



Tuteurs : Yves COUDIÈRE

---

# PROBLÈME DE STOKES

---

31 janvier 2019

*Gaëtan DESRUES*  
*Steven LAMPE*

<https://github.com/GaetanDesrues/Stokes>

Bordeaux INP - ENSEIRB-MATMECA  
Département Mathématiques et Mécanique

# 1 Introduction

## 1.1 Equations de Navier-Stokes

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  ou  $3$ ) un ouvert borné représentant un domaine de l'espace. Sur  $\Omega$ , le système de Navier-Stokes suivant décrit l'écoulement permanent d'un fluide incompressible où les inconnues sont la vitesse  $u = u(x, t)$  et la pression  $p = p(x, t)$  du fluide au point  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$  et à l'instant  $t$ .

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla) u) - \nu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

La densité  $\rho$  du fluide est choisie constante (hypothèse de fluide incompressible) et  $\nu > 0$  désigne la viscosité dynamique du fluide. Enfin,  $f = (f_1, \dots, f_N)$  représente une densité massique de forces extérieures s'exerçant sur le domaine de fluide considéré.

Les opérateurs utilisés dans les équations de Stokes (1) sont les suivants :

$$\begin{aligned} \nabla &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right), \quad (u \cdot \nabla) u = \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ \Delta u &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Afin de compléter le problème (1), on ajoute la condition aux limites de Dirichlet sur  $\partial\Omega$  :

$$u|_{\partial\Omega} = g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$$

et la condition initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

où  $u_0$  est une fonction donnée.

## 1.2 Le problème de Stokes

Les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équation de Stokes ou aux équations d'Euler selon que le nombre de Reynolds soit petit ou grand. Pour  $Re \ll 1$ , les effets dus à la viscosité deviennent prépondérants sur les forces inertielles.

On considère le problème de Stokes pour un écoulement à faible nombre de Reynolds, permanent et sous les hypothèses précédentes :

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

# 2 Sujet

1. *Etablir la formulation variationnelle du système de Stokes depuis sa formulation forte. Etudier l'équivalence entre les deux formulations. Expliciter les espaces de fonction naturels pour l'étude de ce système, on les notera  $V$  et  $Q$ .*

Considérons le problème de Stokes au sens des distributions et soit  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des distributions sur  $\Omega$ . On introduit les fonctions  $v$  et  $q$  définies sur l'espace des fonctions tests  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Soit  $H^1(\Omega)$  un espace de Sobolev et  $H_0^1(\Omega)^N = \{v \in H^1(\Omega)^N / v|_{\partial\Omega} = 0\}$ .

On intègre (2) sur le compact  $\Omega$  et on multiplie par nos fonctions tests :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (-\nu \Delta u + \nabla p) v &= \int_{\Omega} f v \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) q &= 0 \end{cases} \quad (3)$$

Par intégration par parties,

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} [-\nu \nabla u \cdot v]_{\partial \Omega} + \int_{\Omega} \nu \nabla u : \nabla v + [pv]_{\partial \Omega} - \int_{\Omega} p \nabla v &= \int_{\Omega} f v \\ [uq]_{\partial \Omega} - \int_{\Omega} q \nabla u &= 0 \end{cases} \quad (4)$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  étant définies sur  $H_0^1(\Omega)^N$ , elles sont nulles sur le bord  $\partial \Omega$ . Le système se réduit donc à

$$\begin{cases} \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\Omega} p \nabla v &= \int_{\Omega} f v \\ \int_{\Omega} q \nabla u &= 0 \end{cases} \quad (5)$$

Soit  $V = H_0^1(\Omega)^N$  et  $Q = \mathcal{L}_0^2(\Omega)$ . On introduit les formes linéaires  $a$  et  $b$  définies par :

$$\begin{aligned} a : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ a(u, v) &= \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} b : V \times Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ b(u, q) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) q dx \end{aligned} \quad (7)$$

La formulation mixte variationnelle du problème de Stokes (5) est alors :

Trouver  $(u, q) \in V \times Q$  tel que :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) &= (f, v) \quad \forall v \in V \\ b(u, q) &= 0 \quad \forall q \in Q \end{cases}$$

*Remarque :* On pourrait utiliser la formulation contrainte avec  $V = \{u \in H_0^1(\Omega)^N / \operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega\}$ . La formulation contrainte variationnelle du problème de Stokes est alors :

Trouver  $u \in V$  tel que :  $a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$  mais trouver une base à divergence nulle est compliqué.

L'implication solution forte  $\Rightarrow$  solution faible est évidente par les calculs menés jusqu'ici. La réciproque est plus compliquée à montrer. Prenons la première équation au sens des distributions :

$$\langle -\nu \Delta u + \nabla p - f, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \quad (8)$$

On peut montrer que l'espace des distributions  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ .

Par densité, l'équation 8 reste vraie dans l'espace  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  :

$$\langle -\nu \Delta u + \nabla p - f, v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega), \mathcal{L}^2(\Omega)}$$

Ce qui suffit à prouver la réciproque. La difficulté vient dans la démonstration de la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ .

2. Décrire les éléments finis locaux  $P0$ ,  $P1$  et  $P2$ , vérifier qu'ils sont unisolvants, donner leurs fonctions de forme. Montrer comment ils permettent de construire des approximations conformes des espaces de fonctions du problème de Stokes.

**Théorème d'unicité d'un élément fini**

Soit

- (a) une partie compacte  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , connexe et d'intérieur non vide,
- (b) un ensemble fini  $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N$  de  $N$  points distincts de  $K$ ,
- (c) un espace vectoriel  $P$  de dimension finie et composé de fonctions définies sur  $K$  à valeurs réelles.

On dit que l'ensemble  $\Sigma$  est  $P$ -unisolvant si et seulement si, étant donné  $N$  scalaires réels quelconques  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , il existe une fonction  $p$  de l'espace  $P$  et une seule telle que :

$$p(a_j) = \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq N$$

- (a) Éléments finis  $P0$

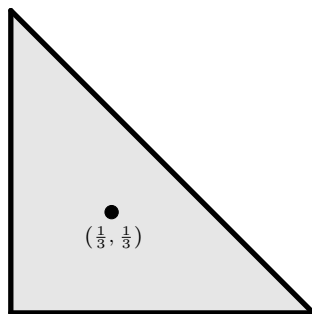


FIGURE 1 – Élément fini local  $P0$

Un polynôme de degré 0 (constant) qui s'annule en un point est nul partout. Cela suffit à montrer l'unicité de l'élément fini  $P0$ .

- (b) Éléments finis  $P1$

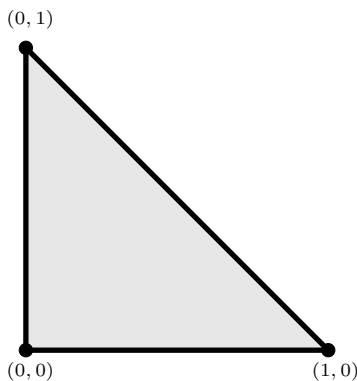


FIGURE 2 – Élément fini local  $P1$

Les fonctions de forme de l'élément fini P1 sont :

$$\begin{cases} p1 &= 1 - x - y \\ p2 &= x \\ p3 &= y \end{cases}$$

(c) Eléments finis P2

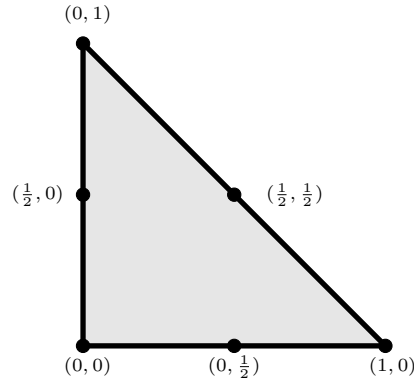


FIGURE 3 – Élément fini local P2

Les fonctions de forme de l'élément fini P2 sont :

$$\begin{cases} p1 &= 2x^2 - 3x + 2y^2 - 3y + 4xy + 1 & (0,0) \\ p2 &= -4x^2 + 4x - 4xy & (0.5,0) \\ p3 &= -4y^2 + 4y - 4xy & (0,0.5) \\ p4 &= 2x^2 - x & (1,0) \\ p5 &= 2y^2 - y & (0,1) \\ p6 &= 4xy & (0.5,0.5) \end{cases}$$

Pour montrer que l'espace ainsi construit est conforme, il suffit de montrer la continuité aux interface. Pour deux mailles voisines, il faudra que la solution et ses dérivées coïncident aux points d'interpolation.

3. *En supposant connus le théorème d'existence et unicité des problèmes mixtes abstraits, donner les éléments de preuves du caractère bien posé du problème de Stokes.*

**Théorème d'existence et unicité des problèmes mixtes abstraits**

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert. Soit  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  deux formes linéaires continues.

Avec  $f \in X'$ , le problème  $(\mathcal{P})$  est trouver  $(u, p) \in X \times Y$  tel que :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(u, p) &= \langle f, v \rangle_{X', X} & \forall v \in X \\ b(u, q) &= 0 & \forall q \in Y \end{cases}$$

Si  $a$  est coercive sur  $X$  c'est à dire :

$$\exists \alpha > 0 / a(u, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X$$

et si  $b$  satisfait la condition inf-sup :

$$\exists \beta > 0 / \inf_{p \in Y} \sup_{v \in X^*} \frac{b(v, p)}{\|p\|_Y \|v\|_X} \geq \beta$$

Alors le problème  $(\mathcal{P})$  admet une unique solution  $(u, p) \in X \times Y$ .

Pour montrer que le problème est bien posé, il faut montrer la coercivité de  $a$  sur  $X$  et que  $b$  vérifie la condition inf-sup.

On se donne  $a$  et  $b$  deux formes linéaires définies sur  $X \times X$  et  $X \times Y$  référence. Vérifions les hypothèses du théorème.

(a)  $a$  continue.

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \nu \int_{\Omega} \nabla u : v \nabla v dx \\ &\leq \nu \sum_{i=1}^N \|\nabla u_i\|_{\mathcal{L}(\Omega)} \|\nabla v_i\|_{\mathcal{L}(\Omega)} \quad \text{Inequation d'Hölder} \\ &\leq \nu \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)^N} \|\nabla v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)^N} \\ &\leq \nu \|u\|_{H^1(\Omega)^N} \|v\|_{H^1(\Omega)^N} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)^N \times H^1(\Omega)^N \end{aligned}$$

Donc la forme  $a$  est continue.

(b)  $a$  coercive. L'inégalité de Poincaré,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)^N} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)^N$$

entraîne la coercivité de  $a$  sur  $V$  :

$$a(u, u) = \nu \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)^N}^2 \geq \|u\|_{H^1(\Omega)^N}^2 \quad \forall u \in V$$

(c)  $b$  continue sur  $H_0^1(\Omega)^N \times \mathcal{L}^2(\Omega)$ .

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(v) q dx \leq \|v\|_{H^1(\Omega)^N} \|q\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)^N, \forall q \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$

La forme  $b$  est bien continue sur  $H_0^1(\Omega)^N \times \mathcal{L}^2(\Omega)$ .

(d)  $b$  respecte la condition inf-sup.

Pour montrer que  $b$  respecte la condition inf-sup, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme**

$\exists C > 0 / \forall p \in \mathcal{L}^2(\Omega), \exists v \in H^1(\Omega)^N$  tel que :

$$\operatorname{div}(v) = p \text{ et } \|v\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C \|p\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

De plus, si  $p$  vérifie  $\int_{\Omega} p dx = 0$  alors on peut prendre  $v \in H_0^1(\Omega)^N$ .

Soit  $q \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ , d'après le lemme, il existe  $w \in H_0^1(\Omega)^N$  tel que

$$q = -\operatorname{div}(w) \text{ et } \|w\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C \|q\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

Alors  $b(w, q) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div}(w)) q dx = \|q\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2$  et donc :

$$\frac{b(w, q)}{\|w\|_{H^1(\Omega)^N}} \geq \frac{1}{C} \frac{b(w, q)}{\|q\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}} = \frac{1}{C} \|q\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

On peut donc conclure que  $b$  vérifie la condition inf-sup avec  $\beta = \frac{1}{C} > 0$ . ( $C$  est la constante du Lemme)

On a donc montré que le problème  $(\mathcal{P})$  admet une **unique solution**  $(u, p) \in V \times Q$ .

*Remarque :* Ce problème peut être vu comme la minimisation suivante

$$\min_{v \in X} \max_{q \in Y} \frac{1}{2} a(v, v) + b(v, q) - (f, v)$$

où la pression joue le rôle du multiplicateur de Lagrange de la contrainte à divergence nulle.

4. *Expliciter la condition inf-sup discrète. Le système linéaire du problème discret a la forme par bloc*

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

*Expliquer pourquoi la condition inf-sup discrète est équivalente à  $\operatorname{Ker}(B^T) = \{0\}$ . Vérifier que le système linéaire est bien posé si et seulement si cette condition est vérifiée et la matrice  $A$  est définie positive. Expliquer pourquoi la propriété sur  $B$  ne découle pas de son analogue sur le problème continu. Expliquer les contre-exemples des éléments  $(P1, P0)$  et  $(P1, P1)$ .*

Soit  $X_h \subset [H_0^1(\Omega)]^2$  et  $Y_h \subset L_0^2(\Omega)$ , deux sous-espaces de dimension finie. La formulation mixte approchée s'écrit de façon abstraite :

Trouver  $u_h \in X_h, p_h \in Y_h$  tel que :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) &= (f_h, v_h) & \forall v_h \in X_h \\ b(u_h, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Y_h. \end{cases} \quad (10)$$

On suppose que les espaces  $X_h$  et  $Y_h$  sont tels que la forme  $b$  vérifie la condition 'inf-sup' discrète suivante sur  $X_h \times Y_h$  :

Il existe  $\beta^* > 0$  indépendant de  $h$  tel que  $\forall q_h \in Y_h, \exists v_h \in X_h, v_h \neq 0$  tel que :

$$b(v_h, q_h) \geq \beta^* \|v_h\|_{X_h} \|q_h\|_{Y_h} \quad (11)$$

On note  $B$  l'application linéaire associée à la forme  $b$  définie par (7) tel que :

$$b(v, q) = q^T B v \quad q \in Y_h, v \in X_h$$

Montrons que si  $b$  vérifie la condition inf-sup discrète, alors le noyau de la transposée de  $B$  doit être réduit au singleton nul.

Considérons  $q \in \text{Ker } B^T$  donc  $B^T q = 0$ .

$$\forall u \in X_h, b(u, q) = q^T B u = (q^T B u)^T = u^T B^T q = 0.$$

Or  $b$  vérifie la condition inf-sup donc

$$\exists v \neq 0, b(v, q) \geq \beta \|q\| \|v\| \Rightarrow \|q\| = 0$$

Alors  $q = 0$  et  $\text{Ker } B^T = \{0\}$ . La réciproque (par l'absurde) est admise.

Montrons à présent que le problème est bien posé. D'après le théorème des fonctions implicites, le problème est bien posé si et seulement si la condition inf-sup discrète est vérifiée et si  $A$  est définie positive.

— *Coercivité*

$$\begin{aligned} \forall v \in V_h, \forall u \in V_h, a(u, v) = 0 &\Rightarrow v = 0 \\ \Leftrightarrow \forall U \in V_h (U \neq 0), U^T A U = a(u_h, u_h) &> 0 \\ \Leftrightarrow A \text{ définie positive} \end{aligned}$$

— *Consition inf-sup discrète* Montrer que  $\text{Ker } B^T = \{0\}$

On peut remarquer que la condition  $\text{Ker } B^T = \{0\}$  est équivalent à  $B^T$  injective, ce qui assure l'unicité de la solution.

5. Décrire l'élément P1-b et vérifier ses propriétés. Expliquer pourquoi il permet de vérifier la condition inf-sup discrète (couplé avec l'élément P1).

Éléments P1-b/P1 Soient  $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K$  les coordonnées barycentriques par rapport à un triangle K. On note  $\mu^K$  la fonction bulle associée au triangle K. Elle est continue sur  $\bar{\Omega}$  et définie par :

$$\mu^K = \begin{cases} \lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K & \text{sur K} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

On a  $\mu^K \in P3$  et  $\mu^K = 0$  sur les bord  $\partial K$ . On considère alors le sous espace  $X_h$  de  $H_0^1(\Omega)^2$  défini par :

$$X_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega})^2, v_h(x) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^K \lambda_i^K(x) + \beta^K \mu^K(x) \text{ avec } \alpha_i^K, \beta^K \in \mathbb{R}^2, \forall x \in K \text{ et } v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (13)$$

Les fonctions de forme de l'élément fini P1 - bulle sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 &= 1 - x - y \\ \lambda_2 &= x \\ \lambda_3 &= y \\ \mu &= (1 - x - y)xy \end{cases}$$



Par construction les éléments P1-bulle sont basés sur les éléments P1 de Lagrange qui sont choisis de manière à ce que  $\Sigma$  soit unisolvant. *Condition 'inf-sup' discrète pour  $P_1 - \text{bulle}/P_1$ .*

Rappel : On doit montrer  $\exists \beta^* > 0$  tel que  $\forall q_h \in Y_h, \exists u_h \in X_h, u_h \neq 0$  tel que :

$$b(u_h, q_h) \geq \beta^* \|u_h\|_{H^1(\Omega)^2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (14)$$

On suppose que la triangularisation est régulière. Soit  $q_h \in Y_h$  fixé.  $Y_h \subset Y$  et que  $b$  vérifie la condition 'inf-sup' continue sur  $X \times Y, \exists u_h \in Y = H_0^1(\Omega)^2$  tel que :

$$b(u, q_h) \geq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)^2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (15)$$

avec  $\beta > 0$  indépendant de  $q_h$  (attention  $u$  est dépendant de  $q_h$ ). Pour établir (14), il faut montrer l'existence de  $u_h \in X_h$  tel que :

$$\begin{aligned} b(u_h, q_h) &= b(u, q_h), \\ \|u_h\|_{H^1(\Omega)^2} &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

Où  $C > 0$  est indépendant de  $q_h$  et  $h$ .

Remarque : Si les conditions (16) sont remplies alors  $\beta^* = \frac{\beta}{C} > 0$ .

De plus,  $Y_h \subset H^1(\Omega)$ , la première relation de (16) est équivalente à

$$\int_{\Omega} u_h \cdot \nabla q_h dx = \int_{\Omega} u \cdot \nabla q_h dx \quad (17)$$

Or  $\nabla q_h$  est constant sur chaque triangle. L'étude devient :

$$\begin{aligned} \int_K u_h dx &= \int_K u dx, \\ \|u_h\|_{H^1(\Omega)^2} &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Cherchons  $u_h \in X_h$  vérifiant (18). Toute fonction  $v_h \in X_h$  est déterminée de façon unique par ses valeurs aux sommets des triangles n'appartenant pas aux bords  $\partial\Omega$  et ses valeurs moyennes  $\int_K v_h dx$  sur les triangles  $K$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} v_h(x) &= \sum_{i=1}^3 v_h(a_i) \lambda_i(x) + \beta^K \mu^K(x), \forall x \in K, \\ \int_K v_h dx &= \sum_{i=1}^3 v_h(a_i) \int_K \lambda_i^K dx + \beta^K \int_K \mu^K dx. \end{aligned}$$

On prend  $u_h \in X_h$  tel que :

$$\begin{aligned} u_h(a_i) &= R_h u(a_i), \forall a_i \text{ sommets des triangles}, \\ \int_K u_h dx &= \int_K u dx \end{aligned} \quad (19)$$

Où  $R_h u \in X_h$  est l'opérateur de la propriété suivante :

**Propriété 1**

On suppose que la triangularisation est régulière et  $k \geq 1$ . Il existe un opérateur  $R_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), X_h)$  et une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  tels que :

$$\|v - R_h v\|_L^2(\Omega) + h \|\nabla(v - R_h v)\|_L^2(\Omega) \leq Ch \|v\|_{H^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On a besoin du projecteur  $R_h$  car  $u \in H_0^1(\Omega)^2$  n'est pas forcément continue et cela n'aurait pas de sens de parler de  $u(a_i)$ .

Trouvons  $u_h$  tel que :

$$\begin{aligned} u_{h|K} &= \sum_{i=1}^3 R_h u(a_i^K) \lambda_i^K + \beta^K \mu^K \\ \text{i.e., } u_{h|K} &= R_h u|_K + \beta^K \mu^K \end{aligned} \quad (20)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{H^1(\Omega)^2}^2 &= \sum_K \|u_h\|_{H^1(K)^2}^2 \\ &\leq \sum_K (\|R_h u\|_{H^1(K)^2}^2 + |\beta^K|^2 \|\mu^K\|_{H^1(K)^2}^2) \\ &\leq 2 \sum_K (\|R_h u\|_{H^1(K)^2}^2 + |\beta^K|^2 \|\mu^K\|_{H^1(K)^2}^2) \\ &\leq 2 \|R_h u\|_{H^1(K)^2}^2 + 2 \sum_K |\beta^K|^2 \|\mu^K\|_{H^1(K)^2}^2 \\ &\leq C \|u\|_{H^1(K)^2}^2 + 2 \sum_K |\beta^K|^2 \|\mu^K\|_{H^1(K)^2}^2, \text{ (d'après la propriété précédente)} \end{aligned} \quad (21)$$

Où  $C > 0$  est indépendant de  $u$  et de  $h$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \int_K u dx &= \int_K u_h dx = \int_K R_h u dx + \beta^K \int_K \mu^K dx, \\ \text{Alors, } \beta^K &= \frac{\int_K (u - R_h u) dx}{\int_K \mu^K dx}, \end{aligned} \quad (22)$$

Or,

$$\int_K \mu^K dx = \int_K \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K dx = 2 \frac{\text{Aire}(K) k_1! k_2! k_3!}{(2 + k_1 + k_2 + k_3)!} = \frac{\text{Aire}(K)}{M}, \text{ avec } k_1, k_2, k_3 \geq 0 \quad (23)$$

Alors par Cauchy-Schwarz on obtient,

$$|\beta^K| \leq M \frac{\|(u - R_h u)\|_{L^2(K)^2}}{\text{Aire}(K)^{1/2}}, \quad (24)$$

Or,  $\text{Aire}(K) \geq \frac{\pi \rho_K^2}{4}$  (l'aire d'un triangle est plus grande que celle du cercle inscrit) avec  $\rho_K = \sup\{\text{diamètre de } B, \text{ où } B \text{ boule de } K\}$

$$\frac{1}{\text{Aire}(K)^{1/2}} \leq C' \leq C'' \frac{1}{h} \quad (25)$$

car la triangularisation est supposée uniformément régulière. On obtient donc :

$$|\beta^K| \leq \frac{C}{h} \|(u - R_h u)\|_{L^2(K)^2}, \quad (26)$$

De même,

$$\begin{aligned} \|\mu^K\|_{H^1(K)^2} &\leq C(h_K + \frac{h_K}{\rho_K}) \\ &\leq C', \text{ indépendant de } K \text{ et } h \end{aligned} \quad (27)$$

On revient donc à l'équation (21) qui nous donne,

$$\|u_h\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)^2}^2 + \frac{C}{h^2} \| (u - R_h u) \|_{L^2(\Omega)^2}^2, \quad (28)$$

Donc grâce à la Propriété 1 ,

$$\|u_h\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \quad (29)$$

Ainsi l'élément  $P1 - bulle/P1$  vérifie la condition 'inf-sup' discrète.

6. *Expliquer brièvement les méthodes de la matrice d'Uzawa et de pénalisation pour résoudre le système linéaire associé au problème de Stokes. Si possible, faire le lien entre la notion de milieu quasi-incompressible et la méthode de pénalisation.*

On notera  $\dim X_h = N_x$  et  $\dim Y_h = N_y$ , avec  $X_h$  et  $Y_h$  les espaces d'approximation présentés précédemment. On a  $(v_h^i)_{i=1,\dots,N_x}$  et  $(q_h^i)_{i=1,\dots,N_y}$  bases de  $X_h$  et  $Y_h$  respectivement.

Tout vecteur  $u_h = \sum_{i=1}^{N_x} u_i v_h^i$  et tout  $p_h = \sum_{i=1}^{N_y} p_i q_h^i$ . On définit alors  $U = (u_1, \dots, u_{N_x})$  et  $P = (p_1, \dots, p_{N_y})$ . On rappelle le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

On utilisera le fait que la forme bilinéaire  $a$  est coercive sur  $X$  avec  $\alpha$  la constante de coercivité. De plus,  $a$  est continue avec  $c$  la constante telle que  $\exists c > 0, \forall U \in X, \|a(U, U)\| \leq c \|U\|_X$ . De même,  $b$  remplit la condition inf-sup discrète sur les espaces d'approximation  $X_h \times Y_h$  avec  $\beta$  la constante lié à cette condition. On définit les normes :

$$\begin{cases} \forall U \in \mathbb{R}^{N_x}, & \|U\|_X = \|u_h\|_X \\ \forall P \in \mathbb{R}^{N_y}, & \|P\|_X = \|p_h\|_X \end{cases}$$

De même, on définit  $E$  une matrice carrée de taille  $N_x$  à coefficient réel, telle que  $(EP, Q)_{N_p} = (p_h, q_h)_M$ . La matrice  $E$  est symétrique définie positive.

On introduit la norme  $\|\cdot\|_*$  sur  $\mathbb{R}^{N_x}$  :

$$\forall U \in \mathbb{R}^{N_x}, \quad \|U\|_* = \sup_{V \in \mathbb{R}^{N_x}} \frac{(U, V)_{N_x}}{\|V\|_X} \quad (31)$$

Le système initial est trop coûteux pour être résolu de manière directe or la matrice du système (32) n'est pas définie ni positive mais elle est symétrique. On ne peut donc pas faire de méthodes itératives telles que Jacobi ou gradient conjugué.

On utilise alors une méthode de pénalisation. Pour cela on transforme notre système initiale (32) par ce nouveau système :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & \epsilon E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\epsilon \\ P_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Avec  $\epsilon > 0$  le coefficient de pénalisation tel que  $\epsilon \ll 1$ .

On élimine  $P_\epsilon$  dans la première équation. On obtient ainsi l'équation suivante :

$$(A + \frac{1}{\epsilon} B^T E^{-1} B) U_\epsilon = F \quad (33)$$

Ce système peut être résolu par une technique standard telle que le gradient conjugué car la matrice du système pénalisé est symétrique définie positive.

Il est important maintenant de montrer que la solution pénalisée se rapproche de la solution du système initial lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro. Pour cela on va chercher à majorer l'estimation de l'erreur :

$$\alpha\beta \|U - U_\epsilon\|_X + \alpha\beta^2 \|P - P_\epsilon\|_M \leq c\epsilon \|P\|_M \quad (34)$$

Preuve :

$$\begin{cases} A(U - U_\epsilon) + B^T(P - P_\epsilon) = 0 \\ -B(U - U_\epsilon) - \epsilon EP_\epsilon = 0 \end{cases}$$

On utilise le fait que la forme bilinéaire  $a$  est continue sur  $X_h \times X_h$ . Cela se traduit matriciellement par l'inégalité suivante :

$$\forall U \in \mathbb{R}^{N_x}, \quad \|AU\|_* \leq c \|U\|_X \quad (35)$$

De plus, la condition inf-sup sur  $b$  se traduit matriciellement par l'inégalité suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}^{N_y}, \quad \beta \|P\|_M \leq \|B^T P\|_* \quad (36)$$

On trouve alors une première inégalité à partir de (35) et (36) :

$$\|P - P_\epsilon\|_M \leq \frac{1}{\beta} \|B^T(P - P_\epsilon)\|_* = \frac{1}{\beta} \|B^T(P - P_\epsilon)\|_* \leq \frac{c}{\beta} \|U - U_\epsilon\|_X \quad (37)$$

On utilise maintenant la coercivité de  $a$  traduite matriciellement par :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall U \in \mathbb{R}^{N_x}, \quad (AU, U)_{N_x} \geq \alpha \|U\|_X^2 \quad (38)$$

Puis en multipliant la première équation par  $U - U_\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \alpha \|U - U_\epsilon\|_X^2 &\leq (A(U - U_\epsilon), U - U_\epsilon)_{N_x} = (B^T(P - P_\epsilon), U - U_\epsilon)_{N_x} \\ &= (P - P_\epsilon, B(U - U_\epsilon))_{N_p} = -\epsilon(P - P_\epsilon, EP_\epsilon)_{N_p} \\ &= -\epsilon(P_\epsilon - P, E(P_\epsilon - P))_{N_p} - \epsilon(P_\epsilon - P, EP)_{N_p} \\ &\leq \epsilon(P_\epsilon - P, EP)_{N_p} \leq \epsilon \|P_\epsilon - P\|_M \|P\|_M \end{aligned} \quad (39)$$

Ainsi, on additionne la première inégalité obtenue (37) et la dernière ligne de la seconde (39) pour obtenir l'estimation de l'erreur cherchée (34).

$$\alpha\beta \|U - U_\epsilon\|_X + \alpha\beta^2 \|P - P_\epsilon\|_M \leq c\epsilon \|P\|_M$$

Quand  $\epsilon$  tend vers zéro les solutions pénalisées tendent vers les solutions du système initial.

Remarque : Méthode d'Uzawa

La méthode d'Uzawa consiste à ramener le système linéaire (32) sous la forme d'un nouveau système d'équation :

$$\text{Trouver } u \in X_h \text{ et } p \in Y_h \left\{ \begin{array}{l} Au = F - B^T p \\ BA^{-1}B^T p = BA^{-1}F \end{array} \right.$$

La matrice  $A$  est symétrique définie positive ainsi  $u$  est obtenu à partir de  $p$  par la méthode du gradient conjugué. Sur l'équation suivante :

$$Bu = BA^{-1}(F - B^T p) \quad (40)$$

### 3 Analyse des résultats

#### 3.1 Premier cas test

Les résultats ci-après montrent les erreurs de résolution du problème de Stokes sur un triangle de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$ . Le cas test CT1 est utilisé :

$$u(x, y) = (x - y) \quad \text{et} \quad p(x, y) = x + y + C$$

avec  $f = (1 \ 1)$ .

Les éléments  $(P1,P0)$ ,  $(P1,P1)$ ,  $(P1b,P1)$  et  $(P2,P1)$  seront testés sur une suite de maillages de plus en plus fins. Pour chaque solveur, la vitesse et la pression seront calculés pour chaque type d'élément et comparés.

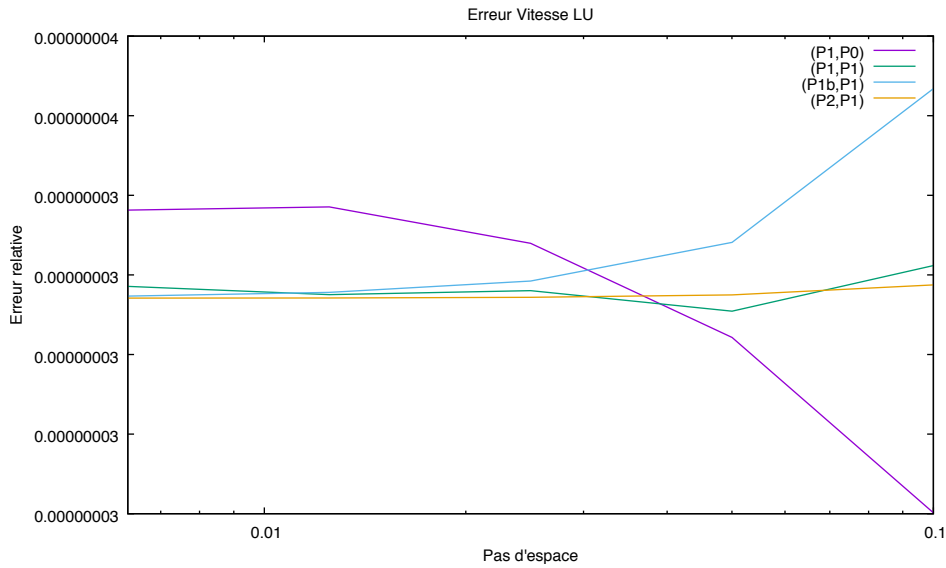


FIGURE 4 – Solvateur direct - Vitesse

Normalement quand on augmente le nombre de points d'interpolation des polynômes de Lagrange, on devrait obtenir une meilleure précision sur la solution. On devrait aussi s'attendre à voir la précision augmenter lorsqu'on diminue le nombre de mailles sur une arête.

Nos résultats pour les solveurs itératifs sont décevants, on ne retrouve pas les propriétés citées ci-dessus. Par exemple sur la figure (5) avec le solveur GMRES, les courbes semblent varier de façon incompréhensible. Pour le pas d'espace 0.05, l'erreur remonte avant de diminuer soudainement. De plus, les courbes pour tous les types d'interpolation semblent suivre le même motif.

Pour le gradient conjugué, l'erreur augmente quand le pas d'espace diminue, ce qui est également surprenant.

Finalement, le solveur direct (4) semble être le plus approprié. En effet, l'erreur converge et l'ordre des précisions d'interpolation est respecté : l'interpolation  $(P2,P1)$  semble être la plus précise.

Intéressons nous maintenant à la pression. La figure (7) respecte nos attentes vis à vis de l'allure globale des courbes. Plus le pas d'espace diminue, plus l'erreur est petite. Les courbes correspondant aux éléments  $(P1b,P1)$  et  $(P2,P1)$

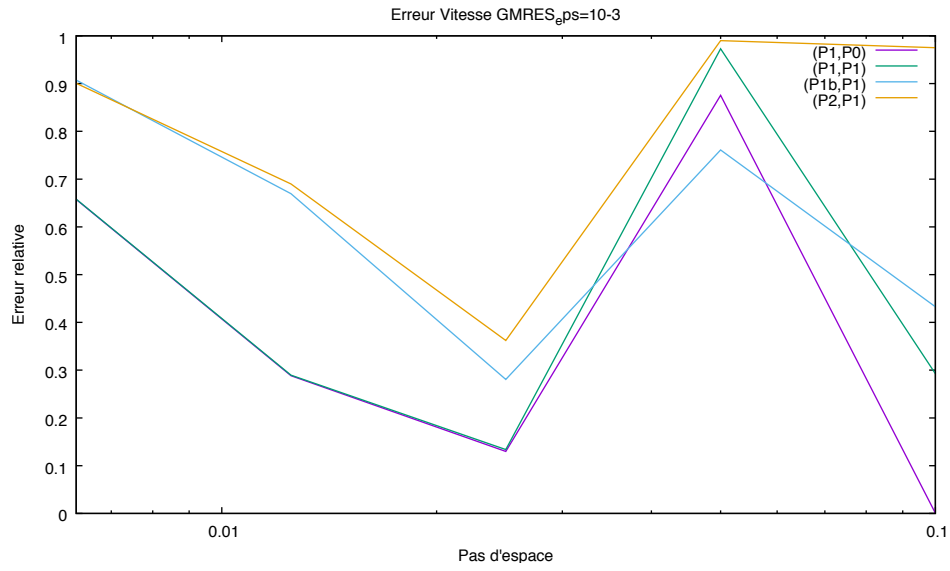


FIGURE 5 – Solveur itératif GMRES ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ) - Vitesse

sont confondues tandis que les autres convergent vers cette valeur finie. De plus, on remarque que les éléments P0 pour la pression induisent plus d'erreur que les éléments P1.

En revanche, sur la figure (8), le solveur GMRES semble diverger plus le pas d'espace est petit. On retrouve néanmoins l'ordre attendu des courbes.

Sur la dernière figure (9), les erreurs semblent converger vers une valeur finie mais l'ordre des courbes est difficile à expliquer.

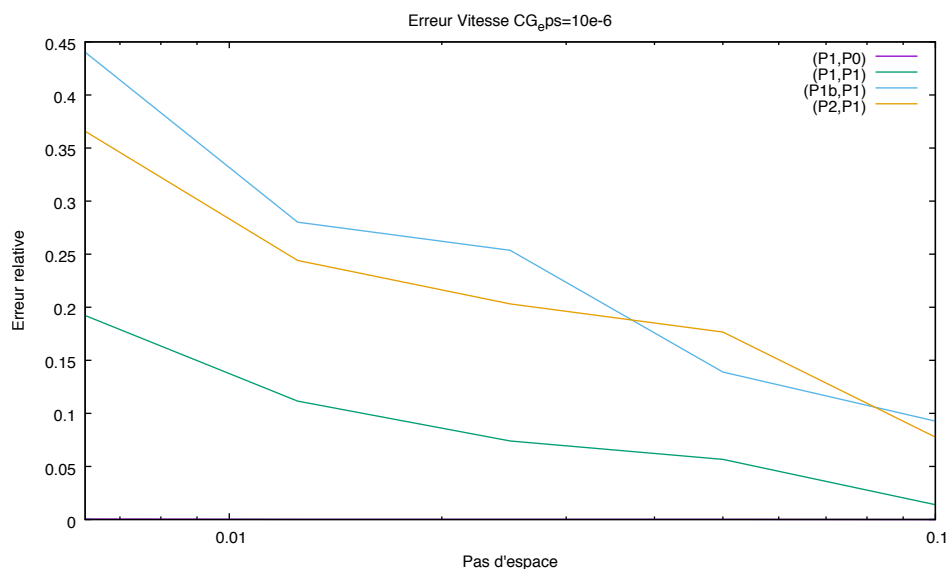


FIGURE 6 – Solveur itératif Gradient Conjugué ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ) - Vitesse

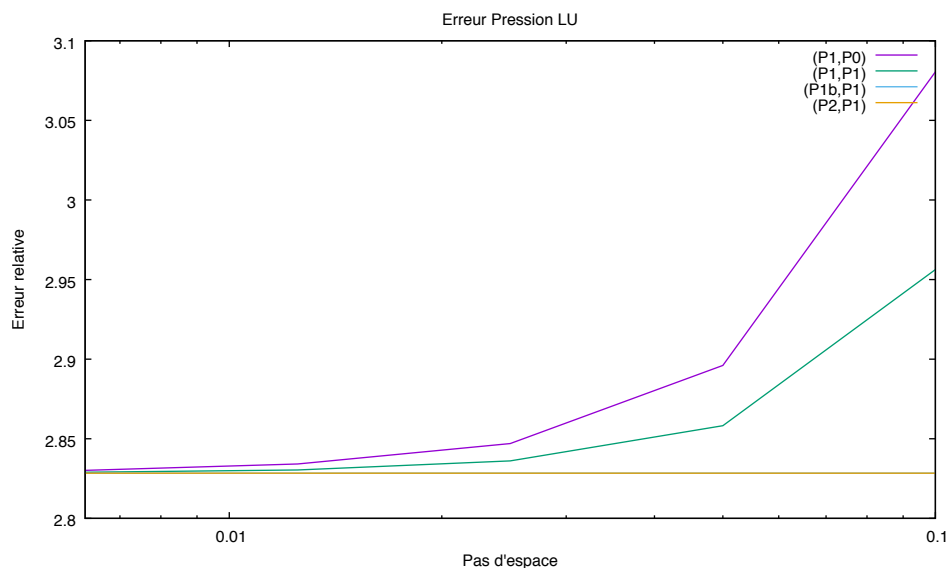


FIGURE 7 – Solveur direct - Pression

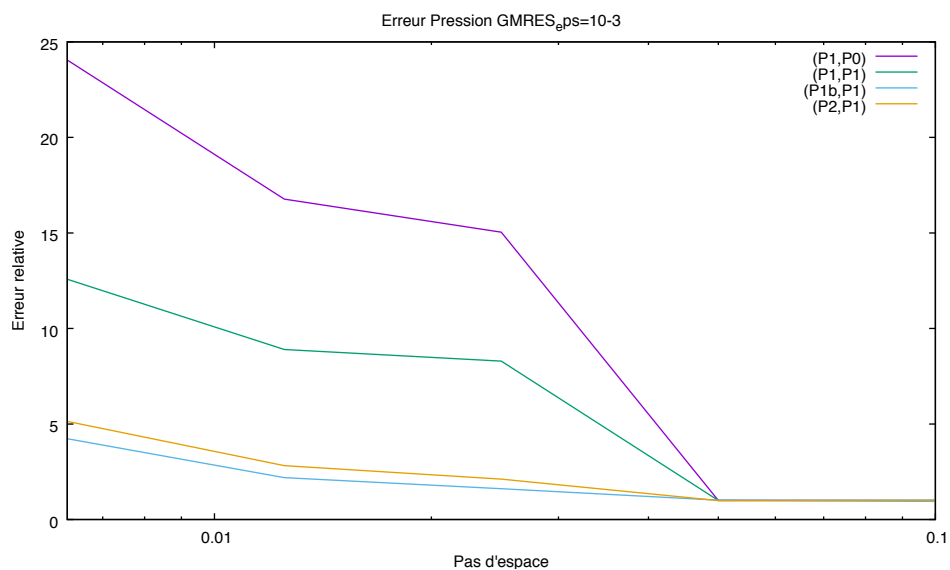


FIGURE 8 – Solveur itératif GMRES ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ) - Pression

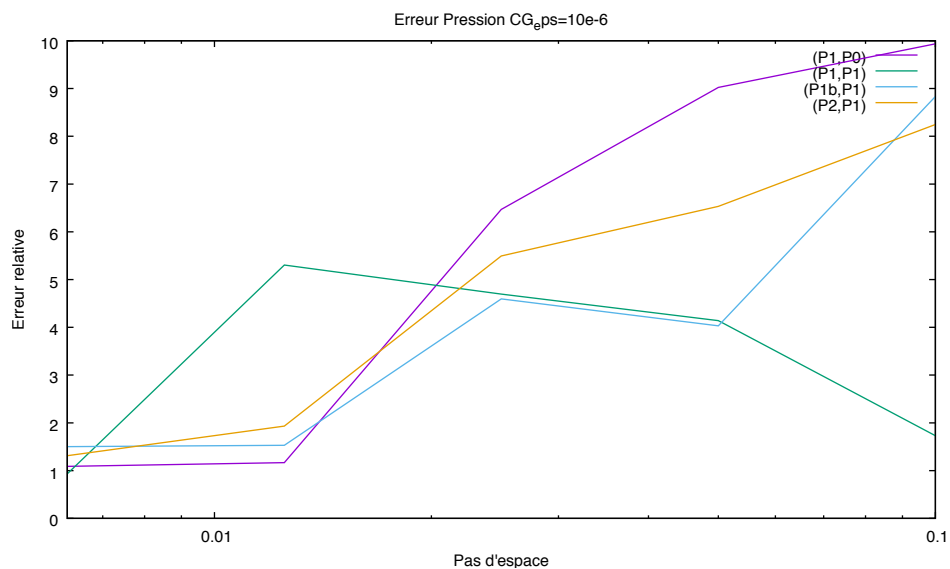


FIGURE 9 – Solveur itératif Gradient Conjugué ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ) - Pression



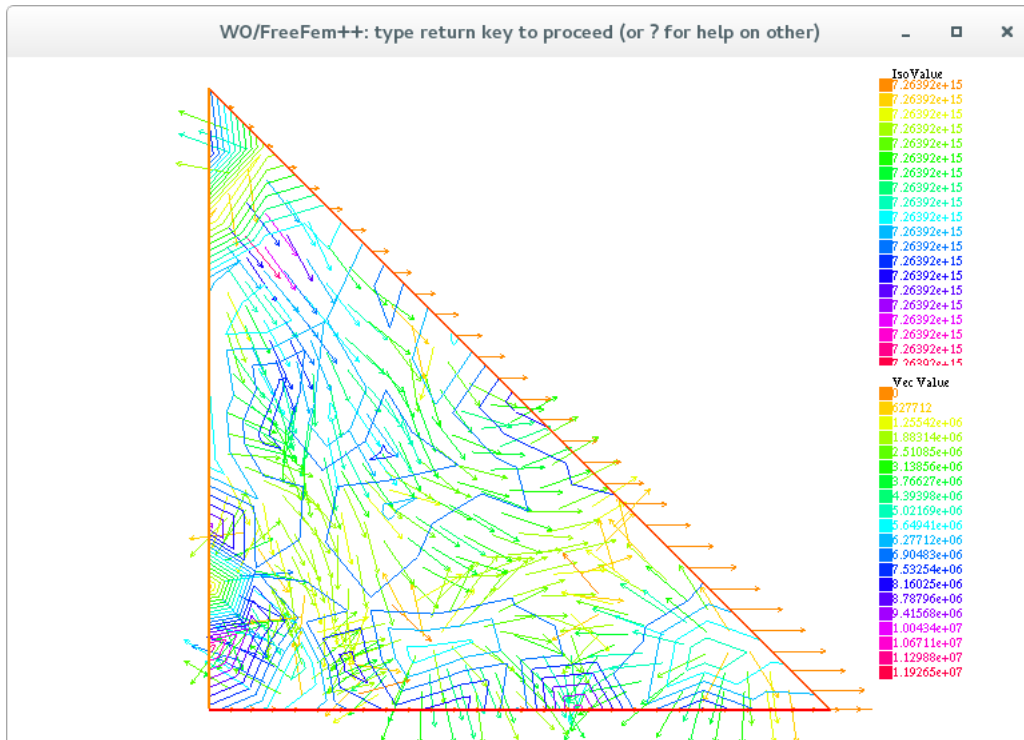


FIGURE 10 – Solution calculée avec la méthode d’Usawa

La solution du cas test 1 est représentée sur la figure 10. L’algorithme ayant divergé, nous n’avons pu montrer que la solution pour un pas d’espace égal à 0.1.

### 3.2 Second cas test

On considère maintenant un domaine cubique  $\Omega = ]0, 1[^3$ . Le cas test CT2 est utilisé :

$u(x, y) = (x \ y \ -2z)$ , et  $p(x, y) = x + y + z + c$ , qui est solution du problème de Stokes avec  $f(x, y) = (1 \ 1 \ 1)$ .

La figure 11 représente la solution du problème de Stokes sur ce domaine, calculée avec le solveur UMFPACK.

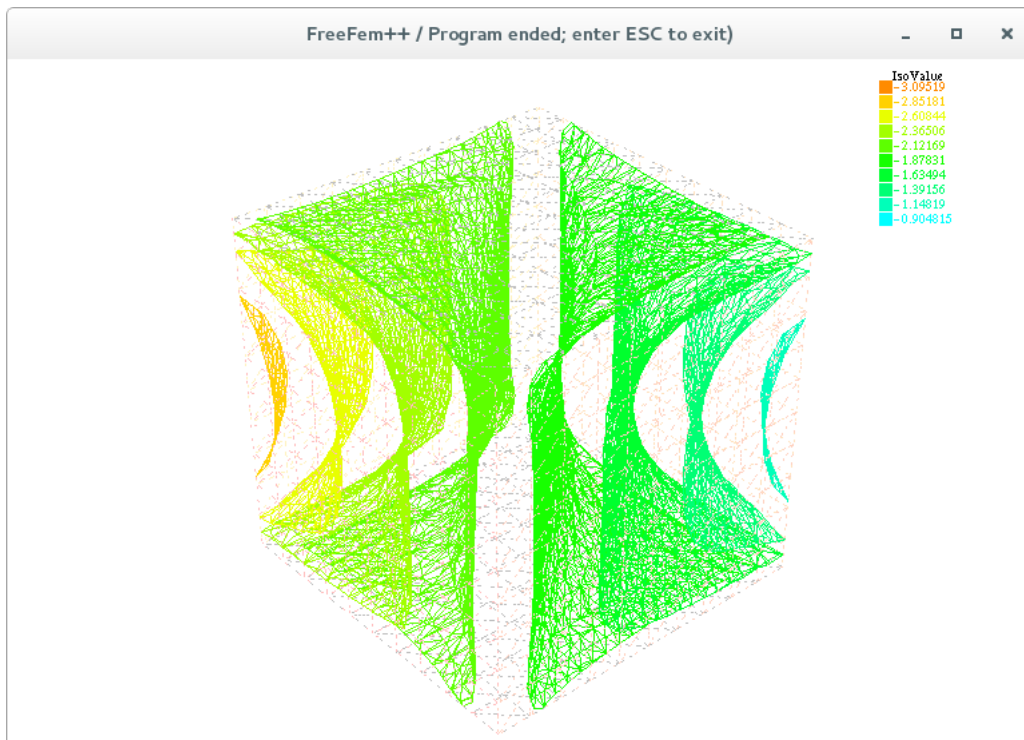


FIGURE 11 – Solution du problème de Stokes en 3D (solveur UMFPACK)

Pour ce cas test, le solveur lance une exception "out of memory" lorsque le calcul est mené sur les machines de l'ENSEIRB. Seule la discrétisation avec 10 points par côté permet de calculer une erreur de 0.809 sur la vitesse et de 4.05 pour la pression. Ensuite le programme s'arrête ou diverge mais donne de mauvais résultats. Pour une discrétisation de 0.1, le temps de calcul est de 2 secondes pour le gradient conjugué contre 31 secondes pour le solveur direct. Il semblerait que cette méthode soit coûteuse et peu efficace pour un problème simple comme le problème de Stokes.

## 4 Conclusion

L'analyse du problème de Stokes a permis de mettre en place une méthode d'éléments finis en langage FreeFem++. Cette méthode étant très abstraite, une longue démonstration a été nécessaire pour prouver qu'elle était correcte. Les hypothèses ont été vérifiées pour les trois méthodes : méthode classique, d'Uzawa et méthode de pénalisation. Des tests ont ensuite été menés pour chaque méthode afin de tester la robustesse de la méthode face à certains paramètres comme la taille du maillage ou le choix du solveur. Malgré le fait que les méthodes d'Uzawa et de pénalisation n'aient pas convergé, nous disposons maintenant d'un code FreeFem++ pour la résolution d'un problème éléments finis.