Chapitre 1: le choix optimal

Gaëtan LE FLOCH

Introduction

- Tout au lon de ce semestre, nous nous plaçons du côté du **consommateur**, i.e. ceux qui formeront la demande du marché.
- Nous verrons différents faits à travers ce chapitre:
  - Comment modéliser (simplement) les contraintes d'un consommateur;
    - *En particulier, comment analyser l'intervention de l'Etat sur la contrainte.*
  - Comment faire de même pour ses préférences;

Le consommateur est contraint

- Un agent dit "consommateur", comme vous et moi, est contraint dans ses choix de consommation.
- En effet, si un consommateur aime un bien (par exemple du chocolat), il serait tenté d'acheter ∞ tablettes. Mais il ne peut pas le faire car il a **un budget à respecter**.
- Ses choix sont donc contraints par sa richesse (ses revenus) ainsi que les prix pratiqués sur le marché.

La contrainte budgétaire

- Pour simplifier, nous allons construire une contrainte dans $\mathbb{R}^2$, i.e. notre agent "modèle" ne peut acquérir que deux biens c_1 et c_2, à des prix p_1 et p_2.
- Le **bien** est une entité mesurable satisfaisant un besoin individuel.
- Nous souhaitons alors obtenir l'**ensemble budgétaire** symbolisant l'ensemble des paniers de biens[1] accessibles à la consommation pour un prix et un revenu donné.
- Si nous notons R le revenu et que nous considérons que l'agent peut ne pas tout dépenser, la contrainte budgétaire est la suivante:

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 \leq R$$

[1] Défini par les quantités c_1 et c_2.

La contrainte budgétaire

- Rajoutons une simplification en considérant qu'il n'existe qu'une seule date au sein de l'économie (aucun futur). Le consommateur a donc intérêt à tout dépenser et la contrainte devient:

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = R$$

- Cette équation représente la **frontière** de l'ensemble budgétaire. Il est clair que l'agent peut consommer tout panier de bien se trouvant sur ou sous cette droite (car en dessous, celà implique moins de biens donc une dépense inférieure au revenu).

Tracer l'ensemble budgétaire

- Nous allons désormais représenter graphiquement l'ensemble budgétaire. Par convention, il est représenté dans le plan (c_1, c_2). Il faut donc trouver la fonction $c_2(c_1)$:

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = R$$

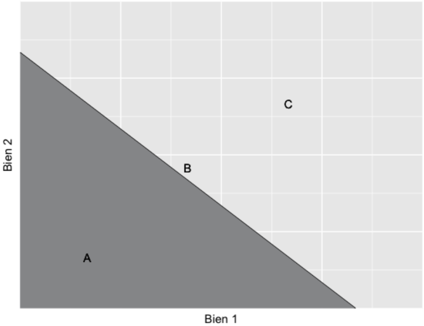
$$\longrightarrow p_2 c_2 = R - p_1 c_1$$

$$\Longrightarrow c_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} c_1$$

- Comme il s'agit d'une droite, nous n'avons besoin que de deux points. Le plus facile est de calculer pour $c_1 = 0$ ($c_2 = R/p_2$) et pour $c_2 = 0$ ($c_1 = R/p_1$)

Tracer l'ensemble budgétaire

- Graphiquement, nous avons ceci:



- Les paniers $\{c_1, c_2\}$ se trouvant sous un sur la courbe peuvent être consommés (zones A et B). En dehors de ces zones (C), le coût est trop grand pour être absorbé par le revenu. Alors, A et B représentent le **pouvoir d'achat** du consommateur.

Exercice

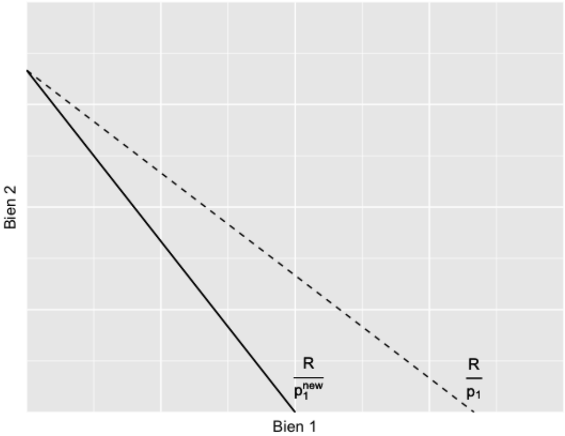
Jean aime les pommes *Golden* et *Granny Smith*, vendues à 1 euro et 2 euros le kilo respectivement. Il a de l'argent de poche à hauteur de 10 euros par semaine qu'il ne souhaite dépenser que dans ces pommes.

1. Tracez dans le plan approprié une courbe délimitant tous les paniers de biens que Jean peut s'offrir chaque semaine.

Propriétés de la courbe de budget

- Il existe 4 propriétés pour la courbe de budget:
  1. Les droites de budget existent **en nombre infini** car il existe un nombre infini de combinaisons revenu/prix;
  2. Lorsque le revenu **augmente** (diminue), la droite de budget se déplace **parallèlement vers le cadran Nord-Est** (Sud-Ouest).
  3. Lorsque les prix relatifs (le ratio $\frac{p_1}{p_2}$) évoluent, la droite **pivote** autour du point trivial (qui ne change pas de valeur). Une augmentation des prix diminuent les possibilités de consommation (et inversement).

Illustration - Augmentation de p_1



Propriétés de la courbe de budget

4. La valeur absolue du coefficient directeur définit le **taux d'échange objectif du marché** du bien 2 vers le bien 1.
   - *Nous l'écrivons alors:*

   $$TE^M_{2-1} = \frac{p_1}{p_2}$$

   - *Il mesure le taux auquel nous pouvons passer du bien 2 au bien 1. Si l'individu renonce à* TE^M_{2-1} *unités de bien 2, il pourra acquérir une unité de bien 1.*

Exercice

Revenons à l'exemple de Jean. L'inflation touche fortement le marché des pommes, si bien que les *Golden* et les *Granny Smith* subissent une augmentation des prix au kilo de l'ordre de 50%. Pour contrer l'inflation, nous lui augmentons son argent de poche de 10 euros par semaine.

1. Représentez en deux temps (inflation, puis augmentation d'argent de poche) l'évolution de la courbe tracée précédemment;
2. Définissez le taux d'échange objectif pratiqué sur le marché.

Focus sur le pouvoir d'achat

- Précédemment, nous avons vu que la zone située sur et sous la courbe de budget représente le **pouvoir d'achat**.
- Nous avons donc vu que l'évolution des prix et des revenus entraînent une évolution de ce pouvoir d'achat.
- Pour savoir si le pouvoir d'achat a augmenté ou baissé, nous pouvons éventuellement mesurer à l'aide d'intégrales (mais nous vous épargnons ça). Nous pouvons également **comparer l'augmentation des prix à l'augmentation du revenu**.

$\Longrightarrow$ **Pierre a-t-il vu une augmentation de son pouvoir d'achat ?**

Taxes et subventions

- Jusqu'à là, notre consommateur vivait dans un pays sans gouvernement, où seul son argent de poche définissait son revenu. Nous savons qu'en pratique, Pierre peut payer des **taxes** (par exemple la TVA) mais aussi recevoir des **subventions** (par exemple une bourse du CROUS).
- L'idée de ces taxes ou subventions est de modifier le comportement des agents (consommateurs comme producteurs) ou de couvrir des dépenses afin de remplir un certain objectif social.
  - *L'idée de la bourse du CROUS est de modifier le comportement des étudiants en les incitant à poursuivre leurs études post-BAC selon les revenus du foyer.*
  - *L'idée de la prime rénovation est de financer la rénovation des logements pour qu'ils soient moins polluants (entre autres).*

La taxe appliquée au prix

- Débutons par analyser une taxe appliquée sur le prix, comme la TVA. Si nous appliquons ce genre de taxe au taux t sur le bien 1 uniquement, la droite de budget devient:

$$p_1(1+t)c_1 + p_2c_2 = R$$

- Et, si nous nous plaçons dans le plan (c_1, c_2), nous obtenons:

$$c_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1(1+t)}{p_2}c_1$$

- Comparé à la situation sans taxe, le coefficient directeur est plus élevé en valeur absolue, donc la courbe est plus pentue: intuitivement, la taxe diminue le pouvoir d'achat.

La subvention appliquée au prix

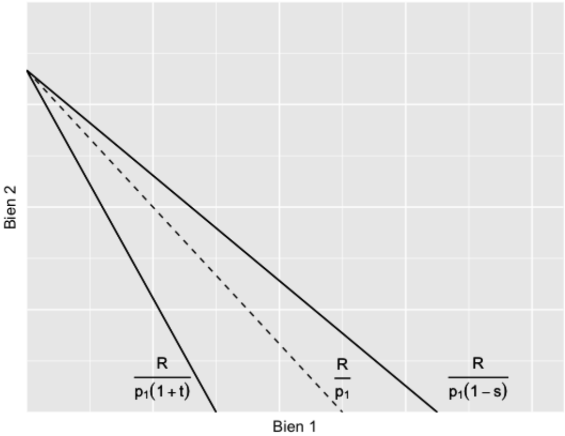
- De même, nous pouvons subventionner un produit et faire diminuer son prix d'achat. Nos équations deviennent, pour le taux de subvention s appliqué au bien 1:

$$p_1(1-s)c_1 + p_2c_2 = R$$

$$c_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1(1-s)}{p_2}c_1$$

- Inversement, la courbe est donc moins pentue dans le plan (c_1, c_2) et le pouvoir d'achat augmente lorsque le bien est subventionné.

Illustration



Tarif binôme ou abonnement

- L'idée de l'abonnement (ou tarif binôme) est de payer un abonnement pour obtenir un **prix préférentiel de consommation**. C'est par exemple ce que pratique la SNCF avec la Carte Jeune, où en échange de 50 euros l'usager obtient des billets à prix réduit.
- Désormais, appliquons un abonnement A sur le bien 1. nous avons:

$$R = (A + p_1{}^{\text{`}} c_1) + p_2 c_2$$

L'abonnement

- Nous comprenons alors que, dans le plan (c_1, c_2):

$$\begin{cases} c_2 = \frac{R-A}{p_2} - \frac{p_1`}{p_2} c_1 & c_1 > 0 \\ c_2 = \frac{R}{p_2} & c_1 = 0 \end{cases}$$

- Nous partons naturellement du principe que si le consommateur ne veut pas de c_1, il ne prendra pas d'abonnement (d'où l'absence de A).
- Nous comprennons alors que l'abonnement A peut entraîner une perte de pouvoir d'achat (si le consommateur ne consomme pas assez), ou un gain autrement.

Introduction

- Un consommateur, comme vous et moi, aura ses préférences entre deux biens différents (par exemple, vous avez une préférence entre un billet de cinéma ou un billet d'opéra, entre un café et un thé ect.).
- Toujours pour simplifier nos discussions, nous considérons deux biens numérotés 1 et 2. De même nous considérons deux paniers A et B. Les notations suivantes s'appliquent:

$A \succ B$ ou $B \prec A$	A est strictement préféré à B
$A \succcurlyeq B$ ou $B \preccurlyeq A$	A est faiblement préféré à B
$A \sim B$	Indifférence entre A et B

Table: Notation des préférences

Axiomes

- Les préférences sont subjectives et formalisent les goûts d'un agent supposé rationnel. 4 axiomes[2] sont posés:
  1. La **complétude**, l'agent peut classer chaque panier de biens deux à deux (si il a toute l'information);
  2. La **réflexivité**, tout panier est équivalent à lui-même ($A \sim A$);
  3. La **transitivité**, les combinaisons sont cohérentes (Si $A \succ B$ et $B \succ C$ alors $A \succ C$);
  4. La **monotonie**, un consommateur préfère un panier qui propose plus de biens qu'un autre ($\{5, 4\} \succ \{1, 0\}$)
     - *Nous parlons ici de non-satiété, le consommateur en voudra toujours plus.*

[2] Nous parlons d'axiome lorsque nous supposons quelque chose être évident et non sujet à une démonstration.

Exercice

- Nous considérons six combinaisons de biens $\{c_1, c_2\}$ intégrés dans les paniers A à F. L'agent ayant un tel classement respecte-t-il les axiomes ?

A $\succ$ B	F $\prec$ E	C $\sim A$
C $\succ B$	A $\prec$ D	A $\succ F$
E $\prec$ C	D $\prec$ B	B $\succ$ F

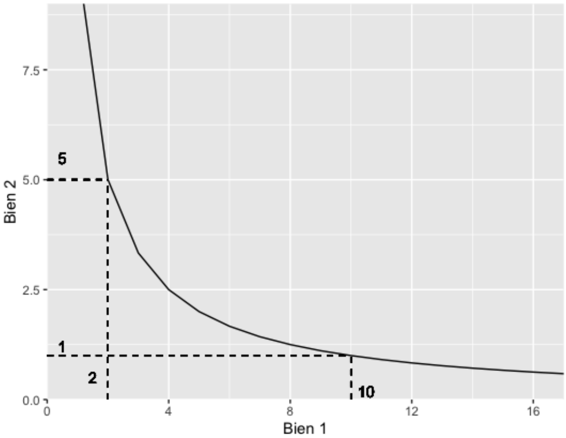
La courbe d'indifférence

- Nous remarquons donc que deux paniers de biens peuvent être de satisfaction égale ou inégale.
- Pour représenter tous les paniers de biens de satisfaction égale, nous allons formaliser la **courbe d'indifférence**.
- Le consommateur retire une certaine satisfaction de la consommation des biens. Il en tire ce qu'on appelle un **niveau d'utilité**. Cette utilité peut s'exprimer sous la forme d'une fonction d'utilité, comme:

$$U(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \ln(c_2)$$

- Pour représenter la courbe d'indifférence, nous utilisons le même procédé que pour la frontière de l'ensemble budgétaire: nous représentons cette fonction dans le plan (c_1, c_2).

Illustration



La courbe d'indifférence

- Dans l'exemple précédent, nous remarquons que les paniers A(10,1) et B(2,5) sont indifférents pour l'agent. Ainsi, $A \sim B$.
- Dans le même esprit que la courbe de contrainte budgétaire, **tous les paniers sous (au-desssus de) la courbe d'indifférence procurent moins (plus) de satisfaction**.
- Ces courbes d'indifférence possèdent 5 propriétés:
  1. Elles sont en nombre infini, il existe autant de courbes que de niveaux de satisfaction.
  2. Pour des biens désirables, les courbes d'indifférence sont décroissantes.
  3. Pour des biens désirables, le niveau de satisfaction est d'autant plus grand que la courbe est dans le cadran Nord-Est.
  4. Pour un même consommateur, les courbes d'indifférence ne sont **jamais** sécantes car elles représentent différents niveaux de satisfaction.
  5. La forme de la courbe indique la **nature des biens**.

Les types de biens

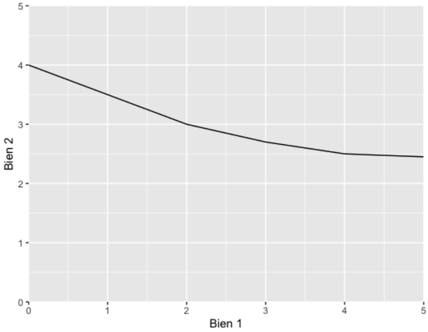
- En effet, nous avons plusieurs types de biens:
  1. Les biens **imparfaitement substituables**;
  2. Les biens **parfaitement substituables**;
  3. Les **préférences hybrides**.

Biens imparfaitement et parfaitement substituables

- Nous parlons de biens imparfaitement substituables si le consommateur est **enclin à échanger un bien contre un autre si il possède ce bien en petite quantité**. La courbe d'indifférence est alors parfaitement convexe;
- En revanche, si les biens sont parfaitement substituables, **le taux d'échange ne variera pas selon les quantités**. La courbe d'indifférence est une droite.
- Il est important de noter que dans le premier cas, le consommateur ne peut pas renoncer à un bien (il aime la diversité). Dans le second cas, il acceptera de renoncer à un type de bien car ils sont équivalents pour lui.

Préférences hybrides

- Lorsque les préférences sont dites **hybrides**, nous avons un mélange des deux cas précédents: il y a à la fois une préférence pour la diversité (imparfait), mais également pour la spécialisation (parfait). Nous retrouverons alors une courbe convexe qui possèdera une ordonnée à l'origine.



Taux marginal de substitution

- Alors, l'agent a des préférences et possède un taux d'échange **subjectif**, appelé **taux marginal de substitution**.
- Le **TMS** du bien 2 vers le bien 1 mesure la quantité minimale de bien 2 que le consommateur peut substituer à 1 unité de bien 1. Nous l'écrivons:

$$TMS_{2-1} = -\frac{\Delta c_2}{\Delta c_1}$$

- Graphiquement, le TMS est donc la **valeur absolue de la pente de la tangente à la courbe d'indifférence sur le plan** (c_1, c_2).

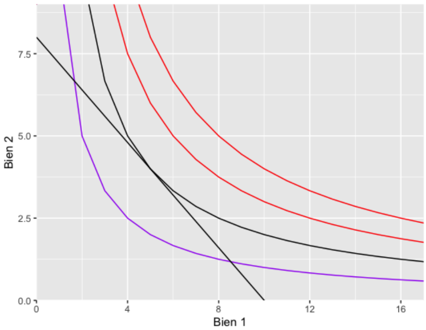
Evolution du TMS

- L'évolution du TMS permet de caractériser la nature des biens.
- Lorsque les biens sont désirables et pour des préférences convexes, le TMS décroît le long de la courbe d'indifférence.
  - *Plus l'agent a de bien 1, la compensation qu'il demande pour le bien 2 diminue.*
- Lorsque les préférences sont linéaires (donc les biens sont parfaitement substituables), le TMS n'évolue pas.

Fusionner les blocs

- Alors, nous avons vu que l'agent réalise des choix de consommation optimaux (i.e. il maximise son utilité), sous la contrainte budgétaire régie par le revenu et les prix.
- L'agent peut modifier son panier de biens pour arriver à son optimum contraint via un taux objectif (TE^{M}_{2-1}) et subjectif (TMS_{2-1}).
- Pour trouver le choix optimal (i.e. le panier sélectionné par le consommateur), nous rappelons plusieurs faits:
    1. L'agent vit dans une économie sans futur et n'épargne donc pas: le panier se situera **sur la droite de budget**.
    2. Pour maximiser sa satisfaction, l'agent doit atteindre la courbe d'indifférence la plus haute qu'il puisse obtenir.
    3. **Le choix optimal est alors représenté par l'unique point confondu entre la droite de budget et la courbe d'indifférence la plus haute.**

Illustration



- La courbe violette n'est pas un choix optimal: nous pouvons atteindre une courbe d'indifférence plus haute (i.e. plus de satisfaction).
- Les courbes rouges ne présentent pas non plus le choix optimal: nous sommes au dessus de la courbe de budget et l'agent ne peut pas s'offrir ces paniers.

Deux types de solution

- Nous pouvons définir le choix optimal de consommation, $E(c_1^*, c_2^*)$, par une **solution intérieure** si et seulement si $c_i^* > 0 \forall i$, $i = 1, 2$. Il y a une diversification des consommations.
- Lorsque seul un type de bien est consommé, nous parlons de **solution en coin**. Il y a une spécialisation des consommations.

La solution intérieure

- La solution intérieure se repère lorsque les biens sont imparfaitement substituables (les préférences sont donc convexes).
- Comme montré précédemment, la solution intérieure est obtenue lorsque la courbe d'indifférence présente un point de tangence avec la courbe budgétaire.

Diversification de la consommation

- Comme dit plus tôt, le consommateur va vouloir **diversifier sa consommation** lorsque ses préférences sont convexes, autrement dit si le TMS du consommateur est décroissant lorsque la disponibilité du bien 1 augmente.
- L'optimalité est atteinte lorsque la droite budgétaire devient la tangente à la courbe d'indifférence. Autrement dit, comme le coefficient directeur de la courbe budgétaire est p_1/p_2, nous avons la condition suivante:

$$TMS_{2-1} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Cette condition implique qu'il n'existe plus aucune modification possible du panier de consommation de sorte à augmenter la satisfaction en suivant la contrainte.

Formalisation mathématique

- Nous connaissons la condition d'optimalité, et pouvons alors exprimer le système d'équations l'exprimant:

$$\begin{cases} TMS_{2-1}(c_1^*, c_2^*) = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 c_1^* + p_2 c_2^* \end{cases}$$

- Modifions cette expression pour obtenir les valeurs finales. La première équation peut s'écrire:

$$TMS_{2-1}(c_1^*, c_2^*) = \frac{p_1}{p_2} \Longrightarrow c_1^* = f^*(c_2^*)$$

Formalisation mathématique

- Alors, en injectant dans la seconde équation:

$$R = p_1 f^*(c_2^*) + p_2 c_2^* = A(c_2^*)$$

- Nous obtiendrons alors c_2 en appliquant la fonction inverse:

$$R = A(c_2^*) \iff c_2^* = A^{-1}(R)$$

- Et, comme nous savons que $c_1^* = f^*(c_2^*)$:

$$c_1^* = f(A^{-1}(R))$$

Application

Jean dispose de 400 EUR en budget culturel. Il se rend régulièrement à l'opéra (100 EUR la place) et au théâtre (50 EUR la place). Ses préférences sont résumées par:

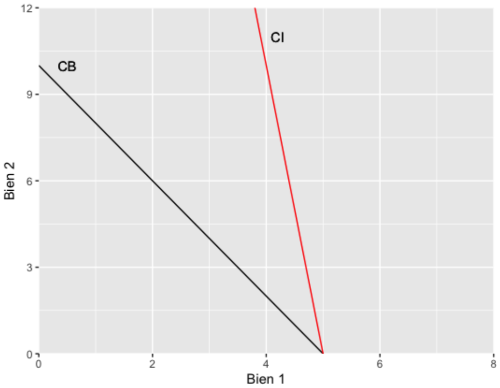
$$TMS_{O-T} = \frac{c_O}{c_T}$$

1. Déterminez le choix optimal de Jean.

La solution en coin

- La solution en coin se repère lorsque les préférences sont linéaires (i.e. les biens sont parfaitement substituables). Sur le même principe, nous cherchons le point unique de croisement entre la courbe d'indifférence la plus haute et la contrainte budgétaire.
- Pour savoir quel bien disparaîtra du panier, il suffit de comparer le TMS au rapport des prix. Si le TMS_{2-1} est inférieur au rapport des prix, il est optimal pour le consommateur de renoncer au bien 1 (et inversement).

Exemple de choix optimal en solution en coin



Formalisation mathématique

- La solution en coin présente une formalisation bien plus agréable puisque nous comprenons que dans le graphique précédent, l'agent ne consomme pas de bien 2. Donc:

$$c_2^* = 0$$

$$\Longrightarrow R = p_1 c_1^* + p_2 \times 0$$

$$\Longrightarrow c_1^* = \frac{R}{p_1}$$

Application numérique

Considérons un agent disposant de 100 EUR pour aller voir soit un match de foot (20 EUR la place), soit un match de basket (10 EUR la place). Ses préférences sont:

$$TMS_{F-B} = 1$$

1. Déterminez le choix optimal.