4 高等代数中的实例

4.1 向量线性相关的几何意义

在高等代数学习过程中，我们接触了向量组线性相关的定义，

对于任给的非零向量组，若有不全为0的实数使得，

成立。下面将着重研究向量的线性相关的几何意义。

我们先从最简单的二维向量开始研究，由于高等代数学习中我们接触到以下定理，

*设与是两个向量组。如果*

1. *向量组可以经线性表出；*

*那么向量组必线性相关。*

我们可以导出以下推论

*任意个维向量必线性相关。*

上述推论的证明是容易的，这里不做过多赘述了。

所以再讨论个以上向量线性相关是没有意义的，下面讨论两个二维向量线性相关的几何意义。

4.1.1 两个二维向量线性相关的几何意义

二维向量是定义二维平面上的向量，若在二维平面中的两个二维向量线性相关，则有这两个二维向量必定是共线的（这点很容易证明），我们可以通过以下示意图直观地了解这一过程。如图4.1.1-1所示，平面上存在两个向量和，由向量可以任意平移，如图4.1.1-2所示，向量和可以平移到一条直线上

图4.1.1-1 图4.1.1-2

事实上，上述结论对于任意两个n维向量都成立。

两个向量线性相关则两个向量必定共线，而一条直线的维度为一，我们是不是可以尝试归纳，n个向量线性相关则代表这n个向量必定只分布在同一个n-1维空间中，下面我们可以尝试证明三个向量线性相关的几何意义。

4.1.2 三个三维向量线性相关的几何意义

由三个向量线性相关，设

则存在不全为0的实数使得

由crammer法则可以得到，上述代数式成立等价于以下三阶行列式等于0。

由向量的混合积定义可以得到，三阶行列式的绝对值等于其三个行（列）向量在右手直角坐标系中构成的平行六面体的体积，在本例中，则表示上述三个向量在右手系中构成的平行六面体体积为0，即三向量共面。

注意，这里的三个向量线性相关的几何意义仅针对于三维向量，在向量维度大于3的时候上述结论是不成立的。

我们不妨讨论一个特殊情况，共面的三个向量会不会同时共线呢？答案是肯定的，我们不妨假设下述三个向量，

显然，上述三个向量线性相关，有前面得到的结论，它们是共面的，且位于面上的同一条直线上，对此我们可以对4.1.1最后做出的假设进行修正，

*任意n个向量n维向量线性相关，它们一定位于小于等于n-1维的空间内。*

4.1.3 个向量线性相关几何意义的可行性探讨

不妨从四个向量线性相关起手。

设存在四个四维向量线性相关，则一定存在一个向量使得可以被另外三个向量表示。

这点是容易证明的，在4.1的叙述中我们知道了必定存在不全为零的实数组使得

假设，那么必定有，必定可被余下的向量线性表出。

我们可以想象，假设我们生活的周围环境是四维的，即除了长宽高之外我们引入一个新的维度，物理上通常认为这个新添加的维度即是时间维，在数学上我们不做过多的讨论，回到问题，由于新添加的维度的存在，那么我们所能认知到的平面就变成了“三维”的，不妨叫做“三维超平面”，那么我们对四维向量线性相关的研究就转化为了三维中线性相关几何意义的表示，在4.1.2中我们已经描绘了三维向量线性相关的几何意义，类似的我们可以得到四维甚至更高维条件下对线性相关向量几何意义的定义。

*任意n个向量n维向量线性相关，它们一定位于小于等于n-1维的线性空间内。*

*四个4维向量线性相关，对应的非齐次线性方程组所表示的四个平面交于同一直线。*

4.2 n阶行列式的几何意义

我们知道，行列式是一种特殊的矩阵，因此我们可以利用行列式的行、列向量对行列式的几何意义进行研究。

我们先来看一种最简单的情况，对于二阶行列式

它的行向量在平面直角坐标系中如图4.2-1所示，



图4.2-1

我们可以利用行列式的代数余子式展开得到

由图4.2-1，由原点出发的两条向量所延展而成的平行四边形OABC的面积

容易得到，，由三角恒等变换可以得到，

*故二阶行列式的几何意义是其绝对值等于其两个行（或列）向量在平面直角坐标系中构成的平行四边形的面积。*

三阶行列式的情况可以用向量的混合积证明，我们已经在4.1.2详细讲过，这里不再赘述，直接贴出结论，

*三阶行列式的几何意义是其绝对值等于其三个行（或列）向量在右手直角坐标系中构成的平行六面体的体积。*

通过4.1中对n个n维向量几何意义的讨论，我们不难总结出以下结论，

*n维行列式的几何意义是其绝对值等于其n个行（或列）向量在小于等于n-1维空间中所能构成的立体（n=2时为平面）图形的体积（或面积）*