Produits non-conservatifs

Système d’équations hyperboliques

https://github.com/GaetanDesrues/Produits-Non-Conservatifs

Equations d'Euler en description Lagrangienne

Forme conservative

$$\begin{aligned} \nu_t - u_m &= 0 \\ u_t + p_m &= 0 \\ e_t + (pu)_m &= 0 \end{aligned}$$

$$\partial_t W + \partial_m F(W) = 0$$

Forme non-conservative

$$\begin{aligned} \nu_t - u_m &= 0 \\ u_t + p_m &= 0 \\ \varepsilon_t + p u_m &= 0 \end{aligned}$$

$$\partial_t W + A(W) \partial_m W = 0$$

Système non-conservatif : solutions faibles

Soit le système strictement hyperbolique non-conservatif suivant :

$$\partial_t W + A(W)\partial_x W = 0$$

La principale difficulté est qu'il n'y a pas de définition unique d'une solution faible.

Le produit $A(W)W_x$ n'est pas défini au sens des distributions aux discontinuités.

Conservatif : dépend des états gauche et droite
Non-conservatif : dépend des états G/D mais aussi du chemin qui les relie

Relier les états : le chemin

Dal Maso-LeFloch-Murat 1995 : Un chemin est une fonction ϕ lipschitzienne
$\phi : [0,1] \times \Omega \times \Omega \mapsto \Omega \subset \mathbb{R}^N$ telle que :

$$\phi(0; W_L, W_R) = W_L \quad \text{et} \quad \phi(1; W_L, W_R) = W_R \qquad \forall W_L, W_R \in \Omega$$

Le chemin le plus simple est linéaire :

$$\phi(s; W_L, W_R) = W_L + s(W_R - W_L)$$

A une discontinuité, la condition suivante doit être satisfaite :

$$\sigma\left(U_R - U_L\right) = \int_{U_L}^{U_R} A(U)dU = \int_0^1 A\left(\phi\left(s; U_L, U_R\right)\right) \frac{\partial \phi\left(s; U_L, U_R\right)}{\partial s} ds$$

Méthodes path-conservative

Pares (2006) définit un schéma semi discret path-conservative de la forme

$$\frac{d}{dt}U_j + \frac{1}{\Delta x}\left(D^-_{j+1/2}\left(U_j, U_{j+1}\right) + D^+_{j-1/2}\left(U_{j-1}, U_j\right)\right) = 0$$

Avec $D^{\pm}(W, \ldots, W) = 0 \qquad \forall W \in \Omega$ et

$$\underbrace{D^-_{j+1/2}\left(U_j, U_{j+1}\right)}_{I_j} + \underbrace{D^+_{j+1/2}\left(U_j, U_{j+1}\right)}_{I_{j+1}} = \int_0^1 A\left(\phi\left(s; U_j, U_{j+1}\right)\right)\frac{\partial \phi\left(s; U_j, U_{j+1}\right)}{\partial s}ds$$

Flux utilisés

Flux de Rusanov : $$\mathscr{F}_{j+1/2} = \frac{F(U_j) + F(U_{j+1})}{2} - \frac{a\left(U_j, U_{j+1}\right)}{2}\left(U_{j+1} - U_j\right)$$

Schéma de Pares :

$$D^{\pm}_{j+1/2}\left(U_j, U_{j+1}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 A\left(\phi\left(s, U_j, U_{j+1}\right)\right)\frac{\partial\phi\left(s, U_j, U_{j+1}\right)}{\partial s}ds \pm \frac{a\left(U_j, U_{j+1}\right)}{2}\left(U_{j+1} - U_j\right)$$

Où $a(U_j, U_{j+1})$ représente la vitesse maximale de propagation de la discontinuité entre I_j et I_{j+1}.

Valeurs propres du système d'Euler : 0 et λ± : $$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\nu}}$$

Ordre supérieur

$$U_j \to \frac{U_j + U_{j+1}}{2}$$

Flux de Rusanov :

$$\mathscr{F}_{j+1/2} = \frac{F(U_j) + 2F(U_{j+1}) + F(U_{j+2})}{4} - \frac{a\left(U_j, U_{j+1}\right)}{4}\left(U_{j+2} - U_j\right)$$

Chemin à l'ordre 2 :

$$\phi\left(s; U_j, U_{j+1}\right) \to \phi\left(s; \frac{U_j + U_{j+1}}{2}, \frac{U_{j+1} + U_{j+2}}{2}\right)$$

Schéma path-conservative

Ordre 1

$$D^{+,-}_{j+1/2} = \begin{pmatrix} -\Delta(u) \\ \Delta(p) \\ \bar{p}\Delta(u) \end{pmatrix}$$

$$\Delta(f) = f_{j+1} - f_j$$

Ordre 2

$$D^{+,-}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta_2(u) \\ \Delta_2(p) \\ \bar{p}\Delta_2(u) \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(f) = f_{j+2} - f_j$$

Simulation numérique

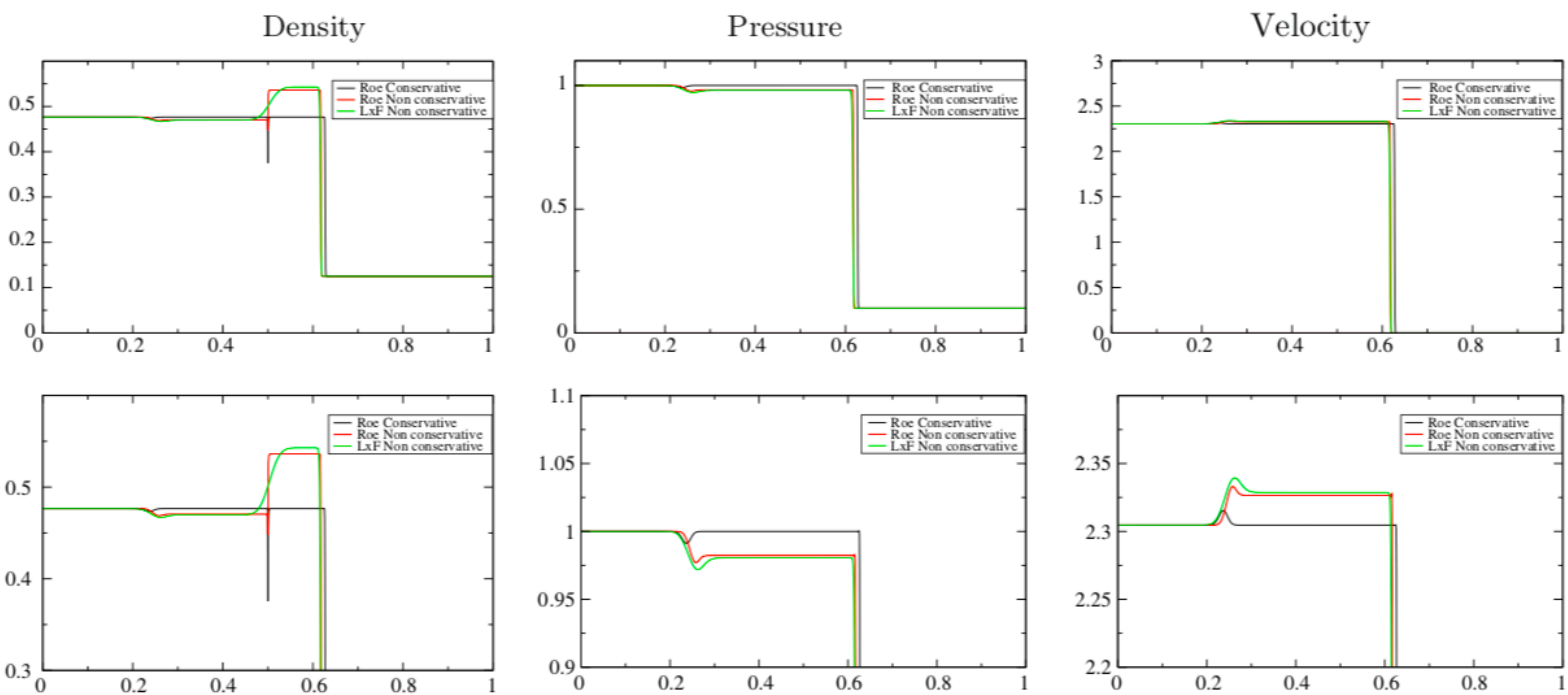
Maillage 1D avec 1500 mailles entre 0 et 1

Pas de temps : 10^{-4} ,   CFL = 0.5

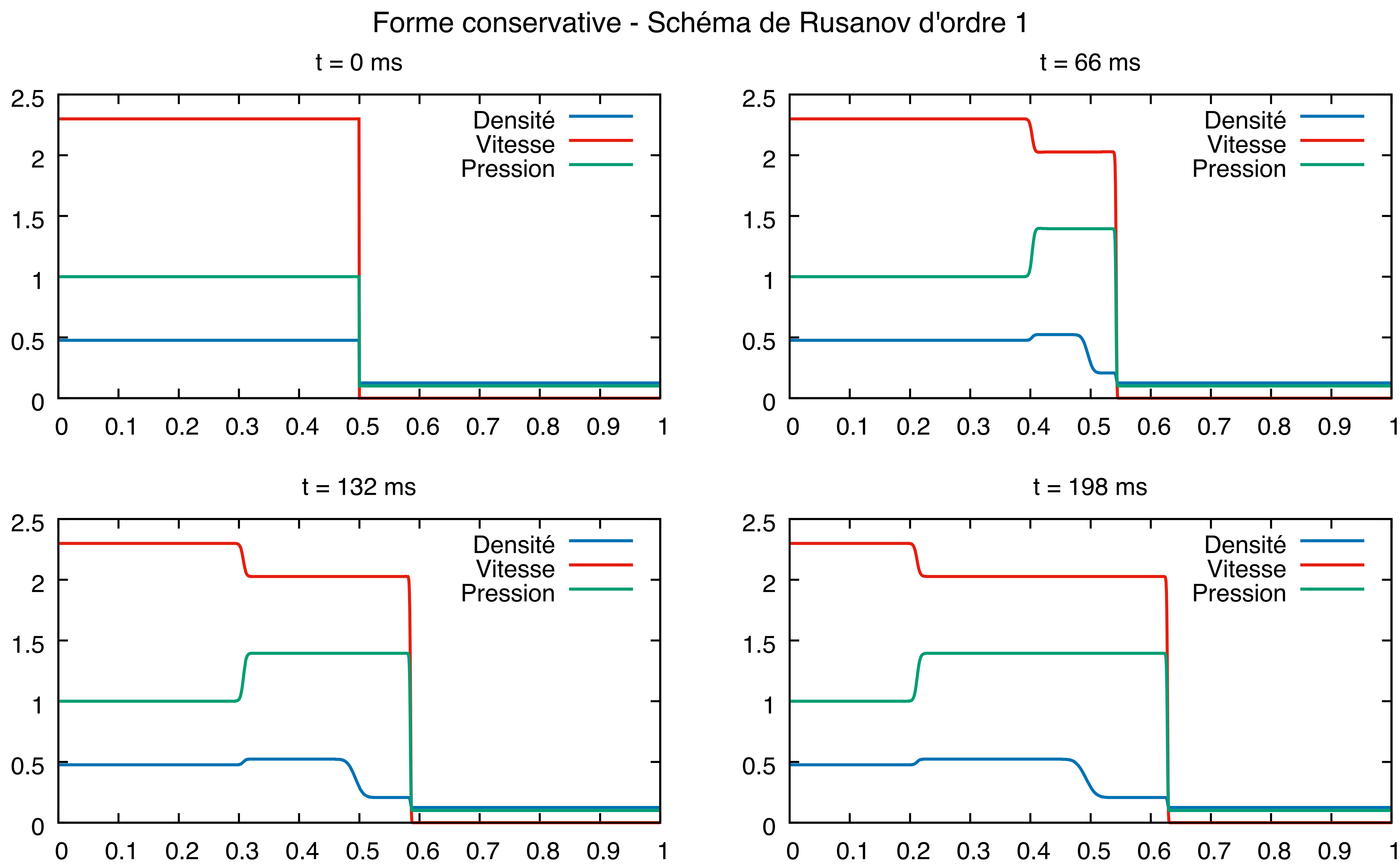
Schémas de Rusanov puis path-conservative de Pares

Ordre 2 avec comme limiteurs de pente :
- Minmod
- Von Leer
- Superbee

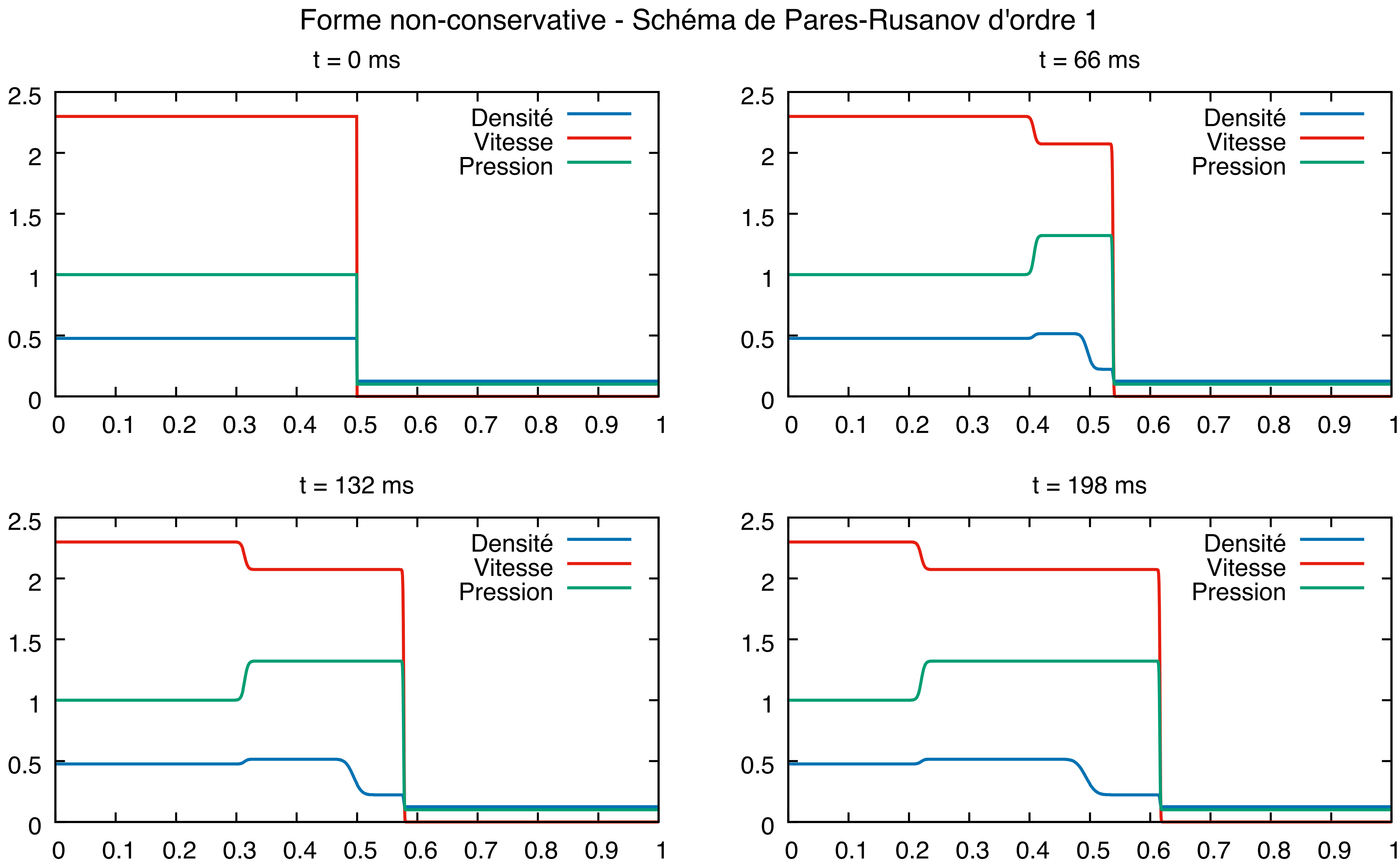
Résultats numériques

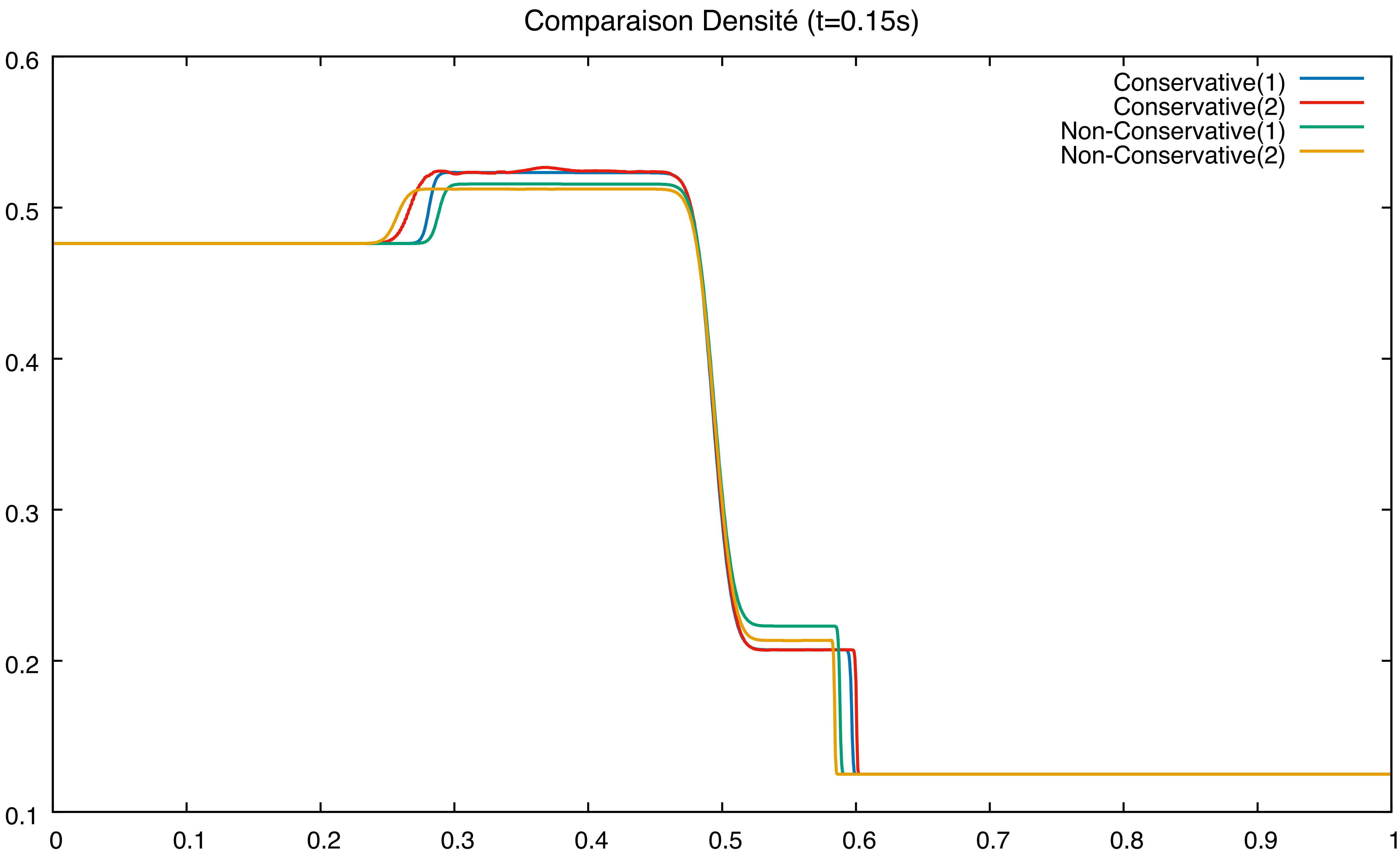


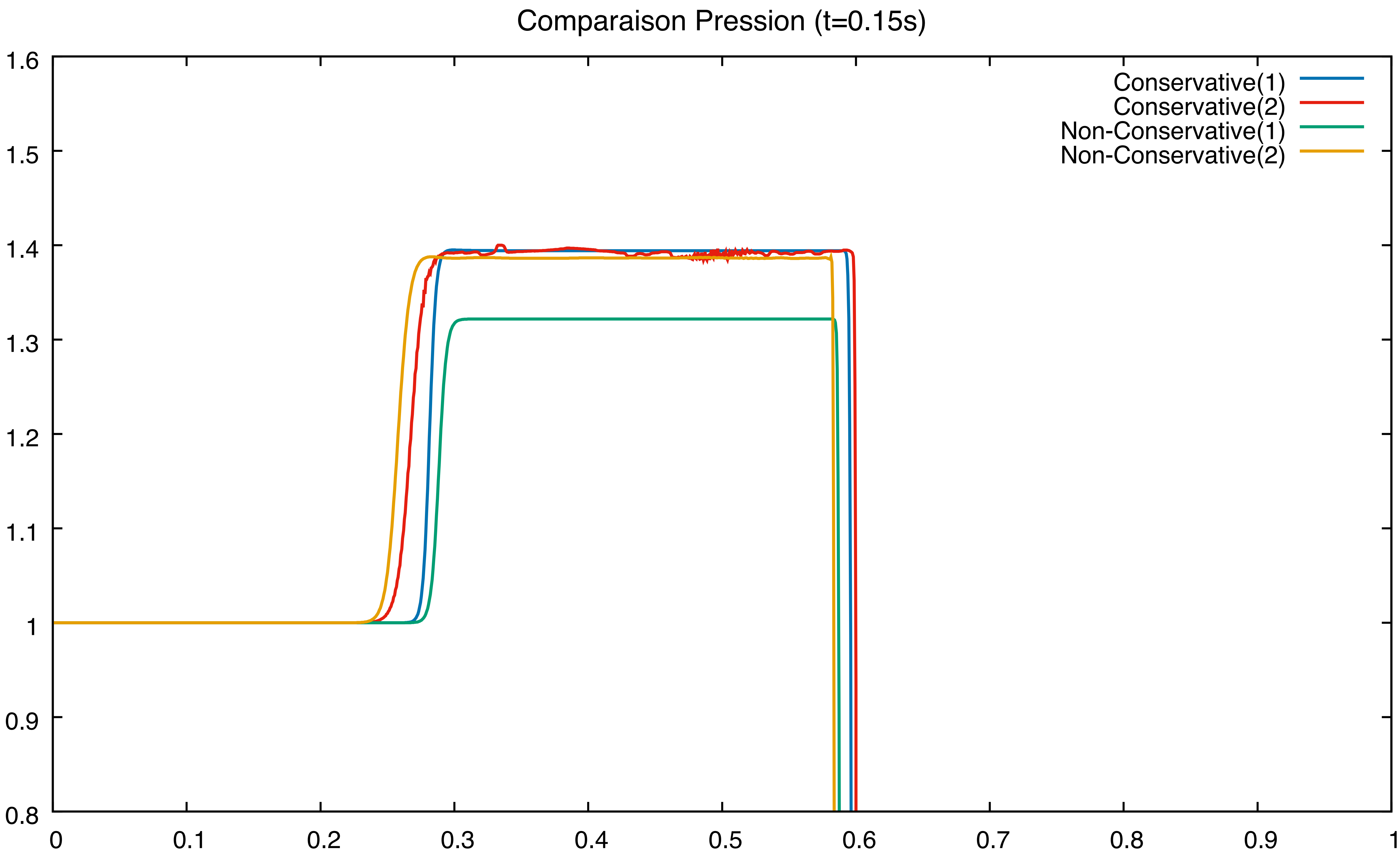
Résultats numériques

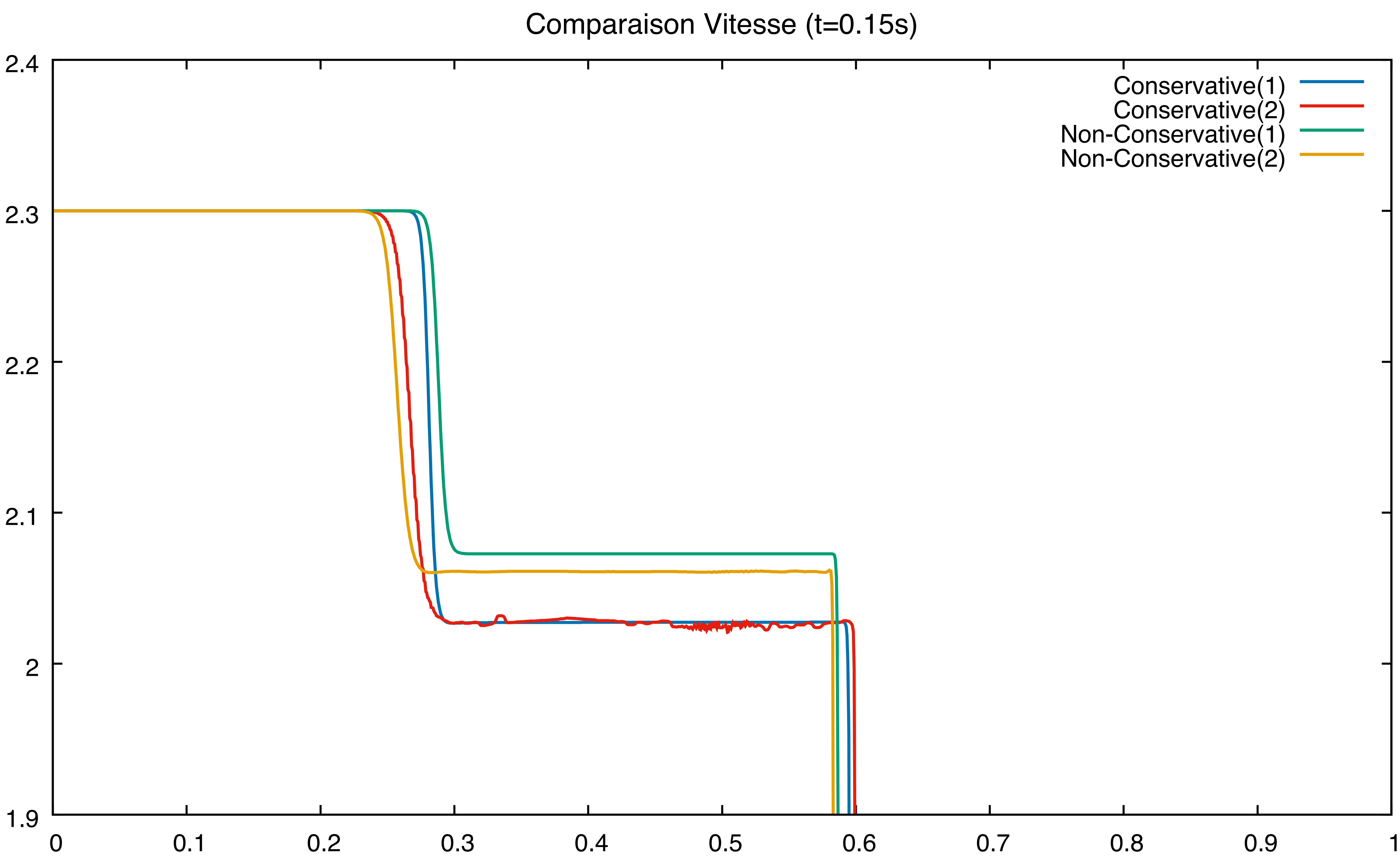


Résultats numériques

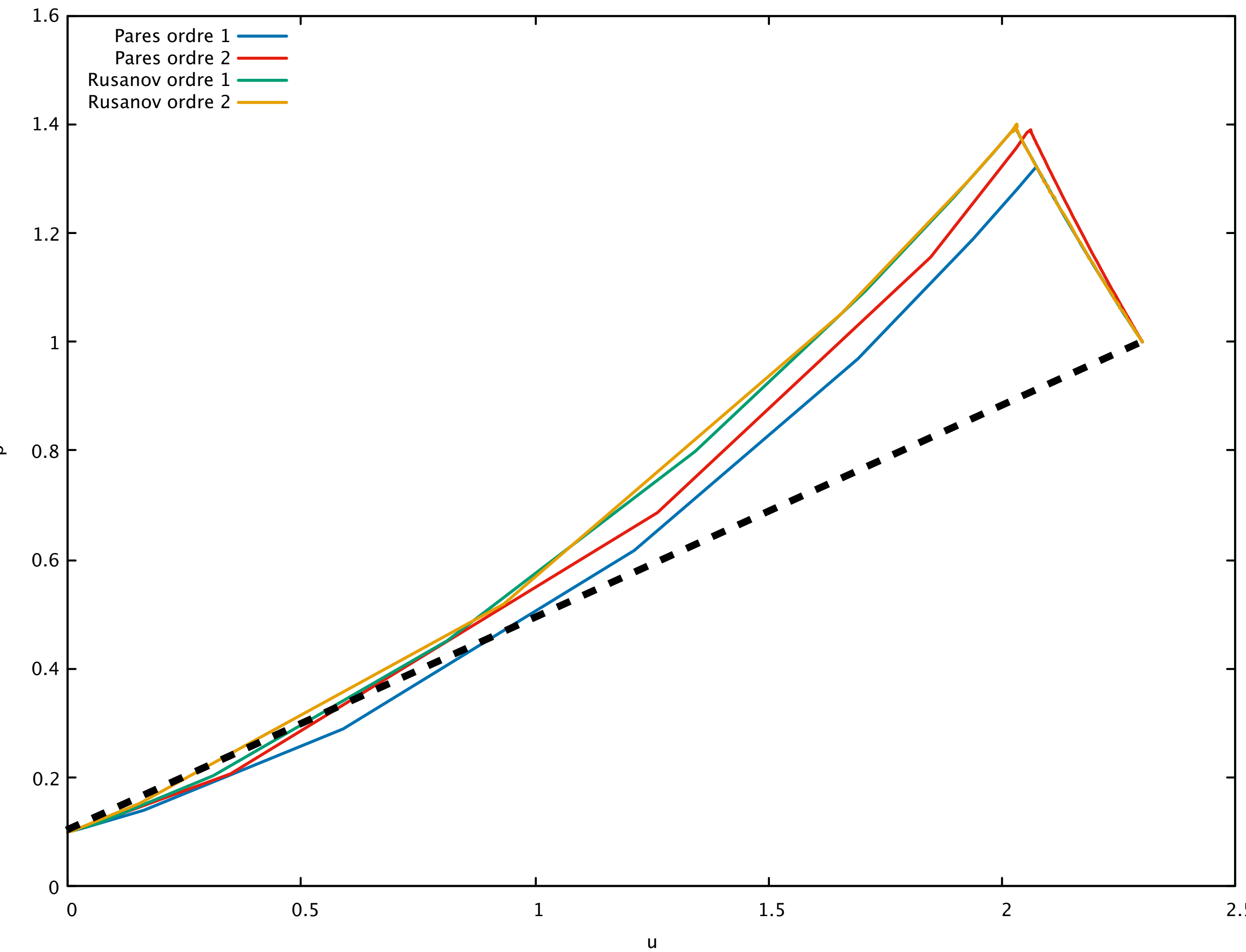


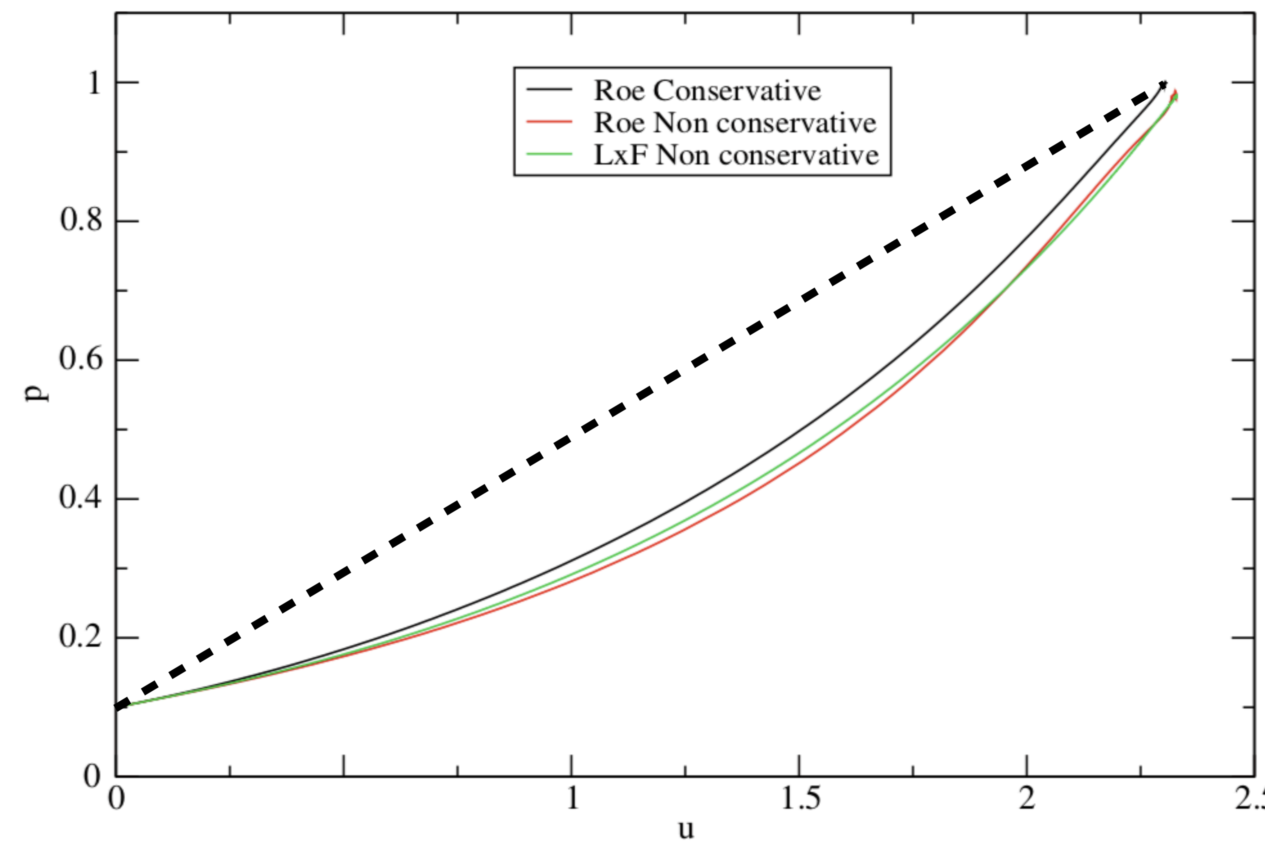

Comparaison Densité (t=0.15s)
Conservative(1)
Conservative(2)
Non-Conservative(1)
Non-Conservative(2)
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Comparaison Pression (t=0.15s)
Conservative(1)
Conservative(2)
Non-Conservative(1)
Non-Conservative(2)
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Comparaison Vitesse (t=0.15s)
Conservative(1)
Conservative(2)
Non-Conservative(1)
Non-Conservative(2)
2.4
2.3
2.2
2.1
2
1.9
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Comparaison avec le papier





Abgrall et Karni (2010)

Conclusion

Même dans le cas des vrais conditions de choc, le schéma path-conservative ne retrouve pas la solution exacte.

Une difficulté reste de trouver le choix de chemin correct. Même quand celui-ci est trouvé, le schéma ne converge en général pas vers ce chemin.

Le fait qu'un schéma path-conservative n'arrive pas à retrouver la solution d'une reformulation non-conservative d'un système conservatif et un schéma numérique basé sur le choix du chemin exact introduit un erreur appelée mesure d'erreur de convergence.
C'est une difficulté des schémas avec un terme de viscosité différent de celui physique.

Forme conservative

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \qquad\qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^N,$$

$$\left\langle \left[F\left(W(\,.\,,t)\right)_x\right], \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} F\left(W(x,t)\right)_x \phi(x)dx + \sum_l \left(F(W_l^+) - F(W_l^-)\right)\phi\left(x_l(t)\right)$$

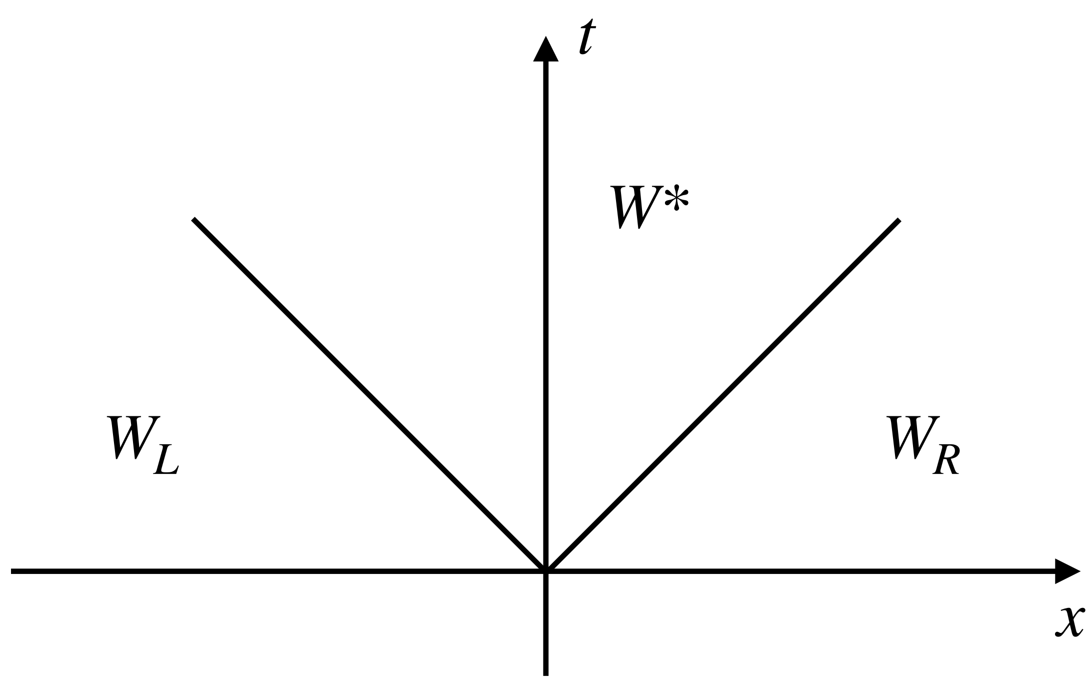
Forme non-conservative

$$\partial_t W + A(W)\partial_x W = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \qquad\qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^N,\ \psi \text{ un chemin}$$

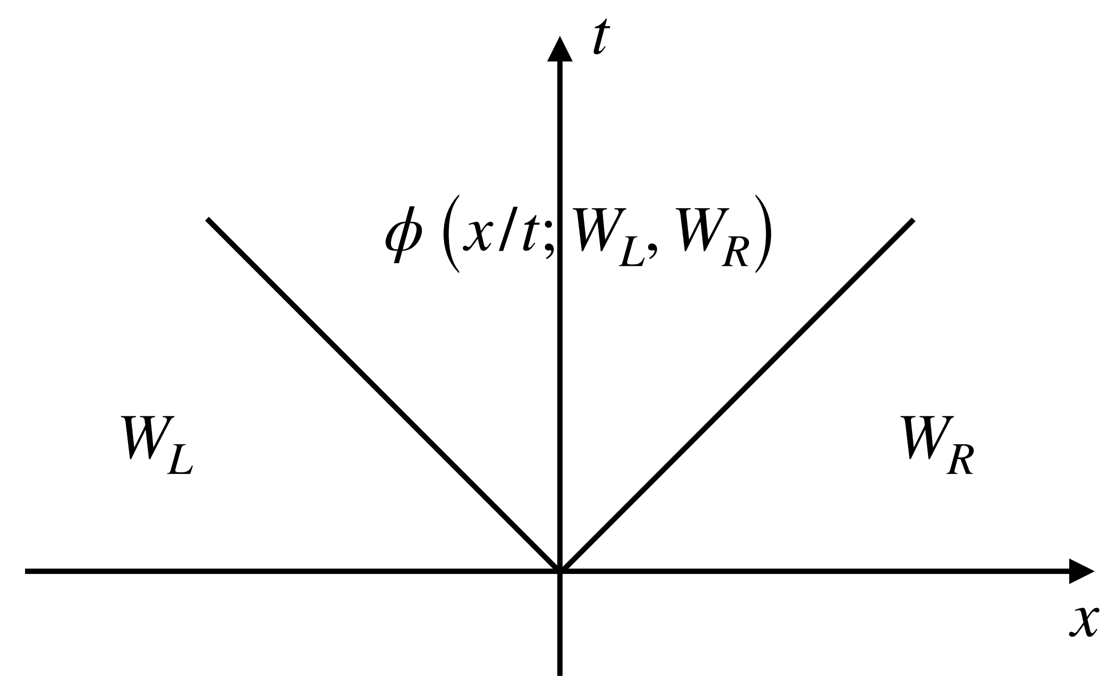
$$\left\langle \left[A\left(W(\,.\,,t)\right) W_x(\,.\,,t)\right]_\psi, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} A\left(W(x,t)\right) W_x(x,t)\phi(x)dx + \sum_l \left(\int_0^1 A\left(\psi\left(s; W_l^-, W_l^+\right)\right) \frac{\partial \psi}{\partial s}\left(s; W_l^-, W_l^+\right) ds \right) \phi\left(x_l(t)\right)$$

Relations entre les méthodes

Rusanov :



Pares :



X