高等数学下册期中考试参考答案

一、填空题(每小题 4 分，共 40 分)

1. 3　　2. $x-5y-3z+7=0$　　3. $y^2+z^2=3z$　　4. $\dfrac{\pi}{3}$　　5. $\dfrac{1}{2}$

6. $z\mathrm{d}x+(\cos y+z\mathrm{e}^{yz})\mathrm{d}y+(x+y\mathrm{e}^{yz})\mathrm{d}z$　　7. -3　　8. 3　　9. 2π　　10. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$

二、(8 分)解　当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，曲线上的点为 $M(1,\dfrac{1}{2},1)$．曲线在点 M 处的切向量为

$$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))=(2,0,-2).$$

因此所求切线方程

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-\frac{1}{2}}{0}=\frac{z-1}{-2},\text{即}\begin{cases}x=1+2t,\\ y=\dfrac{1}{2},\\ z=1-2t.\end{cases}$$

法平面方程为 $2\times(x-1)+0\times(y-\dfrac{1}{2})-2\times(z-1)=0$，即 $x-z=0$.

三、(8 分)解　方程 $2xz-2xyz+\ln(xyz)=0$ 两边对 x 求导得

$$2z+2x\frac{\partial z}{\partial x}-2yz-2xy\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{xyz}(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x})=0,$$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2z-2yz+\frac{1}{x}}{2x-2xy+\frac{1}{z}}=-\dfrac{z}{x}$. 于是 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(-\dfrac{z}{x})=-\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x-z}{x^2}=\dfrac{2z}{x^2}$，由于 $z=z(1,1)=1$，

所以 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2$.

四、(8 分)解　所求积分的积分区域在极坐标系为

$$D=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\rho\le 2\cos\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\},$$

所以

$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{9}.$$

五、(10 分)解　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xzf_1'-2xf_2'-\dfrac{y}{x^2}g'$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}(2xzf_1'-2xf_2'-\frac{y}{x^2}g')$$

$$=2xz[f_{11}''+2yzf_{12}'']-2x(f_{21}''+2yzf_{22}'')-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

$$=2xzf_{11}''+(4xyz^2-2x)f_{12}''-4xyzf_{22}''-\frac{1}{x^3}(xg'+yg'').$$

六、(10 分)解　过点 $M(4,0,-1)$，且平行于平面 $x-4y+3z-10=0$ 的平面的方程为

$$(x-4)-4y+3(z+1)=0\text{，即 } x-4y+3z-1=0\text{.}$$

直线 $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=t, \\ y=3+t, \\ z=2t-1, \end{cases}$$

代入平面方程 $x-4y+3z-1=0$，得

$$t-4(3+t)+3(2t-1)-1=0,$$

解得 $t=\frac{16}{3}$. 代入参数方程得平面与已知直线的交点坐标为 $P(\frac{16}{3},\frac{25}{3},\frac{29}{3})$，于是

$$\overrightarrow{MP}=(\frac{4}{3},\frac{25}{3},\frac{32}{3}).$$

过点 P 与点 M 的直线方程为 $\frac{x-4}{4}=\frac{y}{25}=\frac{z+1}{32}$.

七、(10 分)解　设 $P(x,y,z)$ 是曲面 S 上的任意一点，它到平面 π 的距离为

$$d=\frac{1}{3}\left|x+2y+2z-2\right|.$$

设 $L=d=(x+2y+2z-2)^2+\lambda(8+x^2+4y^2-z^2)$，令

$$\begin{cases} L_x=2(x+2y+2z-2)+2\lambda x=0, & (1) \\ L_y=4(x+2y+2z-2)+8\lambda y=0, & (2) \\ L_z=4(x+2y+2z-2)-2\lambda z=0, & (3) \\ L_\lambda=8+x^2+4y^2-z^2=0, & (4) \end{cases}$$

由(1)、(2)和(3)式得 $x=-\frac{z}{2}$，$y=-\frac{z}{4}$，代入(4)式得 $z=4$，舍去 $z=-4$，于是 $x=-2$，$y=-1$，因此 $(-2,-1,4)$ 是唯一的驻点. 由问题知最近距离是存在的，故所求点为 $(-2,-1,4)$，所求最近距离为

$$d_{\min}=\frac{1}{3}\left|(-2)+2\times(-1)+2\times4-2\right|=\frac{2}{3}.$$

八、(6 分)解　因为 $f(x,y)$ 为连续函数，由二重积分的中值定理得，$\exists(\xi,\eta)\in D$, 使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\cdot\sigma=\pi r^2\cdot f(\xi,\eta),$$

又由于 D 是以 $(x_0,\ y_0)$ 为圆心，r 为半径的圆，所以当 $r\to0$ 时，$(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)$,
于是

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \\ &=\lim_{r\to0}\frac{1}{\pi r^2}\cdot\pi r^2 f(\xi,\eta)=\lim_{r\to0}f(\xi,\eta) \\ &=\lim_{(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)}f(\xi,\eta)=f(x_0,y_0). \end{aligned}$$