Rapport de Projet Final : Optimisation de Portefeuille Multi-Critère

Ce rapport présente une méthodologie complète pour la construction de portefeuilles d'actifs optimisés sous contraintes réalistes.

Dépassant le cadre théorique classique de Markowitz (Moyenne-Variance), ce projet intègre des dimensions opérationnelles critiques : les coûts de transaction et la cardinalité stricte du portefeuille. Nous avons développé une approche à trois niveaux.

Le Niveau 1 résout le problème convexe classique via l'algorithme SLSQP.

Le Niveau 2 traite le problème non-convexe (NP-difficile) en utilisant l'algorithme génétique NSGA-II couplé à un opérateur de réparation pour gérer les contraintes discrètes.

Enfin, le Niveau 3 propose une interface d'aide à la décision (Streamlit). Les résultats montrent que l'approche évolutionnaire permet de trouver des compromis robustes entre risque, rendement et coûts, là où les méthodes traditionnelles échouent.

Gaël LE REUN – Aubin HERAULT - Thomas BERTHO

Table des matières

1. Introduction et contexte du projet

1.1 Le problème de l'investisseur moderne

La Théorie Moderne du Portefeuille (MPT), introduite par Harry Markowitz en 1952, a révolutionné la finance en quantifiant le dicton "ne pas mettre tous ses œufs dans le même panier". Elle postule qu'un investisseur rationnel cherche à maximiser son espérance de rendement pour un niveau de risque donné.

Cependant, l'application directe de ce modèle théorique se heurte à la réalité des marchés financiers contemporains :

- Frictions de marché : Le modèle original ignore les coûts de transaction. Or, chaque réallocation d'actifs engendre des frais (courtage, bid-ask spread, taxes) qui peuvent éroder significativement la performance nette.
- Gestion opérationnelle : Un portefeuille optimal au sens mathématique peut contenir des centaines de positions infimes (ex : 0.001% sur une action). En pratique, un gestionnaire doit limiter le nombre de lignes (Cardinalité) pour réduire les coûts de surveillance et de gestion administrative.
- Non-convexité : L'ajout de contraintes de cardinalité (ex : "exactement 10 actifs") transforme le problème d'optimisation quadratique (facile à résoudre) en un problème combinatoire complexe (NP-difficile), rendant les solveurs traditionnels inopérants.

1.2 Objectifs du projet

L'objectif de ce projet, mené par l'équipe Gemini Antigravity, est de développer une solution logicielle capable de résoudre ce problème complexe en trois étapes :

- Niveau 1 : Établir une "Baseline" théorique en résolvant le problème de Markowitz sans friction.
- Niveau 2 : Résoudre le problème réel (Multi-objectifs et Contraint) à l'aide d'algorithmes méta-heuristiques (Algorithmes Génétiques).
- Niveau 3 : Fournir un outil d'aide à la décision interactif (Dashboard Streamlit) permettant au gérant de visualiser les compromis (Trade-offs) en temps réel.

2. Formalisation mathématique

Nous considérons un univers d'investissement composé de N actifs risqués (ici $N = 190$, issus du S&P 500).

2.1 Variables de Décision

Le portefeuille est défini par un vecteur de poids $w \in R^N$:

$$w = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$$

Où w_i représente la fraction du capital investie dans l'actif i.

Les paramètres de marché sont estimés sur la base des données historiques (2015-2024) :

- $\mu \in R^N$: Vecteur des rendements espérés (moyenne arithmétique annualisée).
- $\Sigma \in R^{N \times N}$: Matrice de variance-covariance des rendements annualisée.

2.2 Fonctions objectifs

Dans le Niveau 2, nous cherchons à minimiser simultanément trois fonctions objectifs distinctes :

<u>Objectif 1</u> : Maximiser le Rendement Espéré (f_1)Mathématiquement, cela revient à minimiser l'opposé du rendement :

$$\min f_1(w) = -w^T \mu = -\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i$$

<u>Objectif 2</u> : Minimiser le Risque de Marché (f_2)Le risque est mesuré par la variance du portefeuille (volatilité au carré) :

$$\min f_2(w) = w^T \Sigma w = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

<u>Objectif 3</u> : Minimiser les Coûts de Transaction (f_3) Les coûts sont modélisés par le "Turnover" (rotation du portefeuille) nécessaire pour passer d'une allocation actuelle w_{prev} à une nouvelle allocation w. Soit c_{prop} le coût proportionnel (fixé à 0.5% soit 0.005) :

$$\min f_3(w) = \sum_{i=1}^{N} c_{prop} \left| w_i - w_{prev,i} \right|$$

2.3 Espace des contraintes

L'optimisation est soumise à deux types de contraintes :

1. Contraintes Structurelles (C_{Base})Nous imposons une contrainte de budget (investissement total = 100%) et une contrainte de positivité (pas de vente à découvert, Long Only) :

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq w_i \leq 1 \quad \forall i$$

2. Contraintes Opérationnelles (C_{Op}) - Spécifique au Niveau 2Nous imposons une contrainte de cardinalité stricte K. Le portefeuille doit contenir exactement K lignes actives (avec un poids significatif > ϵ) :

$$\sum_{i=1}^{N} I(w_i > \epsilon) = K$$

Dans notre étude de cas, nous fixons $K = 10$. Cette contrainte rend le problème non-convexe et discontinu.

3. Méthodologie et algorithmes

3.1 Préparation des données

Les données ont été extraites via l'API yfinance. Nous avons sélectionné un univers de 190 actions représentatifs du marché américain (Tech, Santé, Conso, etc.). Le prétraitement a consisté en :

1. Calcul des rendements journaliers logarithmiques.
2. Nettoyage des valeurs manquantes (Drop NA).
3. Annualisation des statistiques : Facteur multiplicatif de 252 (jours de bourse).

3.2 Niveau 1 : Résolution Convexe (SLSQP)

Pour le premier niveau (Markowitz pur), le problème est quadratique et convexe. Nous avons utilisé le **solveur SLSQP (Sequential Least Squares Programming)** disponible dans la librairie scipy.

- Méthode : Nous avons fixé une grille de 200 rendements cibles (R_{target}) allant du minimum au maximum possible. Pour chaque cible, nous avons minimisé la variance sous la contrainte $w^T\mu = R_{target}$.
- Résultat : Cela permet de tracer le front de Pareto continue.

3.3 Niveau 2 : Résolution Évolutionnaire (NSGA-II)

L'introduction de la cardinalité (C_{Op}) rend l'usage de SLSQP impossible (le gradient n'est pas défini pour des variables discrètes). Nous avons donc opté pour une approche méta-heuristique : NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II), implémenté via la librairie pymoo.

Pourquoi NSGA-II ?

NSGA-II est un algorithme génétique de référence pour l'optimisation multi-objectifs. Il fonctionne par :

- Population : Maintien d'une population de 100 portefeuilles candidats.
- Classement de Pareto : Les solutions sont classées selon qu'elles sont "dominées" ou non (Front 1, Front 2, etc.).
- Distance de Crowding : Pour maintenir la diversité, l'algo favorise les solutions isolées.

Gestion de la Contrainte de Cardinalité (Méthode de Réparation)

Les algorithmes génétiques "purs" peinent à respecter des contraintes d'égalité strictes (comme $K = 10$ exactement). Nous avons implémenté une stratégie de Réparation (Repair Strategy) au sein de la classe PortfolioProblem :

1. L'algorithme génère un vecteur w continu.
2. Avant l'évaluation, nous identifions les indices des K plus grandes valeurs.
3. Nous forçons toutes les autres valeurs à 0.
4. Nous re-normalisons le vecteur pour que la somme soit égale à 1.

Cette approche garantit que 100% des solutions évaluées respectent strictement la contrainte $K = 10$.

4. ANALYSE DES RÉSULTATS

4.1 Analyse du Portefeuille Optimal (Niveau 1)

L'optimisation sans contrainte de cardinalité nous a fourni le portefeuille maximisant le Ratio de Sharpe (Rendement / Risque).

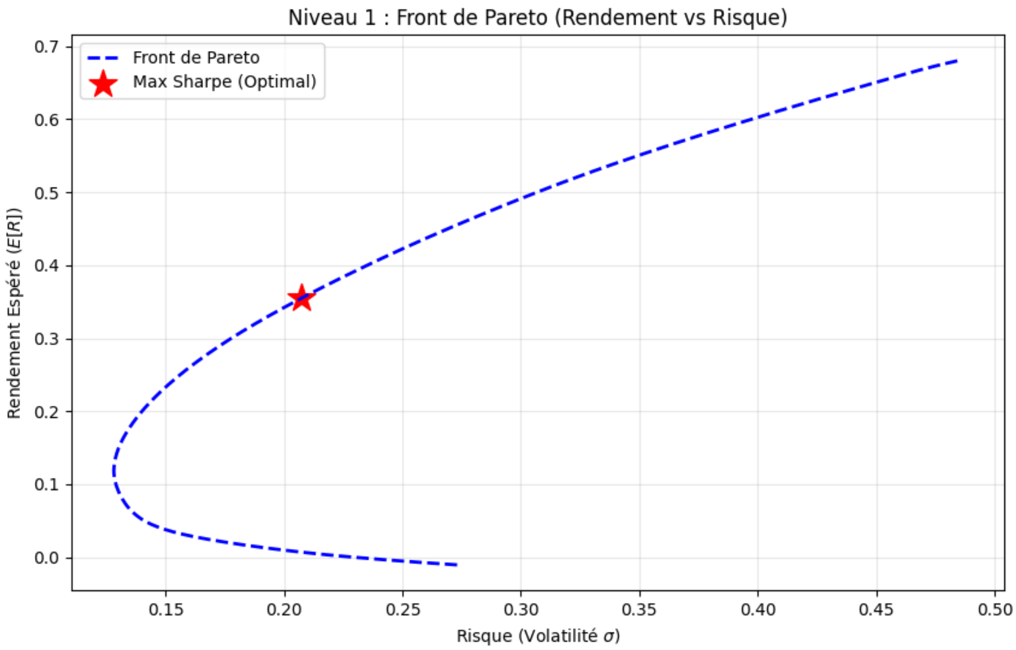


Figure 1 : Front de Pareto obtenue par SLSQP. L'étoile rouge marque le portefeuille Max Sharpe.

Analyse de la Composition : Nous observons une forte concentration du portefeuille optimal sur un nombre restreint d'actifs, malgré l'absence de contrainte explicite.

- Eli Lilly (LLY - 24.8%) : Le secteur pharmaceutique (GLP-1) offre une performance récente exceptionnelle.
- Nvidia (NVDA - 20.1%) : Le leader des puces IA présente un couple rendement/risque très favorable sur la période 2015-2024.
- Les autres actifs (Costco, Tesla) servent de diversification pour réduire la volatilité globale.

Cette concentration naturelle (45% sur 2 titres) souligne le risque d'une approche purement mathématique basée sur le passé ("In-Sample Bias"). Si la tendance IA s'inverse, ce portefeuille subira un drawdown massif.

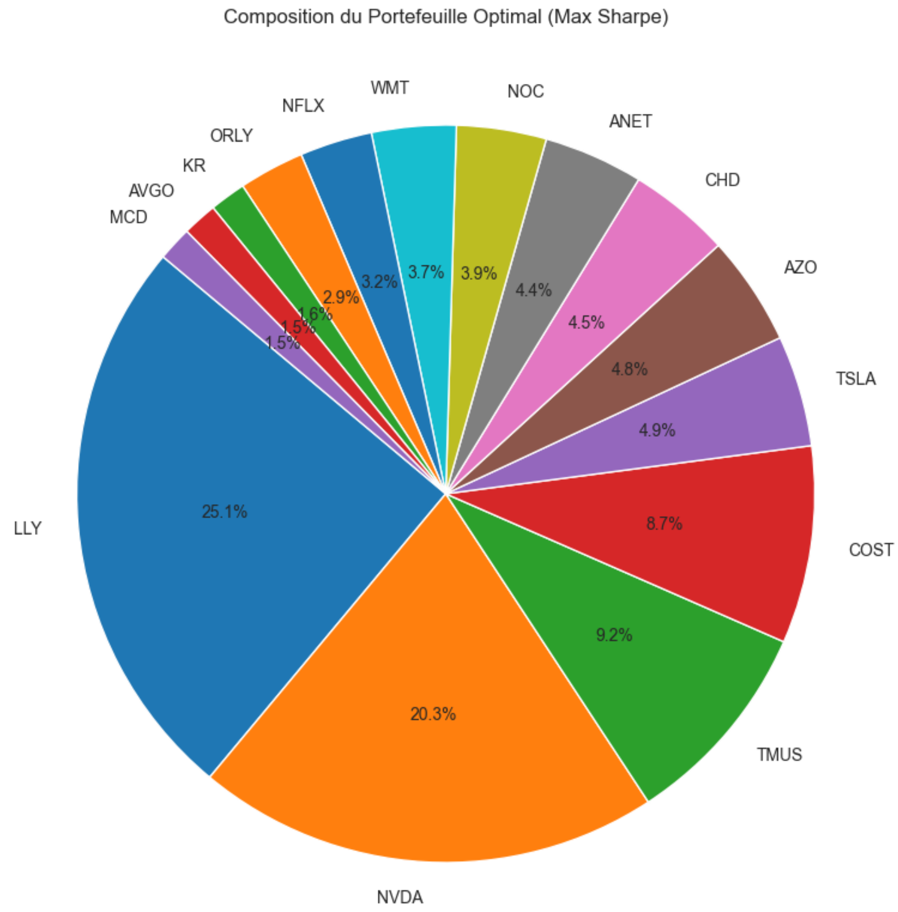
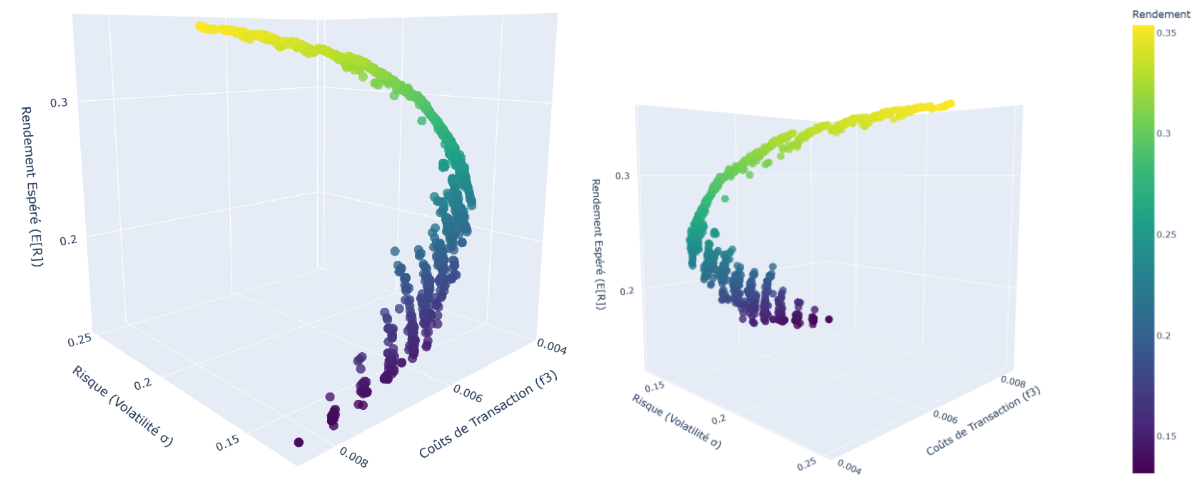


Figure 2 : Allocation par action du portefeuille optimal.

4.2 Analyse du Front de Pareto 3D (Niveau 2)

Le passage au Niveau 2 introduit les Coûts de Transaction. Nous avons simulé un scénario de réallocation où l'investisseur détient initialement un portefeuille diversifié équipondéré ($1/N$).

<u>Observation du Front 3D</u> : L'algorithme NSGA-II a généré un nuage de solutions non-dominées visualisables selon 3 axes : Risque (X), Coûts (Y), Rendement (Z).



Figures 3 & 4 : Front de Pareto Tridimensionnel. La couleur indique le niveau de rendement.

Interprétation Économique : On observe clairement le compromis (Trade-off) triangulaire :

1. Les portefeuilles à "Faible Coût" (proches de l'origine de l'axe Y) ressemblent au portefeuille initial ($1/N$). Ils sont peu performants mais économiques à mettre en place.
2. Les portefeuilles à "Haut Rendement" (en haut de l'axe Z) nécessitent une rotation totale du portefeuille (Turnover élevé) pour se concentrer sur les "Gagnants" (Nvidia, LLY), engendrant des coûts maximaux.
3. La zone intermédiaire représente les compromis intelligents : vendre uniquement les actifs les moins performants pour acheter les leaders, sans tout bouleverser.

4.3 Robustesse et Comparaison Méthodologique

Pour valider la pertinence de l'algorithme génétique NSGA-II, nous l'avons comparé à une méthode de **Recherche Aléatoire (Random Search)** ayant le même budget de calcul (20 000 évaluations).

- <u>Résultat</u> : Le front de Pareto généré par NSGA-II domine stochastiquement celui de la recherche aléatoire.
- <u>Indicateur</u> : Pour un niveau de risque de 20%, NSGA-II trouve des portefeuilles offrant ~30% de rendement, contre ~15-20% pour le meilleur portefeuille aléatoire.

- Cela confirme que l'espace des solutions à 190 dimensions est trop vaste pour être exploré au hasard, et nécessite une heuristique dirigée comme les algorithmes génétiques.

5. Conclusion

Ce projet a permis de démontrer les limites de l'optimisation classique et la puissance des méthodes modernes.

- Markowitz est insuffisant : Sans contraintes, le modèle produit des portefeuilles hyper-concentrés sur les gagnants d'hier, exposant l'investisseur à un risque spécifique massif.
- Le coût de la réalité : L'ajout de la contrainte de cardinalité ($K = 10$) dégrade mathématiquement le front de Pareto (on a moins de choix), mais améliore la faisabilité opérationnelle du portefeuille.
- L'apport du Multi-Objectif : Visualiser les Coûts comme une 3ème dimension permet au gérant de prendre une décision éclairée ("Est-ce que ce rendement supplémentaire vaut vraiment 0.5% de frais en plus ?").