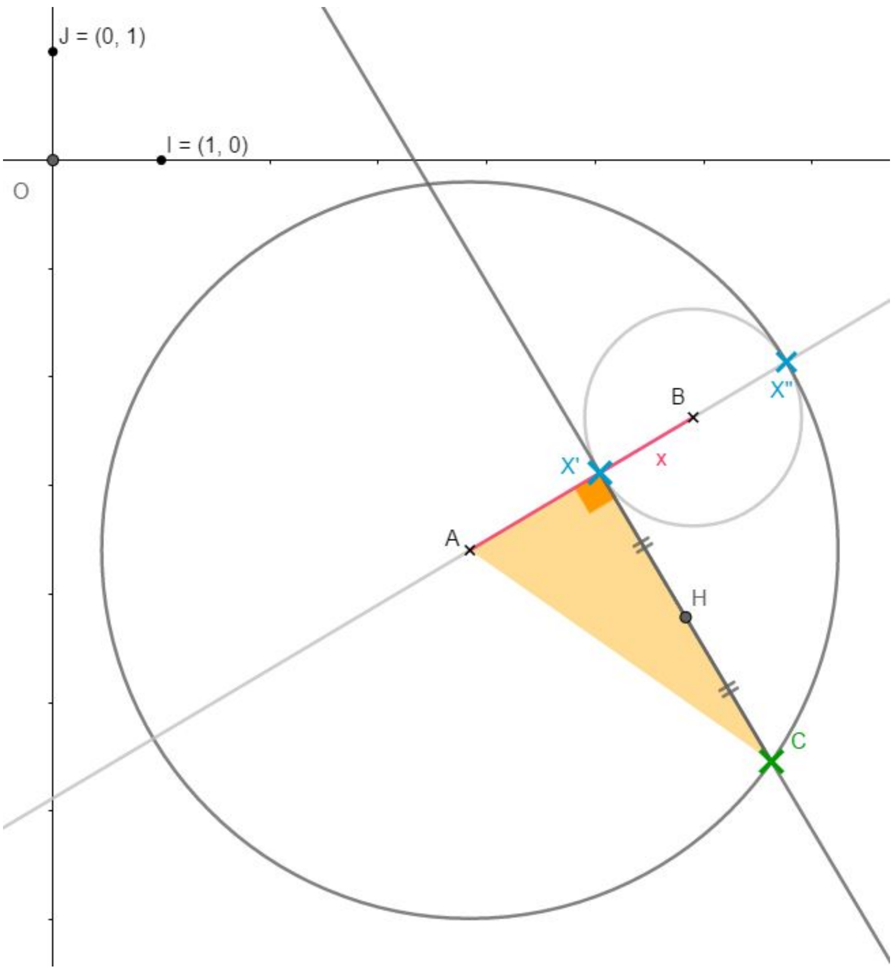
Intéressons-nous maintenant aux droites parallèles ($Figure 5$). Montrons que l'on peut construire RC la parallèle à une droite passant par un point RC.
Soit D une droite définie par deux points A et B RC, et soit M un point RC.
Traçons la droite (AM) et le cercle C de centre A et de rayon AM.
Puis traçons la droite perpendiculaire à D passant par A.
Nous traçons le cercle de centre A et de rayon AB, une de ses intersections avec la perpendiculaire à D passant par A sera B'.
Nous traçons ensuite le cercle C' de centre B' et de rayon MB'.
Ainsi, C et C' ont deux intersections, M et un autre point noté M'.
Nous savons que AM=AM' et BM=BM', d'où AMM' est un triangle isocèle et (AB') est sa bissectrice (A et B' étant équidistants de M et M').
Donc par propriété des triangles isocèles, (AB') est perpendiculaire à (MM').
Or (AB') est perpendiculaire à D, donc (MM') est parallèle à D ($figure 5$).



$Figure\ 5\ :\ Construction\ de\ deux\ droites\ parallèles$

Puis, on s'intéresse à la construction de la racine carrée ($Figure 6$). Montrons qu'à partir d'un distance x RC on peut construire RC la distance $\sqrt{x}$.
Soit [AB] un segment RC de longueur x. On trace le cercle de rayon OI et de centre B et on appelle X' son intersection avec [AB] et X" son autre intersection avec (AB) (de sorte que AX'= x-1 et AX" = x+1). On construit la perpendiculaire à (AB) passant par X' et le cercle de centre A et de rayon AX" et on appelle C l'une des intersections de ces deux constructions. Enfin on construit le milieu du segment X'C que l'on appelle H. Ainsi le triangle AX'C est rectangle, et par le Théorème de Pythagore :

$$AX'^2+X'C^2 = AC^2 \Rightarrow X'C^2 = (x+1)^2-(x-1)^2 \Rightarrow X'C^2 = 4x \Rightarrow X'C = 2*\sqrt{x} \Rightarrow X'H = \sqrt{x}$$



$Figure\ 6\ :\ Construction\ de\ la\ distance\ \sqrt{x}$

Chapitre 2

Sous-Corps de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$

2.1 Introduction

Après avoir abordé un aspect géométrique, nous allons maintenant aborder un aspect plus théorique des points RC. Dans cette partie, montrons que l'ensemble des points RC est en bijection avec un sous corps de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$.

Rappel : L une partie non vide d'un corps K est un sous corps de K si :
1) $\forall(x, y) \in L^2, x + y \in L$ et $x * y \in L$
2) $\{0, 1\} \subset L$
3) $\forall x \in L \backslash \{0\}, x^{-1} \in L$
4) $\forall x \in L, -x \in L$

Regardons alors, dans un premier temps pour $\mathbb{R}$ puis dans un second temps pour $\mathbb{C}$, les propriétés de sous-corps pour l'ensemble des points RC.

2.2 Sous-Corps de $\mathbb{R}$

On considère ici uniquement la droite (OI). On définit l'application f qui, à chaque point X RC de (OI), fait correspondre la distance algébrique f(X)=OX. Soient deux points RC X et X' tels que f(X)=f(X'), alors OX=OX'. Cette distance étant algébrique, et comme X et X' appartiennent à (OI), X=X' : l'application f est injective, et en restreignant son ensemble d'arrivée, elle devient bijective. Nous allons montrer que l'ensemble d'arrivée de cette bijection, que nous appellerons F, est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

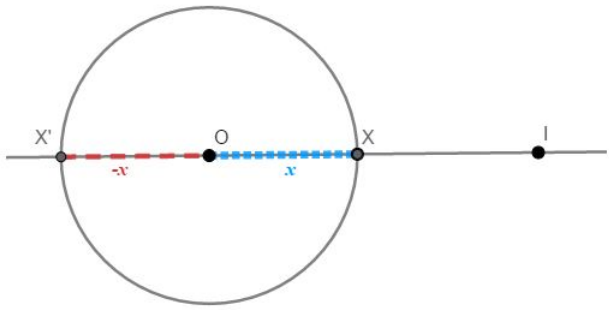
Dans un premier temps, remarquons que les neutres pour l'addition et la multiplication 0 et 1 correspondent aux points RC O et I car OO=0 et OI=1 et donc appartiennent à F.

Soit X et Y RC différents de O tels que :

$$x = f(X),\ y = f(Y),\ x \in F,\ y \in F$$

On construit le cercle de centre O et de rayon |x| connu. On appelle X' son intersection avec (OI) telle que X' différent de X. Ainsi X' est RC et :

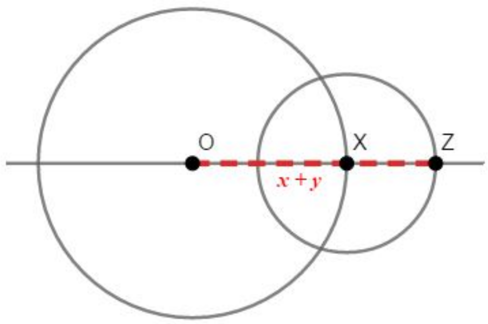
$$f(X') = -x \in F$$



$Figure\ 7\ :\ Construction\ de\ la\ distance\ -x$

On construit le cercle de de centre X et de rayon |y| connu. On appelle Z son intersection avec (OI) à gauche si y est négatif et à droite si y est positif. Ainsi Z est RC et :

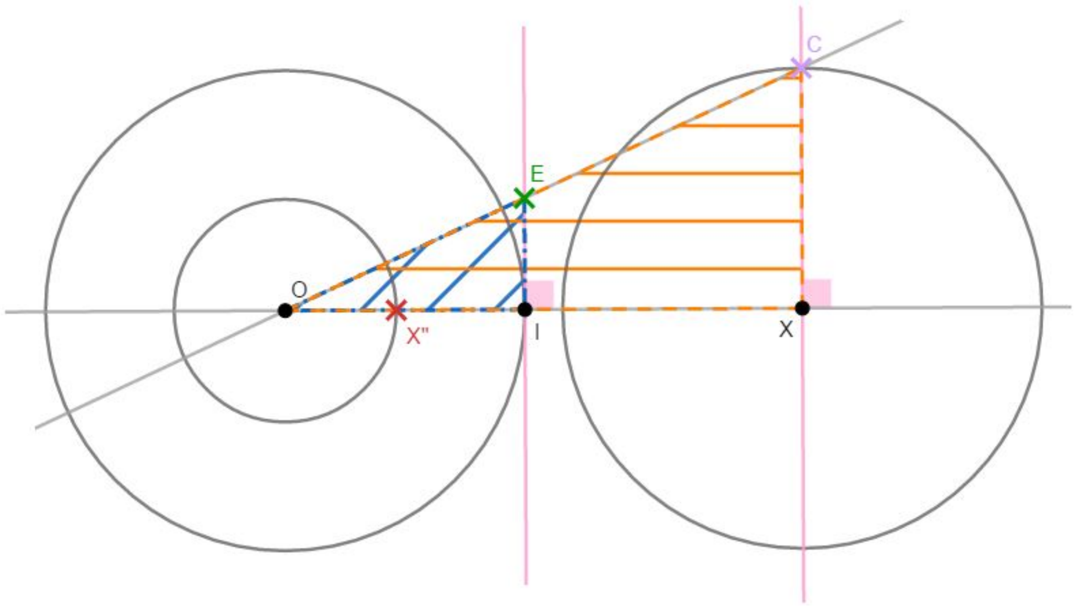
$$f(Z) = x + y \in F$$



$Figure\ 8\ :\ Construction\ de\ la\ distance\ x + y$

On construit le cercle de centre O et de rayon OI. On appelle D l'intersection de ce cercle avec (OI) la plus proche de X (D=I si x positif,"-I" sinon). On construit la droite perpendiculaire à (OI) passant par X. On construit le cercle de centre X et de rayon OI. On appelle C l'une des intersections de la perpendiculaire avec ce cercle. On trace la droite (OC). On trace la perpendiculaire à (OI) passant par D. On note E l'intersection de cette perpendiculaire avec (OC). Finalement, on construit le cercle de centre O et de rayon DE, et on nomme X" l'intersection de ce cercle avec (OI) la plus proche de X. Les droites (XC) et (DE) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (OI), ainsi dans les triangles OXC et ODE, par le théorème de Thalès :

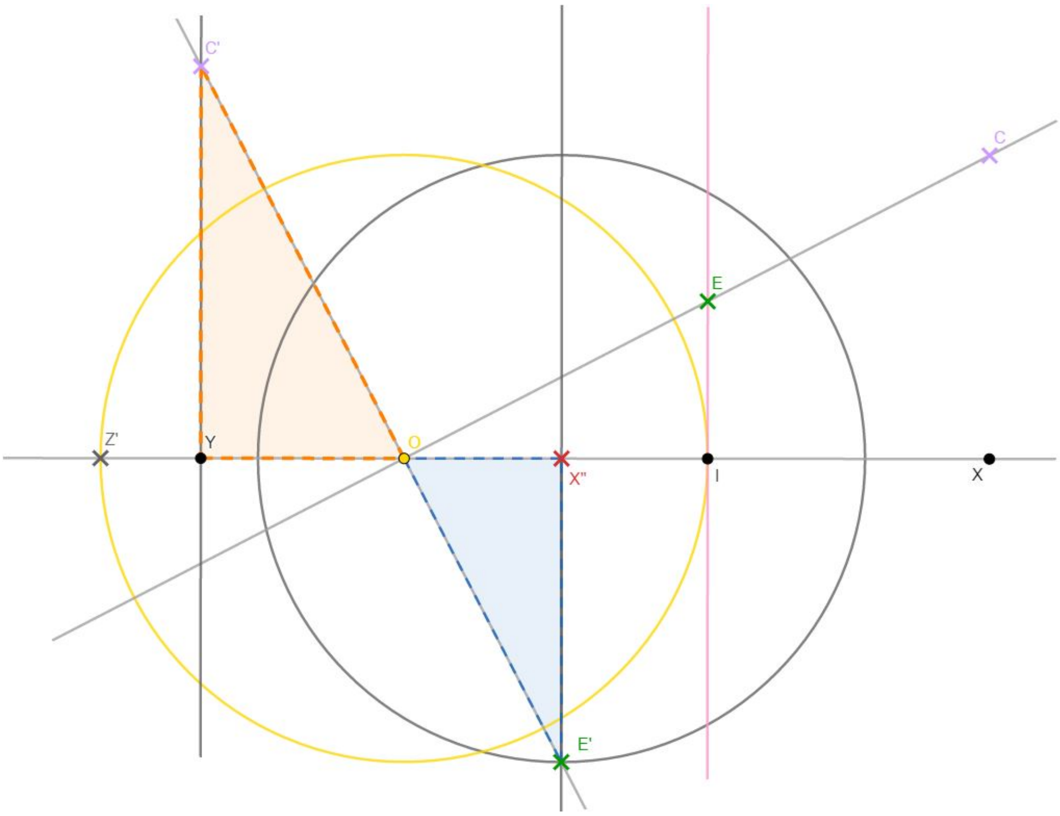
$$\frac{DE}{XC} = \frac{OD}{OX} \Rightarrow DE = \frac{1}{|x|} \Rightarrow f(X") = \frac{1}{x} \in F$$



$Figure\ 9\ :\ Construction\ de\ la\ distance\ \dfrac{1}{x}$

Si $y = \frac{1}{x}$, $x * y = 1$ appartient à F. Sinon, on trace le cercle de centre X" et de rayon 1 et la droite perpendiculaire à (OI) passant par X" et on note E' l'une de leurs deux intersections. On trace la droite perpendiculaire à (OI) passant par Y et on note C' l'intersection de cette droite avec (OE'). Finalement, on construit le cercle de centre O et de rayon X"E', et on nomme Z' l'intersection de ce cercle avec (OI) à droite de O si x et y sont de même signe et à gauche sinon. Les droites (YC') et (X"E') sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (OI), ainsi dans les triangles OYC' et OX"E', par le théorème de Thalès :

$$\frac{YC'}{X"E'} = \frac{OY}{OX"} \Rightarrow YC' = |xy| \Rightarrow f(Z') = xy \in F$$



$Figure$ 10 : $Construction\ de\ la\ distance\ xy$

Nous avons montré que :

$$0 \in F,\ 1 \in F,\ x + y \in F,\ -x \in F\ si\ y = 0,\ x * y \in F,\ \frac{1}{x} \in F.$$

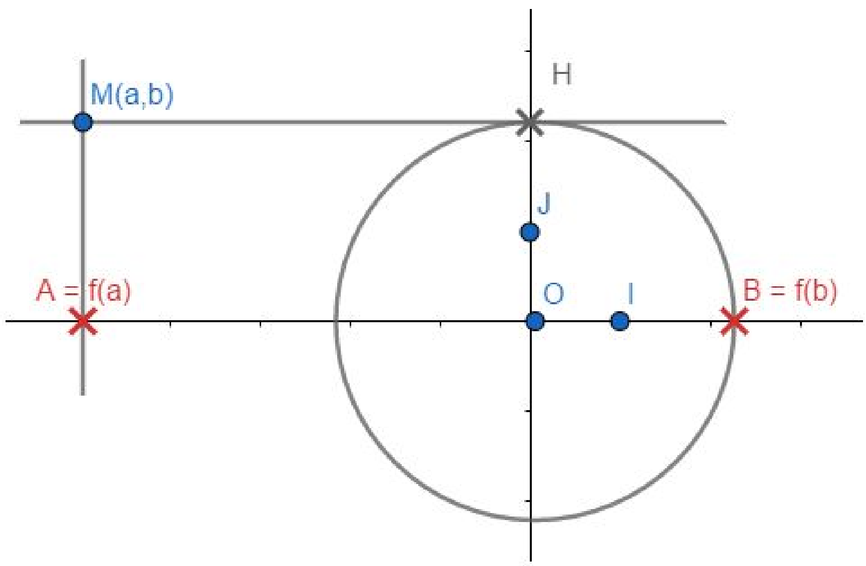
Donc F est un sous-corps de $\mathbb{R}$ et les points RC de (OI) sont en bijection avec cet ensemble.

2.3 Sous-Corps de $\mathbb{C}$

On considère maintenant tout le plan (OIJ). On construit l'application g qui, à chaque point M de coordonnés (a,b) RC de (OIJ), fait correspondre le complexe g(M) = a + ib . Soient deux points RC : X (a,b) et X'(a',b') tels que g(X)=g(X'), alors a+ib=a'+ib'. Deux nombres imaginaires égaux ont leur partie imaginaire et réelle égales, d'où a = a' et b = b' donc X = X'. L'application g est injective, et en restreignant son ensemble d'arrivée, elle devient bijective. Nous allons montrer que l'ensemble d'arrivée de cette bijection, que nous appellerons G, est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Soit M = (a,b) un point RC quelconque. On construit la droite parallèle à (OI) passant par M et on appelle H son intersection avec (OJ), on construit la droite parallèle à (OJ) passant par M et on appelle A son intersection avec (OI), et on construit le cercle de centre O et de rayon OH et on nomme B son intersection à gauche de O si M est au-dessous de (OI) et à droite sinon (si M appartient à (OI) alors B=O). Par construction, g(A)=a et g(B)=b avec A et B RC. Ainsi :

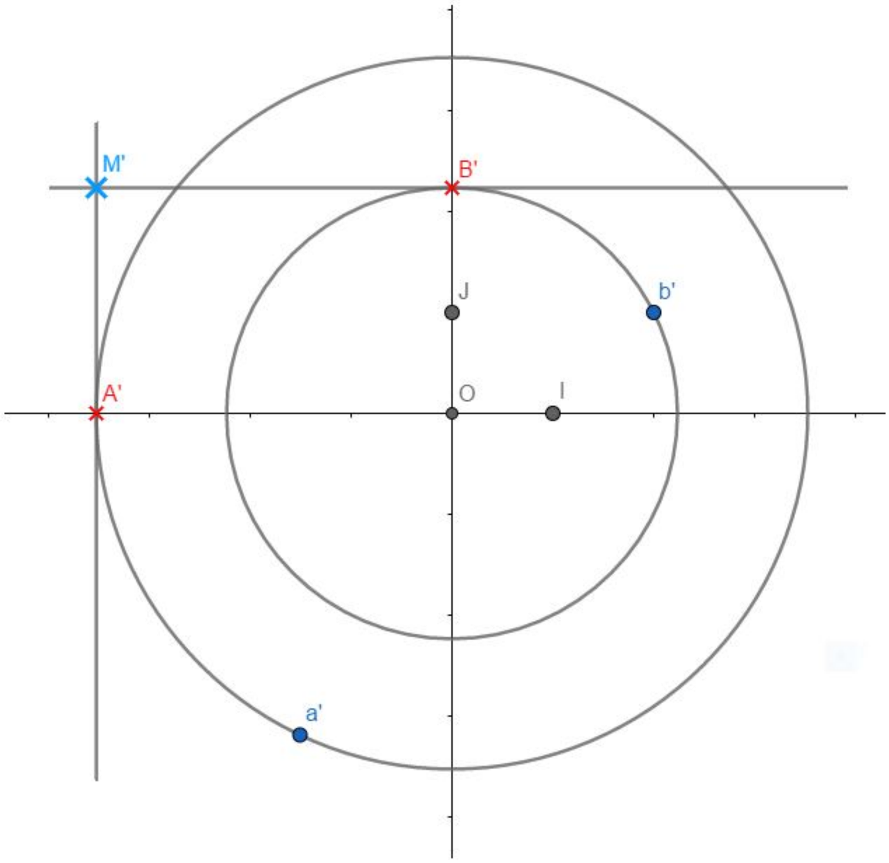
$$(a,b) \in G \Rightarrow (a,b) \in F^2$$



$Figure\ 11\ :\ Première\ implication$

Soient a' et b' appartenant à F. On construit le cercle de centre O et de rayon |a'| = OA' et on appelle A' son intersection avec (OI) à droite si a' est positif et à gauche sinon. On construit le cercle de centre O et de rayon |b'|= OB' et on appelle B' son intersection avec (OJ) en haut si b' est positif et en bas sinon. On construit la droite perpendiculaire à (OI) passant par A' et la droite perpendiculaire à (OJ) passant par B' et on note M' leur intersection. Par construction, g(M')=a' + ib'. Ainsi :

$$(a, b) \in F^2 \Rightarrow (a, b) \in G$$



$Figure\ 12\ :\ Deuxième\ implication$

On vérifie maintenant que G est un sous corps de $\mathbb{C}$

1) $\forall((x,y),(x',y') \in G^2, x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$.
Or d'après 2.2), $(x+x')$ et $(y+y')$ appartiennent à F donc $(x+x')+i(y+y')$ appartient à G.
De même, $(x+iy)*(x'+iy') = (xx'-yy')+i(x'y+xy')$ or $xx'-yy'$ et $x'y+xy'$ appartiennent à F d'où $(xx'-yy')+i(x'y+xy')$ appartient à G.

2) $\{0,1\} \subset G$ trivialement.

3) $\forall(x,y) \in G, (x+iy)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i * \frac{y}{x^2+y^2}$ or $\frac{x}{x^2+y^2} \in F$ et $\frac{y}{x^2+y^2} \in F \Rightarrow (x+iy)^-1 \in G$.

G est donc un sous corps de $\mathbb{C}$.

Chapitre 3

Algèbre des points RC

Dirigeons -nous vers un peu plus d'abstraction afin d'étudier la construction des points RC.

3.1 Rééls algébriques sur $\mathbb{Z}$

Un réel x est algébrique sur $\mathbb{Z}$ s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(x) = 0$.

Soit x un réel algébrique. Il existe alors P tel que $P(x) = 0$.
Soit d le degré de P. Soit n un entier naturel.

Pour $n = 1$, s'il existe un polynôme Q_1 de degré n tel que $Q_1 = 0$, alors Q_1 est un polynôme annulateur de degré minimal car aucun polynôme non nul de degré 0 est annulé par x. Sinon, aucun polynôme de degré 1 est annulé par x.

Soit n un entier compris strictement entre 1 et d tel que aucun polynôme de degré n-1 est annulé par x. S'il existe un polynôme Q_n de degré n tel que $Q_n(x)$ = 0, alors Q_1 est un polynôme annulateur de degré minimal. Sinon aucun polynôme de degré n est annulé par x.

Enfin si n = d alors il existe un polynôme de degré n annulé par x : P.

Ainsi, par récurrence entre 1 et d, il existe, à fortiori, un polynôme de degré minimal tel que x en soit racine, si x est un réel algébrique.

On admettra que si x et y sont deux réels algébriques sur $\mathbb{Z}$, alors $x + y$, xy et $\frac{1}{x}$ sont algébriques sur $\mathbb{Z}$ avec d($x + y$) = d(x)*d(y). Ainsi les réels algébriques ont une structure de corps.

3.2 Itération de l'ensemble RC

Soit RC_0 l'ensemble {O,I}.

On note, par récurrence, l'ensemble RC_{n+1} comme étant l'union de RC_n et de Ψ l'ensemble des points construits à partir de l'intersection de :
* deux cercles de centre de points de RC_n, ainsi que de rayons des longueurs de RC_n.
* de deux droites passant par des points de RC_n
* de un cercle et d'une droite ci-dessus.
On dira d'une longueur d, qu'elle est RC_n si et seulement si, il existe deux points de RC_n tels que la longueur du segment formée par ces deux points est égale à d.

On dira dans la suite, par abus de langage, qu'un point du plan euclidien de coordonnées (x,y) est algébrique si et seulement si x et y sont algébriques sur $\mathbb{Z}$. Notre but est alors de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, un point $x \in RC_n$ est algébrique sur $\mathbb{Z}$. Nous procédons pour cela, par un raisonnement par récurrence.

Tout d'abord, on peut remarquer que O = (0,0) et I = (1,0) sont algébriques (0 et 1 étant algébriques car 0 annule le polynôme X et 1 annule le polynôme -1 + X). Ainsi tout point de RC_0 est algébrique. De plus, nous avons démontré précédemment que construire un point RC M(x,y) est équivalent à construire les longueurs x et y.

Soit n un entier, tel que tout point de RC_n est algébrique.
Étudions les points de RC_{n+1} :

Soit M(x,y) un point de RC_{n+1}.

- Si M appartient à RC_n, alors M est algébrique, par hypothèse.

- Soit M l'intersection d'un cercle C_1 de centre A = (x_1,y_1) $\in$RC$_n$ et de rayon r_1 $\in$RC$_n$ et d'un cercle C_2 de centre B = (x_2,y_2) $\in$RC$_n$ et de rayon r_2 $\in$RC$_n$.

On a les deux équations suivantes :

$$(\mathrm{x}_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r_1^2 \; et \; (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 = r_2^2 \tag{3.1}$$

$$\iff r_1^2 - r_2^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - ((x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2)$$

$$\iff y = ax + b$$

En résolvant le système, avec $a = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}$ et $b = \frac{-x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + r_1^2 - r_2^2}{2(y_2 - y_1)}$.

En reportant cette valeur de y dans (3.1), on obtient une équation du second degré pour x, qui aura des solutions sous la forme $x = \frac{-B \pm \sqrt{\delta}}{2A}$.
Ainsi $y = a\frac{-B \pm \sqrt{\delta}}{2A} + b$.

Or, x et y s'expriment comme quotient, produit et somme de réels algébriques (A, B, δ étant eux mêmes des sommes, produits et quotients de réels algébriques), donc x et y sont algébriques sur $\mathbb{Z}$. Ainsi, M est algébrique.

- Si M est l'intersection de deux droites : D_1 = (AB) et D_2 = (CD) avec A,B,C D appartenant à RC_n tels que A = (x_1,y_1), B=(x_2, y_2), C= (x_3,y_3) et D = (x_4,y_4). Ainsi M vérifie :

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * x + \frac{y_1 x_1 - y_2 x_2}{x_2 - x_1} \;\; \& \;\; y = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} * x + \frac{y_3 x_3 - y_4 x_4}{x_4 - x_3} \Rightarrow x = \frac{\frac{y_2 x_2 - y_1 x_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_3 x_3 - y_4 x_4}{x_4 - x_3}}{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_3 - y_4}{x_4 - x_3}}$$

Donc x s'exprime comme produit, somme et quotient de réels algébriques, il est donc algébrique sur $\mathbb{Z}$. De même, y s'exprime comme produit, somme et quotient de réels algébriques, il est donc algébrique sur $\mathbb{Z}$. Donc M est algébrique.

- Si M est l'intersection d'un cercle C de centre A = (x_1,y_1) $\in$RC$_n$ et de rayon r_1 $\in$RC$_n$ et d'une droite d ci-dessus d'équation $y = ax + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors C vérifie $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r_1^2$.

Pour $y = ax + b$, on a $(x_1 - x)^2 + (y_1 - (ax + b)^2) = r_1^2 \Longleftrightarrow$(x$_1 - x)^2 + (y_1 - ax - b)^2 - r_1^2 = 0$ qui est une équation du second degré en x ayant pour racines un certain x_2 et x_3 qui sont exprimés en fonction de x_1, y_1, a et b. De plus, $y = ax + b$ avec $x = x_2$ ou $x = x_3$.

Ainsi, x et y s'expriment comme quotient, produit et somme de réels algébriques et donc sont algébriques sur $\mathbb{Z}$. Ainsi, M est algébrique.

Alors le point M appartient à $RC_n \cup \Psi$ donc à RC_{n+1}.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, un point $x \in RC_n$ est algébrique sur $\mathbb{Z}$.

Pour la suite, nous supposerons que le degré d_x d'un point x de RC_n est de la forme $2 * p$ avec $p \in \mathbb{N}$. (*)

3.3 La quadrature du cercle

Les mathématiciens avaient pour objectif de montrer qu'il est possible de construire RC un carré, qui a la même aire que le disque unité. Montrons que c'est impossible.

Soit C un cercle de rayon r RC. On suppose qu'on peut effectuer à la règle et au compas la quadrature du cercle, c'est à dire on suppose qu'il existe un carré de coté a, formé de points RC tel que son aire soit égale à l'aire de C. Ainsi on a :

$$a^2 = 2\pi r^2 \Rightarrow \frac{a^2}{2r^2} = \pi$$

Or a est RC (car distance entre deux points RC) donc $\frac{a^2}{2r^2}$ est RC par structure de corps des points RC donc $\frac{a^2}{2r^2}$ est algébrique donc π est algébrique. Cependant π est transcendant, il n'est donc pas racine d'une équation polynomiale, ainsi on a montré par l'absurde que la quadrature du cercle est impossible.

3.4 La trisection de l'angle

Le but des chercheurs était d'essayer de démontrer que l'on peut diviser un angle en 3 parties équivalentes, à la règle et au compas. Montrons que c'est impossible.

Nous considérons un angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$. D'après les questions préliminaires, nous savons construire sur l'axe OI et OJ les points RC $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc avec un cercle trigonométrique de longueur OI, on peut tracer l'angle $\frac{\pi}{3}$ Donc l'angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$ est RC.

On cherche un x tel que $3x = \alpha = \frac{\pi}{3}$. Donc $x = \frac{\pi}{9}$.

D'autre part, on a $\cos(3x) = \cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.
Par les formules de linéarisation, on a $\cos(3x) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 4\cos(x)^3 - 3\cos(x) - \frac{1}{2} = 0$. En posant $Y = \cos(x)$, on a alors l'équation $4Y^3 - 3Y - \frac{1}{2} = 0$. Or cette équation a pour solution $x = \frac{\pi}{9}$ d'après ce que l'on a vu.

Le polynôme $4Y^3 - 3Y - \frac{1}{2}$ est de degré 3 et n'a pas de solutions sur $\mathbb{Z}$. Il est donc irréductible et minimal.
Ce qui signifie que $\frac{\pi}{9}$ est solution d'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Z}$ (et non pas sur $\mathbb{C}$), de degré 3. Or nous avons précédemment vu (page 18) que les nombres RC, sont solutions d'un polynôme minimal annulateur de degré $2 * p$ avec p un entier naturel. N'étant pas le cas ici (degré impair 3), $\frac{\pi}{9}$ n'est pas RC.

Ainsi, pour un angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$ qui est RC, la construction d'un angle $\frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{9}$ n'est pas constructible à la règle et au compas. Ce contre-exemple montre l'impossibilité d'une méthode générale de la trisection de l'angle à la règle et au compas.

3.5 La duplication du cube

Ici, l'objectif était de montrer que l'on peut construire un cube ayant un volume deux fois plus grand que celui d'un autre cube donné.
Montrons que cela est impossible.

Prenons un cube RC de volume X^3. On suppose qu'il existe un cube RC de volume $2X^3$. Ce nouveau cube a donc un côté $^3\sqrt{2}$X RC. Comme X et $\frac{1}{x}$ sont RC, on obtient que $^3\sqrt{2}$ est RC. Donc $^3\sqrt{2}$ est algébrique. Si le polynôme minimal de $^3\sqrt{2}$ est de degré 2, alors il existe 3 entiers a, b et c non tous nuls tels que $a2^{\frac{2}{3}} + b(^3\sqrt{2}) + c = 0 \Rightarrow$a$2^{\frac{2}{3}} + b(^3\sqrt{2}) = -c \Rightarrow {}^3\sqrt{2}(a(^3\sqrt{2}) + b) \in \mathbb{Z}$
Donc $b + a(^3\sqrt{2}) = \frac{h}{^3\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{h}{^3\sqrt{2}} - a(^3\sqrt{2})$. Or h et a étant entiers, il apparaît que b ne peut pas l'être car $^3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ainsi le degré du polynôme minimal de $^3\sqrt{2}$ n'est pas 2 et comme $-2 + 0(^3\sqrt{2}) + 0(^3\sqrt{2})^2 + 1(^3\sqrt{2})^3 = 0$, alors le degré est impair, ce qui est absurde donc $^3\sqrt{2}$ n'est pas RC et la duplication du cube est impossible.

Chapitre 4

Bibliographie

https ://debart.pagesperso-orange.fr/geoplan/polygone-regulier.mobile.html
https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ merker/Enseignement/Geometrie/regle-compas.pdf
https ://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/cp/node15.html
http ://www-sop.inria.fr/members/Frederic.Havet/FeteScience/Cafe-10-12-10.pdf
https ://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ge/node20.html
http ://mathenjeans.free.fr/amej/edition/0014none/00noneuc.html
https ://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/geometrie/les-trois-problemes-de-l-antiquite
http ://villemin.gerard.free.fr/Esprit/DateAvJC.htm
https ://fr.wikipedia.org/wiki/Ferdinand$_{v}on_{L}indemann$

.pdf" .png" .jpg" .mps" .jpeg" .jbig2" .jb2" .PDF" .PNG" .JPG" .JPEG" .JBIG2" .JB2" .eps"