第 13 章　无穷级数

应该抓紧复习考试了！

这章基本上不需要上册的知识。想及格吗？绝不能放过这一章！

凡是以后要经常用的例子，我们提醒“记住”。

第 1 节　常数项级数的概念与性质

1.1　基本概念

定义 1.1　给定一个数列 $\{u_n\}$，用“+”号形式地连起来构成的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1.1}$$

称为常数项无穷级数，简称级数，其中每个 $u_1, u_2, \cdots$ 都称为级数(1.1)的一项，u_n 称为级数(1.1)的通项（一般项）.

级数（1.1）只能是形式的，因为我们不懂无穷个数相加；其中 ∞ 是指 $+\infty$，因为 n 不会往 $-\infty$ 跑。

作级数(1.1)的前 n 项之和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \tag{1.2}$$

称 s_n 为级数(1.1)的部分和 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. 它们构成一个新数列 $\{s_n\}$，称为级数(1.1)的部分和数列.

定义 1.2　设 $\{s_n\}$ 是级数（1.1）的部分和数列。

$$\lim_{n\to\infty} s_n \begin{cases} \text{不存在，则称级数（1.1）发散;} \\ = s\text{存在，则称级数（1.1）收敛，}s\text{是级数（1.1）的和，即} \end{cases}$$

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\text{定义为}}{=} \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

（左右两边同敛散、相等）

题目：给定了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，（1）断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的还是发散的——称为审敛；（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和——称为求和。

解法：（i）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$；（ii）如果 $\{s_n\}$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，如果 $\{s_n\}$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和 $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$。

“敛散性”=“收敛性”=“是收敛的还是发散的”.

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ 的部分和 s_n，因 n 为奇数时 $s_n=1$，n 为偶数时 $s_n=0$，故 s_n 不存在极限，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散.

思考题:

1. 怎样讨论级数的收敛性?
2. 数项级数与数列之间有怎样的关系?

【例 1.1】 讨论等比级数（也称为几何级数）

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性．

解 若 $q \neq 1$，则部分和为

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

(1)当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$，等比级数收敛，且和为 $\dfrac{a}{1-q}$；

(2)当 $|q| > 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$，等比级数发散．

(3)当 $|q| = 1$ 时，部分和为 $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a = na$ 或 $s_n = a\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1}$ 无极限，等比级数发散．

综合有

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k \begin{cases} = \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1 \\ \text{发散}, & |q| \geq 1 \end{cases}.$$

【例 1.2】　证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的.

证 1　要证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，即证其部分和数列 $\{s_n\}$ 发散．用反证法证明．若 $\{s_n\}$ 收敛即 $\lim_{n} s_n$ 存在，设 $\lim_{n} s_n=s$，则 $\lim_{n} s_{2n}=s$．由于

$$-\frac{1}{2}+s_{2n}=-\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$>1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=s_n,$$

从而有

$$-\frac{1}{2}+s\geq s，即 -\frac{1}{2}\geq 0，$$

此结论说明假设不真，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证 2　仍证其部分和数列 $\{s_n\}$ 发散．注意到第 3 章中已得到的不等式：

$$\ln(1+x)<x\qquad(x>0)$$

因此有 $\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$．又 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$，从而有

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1)$$

由于 $\lim_{n}\ln(n+1)=+\infty$，得 $\lim_{n} s_n=+\infty$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

必须记住一百年的例子：

1．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散；

2．调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；

3．$\sum_{k=0}^{\infty}aq^k\begin{cases}=\dfrac{a}{1-q}, & |q|<1\\ \text{发散}, & |q|\geq 1\end{cases}$。

1.2 级数的基本性质

随便固定正整数 N_0，如果在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 去掉前 N_0 项，则得一新级数：

$$u_{N_0+1}+u_{N_0+2}+\cdots+u_{N_0+k}+\cdots=\sum_{n=N_0+1}^{\infty} u_n, \tag{1.3}$$

级数(1.3)叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 N_0 项后的余项.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余项 $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和 $s'_n=s_{N_0+n}-s_{N_0}$，所以

$$\lim_{n\to\infty} s'_n=\lim_{n\to\infty} s_{N_0+n}-s_{N_0}.$$

结论：级数 $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；收敛时

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{N_0} u_n+\sum_{n=N_0+1}^{\infty} u_n,$$

即 $s=s_{N_0}+r_{N_0}$，其中 s 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和，r_{N_0} 是 $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} u_n$ 的和.

性质 1.1 级数中去掉或加上有限多项后不改变级数的收敛性.

当级数收敛时，其部分和 $s_n \to s\ (n\to\infty)$，于是固定 N_0 将 s_{N_0} 作为级数和 s 的近似值时，其绝对误差为：

$$\left|r_{N_0}\right|=\left|s-s_{N_0}\right|.$$

推论：级数的收敛性与前面固定的一大段无关，只决定于它的尾巴。

与极限运算的线性性质相似，收敛级数有下列运算性质：

性质 1.2 （1）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为 s，则对任意常数 k，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为 $k\cdot s$.

(2) 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s 与 σ，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n=s$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n=\sigma$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $s\pm\sigma$.

证 （1）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} k\cdot u_n$ 的部分和分别为 s_n，σ_n，则

$$\sigma_n=k\cdot u_1+k\cdot u_2+\cdots+k\cdot u_n=k\cdot(u_1+u_2+\cdots+u_n)=k\cdot s_n,$$

于是 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}k\cdot s_n=k\cdot\lim_{n\to\infty}s_n=k\cdot s$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k\cdot u_n$ 收敛且和为 $k\cdot s$.

(2) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 s_n，σ_n，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 的部分和

$$\begin{aligned} z_n&=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)\\ &=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)\\ &=s_n\pm\sigma_n, \end{aligned}$$

故 $\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}(s_n\pm\sigma_n)=\lim_{n\to\infty}s_n\pm\lim_{n\to\infty}\sigma_n=s\pm\sigma$，这表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 收敛且其和为

$s \pm s$.

由上面的推导很容易得到如下重要结论：

级数的每一项同乘一个不为零的常数后，其收敛性不变；三个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$，如果其中有两个收敛则第三个也收敛（不可能只有一个发散）

（$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(u_n \pm v_n) \mp v_n]$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = (\pm 1)\sum_{n=1}^{\infty}[u_n - (u_n \mp v_n)]$）。

思考题：

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，问 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛还是发散？又如果所给两个级数均发散，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 是否必发散？

级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

随便加括号后得一个新级数

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots,$$

设原级数前 n 项部分和为 s_n，新级数的前 m 项部分和 s'_m。容易知道 $s'_m = s_{n_m}$。数列 $\{s'_m\}$ 是 $\{s_n\}$ 的子数列 $\{s_{n_m}\}$。因此，由 $\{s_n\}$ 收敛，则其子数列 $\{s'_m\}$ 也收敛，且两者极限相同。当 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 收敛时，$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 总是对的。

性质 1.3　将收敛级数的项任意加括号之后所成新级数仍收敛，且其和不变.

性质 1.3 的逆命题不成立，即加括号之后的级数收敛不能保证原级数收敛．例如，级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛于零，但去括号之后所得级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+(-1)^n+\cdots$$

却是发散的.

经常使用性质 1.3 的逆否命题（来判断级数发散）：

推论 1.1　如果级数加括号之后所形成的级数发散，则原级数发散.

性质 1.4　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则它的一般项趋于零，即 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

证　对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，它的一般项 u_n 与部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 之间有关系式 $u_n = s_n - s_{n-1}$. 假设该级数收敛于和 s，则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

经常用性质 1.4 的逆否命题（来判断级数发散）：

推论 1.2　如果级数的一般项 u_n 不趋于零，即 $\lim_{n\to\infty} u_n$ 不存在或 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

思考题：

4. 对级数的一般项 u_n，若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则此级数收敛吗？（不一定。例如调和级数。）

*因级数的收敛是由部分和数列的收敛来定义的，因此由判断数列极限的 Cauchy 收敛原理，

可得到如下判别级数收敛性的 Cauchy 收敛原理.

定理 1.1(Cauchy 收敛原理)　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in Z^{+}，使得当 n > N 时，\forall p \in N_{+}，总有 \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon.$$

思考题:

*5. 借助于 Cauchy 收敛原理，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的收敛性.

习题 13-1

A 类

1. 根据级数收敛与发散的定义判别下列级数的收敛性，并求出其中收敛级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{e^n}{5^n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$；　*(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5n}$；

*(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{3}$；　*(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

2. 利用级数的性质判断下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}\right)$　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\ln\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)$

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n\geq 0)$ 收敛，试讨论下列级数的收敛性：

$$*\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}，\sum_{n=1}^{\infty}ca_n，\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+c)^2，\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+c).$$

*4. 应用 Cauchy 收敛准则，讨论下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2^n}{2^n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$.

5. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛，$a_n\leq b_n\leq c_n$ 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

6. 若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$

*(1) 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散.

(2) 证明:当 $b_n\neq 0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)$ 收敛，并求其和.

B 类

1. 根据级数收敛与发散的定义判别下列级数的收敛性，并求出其中收敛级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2-1}{n^2}$；　*(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$.

*2. 若数列 $\{na_n\}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 也收敛，但其逆不真. 又，若 $a_n>0$，则逆命题也成立.

*4. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2k-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2k}$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

*5. 试求在第 i 点钟到第 $i+1$ 点钟的什么时间，时钟上的分针恰好与时针重合.

第 2 节　正项级数及审敛法

由于部分和通项 $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 一般地不能求得，级数的和一般地也不能求得。我们的**重点**在级数**审敛**。**不求部分和也能审敛**。

我们从简单的开始。

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项都是非负的，即 $u_n \ge 0$ $(n = 1,2,\cdots)$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数（应该称非负项级数）.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一正项级数，其部分和数列 $\{s_n\}$ 显然是一个单调增加数列。因此，$\{s_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{s_n\}$ 有上界．由此就得到了下述基本定理：

基本定理　正项级数收敛的充分必要条件是它的部分和数列有上界.

上述基本定理不仅给出了一种判别正项级数的收敛性的方法，更重要的是，它是导出几乎所有直接实用的正项级数审敛法的基础.

定理 2.1（**比较审敛法**）　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且**自某项起**有 $u_n \le v_n$ 。

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 亦收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 亦发散.

（**记法：**对于正项级数，大项的级数收敛则小项的级数也收敛；小项的级数发散则大项的级数也发散。项足够小就收敛，项太大就发散到 $+\infty$ 了。）

证　(1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于 s，由于**级数的敛散性与前面有限项无关**，不妨假定 $u_n \le v_n$ 对所有 $n = 1,2,\cdots$ 都成立，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 s_n 满足

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le v_1 + v_2 + \cdots + v_n \le s,$$

即单调增加的部分和数列 s_n 有上界，由基本定理知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 是 (1) 的逆否命题.

定理 2.1 的用法：设要审敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，但 u_n 很复杂。如果你估计 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\underset{(复杂)}{u_n} \underset{(放大一点点)}{\le} \underset{(简单)}{v_n}$，又能审 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，根据定理 2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；如果你估计 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\underset{(复杂)}{u_n} \underset{(缩小一点点)}{\ge} \underset{(简单)}{v_n}$，又能审 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，根据定理 2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

思考题：

1. 设 k 为正数，N 为正整数，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，若 $u_n \le k v_n$ $(n \ge N)$，则怎样条件下 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，又怎样条件下 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散？（$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} kv_n$ 同敛散。定理 2.1 中，$u_n \le v_n$ 可改为 $u_n \le k v_n$ 。）

【例 2.1】 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$ 的收敛性.

解 由于 $\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{1+n}\geq\frac{1}{2n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$ 发散.

【例 2.2】 讨论 $p-$ 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的收敛性.

解 若 $p\leq 1$，则 $n^p\leq n$，故 $\frac{1}{n^p}\geq\frac{1}{n}$，而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

若 $p>1$，对于 $k-1\leq x\leq k\ (k\geq 2)$，由 $x^p\leq k^p$，有 $\frac{1}{x^p}\geq\frac{1}{k^p}$，从而部分和

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}=1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^p}\mathrm{d}x\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=1+\int_{1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

$$\leq 1+\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=1+\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{1}^{+\infty}=1+\frac{1}{p-1}$$

有上界。由基本定理，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

综上讨论，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}收敛, & p>1\\ 发散, & p\leq 1\end{cases}$（算不出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的部分和！）。

由于 $p-$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 常用于正项级数的比较审敛，要记住 $p-$ 级数的上述审敛结果.

【例 2.3】 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3(n+1)}}$ 的收敛性.

解 因为 $\frac{1}{\sqrt{n^3(n+1)}}<\frac{1}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3(n+1)}}$ 收敛.

【例 2.4】　判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ 的收敛性.

解　因为，当 $n>e^e$ 时有 $(\ln n)^n=e^{n\ln\ln n}>e^n$，从而 $\frac{1}{(\ln n)^n}<\left(\frac{1}{e}\right)^n$，$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ 收敛，故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ 收敛.

定理 2.2（**比较审敛法的极限形式**）　设 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 均为正项级数，若 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则：

(1) $0<l<+\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 同敛散；

(2) $l=0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛；

(3) $l=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散.

证　(1) 由极限的定义，对 $\varepsilon=\frac{l}{2}$，存在 $N\in Z^+$，当 $n>N$ 时，有不等式

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\frac{l}{2}\Leftrightarrow\frac{l}{2}<\frac{u_n}{v_n}<\frac{3l}{2}\Rightarrow\frac{l}{2}v_n<u_n<\frac{3l}{2}v_n,$$

因此，若 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3l}{2}v_n$ 收敛，由上面不等式的右端 $u_n<\frac{3l}{2}\times v_n$ 可推得 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 也收敛．若 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{l}{2}v_n$ 发散，由上面不等式的左端 $\frac{l}{2}\times v_n<u_n$ 可推得 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 也发散．故两级数同敛散.

(2) 若 $l=0$，则由极限的定义，对 $\varepsilon=1$，存在 $N\in Z^+$，当 $n>N$ 时，有不等式 $0\le\frac{u_n}{v_n}<1$，即 $u_n<v_n$，故当 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

(3) 当 $l=+\infty$，反证法假设 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，由 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=l=+\infty$，则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$，由 (2) $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 收敛，与条件矛盾，故 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散.

若与 $p-$ 级数比较，比较审敛法的极限形式表现为：

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，有

(1) 若 $p>1$ 且 $0\le\lim_{n\to\infty}n^pu_n=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^p}}<+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 若 $p\le1$ 且 $0<\lim_{n\to\infty}n^pu_n\le+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

【例 2.5】　判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-n+1}$；　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+1}}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$.

解 (1) 除掉分母的次要部分保留主要部分得 $\frac{1}{2n^2}$。因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2n^2-n+1}}{\frac{1}{2n^2}}=1$，而

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-n+1}$ 收敛.

(2) 除掉分子分母的次要部分保留主要部分得 $\frac{n}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$。因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}=1$，而

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+1}}$ 发散.

(3) 利用归结原理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n^2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{洛必达}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛.

用比较审敛法（或其极限形式）判别正项级数的敛散性，要用到敛散性已知的正项级数. 如何利用正项级数(级数的通项)自身的特点(不需要敛散性已知的正项级数)来判别正项级数的收敛性有以下两个审敛法(比值审敛法与根值审敛法).

定理 2.3（比值审敛法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$。则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 当 $+\infty\geq\rho>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

(3) 当 $\rho=1$ 时，本定理无效.

证 显然 $\rho\geq 0$。

(1) 当 $\rho<1$ 时，可取一适当小的正数 ε，使得 $\rho+\varepsilon=r<1$. 根据极限的定义，存在 $N\in Z^+$，当 $n\geq N$ 时，就有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$，于是有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r$，$u_{n+1}<r\cdot u_n$，即有

$u_{N+1}<r\cdot u_N$，

$u_{N+2}<r\cdot u_{N+1}<r^2\cdot u_N$，

$u_{N+3}<r\cdot u_{N+2}<r^2u_{N+1}<r^3\cdot u_N$，…，

级数 $u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\cdots$ 的各项小于收敛的等比级数($0<r<1$)

$$r\cdot u_N+r^2\cdot u_N+r^3\cdot u_N+\cdots$$

的对应项，故 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 亦收敛.

(2) 当 $+\infty>\rho>1$ 时，$\exists\varepsilon>0$，使得 $\rho-\varepsilon>1$，据极限定义，存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon,$$

于是有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon > 1$，$u_{n+1} > u_n$，因此，当 $n > N$ 时，级数的一般项是逐渐增大的，它不趋向于零，由级数性质 4 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当 $+\infty = \rho$ 时，据 $+\infty$ 定义，存在 N，当 $n > N$ 时，有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$，$u_{n+1} > u_n$，因此，当 $n > N$ 时，级数的一般项是逐渐增大的，它不趋向于零（实际上趋于 $+\infty$），由级数性质 4 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

（3）当 $\rho = 1$ 时，级数可能收敛，也可能发散，本定理无效.

例如，对于 $p-$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，不论 p 取何值，总有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^p}\Big/\frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1 .$$

但是，级数在 $p > 1$ 时收敛，而当 $p \le 1$ 时，级数发散.

【例 2.6】 判别下列级数的收敛性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (x>0)$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}\ (a>0)$.

解 (1)因为 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{n+1}$ 很简单，试用比值审敛法。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0<1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 收敛.

(2)因为 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!a^n}{n^n}=\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$ 很简单，试用比值审敛法。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{a}{e}$$

故当 $\frac{a}{e}<1$ 即 $0<a<e$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}$ 收敛；当 $\frac{a}{e}>1$ 即 $a>e$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}$ 发散.

当 $\frac{a}{e}=1$ 即 $a=e$ 时，比值审敛法失效，但由于 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$，故 $u_n\not\to 0\ (n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}$ 发散.

思考题：

2. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$. 又，能否将所用方法推广到一般？

（$a=1$ 时收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}$（例 2.6（2））的一般项趋于 0，所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。可以推广到一般。）

用类似于证明定理 2.3 的方法不难证明以下根值审敛法（请读者自己完成）：

定理 2.4（根值审敛法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r$。则

（1）当 $r<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）当 $+\infty\geq r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（3）当 $r=1$ 时，本定理无效.

定理 2.3 和 2.4 统一成一个定理：

定理（比值、根值审敛法）设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r$$

则（以 1 为分界）

（1）当 $r<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；（此时 u_n 小）

（2）当 $+\infty\geq r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；（此时 u_n 大）

（3）当 $r=1$ 时，本定理无效.

思考题：

4. 在定理 2.4 中，若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r=1$，试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性.

对于 p- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，不论 p 取何值，总有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^p}=1.$$

但是，级数在 $p>1$ 时收敛，而当 $p\le 1$ 时，级数发散.

【例 2.7】 判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}\ (a>0)$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{[3+(-1)^n]^n}$.

解 (1)因为一般项有 n 次方，试用根值审敛法。因为 $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^p}}=\lim\limits_{n}\frac{a}{(\sqrt[n]{n})^p}=a$，所以当 $a<1$ 时，级数收敛；$a>1$ 时，级数发散；$a=1$ 时，级数是 $p-$ 级数，仅当 $p>1$ 时收敛.

综合得，当 $a<1$ 时或 $a=1$ 且 $p>1$ 时级数收敛；否则，级数发散.

(2) 因为一般项有 n 次方，试用根值审敛法。因 $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}}=\lim\limits_{n}[\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n]=\frac{e}{2}>1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 发散.

(3) 因 $0<\frac{n}{[3+(-1)^n]^n}\le\frac{n}{2^n}$，且 $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\lim\limits_{n}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{[3+(-1)^n]^n}$ 收敛.（注意：$\lim\limits_{n}\sqrt[n]{\frac{n}{[3+(-1)^n]^n}}$ 不存在,不能直接用根值审敛法。）

注：由第 1 章例 2.5 已知，若 $\lim\limits_{n}\frac{u_{n+1}}{u_n}=a$，则必有 $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{u_n}=a$. 这说明凡是可用比值审敛法判断收敛性的级数，必可用根值审敛法审敛. 但反之不一定成立. 从而根值审敛法较之比值审敛法更有效.

定理 2.5（积分审敛法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数。若存在 $[1,+\infty)$ 内单调减少的非负连续函数 $f(x)$，使得从某项开始 $u_n=f(n)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 的同敛散.

证 不妨设 $u_n=f(n)\ (n=1,2,\cdots)$。

由已知，当 $k\le x\le k+1\ (k\in Z^+)$ 时，

$$u_{k+1}=f(k+1)\le f(x)\le f(k)=u_k$$

从而有

$$u_{k+1}=\int_k^{k+1}u_{k+1}dx\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le\int_k^{k+1}u_k dx=u_k,$$

故

$$s_n-u_1=\sum_{k=1}^{n-1}u_{k+1}\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx=\int_1^n f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n-1}u_k=s_{n-1}, \qquad (2.1)$$

因此，若 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则由(2.1)式左边，对任意自然数 n，有

$$s_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}\le u_1+\int_1^n f(x)dx\le u_1+\int_1^{+\infty}f(x)dx,$$

由基本定理，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则由(2.1)式，$\lim\limits_{n}\int_1^n f(x)dx$ 存在（单调有界原理），故广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

【例 2.8】 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>0)$ 的敛散性.

解 把 n 改为 x，取 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}\ (p>0)$，则 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上满足积分审敛法的条件. 当 $p=1$，

无穷积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$ 发散；

当 $p\ne 1$，对 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}$，无穷积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_2^{+\infty}=\begin{cases}\dfrac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1}, & (p>1)\\ +\infty & (p<1)\end{cases}$$

即 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散，故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 当 $p>1$ 时收敛；当 $p\le 1$ 时发散.

思考题：

4. 用积分审敛法讨论 $p-$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的收敛性.

解 当 $p\le 0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的一般项不趋于 0，所以发散。

设 $p>0$。取 $f(x)=\frac{1}{x^p}$，则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上满足积分审敛法的条件.

当 $p=1$，无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty \quad 发散;$$

当 $p\ne 1$，无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & (p>1)\\ +\infty & (p<1)\end{cases}$$

即 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散。

故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛；当 $p\le 1$ 时发散.

正项级数审敛我们有 5 个定理可用：

定理 2.1（比较审敛法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是两个正项级数，且**自某项起**有 $u_n\le v_n$。

（1）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 亦收敛；

（2）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 亦发散.

定理 2.2（比较审敛法的极限形式） 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 均为正项级数，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，

则：

（1）$0<l<+\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 同敛散；

（2）$l=0$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛；

（3）$l=+\infty$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散.

定理 **2.3**（比值审敛法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r$。则（以 1 为分界）

（1）当 $r<1$ 时，级数收敛；

（2）当 $+\infty\ge r>1$ 时，级数发散；

（3）当 $r=1$ 时，本定理无效.

定理 **2.4**（根值审敛法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{u_n}=r$ 则（以 1 为分界）

（1）当 $r<1$ 时，级数收敛；

（2）当 $r>1$ 时，级数发散；

（3）当 $r=1$ 时，本定理无效.

定理 **2.5**（积分审敛法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数。若存在 $[1,+\infty)$ 内单调减少的非负连续函数 $f(x)$，使得从某项开始 $u_n = f(n)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的同敛散.

正项级数审敛参考原则：

（1）如果一般项不趋于 0，则级数发散；

（2）如果一般项除掉次要保留主要的能变简单的同阶无穷小，试用比较审敛法的极限形式；

（3）如果一般项容易放大或缩小一点点成一简单的无穷小，试用比较审敛法；

（4）如果一般项有 n 次方，试用根值审敛法；

（5）如果一般项是简单递推，$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 简单，试用比值审敛法；（例如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$，$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+2}}\right)$）

（6）如果以上不凑效，试用积分审敛法；

要审敛一个级数时，各个审敛法都试一下，一定能找到适用的审敛法。

注意：不能把审敛法的结论当条件而条件当结论。比如说，尽管正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，但不能保证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}<1$。

习题 13-2

A 类

1．用比较审敛法判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+5}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n+5}$； *(3) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$； (5) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)\ (a\neq 0)$； (6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

*(7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}\ (a>0)$； *(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$； (9) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arctan n}{n\sqrt{n}}$．

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

解 （3） $0<2^n\sin\frac{\pi}{3^n}<\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n\ (n=1,2,\cdots)$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛。（比较审敛法）

（7）如果 $a=1$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散。

如果 $0<a<1$，$0<\frac{a^n}{1+a^{2n}}<a^n\ (n\geq 1)$，又 $\sum_{n=2}^{\infty}a^n$ 收敛，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$ 收敛。（比较审敛法）

如果 $a>1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^n}{1+a^{2n}}}{\left(\frac{1}{a}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}}{1+a^{2n}}=1$，又 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ 收敛，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$ 收敛。（比较审敛法的极限形式）

因此，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}\begin{cases}\text{发散}, & a=1\\ \text{收敛}, & a>0\text{且}a\neq 1\end{cases}$。

2．用比值审敛法或根值审敛法判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n!}$； *(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-1)^n$； *(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2n}$； *(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\sin\frac{1}{n}\right)^{n/2}$；

*(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{100}}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$； *(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 其中 $a_n\to a$，a_n,b,a 均为正数．

解（7） $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^{100}}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{100}}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$，所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{100}}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$ 发散。（根值审敛法）

3．用适当的方法判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2-\ln n}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$；

*(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}\ (a\in R)$； *(5) $\sum_{n=1}^{\infty}n^a b^n$（$a\in R, b\in R$，且 $b>0$）．

解 （4） $\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}=\frac{4}{n^a\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}\sim\frac{4}{n^a 2\sqrt{n}}=\frac{2}{n^{\frac{1}{2}+a}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+a}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$ 与 $p-$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$ 同敛

散（比较审敛法的极限形式）。所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{a}}\begin{cases}\text{收敛}, & a>\frac{1}{2}\\ \text{发散}, & a\le\frac{1}{2}\end{cases}$。

*4. 设 $a_n>0$，证明

(1) 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le l<1$（或 $\sqrt[n]{a_n}\le l<1$），则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1$（或 $\sqrt[n]{a_n}\ge 1$），则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

*5. 设 $a_n\ge 0$ $(n=1,2,\cdots)$，且数列 $\{na_n\}$ 有界，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

*6. 设 $a_n\ge 0$ $(n=1,2,\cdots)$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛；　　(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛.

B 类

1. 设 $a_n>0$，$b_n>0$，且 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$，证明：

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.　　*(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

*2. 设 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln a_n}{\ln n}=q$，证明：

(1) 若 $q>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；　　(2) 若 $q<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

3. 判别下列级数的收敛性：

*(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$；　*(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1+a}}$ $(a>0)$；

*(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$；　*(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

解 (1)

$$0<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{1}{n}}\arctan\frac{1}{n}(n\ge 1)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}\arctan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}\arctan\frac{1}{n}$ 收敛。故，$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛。（比较审敛法（极限形式））

*(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3^{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^4}{3^t}\overset{\text{洛必达}}{=}0$，又 $p-$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛。（比较审敛法的极限形式）

（2）提示：$0<\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}<\frac{n^3\left(\sqrt{2}+1\right)^n}{3^n}$。

4. 求下列极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^n}\ (a>1)$；　　*(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)\ (p>1)$．

*解　（2）设收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的部分和数列为 $\{s_n\}$。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)=\lim_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=\lim_{n\to\infty}s_{2n}-\lim_{n\to\infty}s_n=0\ 。$$

（或解：$0\le\frac{n}{(2n)^p}\le\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\le\frac{n}{(n+1)^p}\to 0$）

第 3 节　任意项级数

前面讨论了正项级数的收敛性问题，对于任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$（其中 u_n 可以为任意实数），其收敛性要比正项级数复杂得多，我们仅讨论某些特殊类型的任意项级数的收敛性.

3.1　交错级数及其审敛法

如果 $u_n > 0(n = 1,2,\cdots)$，各项正、负交错的数项级数为

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots \tag{3.1}$$

或

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots + (-1)^n u_n + \cdots$$

称为交错级数.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，所以只需讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$。

对于交错级数，有下面的审敛法：

定理 3.1（交错级数审敛法）　如果交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足如下条件：

(1) $u_n \ge u_{n+1}\ (n = 1,2,\cdots)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

则

（1）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛；

（2）$0 \le \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \le u_1$；

（3）余项的绝对值 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k\right| \le u_{n+1}$.（余项即用 s_n 近似代替 s 的绝对误差）

证　（1）先证 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ 存在．将(3.1)式的前 $2n$ 项的部分和 s_{2n} 写成如下两种形式

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

及

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n},$$

由条件(1)可知所有括号内的差均非负，以上第一表达式说明数列 s_{2n} 单调增加；而第二个表达式表明 $0 \le s_{2n} \le u_1$，数列 s_{2n} 有上界.

由单调有界数列必有极限准则，$\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$ 存在，并且 $0 \le s \le u_1$.

再证 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$．因 $s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$，由条件(2)可知，

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = s + 0 = s.$$

由于级数的偶数项之和与奇数项之和都趋向于同一极限，故级数(3.1)的部分和当 $n\to\infty$ 时具有极限 s．这就证明了级数(3.1)收敛于 s，即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$，且 $s \le u_1$.

最后证明 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k\right| \le u_{n+1}$．余项可以写成 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$．其绝对值为

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k\right| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots,$$

此式的右端也是一个交错级数，它满足收敛的两个条件，故其和应小于它的首项，即 $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k\right| \le u_{n+1}$.

【例 3.1】 试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ 的收敛性.

解 对任意的 p，都有 $\dfrac{1}{n^p} > 0$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ 是交错级数.

当 $p > 0$ 时，由于 $\left\{\dfrac{1}{n^p}\right\}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p} = 0$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛.

当 $p \le 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p} \ne 0$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ 发散.

记住： $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p > 0\\ \text{发散}, & p \le 0\end{cases}$。

【例 3.2】 试讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ 的收敛性.

解 $n \ge 2$ 时 $\dfrac{\ln n}{n} > 0$，因此 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ 是交错级数.

令 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0\ (x \ge 3)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$，故当 $n \ge 3$ 时，$\dfrac{\ln n}{n}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = 0$，所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ 收敛.

方法总结： 用函数讨论单调性（也可用归纳法证明单调性）。

思考题：

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的通项 $u_n > 0$ 且 $u_n \ge u_{n+1}\ (n = 1,2,\cdots)$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 是否收敛?（发散。因为一般项不趋于 0。）

3.2 绝对收敛与条件收敛

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛.

定理 3.2（绝对收敛审敛法） 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（绝对收敛的级数绝对是收敛的。）

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，因 $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$，而 $0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|)$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(u_n + |u_n|) - |u_n|]$ 收敛.

例如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ 当 $0 < p \le 1$ 时条件收敛（定理 3.2 的逆不成立）；当 $p > 1$ 时绝对收敛；当 $p \le 0$ 时发散.

题目：判别给定的（有正有负项）级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是绝对收敛还是条件收敛。

有正有负项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的审敛方法：

（1）如果用正项级数审敛法判定$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$是收敛的，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，并且是绝对收敛；

（2）如果用正项级数审敛法判定$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$是发散的，又用交错级数审敛法（我们只讲这一方法）判定$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是收敛的，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛。

【例 3.3】 讨论下列级数的收敛性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2}$ $(a \in R)$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln(1+\frac{1}{n})$.

解 (1) 由于 $\left|\frac{\sin(na)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$，而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(na)}{n^2}\right|$亦收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2}$收敛，且为绝对收敛.

(2) 由于

$$\left|(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})\right| = \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}\ (n \to \infty),$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ 发散.

但是，因为$\ln(1+\frac{1}{n}) > \ln(1+\frac{1}{n+1})$，$\forall n \in Z^+$，且$\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$，由交错级数审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$收敛，是条件收敛.

【例 3.4】 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}}$ $(p \ge 1)$ 的收敛性.

解 由于

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}}\right| = \frac{1}{n^p + (-1)^{n-1}} \sim \frac{1}{n^p}\ (n \to \infty)$$

所以当$p > 1$时，原级数绝对收敛； 当$p = 1$时，原级数的绝对值级数发散．但因为

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n + (-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{n[n+(-1)^{n-1}]}$$

且级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[n+(-1)^{n-1}]}$均收敛(为什么?)，故级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}}$收敛，即当$p = 1$时，原级数条件收敛.

*绝对收敛级数有许多性质是条件收敛级数所不具有的．为叙述方便，我们把由级数的项重新排列后所得到的级数称为原级数的更序级数.

性质 3.1 绝对收敛级数的更序级数仍然绝对收敛，且其和不变.

证 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，其和为s．要证明其更序级数$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$绝对收敛且其和仍为s.

(1) 当u_n不变号时，不妨设$u_n \ge 0$，这时$u'_n \ge 0$．设$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$的前项和s'_n，则

$$s_n' = \sum_{k=1}^{n} u_k' \le \sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$$

即 $\{s_n'\}$ 有上界，从而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' \le \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 的更序级数，因而也有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \le \sum_{n=1}^{\infty} u_n'$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数时，令 $v_n = u_n + |u_n|$，由定理 3.2 的证明知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是收敛的正项级数，因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的更序级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$，相应地 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ，$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的更序级数分别为 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n'$，$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n'|$，而由(1)的结论可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n' = \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n'| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} v_n' - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n'| = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

证毕.

性质 3.1 也称为绝对收敛级数的更序不变性. 对条件收敛级数而言，该性质不成立.

【例 3.5】 交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \cdots$$

条件收敛，设它的收敛和为 s .

下面讨论它的几种新组合

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots$

它的前 $2n$ 项所作成的部分和为

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

对级数的项作如下重排

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots,$$

它的前 $3n$ 项所作成的部分和为

$$s_{3n}^* = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} s_{2n}$$

$$s_{3n-1}^* = \frac{1}{2} s_{2n} + \frac{1}{4n}, \quad s_{3n-2}^* = s_{3n-1}^* + \frac{1}{4n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{3n-1}^* = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot s_{2n} + \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2} s,$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{3n}^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot s_{2n} = \frac{1}{2} s,$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{3n-2}^* = \lim_{n\to\infty} \left(s_{3n-1}^* + \frac{1}{4n-2}\right) = \frac{1}{2} s,$$

这表明，重排之后的新级数收敛于 $\frac{1}{2} s$.

(2) 对级数的项作如下重排

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{20} - \frac{1}{24} \cdots +$$

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{8k-4}-\frac{1}{8k}+\cdots,$$

它的前 $4n$ 项部分和为

$$s_{4n}^{*}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{8k-4}-\frac{1}{8k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{8k-4}-\frac{1}{8k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{8k-4}-\frac{1}{8k}\right)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{4}s_{2n},$$

而 $s_{4n-1}^{*}=\frac{1}{4}s_{2n}+\frac{1}{8n}$,

$$s_{4n-2}^{*}=\frac{1}{4}s_{2n}+\frac{1}{8n-4}+\frac{1}{8n},$$

$$s_{4n-3}^{*}=\frac{1}{4}s_{2n}+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{8n-4}+\frac{1}{8n},$$

$$\lim_{n\to\infty}s_{4n-3}^{*}=\lim_{n\to\infty}s_{4n-2}^{*}=\lim_{n\to\infty}s_{4n-1}^{*}=\lim_{n\to\infty}s_{4n}^{*}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\frac{1}{4}s,$$

故，重排之后的新级数收敛于 $\frac{1}{4}s$.

由(1)，(2)可知，级数重排后，改变了级数的收敛和．因此，非绝对收敛的级数不能进行项的重排．

我们知道，两个有限项的乘积运算满足分配律，这种性质能否推广到两个无穷级数和的乘积呢？事实上绝对收敛的级数和的乘积是满足分配律的．即有如下性质 3.2．它建立在级数的乘法运算的定义的基础上．

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，仿照有限项之和相乘的规则，作出这两个级数的各项所有可能的乘积 $u_iv_j\ (i,j=1,2,3,\cdots)$，并把这些乘积排成一个无限“方阵”：

$$\begin{array}{cccccc}
u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 & \cdots & u_iv_1 & \cdots\\
u_1v_2 & u_2v_2 & u_3v_2 & \cdots & u_iv_2 & \cdots\\
u_1v_3 & u_2v_3 & u_3v_3 & \cdots & u_iv_3 & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
u_1v_j & u_2v_j & u_3v_j & \cdots & u_iv_j & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

这些乘积能以多种方式排列成一个数列，例如可以按“对角线法”将它们排列成下面形式的数列

$$\begin{array}{ccccc}
u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 & u_4v_1 & \cdots\\
& \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow\\
u_1v_2 & u_2v_2 & u_3v_2 & u_4v_2 & \cdots\\
& \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow\\
u_1v_3 & u_2v_3 & u_3v_3 & u_4v_3 & \cdots\\
& \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow\\
u_1v_4 & u_2v_4 & u_3v_4 & u_4v_4 & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

然后把排列好的数列用加号相联，并把同一对角线上的项括在一起，就构成级数

$$u_1v_1+(u_2v_1+u_1v_2)+(u_3v_1+u_2v_2+u_1v_3)+\cdots+(u_nv_1+u_nv_2+\cdots+u_1v_n)+\cdots \tag{3.4}$$

也可按正方形法把这些乘积排列成下面形式的数列：

$$\begin{array}{c|c|c|cc}
u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 & u_4v_1 & \cdots\\
\cline{1-1}
u_1v_2 & u_2v_2 & u_3v_2 & u_4v_2 & \cdots\\
\cline{1-2}
u_1v_3 & u_2v_3 & u_3v_3 & u_4v_3 & \cdots\\
\cline{1-3}
u_1v_4 & u_2v_4 & u_3v_4 & u_4v_4 & \cdots\\
\cline{1-4}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{array}$$

然后把排列好的数列用加号相联，并把同一框内的项括在一起，就构成级数

$$u_1v_1+(u_2v_1+u_2v_2+u_1v_2)+\cdots+(u_nv_1+u_nv_2+\cdots+u_nv_n+u_{n-1}v_n+\cdots+u_1v_n)+\cdots \tag{3.5}$$

我们称按“对角线法”排列所组成的级数(3.4)叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的 Cauchy 乘积．对于 Cauchy 乘积，有以下结论：

性质 3.2　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛，它们的和分别是 s 与 σ，则其 Cauchy 乘积(3.4)也是绝对收敛的，且其和为 $s\cdot\sigma$．

证　考虑级数(3.4)去掉括号所成的级数

$$u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + u_3v_1 + u_2v_2 + u_1v_3 + \cdots + u_nv_1 + u_{n-1}v_2 + \cdots + u_1v_n + \cdots \tag{3.6}$$

若级数(3.6)绝对收敛且其和为 w，由级数基本性质 1.3 及正项级数的比较审敛法知，级数(3.4)也绝对收敛且其和也为 w，因此只要证明级数(3.6)绝对收敛且其和 $w = s\sigma$ 即可．

设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = s_1$，$\sum_{n=1}^{\infty}|v_n| = s_2$，并记 w_m 是级数(3.6)取绝对值后所成级数的前 m 项和，则有

$$w_m \le \sum_{k=1}^{m}|u_k| \sum_{k=1}^{m}|v_k| \le s_1 s_2$$

可见单增数列 $\{w_m\}$ 有上界，故级数(3.6)绝对收敛，记级数(3.6)的和为 w．

由于正方形法构成的级数(3.5)恰是由级数(3.6)的更序级数加了括号而得，根据绝对收敛级数的更序不变性可知，级数(3.6)的更序级数绝对收敛，其和为 w，于是级数(3.5)收敛，其和也是 w．

又，我们不难看出级数(3.5)的前 n 项和恰为

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n)(v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n)，$$

因而当 $n \to \infty$ 时，有

$$w = \lim_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n)(v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n) = s\cdot\sigma．$$

从以上的证明过程中可以看出，由绝对收敛级数的更序不变性，两个绝对收敛级数相乘，无论是按对角线法还是按正方形法或是其它的排列方法构成的乘积级数都是绝对收敛的，且其和都是所给两个级数之和的乘积．

习题 13-3

A 类

1. 判别下列级数是否收敛，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$；　*(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{2n+1}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{2^{n}}$；　*(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$；　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　*(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^{2}-4}}$；

*(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n}\frac{n}{n^{2}+1}-\frac{1}{n^{2}+1}\right]$；　*(10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\ (a>0,a\neq 1)$

*2. 设 $u_n^{+}=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$，$u_n^{-}=\frac{1}{2}(u_n-|u_n|)$，证明：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛的充分必要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{+}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{-}$ 都收敛.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛的必要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{+}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{-}$ 都发散

*3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$ 收敛，又 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是收敛的正项级数，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛.

*4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$ 条件收敛，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$ 发散.

B 类

1. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$；　*(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$；

*(3) $a-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}+\cdots\quad(a^{2}+b^{2}\neq 0)$.

（3）提示：添括号后

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(a-b)+b}{(2n-1)2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-b)}{(2n-1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{(2n-1)2n}。$$

*2.

*3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

证 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$。麦克劳林公式

$$f(x)=\frac{f''(0)}{2}x^{2}+o(x^{2})$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f''(0)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{2}+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{2}\right)$$

当 n 足够大时，$\left|\sqrt{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\left(\frac{|f''(0)|}{2}+1\right)\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{2}=\left(\frac{|f''(0)|}{2}+1\right)\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|f''(0)|}{2}+1\right)\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 是收敛的，

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sqrt{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

第 4 节 函数项级数

4.1 函数项级数的基本概念

每项都是函数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{4.1}$$

称作函数项级数，$u_n(x)$ 称为它的通项，前 n 项之和 $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 称为它的部分和.

$$x_0 \text{称为级数} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{的} \begin{cases} \text{收敛点，如果} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{收敛} \\ \text{发散点，如果} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{发散} \end{cases}$$

集合 $K = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{收敛} \right\}$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域。

每固定一点 $x \in K$ 都有一个和 $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 与 x 对应，由此对应法则就确定一个 K 上的函数 $s(x)$，称 $s(x)$ 为函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数. 记作

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in K \ .$$

称 $r_n(x) = s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的余项。则 $\lim_{n} r_n(x) = 0$（$x \in K$）.（余项即用 $s_n(x)$ 近似代替 $s(x)$ 的误差）

（函数项级数就学这些概念。接下来该学幂级数。）

*【例 4.1】 试讨论等比级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

的收敛性，并求其和函数.

解 由本章例 1.1 知当 $|x|<1$ 时，该级数收敛于和 $s(x)=\dfrac{1}{1-x}$；当 $|x|\geq 1$ 时，该级数发散．因此，该级数的收敛域是开区间 $(-1,1)$.

记住： $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \begin{cases} =\dfrac{1}{1-x}, & |x|<1 \\ \text{发散}, & |x|\geq 1 \end{cases}$。

*【例 4.2】 求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

的收敛域.

解 由于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right|=\frac{1}{n+x^2}\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty),$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right|$ 发散．但因

$$\frac{1}{n+x^2}>\frac{1}{n+1+x^2},\quad \forall n\in Z^+,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+x^2}=0,\quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

因而 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 条件收敛，故其收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

*【例 4.3】 讨论级数

$$x+\sum_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$$

的收敛性，并求其和函数.

解 由于

$$s_n(x)=x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})=x^n$$

故当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$；当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(1)=1$；当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(-1)=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在；当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ 不存在．因此，该级数的收敛域为 $(-1,1]$，在收敛域上和函数为

$$s(x)=\begin{cases}0 & |x|<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

*4.2 函数项级数的一致收敛性

先讨论函数列的一致收敛性.若 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上处处收敛于函数 $f(x)$，即 $\forall x\in D$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，若 D 上有无穷多个点，这就意味着有无穷多个数列收敛．一般地说，这些数列收敛的快慢是不一致的，有的收敛得快些，有的慢些．用 $\varepsilon-N$ 语言来表述：

$$\forall x_0\in D,\ \forall \varepsilon>0, \exists N=N(x_0,\varepsilon)\in Z^+，当 n>N 时，就有 |f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon，$$

这里的 $N=N(x_0,\varepsilon)$ 不仅与 ε 有关，也与 x_0 有关．对于同一个 $\varepsilon>0$，不同的 x_0 所要求的 $N(x_0,\varepsilon)$ 值可以相差很大．如果某个函数列能够找到一个仅依赖于 ε 不依赖于 x_0，即对区间 D 上的每个 x_0 都适用的 $N=N(\varepsilon)$，函数列的这种收敛的特性对于导出函数项级数的分析性质具有实质性的作用，我们称其为一致收敛.

定义 4.3（**函数列的一致收敛性**） 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $D\subseteq R$ 上的一个函数列，如果存在一个 $D\subseteq R$ 上的函数 $f(x)$，满足：

$$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in Z^+，使得 \forall n>N，\forall x\in D，总有 |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon，$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(x)$，其中 $N(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关而与 x 无关.

思考题：

1. 函数列 $\{s_n(x)\}=\{x^n\}$ 与 $\{f_n(x)\}=\left\{\dfrac{1}{n+x}\right\}$ 在 $(0,1]$ 上一致收敛吗？

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(x)$ 的几何意义是：对于任给 $\varepsilon>0$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，所有函数 $\{f_n(x)\}$ 就落到关于函数 $f(x)$ 的图像对称的宽为 2ε 的带形域中(图 4.1).

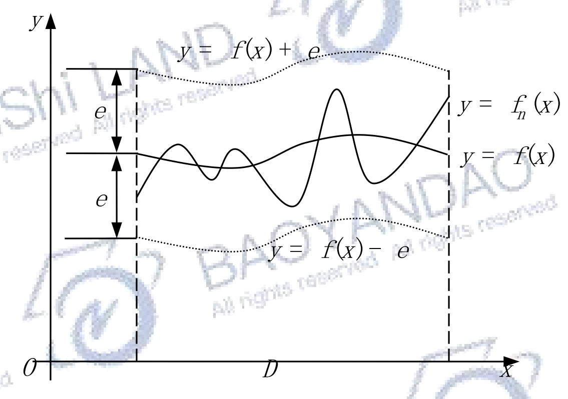

图 4.1

将函数列的一致收敛性应用于级数(4.1)的部分和函数列 $\{s_n(x)\}$ 就得到下面的定义.

定义 4.4（**函数项级数的一致收敛性**） 若函数项级数(4.1)的的部分和函数列 $\{s_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $s(x)$，即

$$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in Z^+，使得 \forall n>N，\forall x\in D，总有 |s_n(x)-s(x)|<\varepsilon，$$

则称该级数在 D 上一致收敛于 $s(x)$.

【例 4.4】 证明函数项级数

$$\frac{x}{1+x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{1+n^2x^2}-\frac{x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$$

在区间 $[0,1]$ 上一致收敛.

证 由于该级数的部分和函数列为 $s_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$，所以

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0,\ (x\in[0,1])，$$

即在 $[0,1]$ 上该级数处处收敛于 $s(x)=0$．进一步，再证明它一致收敛于 0．由于

$$|s_n(x)-s(x)|=\frac{x}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2n}.$$

因此，对 $\forall \varepsilon > 0$，只要取 $N = [\frac{1}{2\varepsilon}]$，当 $n > N$ 时，不论 x 取 $[0,1]$ 中何值总有

$$|s_n(x) - 0| \le \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

由定义 4.4，该级数在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

设函数项级数(4.1)的部分和函数列 $\{s_n(x)\}$ 与函数 $s(x)$ 在 $D \subset R$ 上有定义，若记

$$b_n = \sup_{x \in D} |s_n(x) - s(x)|,$$

不难得到下述结论：

定理 4.1 级数(4.1)在 D 上一致收敛于函数 $s(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n} b_n = 0 . \tag{4.2}$$

证 若级数(4.1)在 D 上一致收敛于函数 $s(x)$，即 $\{s_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $s(x)$，则对于任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(\varepsilon) \in Z^+$ 当 $n > N(\varepsilon)$ 时，$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ 对任意 $x \in D$ 都成立，由此即得

$$b_n = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon,$$

即(4.2)式成立．反之，若(4.2)式成立，对于任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(\varepsilon) \in Z^+$ 当 $n > N(\varepsilon)$ 时，有 $b_n < \varepsilon$．于是对任意 $x \in D$，便有

$$|s_n(x) - s(x)| \le b_n < \varepsilon,$$

故 $\{s_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $s(x)$，即级数(4.1)在 D 上一致收敛于函数 $s(x)$.

由定理 4.1，不难证明例 4.4 中级数在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

【例 4.5】 证明：例 4.3 中级数

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$$

在区间 $(-1,1]$ 上不一致收敛.

证 级数在区间 $(-1,1]$ 上处处收敛于和函数 $s(x)$（例 4.3），部分和函数列 $\{s_n(x)\} = \{x^n\}$．取点 $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in (-1,1]$ $(\forall n \in Z^+)$，有

$$|s_n(x_n) - s(x_n)| = (\frac{1}{\sqrt[n]{2}})^n - 0 = \frac{1}{2},$$

因此 $b_n = \sup_{x \in (-1,1]} |s_n(x) - s(x)| \not\to 0\ (n \to \infty)$，故该级数在 $(-1,1]$ 上不一致收敛.

思考题：

2．函数项级数在 D 上处处收敛与在 D 上一致收敛的关系？

类似于常数项级数的 Cauchy 收敛原理，判别函数项级数一致收敛性，也有 Cauchy 一致收敛原理：

定理 4.2（Cauchy 一致收敛原理） 级数(4.1)的部分和函数列 $\{s_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于函数 $s(x)$ 的充分必要条件是

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in Z^+, \forall n, p \in Z^+$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，$\forall x \in D$，总有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon . \tag{4.3}$$

证明略.

推论 4.1 若级数(4.1)在 D 上一致收敛，则函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0.

判别函数项级数的一致收敛性除了根据定义或定理 4.1 外，有时还可根据级数的通项的特性来判别．这里主要讨论 Weierstrass 判别法（M 判别法）：

定理 4.3（Weierstrass 判别法） 如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$，使得在 D 上总有 $|u_n(x)| \le M_n, n = 1,2,\cdots$，则级数(4.1)在 D 上一致收敛.

证 由于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛，根据常数项级数的 Cauchy 收敛原理，$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in Z^+, \forall n, p \in Z^+$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，总有

$$M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+p}<\varepsilon .$$

但由已知 $\forall n\in Z^{+}$，及 $x\in D$，$|u_n(x)|\le M_n, n=1,2,\cdots$，从而有

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|\le \left|u_{n+1}(x)\right|+\left|u_{n+2}(x)\right|+\cdots+\left|u_{n+p}(x)\right|$$
$$\le M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+p}<\varepsilon$$

由定理 4.2，级数(4.1)在 D 上一致收敛.

思考题:

3. 用 Weierstrass 判别法（M 判别法）判别函数项级数一致收敛的关键是什么？

【例 4.6】 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{x}{n})$ 在区间 $[-\delta,\delta]$ 上的一致收敛性.

解 由 $\left|1-\cos\frac{x}{n}\right|=\left|2\sin^{2}\frac{x}{2n}\right|\le\frac{x^{2}}{2n^{2}}\le\frac{\delta^{2}}{2n^{2}}$，而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta^{2}}{2n^{2}}$ 在区间 $[-\delta,\delta]$ 上收敛，根据 M 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{x}{n})$ 在区间 $[-\delta,\delta]$ 上一致收敛.

【例 4.7】 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在区间 $[\delta,+\infty)$（其中 $\delta>0$）上一致收敛，而在区间 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证 由于 $\forall x\in[\delta,+\infty), \forall n\in Z^{+}$，$|u_n(x)|=ne^{-nx}\le ne^{-n\delta}$，记 $M_n=ne^{-n\delta}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_{n+1}}{M_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}e^{-\delta}=e^{-\delta}<1$$

由比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛，根据 M 判别法级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在区间 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

在区间 $(0,+\infty)$ 上，对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=e^{-x}<1,$$

由比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 收敛，但是取点 $x_n=\frac{1}{n}\in(0,+\infty)$ $(\forall n\in Z^{+})$，则

$$|u_n(x_n)|=ne^{-n\cdot\frac{1}{n}}=\frac{n}{e}\ge\frac{1}{e},$$

故 $\{u_n(x)\}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛于 0，由推论 4.1 知，原级数在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

思考题:

4. 怎样说明函数项级数非一致收敛？

4.3 一致收敛级数的分析性质

若函数项级数一致收敛，则可证明其和函数保持了原相加各函数的分析性质.

定理 4.4（**连续性**） 若 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 D 上连续，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于函数 $s(x)$，则其和函数 $s(x)$ 在 D 上连续.

证 要证 $s(x)$ 在 D 上连续，需证 $s(x)$ 在任意一点 $x_0\in D$ 处连续. 即证

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使得当 $x\in U(x_0,\delta)\cap D$ 时，总有 $|s(x)-s(x_0)|<\varepsilon$.

首先，注意到

$$|s(x)-s(x_0)|=|s(x)-s_n(x)+s_n(x)-s_n(x_0)+s_n(x_0)-s(x_0)|$$
$$\le|s(x)-s_n(x)|+|s_n(x)-s_n(x_0)|+|s_n(x_0)-s(x_0)|. \tag{4.4}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于函数 $s(x)$，由定义 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)\in Z^{+}, \forall n>N$，$\forall x\in D$，总有

$$|s(x)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{4.5}$$

因而，对任意 $x_0\in D$，也有

$$|s(x_0)-s_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.6}$$

由 $u_n(x)$ 在 D 上连续，部分和 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ 也在 x_0 处连续，故对于上述 $\varepsilon>0$，必 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in U(x_0,\delta)\cap D$，有

$$|s_n(x)-s(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{4.7}$$

综合(4.5)，(4.6)，(4.7)代入(4.4)得到，对任意 $x_0\in D$，只要 $x\in U(x_0,\delta)\cap D$，就有

$$|s(x)-s(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

故得证.

由定理 4.4 可知

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\lim_{x\to x_0}s(x)=s(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x). \tag{4.8}$$

思考题：

5. 能否用定理 4.4 证明例 4.3 中级数在区间 $(-1,1]$ 上不一致收敛.

定理 4.5（**可积性**） 若 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $s(x)$，则其和函数 $s(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\forall x\in[a,b]$，有

$$\int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.9}$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t$.

证 由条件及定理 4.4，$s(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此在 $[a,b]$ 上可积. 现证明(4.9)式.

因为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $s(x)$，故对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时，对任意的 $x\in[a,b]$，有 $\left|s(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$，从而

$$\left|\int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{n}\int_a^x u_k(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_a^x\left|s(t)-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right|\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon,$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^x\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t$，即

$$\int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t$.

定理 4.6（**可微性**） 设函数 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 D 上有连续导数，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上处处收敛于函数 $s(x)$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 D 上一致收敛于函数 $\sigma(x)$，则其和函数 $s(x)$ 在 D 上有连续导数，且

$$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sigma(x).$$

证 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 D 上一致收敛于函数 $\sigma(x)$，且 $u_n'(x)$ 在 D 上连续，由定理 4.4，$\sigma(x)$ 在 D 上连续. 又由定理 4.5，$\forall x_0,x\in D$，有

$$\int_{x_0}^x\sigma(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x_0}^x\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^x u_n'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=s(x)-s(x_0)$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于函数 $s(x)$.

在上式中固定 x_0，对积分上限 x 求导得

$$s(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} s(t)dt\right)=s'(x)$$

因此，$s'(x)$ 在 D 上连续，且

$$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

定理 4.4，4.5，4.6 分别回答了函数项级数的和函数是否连续、能否逐项积分、能否逐项微分等基本问题．由以上讨论可见函数项级数的一致收敛性起了关键作用．但是，在这些定理中，一致收敛只是保证这些定理中有关结论成立的充分条件，而不是必要条件．例如，在例 4.7 中已证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $[d,+\infty)$（其中 $d>0$）上一致收敛，在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛，但其和函数 $s(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上却连续且可导．事实上，任取 $x_0\in(0,+\infty)$，必存在 $d>0$，使 $x_0\in[d,+\infty)$，由于该级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $[d,+\infty)$ 上一致收敛，因此 $s(x)$ 在 $[d,+\infty)$ 上连续，自然也在 x_0 处连续．由于 $\left|(ne^{-nx})'\right|=n^2e^{-nx}\le n^2e^{-nd}$，$(x\in[d,+\infty))$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-nd}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(ne^{-nx})'$ 在 $[d,+\infty)$ 上一致收敛，从而函数 $s(x)$ 在 $[d,+\infty)$ 上可导，且 $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(ne^{-nx})'$，特别地在 x_0 处可导．由 x_0 的任意性，$s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且可导．

【例 4.8】 证明：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导函数，并计算 $f''(x)$．

解 由于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$|u_n(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n^4}\right|\le\frac{1}{n^4}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛，由 M 判别法级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，自然处处收敛，$u_n(x)=\frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有一阶连续导数，又不难推得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ 也在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，因此由定理 4.6，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有一阶连续导数，且

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

类似于上述讨论，不难证明 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也有一阶连续导数，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导函数且有

$$f''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

*习题 13-4（不做）

A 类

1. 证明：$\{f_n(x)\}=\left\{\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上处处收敛，但非一致收敛.

2. 证明：若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(x)$，则 $\{|f_n(x)|\}$ 在 D 上一致收敛于 $|f(x)|$.

3. 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(x)$，$\{g_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $g(x)$，则 $\{f_n(x)\pm g_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(x)\pm g(x)$.

4. 证明定理 4.2 的推论 4.1.

5. 讨论下列级数在给定区间上的一致收敛性.

   (1) $\dfrac{1}{1+x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$ $x\in[0,1]$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2x}$ $x\in(0,+\infty)$；

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$, $|x|\ge r>0$；

   (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$, $x\in[0,1]$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^3\mathrm{e}^{-nx}$, $x\in[0,+\infty)$；

   (7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,2^{-nx}$,　1° $x\in[\delta,+\infty)\ (\delta>0)$；　2° $x\in(0,+\infty)$；

6. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln x$ 在 $(0,1]$ 上不一致收敛.

7. 证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $[-q,q]$ 上一致收敛，且有

   (1) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$, $|x|<1$；

   (2) $\dfrac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$, $|x|<1$

8. 证明：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^4}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导函数，并且计算 $f''(x)$.

9. 设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$, $x>0$，计算积分 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}s(x)\,\mathrm{d}x$.

B 类

1. 对函数列 $\{f_n(x)\}$ 写出与定理 4.4，4.5，4.6 相应的定理，并证明之.

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内的任一闭子区间上一致收敛，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛，则它在 (a,b) 内处处收敛.

3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$，证明：

   (1) 该级数的收敛区域为 $(-1,1)$；

   (2) 该级数在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛；

   (3) 该级数的和函数在 $(-1,1)$ 内连续.

4. 若 $u_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$u_n(x)=\int_a^x u_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t, n=1,2,\cdots$，试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

5. 如果 $\forall n\in Z^+$，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点处绝对收敛，证明它在 $[a,b]$ 上绝对一致收敛（绝对值级数一致收敛）.

第 5 节　幂级数

本节及下一节将讨论一类常用的函数项级数——幂级数及其重要性质.

5.1　幂级数及其收敛性

固定常数 x_0，函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{5.1}$$

称为 $x-x_0$ 的幂级数或 x_0 点的幂级数，简称幂级数. 常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 称为幂级数的系数. 若 $x_0=0$，则幂级数(5.1)变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots . \tag{5.2}$$

当 $x=0$ 时(5.2)收敛. 即(5.2)总有收敛点 $x=0$.

两种幂级数(5.1)和(5.2)该学哪一种呢?

方法：如果我们熟悉了 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的理论，当遇到 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的问题时，作变换 $x-x_0=t$，

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$，由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的理论得到关于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的结论，再由关系 $x-x_0=t$ 把关于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的结论翻译成关于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的结论。

懂得上面的方法后，只要学好较简单的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 就可以了。

*【例 5.1】 求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$　　(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

解 (1) 由例 1.1 知，当 $|x|<1$ 时，该级数收敛于和 $\frac{1}{1-x}$；当 $|x|\geq 1$ 时，该级数发散．因此，该幂级数的收敛域是 $(-1,1)$．

(2) 因

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}\Big/\frac{|x^n|}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$$

故对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛，从而收敛，得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛域是 $(-\infty,+\infty)$．

(3) 因 $\lim_{n\to\infty}\left((n+1)!\left|x^{n+1}\right|/n!\left|x^n\right|\right)=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|=\begin{cases}0, & x=0,\\ +\infty, & x\neq 0\end{cases}$，故当 $x\neq 0$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 发散；当 $x=0$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 收敛，$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 的收敛域为 $\{0\}$．

我们先看一下 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域 K 是什么样子（总有 $0 \in K$）.

定理 5.1（阿贝尔(Abel)定理） 设 $|x_1| < |x_2|$。对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，有

（1）若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 绝对收敛；

（2）若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 发散，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ 也发散。

证 （1）设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ 收敛。则 $\lim_{n\to\infty} a_n x_2^n = 0$。于是存在一个正数 M，使得 $|a_n x_2^n| \le M$ $(n = 0,1,2,\cdots)$，从而

$$|a_n x_1^n| = \left|a_n x_2^n \cdot \frac{x_1^n}{x_2^n}\right| = |a_n x_2^n| \cdot \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^n \le M \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^n,$$

由于 $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| < 1$，等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^n$ 收敛，从而 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ 收敛，故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 绝对收敛；

（2）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 发散。反证法，假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ 收敛。根据上面已证明的（1）结论，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 应收敛，这与条件 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 发散矛盾。故定理得证.

根据阿贝尔定理，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域 K 是下面的样子：$K = \{0\}$ 或 $K =$ 全体实数，或 K 是一个 以 0 为中心的区间（开或闭或半开半闭的）。

设 K 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域。上确界 $R = \sup\{x \mid x \in K\}$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径。

根据阿贝尔定理， $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $0 \le R \le +\infty$ 有下列特点。

（1）当 $R = 0$ 时，收敛域 $K = \{0\}$；

（2）当 $R = +\infty$ 时，收敛域 $K =$ 全体实数；

（3）当 $0 < R < +\infty$ 时，

（i）当 $|x| < R$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；当 $|x| > R$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散；

（ii）当 $x = \pm R$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可能收敛，也可能发散．要具体分别对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ 审敛。

开区间 $(-R, R)$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域 K 是 $\{0\}$ 或是一个 以 0 为中心收敛半径 R 为半径的区间（开或闭或半开半闭的）。

上面已经看到收敛半径是关键重要。我们先给出收敛半径 R 的求法，见定理 5.2。

思考题：

1. 求幂级数的收敛域的关键是什么？

定理 5.2　对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$，则其收敛半径为

$$R=\begin{cases}\frac{1}{r}, & 0<r<+\infty\\ +\infty, & r=0\\ 0, & r=+\infty\end{cases}.$$

（三种情况统一为 $R=\frac{1}{r}$。）

证　考察幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的各项取绝对值所成的级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$，该级数相邻两项之比为 $\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|$，因此

（1）$0<r<+\infty$。$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = r\cdot|x|$，

根据比值审敛法，$|x|<\frac{1}{r}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ 收敛，即幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；$|x|>\frac{1}{r}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ 从某个 n 开始，有 $\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|>\left|a_n x^n\right|$，从而 $\left|a_n x^n\right|$ 不趋向于零，进而 $a_n x^n$ 也不趋向于零，因此幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散．于是，收敛半径 $R=\frac{1}{r}$．

（2）$r=0$。则对任何 x，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = r\cdot|x| = 0,$$

由正项级数比值审敛法，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对任何 x 绝对收敛，这表示幂级数(5.2)的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$，即收敛半径 $R=+\infty$．

（3）$r=+\infty$。则对任何 $x\neq 0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = +\infty,$$

故从某个 n 开始，有

$$\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}>1,\ \lim_{n\to\infty}\left|a_n x^n\right|\neq 0，从而 \lim_{n\to\infty} a_n x^n\neq 0,$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域只能是单点集 $\{0\}$，即收敛半径 $R=0$．

题目： 求给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径、收敛区间、收敛域。

方法：

（1）求收敛半径 R（方法是：用定理 5.2 或比值审敛法（定理 5.2 是用比值审敛法证明的））；由收敛半径得收敛区间 $(-R,R)$。

（2）如果 $0<R<+\infty$，审查 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ 是否收敛。

（3）由（1）（2）得到收敛域。

【例 5.2】　求下列幂级数的收敛半径、收敛区间与收敛域：

(1) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$．

解　(1) 由于

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n+1}\Big/(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

故收敛半径是 $R=1$，收敛区间是 $(-1,1)$．

在左端点 $x=-1$，幂级数成为

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{n}-\cdots,$$

它是发散的；在右端点 $x=1$，幂级数成为

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

它是收敛的．故收敛域为 $(-1,1]$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$；

(2) 令 $x-1=t$，则原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\Big/\frac{3^n+(-2)^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3+(-\frac{2}{3})^n(-2)}{1+(-\frac{2}{3})^n}=3$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$ 的收敛半径 $R_t=\frac{1}{3}$，因此它在 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 内绝对收敛．由 $x=t+1$ 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$ 在 $(-\frac{1}{3}+1,\frac{1}{3}+1)=(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$ 内绝对收敛，即收敛区间为 $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$．

在 $x=\frac{2}{3}$ 处，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(-\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+(\frac{2}{3})^n}{n}$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{2}{3})^n}{n}$ 也收敛，故原级数在 $x=\frac{2}{3}$ 处收敛．在 $x=\frac{4}{3}$ 处，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(\frac{2}{3})^n}{n}$ 发散．故原级数收敛域为 $[\frac{2}{3},\frac{4}{3})$．

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$．

(3) 由于此幂级数缺少奇次幂项，可以考虑直接用正项级数的比值审敛法来求收敛半径．因

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}\Big/\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n-2}|x|^2=\frac{1}{2}|x|^2$$

当 $\frac{1}{2}|x|^2<1$，即 $|x|<\sqrt{2}$ 时，幂级数绝对收敛；当 $\frac{1}{2}|x|^2>1$，即 $|x|>\sqrt{2}$ 时，幂级数发散；所以收敛半径为 $R=\sqrt{2}$，收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$．

对于端点 $x=\pm\sqrt{2}$，幂级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}(\pm\sqrt{2})^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2},$$

都是发散的．故收敛域也是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$．

（也可作变换 $x^2=t$，先讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^n$，再翻译过 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$。）

【例 5.3】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n}x^n$ 的收敛半径与收敛域.

解 本题不能应用定理 5.2 或应用比值审敛法的原理来求收敛半径（为什么？）.

由于 $\frac{1}{n}|x|^n\le\left|\frac{2+(-1)^n}{n}x^n\right|\le\frac{3}{n}|x|^n$，当 $|x|<1$ 时，原级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，原级数发散；因此它的收敛半径 $R=1$．而当 $x=\pm 1$ 时，原级数发散，故收敛域为 $(-1,1)$．

【例题】 设常数 $a>0$，已知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n a^n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(-a)^n$ 发散。求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径、收敛区间和收敛域.

解 直接根据阿贝尔定理，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径 $R=a$，收敛区间 $(-a,a)$，收敛域 $K=(-a,a]$.

思考题：

2. 能否利用其它正项级数审敛法给出求收敛半径的公式？若能，试写出公式.

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}。$$

3. 试小结求收敛半径的方法.

5.2 幂级数的运算

1 幂级数的四则运算性质

根据第 1 节性质 1.2 与第 3 节性质 3.2，我们不难得到以下幂级数的运算性质.

定理 5.3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2，记 $R=\min\{R_1,R_2\}$，则在 $(-R,R)$ 上，有:

(1) 级数 $\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\pm\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 收敛，且

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\pm\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n\pm\beta b_n)x^n,\ (\alpha,\beta\in R).$$

*(2) 它们的乘积级数收敛，且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n,$$

其中 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0$．（分配律相乘然后合并同类项）

值得注意的是：两个收敛幂级数经过加减运算或乘法运算所得到的幂级数，可能其收敛半径 $R\geq\min\{R_1,R_2\}$．例如，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+2^n)x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-2^n)x^n$，它们的收敛半径分别为

$$R_1 = \lim_{n} \frac{1+2^n}{1+2^{n+1}} = \frac{1}{2},\ R_2 = \lim_{n} \frac{1-2^n}{1-2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

但将它们相加所得到的级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(1+2^n)+(1-2^n)]x^n = 2\sum_{n=0} x^n,$$

其收敛半径 $R = 1$, $R > \min\{R_1, R_2\}$

2 幂级数的分析运算性质

定理 5.5 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $s(x)$，收敛半径为 R，则

(1) **连续性** $s(x)$ 在收敛域 K 上连续，即对于 K 上的任一点 x_0，有

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n .$$

(2) **可微性** $s(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且可逐项求导，即

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}，\ |x|<R .$$

(3) **可积性** $s(x)$ 在任意区间 $[a,b]\subset(-R,R)$ 上可定积分，且可逐项求定积分，即

$$\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}，\ |x|<R .$$

（4）由（2）（(3)）逐项求导（定积分）后新幂级数的收敛半径不变。(但是，在端点 R 或 $-R$ 的收敛性可能改变了（要重新审敛))

证 *(1) $\forall x_0\in(-R,R)$，必存在 $|x_0|<r<R$，由定理 5.4，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛于 $s(x)$．但因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的每一项 $a_n x^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是连续函数，根据定理 4.4，$s(x)$ 在 $[-r,r]$ 上连续，因而在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性结论得证.

若幂级数在 $x=R$（或 $x=-R$）收敛，则它在 $[0,R]$（或 $[-R,0]$）上一致收敛，从而其和函数 $s(x)$ 在 $(-R,R]$（或 $[-R,R)$）上连续.

(4) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径为 R_1，我们首先证明 $R_1=R$，为此，证明 $R_1\ge R$ 与 $R_1\le R$ 同时成立.

当 $R=0$ 时，显然有 $R_1\ge R$．

当 $R>0$ 时，$\forall x_0(x_0\ne 0)\in(-R,R)$，取 $x_1\in(-R,R)$，使得 $|x_0|<|x_1|$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n x_1^{n-1}\right|$ 收敛，$\lim_{n\to\infty}\left|a_n x_1^{n-1}\right|=0$，$\left\{\left|a_n x_1^{n-1}\right|\right\}$ 有界，存在正数 M，对一切自然数，都有 $\left|a_n x_1^n\right|\le M$ 从而

$$\left|n a_n x_0^n\right|\le nM\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} nM x^n$ 的收敛半径为 1 且 $\left|\frac{x_0}{x_1}\right|<1$，$\sum_{n=1}^{\infty} nM\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n$ 收敛。于是，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n a_n x_0^{n-1}\right|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 x_0 处绝对收敛，故 $x_0\in(-R_1,R_1)$，因此有 $R_1\ge R$．

当 $R_1=0$ 时，显然有 $R_1\le R$．

设 $R_1>0$。对 $\forall x_0(x_0\ne 0)\in(-R_1,R_1)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n a_n x_0^{n-1}\right|$ 收敛.

因为当 $n>|x_0|$ 时，有

$$\left|n a_n x_0^{n-1}\right|=\left|\frac{n}{x_0}\right|\left|a_n x_0^n\right|>\left|a_n x_0^n\right|，$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_0^n\right|$ 收敛，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^{\,n}$ 绝对收敛，$x_0\in(-R,R)$．$R_1\le R$。

综上所述，就有 $R_1=R$．

类似地，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径相同。

*又 $\forall x \in (-R,R)$，可取 $r < R$，使得 $x \in (-r,r)$．由定理 5.4 知，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛于 $s(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛，根据定理 4.6 知 $s(x)$ 在点 x 处可导，且

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

*(3) $\forall x \in (-R,R)$，由定理 5.4，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-|x|,|x|]$ 上一致收敛，根据定理 4.5 有，

$$\int_0^x s(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

而由上述证明过程可知，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径相同．

结论：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在它的收敛域 K 上连续。

这个结论主要用在把等式成立的范围扩大到原区域的端点。理解下面例子。

由一系列过程得到

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-R < x < R)$$

如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛，又表达式 $f(x)$ 在 R 点左连续，则上面等式两边取 $x \to R^-$ 的极限就得到下面等式

$$f(R) = \lim_{x \to R^-} f(x) = \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

所以 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-R < x \le R)$（等式扩大到了端点 R）。

反复应用定理 5.5，我们知道：幂级数的和函数可以任意阶逐项求导，任意次逐项定积分，且收敛半径始终不变。（但是，在端点 R 或 $-R$ 的收敛性可能改变了（要重新审敛））

思考题：

4. 幂级数的和函数在收敛域内是否存在二阶及以上各阶导数？若存在，又怎样求这些导数？

题目：给定 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数。

方法：用恒等变换、逐项求导、逐项定积分等方法变成和已知的幂级数，再还原成原幂级数的和。

下面通过例子说明解此题的方法。

【例 5.4.1】 求幂级数 (1). $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, (2). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, (3). $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ 在其收敛域内的和函数.

解 （先求收敛域。）

我们已经记住（1）的收敛域为 $(-1,1)$。

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\Big/\frac{1}{n}\right|=1$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n}$ 不收敛.（2）的收敛域为 $[-1,1)$。

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\right|=1$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)1^n$ 都不收敛.（3）的收敛域为 $(-1,1)$。

（1）已要求同学们记住 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1)$。

（2）记 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$。逐项求导（变为和函数已知的 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$）得

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1),$$

两边定积分还原

$$s(x)-s(0)=\int_0^x s'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t)\Big|_0^x=-\ln(1-x), x\in(-1,1),$$

注意到 $s(0)=\sum_{n=1}^{\infty} 0=0$ 及连续性（定理 5.5（1））

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x), x\in[-1,1)。$$

（3）记 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$。逐项求定积分（变为和函数已知的 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$）得

$$\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}, x\in(-1,1),$$

两边求导还原

$$s(x)=\left(\int_0^x s(t)dt\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)。$$

【例 5.4】 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 在其收敛域内的和函数.

解 （先求收敛域。）

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+2}\Big/\frac{1}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$$

故收敛半径 $R=1$.

又因为当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛，当 $x=1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，所以所给幂级数的收敛域是 $[-1,1)$.

设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，由于

$$xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

（如果不两边乘 x，逐项求导时无法消去分母的 $n+1$！）逐项求导得

$$[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ x\in(-1,1),$$

两边定积分还原

$$xs(x)=\int_0^x[ts(t)]'\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x),$$

于是当 $x\neq 0$ 时，有

$$s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x),$$

显然 $s(0)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^n}{n+1}=1$，又注意到在端点-1 的连续性（定理 5.5（1）），得

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & -1\le x<0\text{或}0<x<1\\ 1, & x=0\end{cases}.$$

思考题：

5. 验证例 5.4 中和函数 $s(x)$ 在区间 $[-1,1)$ 上的连续性.

$\lim\limits_{x\to 0}s(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x}\ln(1-x)\right]=1=s(0)$。

【例 5.5】 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$在其收敛域内的和函数.

解 此幂级数缺少偶次幂项,可直接用正项级数的比值审敛法的原理来求收敛半径

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(n+1)x^{2n+1}\big/ nx^{2n-1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x|^2 = |x|^2,$$

当$|x|^2<1$，即$|x|<1$时，幂级数绝对收敛；当$|x|\geq 1$，因幂级数的通项$nx^{2n-1}\not\to 0\ (n\to\infty)$，故幂级数发散，因此幂级数的收敛区间为$(-1,1)$．$\sum_{n=1}^{\infty} n1^{2n-1}$和$\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{2n-1}$都发散（为什么?）。所以收敛域为$(-1,1)$。

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$。$s(x)=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n(x^2)^{n-1}$。作变换$x^2=t$，记$s_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$，其收敛范围为$|t|<1$．利用逐项求导

$$s_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(t^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right)'=\left(t\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)'=\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{1}{(1-t)^2},$$

故和函数$s(x)=x\cdot s_1(x^2)=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$，$x\in(-1,1)$．

我们可以利用幂级数求某些常数级数的和。以例子说明方法。

【例 5.6】 求 $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$ 的和.

解 （**方法**：把要求和的级数作成某幂级数在某点的值。）

$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$ 是幂级数 $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 点的值。先求 $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$ 的和函数。因

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\text{，收敛半径 } R=1\text{.}$$

设 $s(x)=x+2x^2+3\times x^3+\cdots+nx^n+\cdots$，利用逐项求导有

$$\begin{aligned}s(x)&=x\times(1+2x+3\times x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots)\\&=x\times(x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots)'\\&=x\times\left(\frac{x}{1-x}\right)'=x\times\frac{1}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

故，当 $-1<x<1$ 时，有

$$s(x)=x+2x^2+3\times x^3+\cdots+nx^n+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2},$$

令 $x=\frac{1}{2}$，得

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2.$$

思考题：

***5. 试求级数** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 的和.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$ 在 $x=-1$ 点的值。$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$ 的收敛半径

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\Big/\frac{1}{n}\right|}=1$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}1^{n-1}$ 发散（为什么？），$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$ 的收敛域是 $[-1,1)$。

先求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$ 的和函数。记 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$。显然 $s(0)=1$。$x\neq 0$ 时，$s(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}$。

记 $s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}$。逐项求导

$$s_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

两边定积分还原

$$s_1(x)-s_1(0)=\int_0^x s_1'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x),-1<x<1$$

注意到 $s_1(0)=0$，

$$s(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x},-1<x<1,x\neq 0$$

又注意到在端点-1 的连续性（定理 5.5（1）），得

$$s(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x},-1\le x<1,x\neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=s(-1)=\ln 2\ 。$$

习题 13-5

A 类

1. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，试问 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn+m}$ 的收敛半径为多少?其中 k,m 都是给定的正整数.

2. 求下列幂级数的收敛区间与收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$；　*(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!!}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n$；　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2^n}+(-2)^n](x+1)^n$；　6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^{2n-1}$；

*(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$；　*(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$.

3. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-R$ $(R>0)$ 处条件收敛，试求 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径?

4. 求下列幂级数在各自收敛域上的和函数：

*(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$；　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$；　*(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$.

解　(4) 收敛域

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(2n+1)}}=1$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)1^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(-1)^n$ 都发散（为什么？），$K=(-1,1)$。

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\frac{x}{1-x}$$

记 $s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x},-1<x<1$$

5. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，

(1) 证明 $f(x)$ 满足微分方程 $f(x)=f'(x)$，$(-\infty<x<+\infty)$；

(2) 证明 $f(x)=e^x$；

*(3) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.

6. 利用幂级数求下列常数项级数的和：

*(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$；　*(3) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n2^n}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$.

*解　(3) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n2^n}$ 是 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n}x^n$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 的值。

记 $s(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n}x^n$。收敛半径

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n-1)(n+1)}\Big/\frac{1}{(n-2)n}\right]}=1$$

利用逐项求导

$$s'(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)}x^{n-1}=x\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)}x^{n-2}$$

记 $s_1(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)}x^{n-2}$。又逐项求导

$$s_1'(x)=\sum_{n=3}^{\infty}x^{n-3}=\frac{1}{1-x}\quad\text{（为什么？）}$$

定积分还原（$s_1(0)=0$）

$$s_1(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x),-1<x<1$$

$$s'(x)=-x\ln(1-x)$$

定积分还原（$s(0)=0$）

$$s(x)=-\int_0^x t\ln(1-t)dt=-\frac{1}{2}x^2\ln(1-x)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{-t^2}{1-t}dt=-\frac{1}{2}x^2\ln(1-x)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1-t^2-1}{1-t}dt$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\ln(1-x)+\frac{1}{2}\int_0^x(1+t)dt-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\frac{1}{2}x^2\ln(1-x)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n2^n}=s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\ln 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{5}{16}-\frac{3}{8}\ln 2$$

7.*(1) 证明：设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<R$ 时成立，则当 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛时，不论 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 是否收敛，都有 $\int_o^R s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 成立.

(2) 证明：$\int_o^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$.

B 类

*1. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-R,R)$，半径为 R，$0<R<+\infty$，且它在 $x=-R$ 绝对收敛，则它在区间 $[-R,R]$ 上一致收敛.

2. 证明：如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的和函数在 x_0 的某个邻域内恒等于 0，则它的所有系数 a_n 都等于 0.

第 6 节　函数展开成幂级数

之前，给定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$，求它的和函数

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, x\in K\ 。$$

现在我们反过来，给定函数 $f(x)$，找一个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 使得在某个区间内

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\ 。\qquad (6.1)$$

这称为把函数 $f(x)$ 展开成 $x-x_0$ 的幂级数。

6.1　函数展开成幂级数的条件

首先，假设 $f(x)$ 在区间 (x_0-R, x_0+R) 内能展开成幂级数(6.1)．由定理 5.5， $f(x)$ 在区间 (x_0-R, x_0+R) 内任意阶可导，且可对(6.1)式两边逐项求导．从而，$\forall x\in(x_0-R, x_0+R)$ 都有：

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots\ ,$$

$$f''(x)=2!a_2+3!a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!(x-x_0)+\cdots\ ,$$

在以上各式中令 $x=x_0$，就得到

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=f'(x_0),\quad a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),\ \cdots$$

也就是说，如果 $f(x)$ 在区间 (x_0-R, x_0+R) 内能展开成幂级数(6.1)，则(6.1)一定是如下唯一的：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,\quad x\in(x_0-R, x_0+R)\qquad (6.2)$$

幂级数的系数为

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),\quad n=0,1,2,\cdots\ .$$

其次，任意给了在 $x=x_0$ 处有任意阶导数的 $f(x)$，我们总可以写出以下右边的幂级数

$$f(x)\sim f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots\qquad (6.3)$$

我们称右边幂级数为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 级数，当 $x_0=0$ 时称为 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数。

注意：在（6.3）中，我们不写等号“=”而只写了“~”，因为右边幂级数是否收敛？收敛时，和函数是否等于 $f(x)$？都还是很大的问题。

由第 3 章中的 Taylor 公式，若函数 $f(x)$ 在 (x_0-R, x_0+R) 内 $n+1$ 阶可导，则

$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$,有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) = s_{n+1}(x) + R_n(x),$$

其中$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$，$\xi$介于$x_0$与$x$之间，$s_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ + $R_n(x)$是$f(x)$在x_0处Taylor级数的部分和.

不难看出，如果$f(x)$在区间$(x_0 - R, x_0 + R)$内有任意阶导数，则$\lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$，即在$(x_0 - R, x_0 + R)$内Taylor级数收敛于$f(x)$的充要条件是$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, x \in (x_0 - R, x_0 + R)$．因此有如下定理：

定理 6.1　设函数$f(x)$在区间$(x_0 - R, x_0 + R)$内存在任意阶导数，则$f(x)$在$(x_0 - R, x_0 + R)$内能展开成Taylor级数的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

由定理6.1,可以得到$f(x)$在$(x_0 - R, x_0 + R)$内展开成Taylor级数的一个便于应用的充分条件：

推论 6.1　设函数$f(x)$在区间$(x_0 - R, x_0 + R)$内存在任意阶导数，如果存在常数$M > 0$，使得对于任意的$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$，存在N，只要$n > N$就有

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le M,$$

则$f(x)$能在$(x_0 - R, x_0 + R)$内展开成Taylor级数.

如果 $f(x)$ 能在 (x_0-R,x_0+R) 内展开成它在 x_0 处的 Taylor 级数，即等式(6.2)成立，则称此等式为 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 展开式． $x_0=0$ 时，有

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \quad x\in(-R,R) \qquad (6.4)$$

称为 $f(x)$ 的 Maclaurin 展开式．

思考题:

1.若 $f(x)$ 在 $U(0)$ 内满足定理 6.1 的条件,试给出近似代替 $f(x)$ 的 n 次多项式 $P_n(x)$,并给出误差的表达式．

6.2 函数展开成幂级数的方法

现在我们讨论怎样把函数 $f(x)$ 展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数(即 Taylor 级数)．这里先讨论怎样把函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,即 Maclaurin 级数．

把函数 $f(x)$ 展开成 Maclaurin 级数的方法：

（1）找到 $f(x)$ 存在任意阶导数的区间 $0\in I$ 并求出导数 $f^{(n)}(0),(n=0,1,2,\cdots)$；

（2）利用拉格朗日余项估计 $|R_n(x)|$ 并证明 $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0, x\in K\subseteq I$；

（3）写出 $f(x)$ 的 Maclaurin 展开式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots, x\in K 。$$

一般来说，K 是右边幂级数的收敛域。

把函数 $f(x)$ 展开成 x_0 点的 Taylor 级数的方法：

（1）作变换 $x-x_0=t$， $g(t)=f(t+x_0)$；

（2）（用上面方法）写出 $g(t)$ 的 Maclaurin 展开式

$$g(t)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}t+\frac{g''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n+\cdots, t\in I';$$

（3）代回 $t=x-x_0$ 得 $f(x)$ 在 x_0 点的 Taylor 级数展开式

$$f(x)=g(x-x_0)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}(x-x_0)+\frac{g''(0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots, x\in I$$ 其中在变换 $x-x_0=t$ 下 $x\in I$ 与 $t\in I'$ 对应。

【例 6.1】 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数．

解 首先 $f(x)=e^x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内存在任意阶导数，且

$$f^{(n)}(x)=e^x,\ f^{(n)}(0)=1,\ n=0,1,2,\cdots$$

于是得幂级数

$$e^x \sim 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

它的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$ (例 5.1(2)),对于任意固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},\quad (0<\theta<1)．$$

$e^{|x|}$是与n无关的有常数，不难证明$\lim_{n} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$（$\lim_{n} \frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = \lim_{n} \frac{1}{n+1} = 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$的收敛半径$R = +\infty$。因此，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$收敛，从而$\lim_{n} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$），因此有$\lim_{n} e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$,从而$\lim_{n} R_n(x) = 0$，故得到

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{6.5}$$

思考题:

2．求 k 次多项式函数 $f(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_kx^k$ 的幂级数展开式.

3. 试归纳得出将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数的主要步骤.

【例 6.2】 将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 首先 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内存在任意阶导数，且

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n=0,2,4,\cdots\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

于是得幂级数 $\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$，容易求出它的收敛半径为 $R=+\infty$，故收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

又因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\forall n\in Z^+$，都有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1$$

由推论 6.1，得

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty) \quad (6.6)$$

图 6.1 画出了 $\sin x$ 的幂级数展开式的前 n 项部分和 $P_n(x)$ 的图形以及 $\sin x$ 的图形．从图中可以看到，各个 $P_n(x)$ 只在 $x=0$ 的局部范围内近似于 $\sin x$，当 x 距离原点较远时，误差就变得很大，但同时又不难看出，随着 n 的增大，$\sin x$ 与 $P_n(x)$ 相互接近的范围也不断扩大．(6.6)式说明，当 $n\to\infty$ 时，$P_n(x)$ 的图形就与 $y=\sin x$ 的图形趋于一致了．

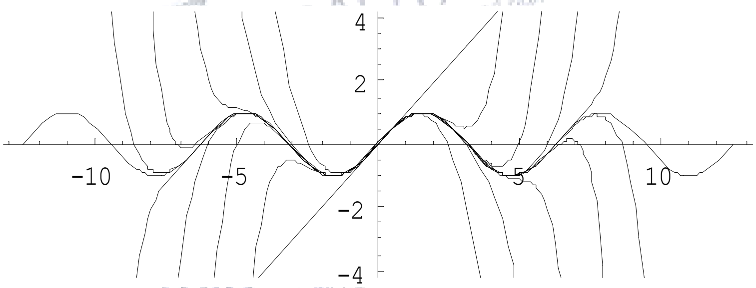

图 6.1

以上求函数 $f(x)$ 的幂级数展开式的方法称为直接法．由于求 Taylor 系数 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ 的工作量较大，因此 $f(x)$ 的 Taylor 级数往往并不容易得到，而且验证 $f(x)$ 满足可展开的条件的难度也较大，因此应用直接法往往比较困难．

根据函数展开为幂级数的唯一性，利用某些已知的函数的展开式并结合幂级数的运算性质，如四则运算，逐项求导，逐项积分以及变量替换，也可以将所给函数展开成幂级数，这种方法称为间接展开法．间接法不需要求导也不需要验证 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$。因此常常用间接法求函数的幂级数展开式．以例说明。

【例 6.3】 将下列函数展开成 x 的幂级数.

(1) $f(x)=\cos x$； (2) $f(x)=\ln(1+x)$．

解 (1) 对 $\sin x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$ 的展开式(6.6)关于 x 逐项求导得（(6.6)对，逐项求导也对）

$$\cos x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n-2},x\in(-\infty,+\infty)\qquad(6.7)$$

(2) $f'(x)=[\ln(1+x)]'=\dfrac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,x\in(-1,1)$。

将上式从 0 到 x 逐项积分,并注意到 $f(0)=\ln 1=0$，得

$$\ln(1+x)=f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^n\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\ x\in(-1,1).$$

由于上式右边的级数在 $(-1,1)$ 的右端点 $x=1$ 处收敛，在左端点 $x=-1$ 处发散，而 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 处连续，故有

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},x\in(-1,1]\qquad(6.8)$$

使用间接法也容易得到如：

$$a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\mathrm{e}^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

为了间接展开的需要，请（结合麦克劳琳公式）记住以下麦克劳琳展开式：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n},(-1<x<1)$$

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n},(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n-2},x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n},x\in(-1,1]$$

思考题：

4.函数 $f(x)$ 的定义域与它的幂级数展开式成立的范围总是一致的吗？使得 $f(x)$ 具有各阶导数的长度最大的区间与它的幂级数展开式成立的范围总是一致的吗？（错。）

【例 6.4】 将下列函数展开成 x 的幂级数.

(1) $f(x)=\ln(3-x)$； (2) $f(x)=\arctan x$.

解 (1) $\ln(3-x)=\ln[3(1-\frac{x}{3})]=\ln 3+\ln[1+(-\frac{x}{3})]$

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{x}{3})^n=\ln 3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\times 3^n}$$

其中 $-1<-\frac{x}{3}\le 1$，即 $-3\le x<3$.

(2) 因为 $f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，而

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n \quad x\in(-1,1).$$

将上式从 0 到 x 逐项积分,并注意到 $f(0)=\arctan 0=0$，就得到

$$\arctan x=f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n]\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t^2)^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in(-1,1).$$

当 $x=\pm1$ 时，上式右边成为 $\pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，它们都是收敛的,而 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=\pm1$ 处连续，故有

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in[-1,1].$$

*【例 6.5】 将幂函数 $f(x)=(1+x)^a$ 展开成 x 的幂级数，其中 a 为任意不为零的实数.

解 当 a 为自然数 n 时，$f(x)$ 为多项式函数：

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2}{(n-1)!}x^{n-1}+x^n \\
&= 1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+x^n .
\end{aligned}
$$

现设 a 不为自然数，由于

$$
\begin{aligned}
&f'(x)=a(1+x)^{a-1}, \\
&f''(x)=a(a-1)(1+x)^{a-2}, \\
&\vdots \\
&f^{(n)}(x)=a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&f(0)=1, f'(0)=a, f''(0)=a(a-1), \cdots \\
&f^{(n)}(0)=a(a-1)\cdots(a-n+1)
\end{aligned}
$$

于是得到幂级数

$$1+\frac{a}{1!}\cdot x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

因 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a-n}{n+1}\right|=1$，故它的收敛半径 $R=1$．故在 $(-1,1)$ 内，上述幂级数收敛，设其和函数为 $s(x)$．下面我们证明 $s(x)=(1+x)^a$，因为

$$s(x)=1+\frac{a}{1!}\cdot x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots ,$$

$$s'(x)=a+\frac{a(a-1)}{1!}x+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots$$

$$=a\left[1+\frac{(a-1)}{1!}x+\cdots+\frac{(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\right] \tag{6.9}$$

两边同乘以因子 $(1+x)$，有

$$
\begin{aligned}
(1+x)s'(x) &= a\left[1+\frac{(a-1)}{1!}x+\frac{(a-1)(a-2)}{2!}x^2+\cdots+\frac{(a-1)\cdots(a-n)}{n!}x^n+\cdots\right] \\
&\quad +a\left[x+\frac{(a-1)}{1!}x^2+\cdots+\frac{(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n-1)!}x^n+\cdots\right] \\
&= a\left[1+\frac{a}{1!}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots\right] \\
&= a\cdot s(x),
\end{aligned}
$$

即 $(1+x)s'(x)=a\cdot s(x)$．引入辅助函数 $G(x)=\dfrac{s(x)}{(1+x)^a}$，则有

$$G'(x)=\frac{(1+x)^a s'(x)-a(1+x)^{a-1}s(x)}{(1+x)^{2a}}=\frac{(1+x)s'(x)-as(x)}{(1+x)^{a+1}}=0,$$

因此 $G(x)\equiv C$（常数）．又 $G(0)=\dfrac{s(0)}{1}=1$，从而有

$$\frac{s(x)}{(1+x)^{\alpha}}=G(x)\equiv 1,\quad s(x)=(1+x)^{\alpha}$$

故有

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \quad x\in(-1,1) \tag{6.10}$$

在区间 $(-1,1)$ 的端点上述展开式是否成立，要看指数 α 的取值而定，例如当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\times 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots\\&=1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n,\quad x\in[-1,1].\end{aligned}$$

【例 6.6】 求下列函数在给定点 x_0 处的幂级数展开式.

(1) $f(x)=\sin x,\ x_0=\frac{\pi}{3}$； (2) $f(x)=\frac{1}{x^2},\ x_0=3$；

(3) $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3},\ x_0=1$.

解 (1) 作变换 $x-\frac{\pi}{3}=t$

$$\sin x=\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,$$

应用 $\sin x$ 的展开式(6.6)和 $\cos x$ 的展开式(6.7)，就有

$$\sin t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}t^{2n-1},\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}t^{2n-2},\ t\in(-\infty,+\infty)$$

从而，有

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2}t^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{3}}{(2n-2)!2}t^{2n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2}t^{2n-1}+\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{3}}{(2n-2)!2}t^{2n-2}\right]$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n-1}+\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{3}}{(2n-2)!2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n-2}\right],\ x\in(-\infty,+\infty)$$

(2) 作变换 $x-3=t$，

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(t+3)^2}=\left(-\frac{1}{t+3}\right)'=\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{t}{3}\right)}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}t^n\right)'$$ 所以（$\left|\frac{t}{3}\right|<1\Leftrightarrow 0<x<6$）

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}}t^n,\ \left|\frac{t}{3}\right|<1$$

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}}(x-3)^n,\ 0<x<6.$$

*(3) $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$， $x_0=1$.

*(3) 作变换 $x-1=t$，

$$f(x)=\frac{1}{(t+1)^2+4(t+1)+3}=\frac{1}{t^2+6t+8}=\frac{1}{(t+4)(t+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{8}\frac{1}{1-\left(-\frac{t}{4}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+3}}t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(-1)^n t^n,\ \left|\frac{t}{2}\right|<1$$

所以（$\left|\frac{t}{2}\right|<1 \Leftrightarrow -1<x<3$）

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(-1)^n(x-1)^n,-1<x<3$$

6.3　*幂级数应用举例

由前面的讨论已知，若函数 $f(x)$ 能展开成幂级数，则在展开式有效的区间内就可用级数的部分和（即 n 次多项式）来近似表示函数 $f(x)$，从而可在展开式有效的区间内计算函数 $f(x)$ 的近似值，而且多项式的项数越多，精度越高，无论精度要求多高，只要取足够多的项数就可达到.

【例 6.7】　计算 $\ln 2$ 的近似值(精确到小数后第 4 位).

解　我们已有展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\ (-1<x\le 1),$$

令 $x=1$，得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

如果取此数项级数的前面部分项之和作为 $\ln 2$ 的近似值，误差为

$$|r_n|\le\frac{1}{n+1}.$$

欲使精度达到 10^{-4}，需要的项数 n 应满足 $\frac{1}{n+1}<10^{-4}$，即 $n>10^4-1=9999$，亦即，n 应要取到 10000 项，这样做计算量过大并且由于计算的项数过多而使舍入误差不断累积变得很大，从而影响近似值的精度，我们应设法寻找一个收敛得较快的级数来计算 $\ln 2$.

将展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\quad(-1<x\le 1)$$

中的 x 换成 $-x$，得

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots\quad(-1\le x<1),$$

两式相减，得到不含有偶次幂的展开式

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}\cdots\right)\quad(-1<x<1),$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2$，解出 $x=\frac{1}{3}$. 以 $x=\frac{1}{3}$ 代入得

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{1}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\times\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

这时（必须先根据误差要求确定取到第几项）只需取前四项之和作为 $\ln 2$ 的近似值，此时误差

$$|r_4|=2\left(\frac{1}{9}\times\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\times\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\times\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2}{3^{11}}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\cdots\right)=\frac{2}{3^{11}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\times 3^9}<\frac{1}{70000},$$

于是　$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right).$

并且考虑到计算时由四舍五入引起的舍入误差，化为小数时应取小数点后五位，得 $\ln 2\approx 0.6931$.

为什么前方法要取 10000 项，而后方法只要取 4 项？因为后方法 $x=\frac{1}{3}$ 绝对值小从而精度好，而前方法 $x=1$ 绝对值大从而精度差。

有些初等函数的原函数不能用初等函数表示，故其定积分就不能用公式计算，但如果这些函数在积分区间上能展开成幂级数，则可利用幂级数逐项积分性质来计算这些定积分的近似值.

【例 6.8】 计算定积分

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

的近似值，精确到 0.0001.

解 被积函数的原函数不能用初等函数表示，但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，即 $x=0$ 是 $\frac{\sin x}{x}$ 的可去间断点，故补充定义 $\frac{\sin x}{x}\Big|_{x=0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，这样被积函数就在 $[0,1]$ 上连续了.

作被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的幂级数展开式，有

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n-1)!},\ (-\infty<x<\infty),$$

在区间 $[0,1]$ 上逐项积分，得

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}+\cdots.$$

上式右边是收敛的交错级数，第 4 项的绝对值

$$|r_4|\le\frac{1}{7\cdot 7!}=\frac{1}{35280}<2.9\times 10^{-4},$$

所以可取前三项的和作为积分的近似值

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\approx 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\approx 0.94611\ .$$

6.4* Euler 公式

设 $z_n=u_n+\mathrm{i}v_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是复数列，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}z_n=z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots \qquad (6.11)$$

称为复数项级数（简称复级数）. 如果 z_n 的实部构成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (6.12)$$

收敛于 u，并且它的虚部构成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \qquad (6.13)$$

收敛于 v，则称复级数(6.11)收敛，并且收敛于和 $w=u+iv$.

如果级数(6.11)的各项的模构成的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称级数(6.11)绝对收敛.

当级数(6.11)绝对收敛时，由于

$$|u_n|\le|z_n|,\quad |v_n|\le|z_n|,$$

故级数(6.12)和(6.13)都绝对收敛，从而收敛，于是级数(6.11)收敛．也就是说，绝对收敛的复级数必定收敛．

现考虑复级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots, \qquad (6.14)$$

对任意的正数 R，当 $|z|\le R$ 时，由于

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right|\le\frac{R^n}{n!},$$

故级数(6.14)绝对收敛．由 R 的任意性，就说明了级数(6.14)在整个复平面上绝对收敛．

由于当 $z=x\in R$ 时，级数(6.14)表示指数函数 e^x，即

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad x\in(-\infty,+\infty),$$

作为实变量指数函数的推广，我们在整个复平面上，将级数(6.14)的和函数定义为复变量指数函数，记作 e^z，即

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \quad (|z|<\infty), \qquad (6.15)$$

在(6.15)中令 $z=\mathrm{i}y$，则有

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{i}y}&=1+\mathrm{i}x+\frac{(\mathrm{i}y)^2}{2!}+\frac{(\mathrm{i}y)^3}{3!}+\cdots+\frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!}+\cdots\\&=1+\mathrm{i}y-\frac{y^2}{2!}-\mathrm{i}\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\mathrm{i}\frac{y^5}{5!}-\frac{y^6}{6!}-\mathrm{i}\frac{y^7}{7!}+\cdots.\end{aligned}$$

将上式右边级数按实部、虚部集项就得到

$$e^{\mathrm{i}y}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\cdots\right)+\mathrm{i}\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots+\cdots\right),$$

即

$$e^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y. \qquad (6.16)$$

由(6.16)，又有

$$e^{-\mathrm{i}y}=\cos y-\mathrm{i}\sin y, \qquad (6.17)$$

于是，从(6.16)及(6.17)可得

$$\begin{cases}\cos y=\dfrac{e^{\mathrm{i}y}+e^{-\mathrm{i}y}}{2}\\[2mm]\sin y=\dfrac{e^{\mathrm{i}y}-e^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}}\end{cases}. \qquad (6.18)$$

(6.16)式及(6.18)式中的两个等式都称为 Euler 公式．它们给出了复变量指数函数与三角函数的关系．

6.5　微分方程的幂级数解法

当微分方程的的解不能用初等函数或其积分式表示时，我们可以利用函数的幂级数展开式来求解．下面用例子说明方法。

1. 求一阶方程的初值问题

【例 6.9】　求方程 $y'-xy-x=1$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解．

解　设方程的解（$b_0,b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$ 待定）

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots,$$

由条件 $y|_{x=0} = 0$, 得 $b_0 = 0$．故 $y = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$,

对上式求导，得

$$y' = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots + n b_n x^{n-1} + \cdots.$$

代入所给方程，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} - x \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n - x = 1,$$

即

$$b_1 + (2b_2 - 1)x + \sum_{n=1}^{\infty} [-b_n + (n+2) b_{n+2}] x^{n+1} = 1,$$

比较上式两端各项的系数，得 $b_1 = 1, b_2 = \dfrac{1}{2}$，及递推公式 $b_{n+2} = \dfrac{b_n}{n+2} \quad (n \geq 3)$，从而,有

$$b_3 = \frac{b_1}{3} = \frac{1}{1 \cdot 3}, b_4 = \frac{b_2}{4} = \frac{1}{2 \cdot 4}, b_5 = \frac{b_3}{5} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5}, \cdots,$$

由此得所求解为

$$\begin{aligned} y &= \left(x + \frac{1}{1\cdot 3} x^3 + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} x^5 + \cdots + \frac{1}{1\cdot 3 \cdot \cdots (2n-1)} x^{2n-1} + \cdots\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2\cdot 4} x^4 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6} x^6 + \cdots + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n} + \cdots\right) \\ &= \left[x + \frac{1}{1\cdot 3} x^3 + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} x^5 + \cdots + \frac{1}{1\cdot 3\cdot \cdots (2n-1)} x^{2n-1} + \cdots\right] \\ &\quad + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n + \cdots\right] \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)} x^{2n-1}. \end{aligned}$$

2.求二阶变系数齐次方程

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$$

的解.

【例 6.10】 求方程

$$y'' - xy = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$$

的解.

解 设方程的解（$b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ 待定）

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots,$$

由条件 $y|_{x=0} = 0$, 得 $b_0 = 0$．对上式求导，得

$$y' = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots + n b_n x^{n-1} + \cdots.$$

依条件 $y'|_{x=0} = 1$，得 $b_1 = 1$。于是

$$y = x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots,$$

$$y' = 1 + 2b_2 x + \cdots + n b_n x^{n-1} + \cdots.$$

对上式再一次求导，得

$$y'' = 2b_2 + 3\times 2b_3 x + \cdots + n(n-1)b_n x^{n-2} + \cdots.$$

将以上两式代入所给方程，得恒等式

$$2b_2 + 3\times 2b_3 x + (4\times 3b_4 - 1)x^2 + (5\times 4b_5 - b_2)x^3 + \cdots + [(n+2)(n+1)b_{n+2} - b_{n-1}]x^n + \cdots = 0.$$

于是上式左端各项的系数均为零，即有

$$b_2 = 0, b_3 = 0, b_4 = \frac{1}{4\times 3}, b_5 = 0, b_6 = 0 \cdots, b_{n+2} = \frac{b_{n-1}}{(n+2)\times(n+1)},$$

递推得 $b_{3m-1} = b_{3m} = 0$，

$$b_{3m+1} = \frac{1}{(3m+1)\cdot(3m)\cdots 7\cdot 4\cdot 3} \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

因此所求的特解是

$$y = x + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 3} + \cdots + \frac{x^{3m+1}}{(3m+1)\cdot(3m)\cdots\cdot 6\cdot 3} + \cdots, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

习题 13-6

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数并指出展开式成立的区间：

(1) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$； *(2) $\sin^2 x$； *(3) $\frac{1}{4+x^2}$；

(4) $\frac{1}{(1+x)^2}$； (5) $(1+x)e^{-x}$； (6) $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$；

(7) $\ln(1-3x+2x^2)$； *(8) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$； (9) $\arcsin x$；

*(10) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 （2）

$$\sin^2 x = \frac12 - \frac12\cos 2x = \frac12 - \frac12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2} = \frac12 - \frac12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-2}}{(2n-2)!}x^{2n-2}, x\in(-\infty,+\infty)$$

(5)

$$(1+x)e^{-x} = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(-1)^{n-1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)(-1)^{n-1}}{n!}x^n, -\infty < x < +\infty$$

(7)提示：$\ln(1-3x+2x^2) = \ln 2 + \ln\left(x^2 - \frac32 x + \frac12\right) = \ln 2 + \ln(x-1) + \ln\left(x+\frac12\right)$，

$\left[(x-1)\right]' = \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x}$， $\ln\left(x+\frac12\right) = -\ln 2 + \ln(1+2x)$。

2. 将下列函数在给定点 x_0 处展开成 $x - x_0$ 的幂级数并指出展开式成立的区间.

*(1) $\sqrt{x}, x_0 = 1$； (2) $\ln x, x_0 = 1$；

(3) $\frac{1}{x^2+3x+2}, x_0 = -4$； *(4) $\ln(3x - x^2), x_0 = 3$.

(5) $\cos x$， $x_0 = -\frac{\pi}{3}$

解 （4） $\ln(3x - x^2)\big|_{x=3} = -\infty$ ，不能展。

（2）作变换 $x-1=t$，

$$\ln x=\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n,\ t\in(-1,1]$$

所以（$t\in(-1,1]\Leftrightarrow x\in(0,2]$）

$$\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n,\ x\in(0,2]$$

*3．设 $R>0$，若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 有相同的和函数，则 $a_n=b_n$， $n=0,1,2,\cdots$．（展开式唯一。）

*4．利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值（误差不超过 0.0001）：

*(1) $\ln 3$ (2) $\cos 2^{\circ}$

*5．利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值（误差不超过 0.0001）：

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$ *(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$

*6．利用欧拉公式将函数 $e^x\cos x$ 与 $e^x\sin x$ 展开成 x 的幂级数．

解 $e^x\cos x+ie^x\sin x=e^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+i)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^nx^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sqrt{2}\right)^ne^{i\frac{n\pi}{4}}x^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$

$$e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n,\quad -\infty<x<+\infty$$

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$$

第 7 节 周期2π傅立叶级数

7.2 三角函数系的正交性

函数集合

$$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\} \tag{7.4}$$

称为周期为2π基本三角函数系.

基本三角函数系(7.4)具有下列特性：

1、周期性 (7.4)中每个函数的周期都是2π。(比如$\sin n(x+2\pi)=\sin(nx+2n\pi)=\sin nx$)

2、正交性 (7.4)中任何两个不同函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分等于零，即

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0$，$(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$，$(n=1,2,3,\cdots)$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0$，$(m,n=1,2,3,\cdots)$；

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0$，$(m,n=1,2,3,\cdots,m\neq n)$；

(5) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0$，$(m,n=1,2,3,\cdots,m\neq n)$.

三角函数系的这些性质称为正交性.

现仅验证（4），其它各式可类似地证明．由于

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right],$$

当$m\neq n$时，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{(m-n)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=0\quad(m,n=1,2,3,\cdots,m\neq n).$$

3、平方积分性

$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,dx=2\pi$；

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi$，$(n=1,2,3,\cdots)$；

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\pi$，$(n=1,2,3,\cdots)$.

(比如$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$)

三角函数系

$$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

的每个函数都配上系数组成的级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$称为三角级数。

题目： 给定函数 $f(x)$，找一个三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ 使得

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)。$$

这称为把 $f(x)$ 展开成三角级数。

恒等变形一下，上式可变成

$$f(x)=A_0+A_1\sin(x+\varphi_1)+A_2\sin(2x+\varphi_2)+\cdots+A_n\sin(nx+\varphi_n)+\cdots$$

这样，复杂的波 $f(x)$（x 表示时间）分解为直流波 A_0 以及一系列简单正弦波的叠加，有利于研究波动问题。

7.3　函数展开成傅立叶级数

1　傅立叶级数

给定函数 $f(x)$，找三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 使得

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{7.5}$$

就是找其中的系数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots;b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$（现在这些系数待定）。下面一步一步地找。

首先，（7.5）的右边周期为 2π，所以

结论 1： 要把 $f(x)$ 展开成三角级数（7.5），$f(x)$ 必须是周期为 2π 的周期函数。

我们假设展开式(7.5)右边可以逐项积分．对(7.5)式从 $-\pi$ 到 π 逐项积分有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right].$$

根据三角函数系(7.4)的正交性，等式右端除第一项外，其余各项均为零，故

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi,$$

于是得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{7.5}$$

固定 $k\geq 1$．用 $\cos kx$ 乘(7.5)式两端，再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分，我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\mathrm{d}x\right],$$

根据三角函数系(7.4)的正交性，等式右端除 $n=k$ 的 $a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos kx\mathrm{d}x$ 外，其余各项均为零，故

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x=a_k\pi,$$

于是得

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\quad(k=1,2,3,\cdots).$$

类似地，用 $\sin kx$ 乘(7.5)式的两端，再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分，可得

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\qquad(k=1,2,3,\cdots),$$

找到了！要找的系数如下：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\qquad(n=1,2,3,\cdots)\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\qquad(n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

称(7.6)式为 Euler-Fourier 公式，由这些公式确定的系数 $a_0, a_n, b_n, \cdots$ 称为 $f(x)$ 的傅立叶系数．由 $f(x)$ 的傅立叶系数 (7.6)组成的三角级数称为 $f(x)$ 的傅立叶级数．

结论 2： 如果 $f(x)$ 可展开为可逐项积分的三角级数（7.5），则（7.5）的系数 $a_0, a_n, b_n, \cdots$ 一定是 $f(x)$ 的傅里叶系数（7.6）。展开式是唯一的。若能把 $f(x)$ 展开成三角级数，只能展开成 $f(x)$ 的傅立叶级数。

给定了函数 $f(x)$，总可由（7.6）算出 $f(x)$ 的傅里叶系数，从而写出 $f(x)$ 的傅立叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{7.7}$$

注意： 在（7.7）中，我们不写等号“=”而只写了“$\sim$”，因为右边的傅里叶级数是否收敛？收敛时，和函数是否等于 $f(x)$？都还是很大的问题。

思考题：

1. 在三角级数(7.3)中为什么要将其常数项记作 $\frac{a_0}{2}$？（如果这位置写成 a_0，那么 a_0 的傅里叶公式就得多除以 2（(7.6) 就不统一了)。）

2. Euler-Fourier 公式中的积分区间能否改为任一长为 2π 的区间？（可以。）

2　函数展开成傅立叶级数

怎样才能把（7.7）的“：”改成“=”呢？，下面的定理回答了这个问题。

定理 7.1（**收敛定理，狄利克雷充分条件**）　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

(1)在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；

(2)在一个周期内至多有有限个极值点，

则，

（1） $f(x)$ 的傅立叶级数处处收敛到自己的和函数 $s(x)$；

（2）

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\begin{cases}f(x), & \text{如果}x\text{是}f(x)\text{的连续点}\\ \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{t\to x^+}f(t)+\lim\limits_{t\to x^-}f(t)\right], & \text{如果}x\text{是}f(x)\text{的间断点}\end{cases}$$

定理 7.1 的两个条件通常都得到满足，我们把注意力集中在定理 7.1 的两个结论。函数的傅立叶级数在函数的连续点收敛于该点的函数值，在函数的间断点收敛于该点左右极限的算术平均值。

把周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数的步骤：

（1）用公式

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\,.$$

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx & (n=1,2,3,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx & (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

（记住、练熟这些公式）求出 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0, a_n, b_n, \cdots$；

（2）找出 $f(x)$ 的全部间断点；

（3）用傅里叶系数写 $f(x)$ 的傅里叶展开式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\text{(排除全部间断点)}$$

（记住、练熟上面傅立叶级数的形式）

根据定理 7.1，排除了全部的间断点，上式等号就成立了。

【例 7.1】 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases},$$

将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

解 函数的图形如下：

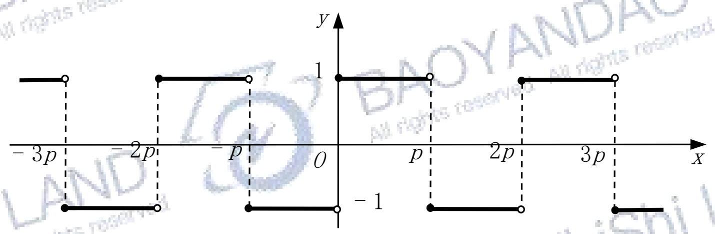

图 7.2

$x=k\pi$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点，$f(x)$ 满足收敛定理的条件，由收敛定理 7.1，$f(x)$ 的傅立叶级数收敛，并且当 $x=k\pi$，$k\in Z$ 时，（有些题目要求傅立叶级数（的和函数 $s(x)$）在某间断点的值）根据定理 7.1（ii），级数收敛于

$$s(k\pi)=\frac{-1+1}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0,$$

当 $x\ne k\pi$ 时，级数收敛于 $f(x)$.

计算傅立叶系数如下：

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx\\&=0\qquad(n=0,1,2,3,\cdots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx\\&=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\qquad(n=1,2,3,\cdots),\end{aligned}$$

$f(x)$ 的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin nx\quad(-\infty<x<+\infty;\ x\ne0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots).$$

（有些题目要求傅立叶级数（的和函数 $s(x)$）在某点的值）根据定理 7.1（i），上式中如果取 $x=\frac{\pi}{2}$，则得

$$1=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right),\quad 即\quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

*【例 7.2】 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

解 函数的图形如下：

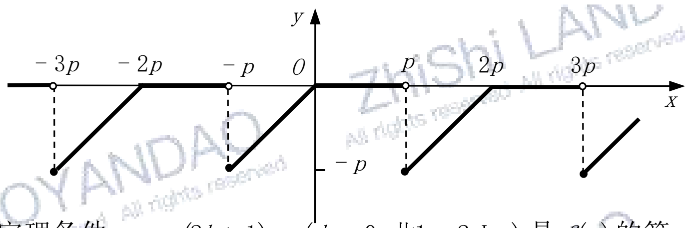

图 7.4

$f(x)$ 满足收敛定理条件，$x=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，（有些题目要求傅立叶级数（的和函数 $s(x)$）在某间断点的值）根据定理 7.1（ii），在点 $x=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)$ 处，$f(x)$ 的傅立叶级数收敛于

$$s((2k+1)\pi)=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{0-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2},$$

在连续点 $x\ (x\neq(2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$.

计算傅立叶系数如下：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{1}{n^2\pi}\cdot[1-(-1)^n]\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\qquad(n=1,2,3,\cdots).$$

$f(x)$ 的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cdot\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin nx\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq\pm\pi,\ \pm3\pi,\cdots).$$

图 7.5 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数 $s(x)$ 的图形.

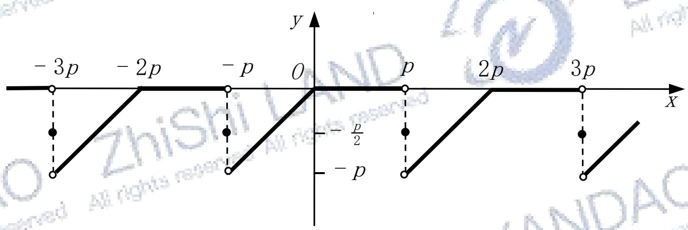

图 7.5

如果函数 $f(x)$ 只在 $[-\pi,\pi]$ 上有定义，并且满足收敛定理的条件，$f(x)$ 仍可以展开成傅立叶级数，做法如下：

(1) 在 $[-\pi,\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$ 外补充函数 $f(x)$ 的定义，使它被拓广成周期为 2π 的周期函数 $f(x)$（即把 $f(x)$ 的图形逐周期地平移成全部实数定义的 $f(x)$），按这种方式拓广函数定义域的过程称为周期延拓.

(2) 将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

(3) 限制 $x\in(-\pi,\pi)$，此时 $f(x)\equiv f(x)$，这样便得到 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式．根据收敛定理，该级数在 $x=\pm\pi$ 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$.

【例 7.3】 将函数 $f(x)=|x|\ (|x|\le\pi)$ 展开成傅立叶级数.

解　所给函数在 $[-\pi,\pi]$ 上满足收敛定理的条件，将 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期作周期延拓，得到函数

$$f(x)=\begin{cases}|x| & x\in[-\pi,\pi]\\ |x-2k\pi| & x\in[(2k-1)\pi,(2k+1)\pi],k\in Z\end{cases},$$

其图形为

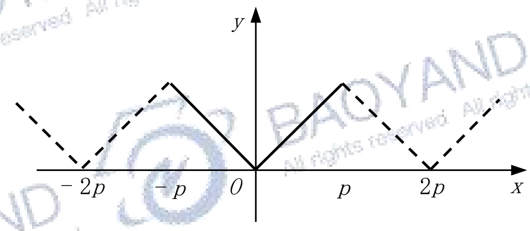

图 7.6

$f(x)$ 满足收敛定理的条件，且由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续，故它的傅立叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$，亦即收敛于 $f(x)$.

计算傅立叶系数如下

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & n=1,3,5,\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

由于 $f(x)\sin nx=|x|\sin nx$ 是奇函数，不难求得 $b_n=0$.（$n=1,2,3,\cdots$），从而得

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)\quad(-\pi\leq x\leq\pi).$$

利用这个展开式，我们可以求出几个特殊级数的和．由 $f(0)=0$，得

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right),$$

由此得到

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

若记　$s=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots$，$t=1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots$，

$s_1=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots$，　$s_2=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+\cdots$

因　$s_2=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\right)=\dfrac{1}{4}s$,

$s=s_1+s_2=s_1+\dfrac{1}{4}s$,

故　$s=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{4}{3}s_1=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\pi^2}{8}=\dfrac{\pi^2}{6}$,

又　$t=s_1-s_2=s_1-\dfrac{1}{4}s$,

故　$t=1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\pi^2}{6}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

思考题：

3. 试将函数 $f(x)$ 的幂级数展开与傅立叶级数展开综合地加以比较(包括级数的形式，系数的求法，可展开的条件等).

3　正弦级数和余弦级数

一般说来，一个函数的傅立叶级数一般既含有正弦项，又含有余弦项．但是，当函数 $f(x)$ 是奇函数时，由于 $f(x)$ 与 $f(x)\cos nx\ (n=1,2,\cdots)$ 都是奇函数，故

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,\ (n=0,1,2,\cdots),$$

从而它的傅立叶级数只含有正弦项，称这种级数为 $f(x)$ 的正弦级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

又由于 $f(x)\sin nx$ 是偶函数，故正弦级数中的系数

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad (n=1,2,\cdots).$$

当函数 $f(x)$ 是偶函数时，由于 $f(x)\sin nx\ (n=1,2,\cdots)$ 是奇函数，故

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0\qquad (n=1,2,\cdots),$$

从而它的傅立叶级数只含有常数项和余弦项，称这种级数为 $f(x)$ 的余弦级数：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

又由于 $f(x)\cos nx\ (n=0,1,2,\cdots)$ 是偶函数，故余弦级数中的系数

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

【例 7.4】 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x$，将它展开成傅立叶级数．

解 首先，所给函数满足收敛定理的条件，它在点

$$x=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

处不连续，因此 $f(x)$ 的傅立叶级数在点 $x=(2k+1)\pi$ 收敛于

$$s((2k+1)\pi)=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{\pi-\pi}{2}=0,$$

在连续点 $x\neq(2k+1)\pi$ 收敛于 $f(x)$，其和函数的图形如图 7.7 所示．

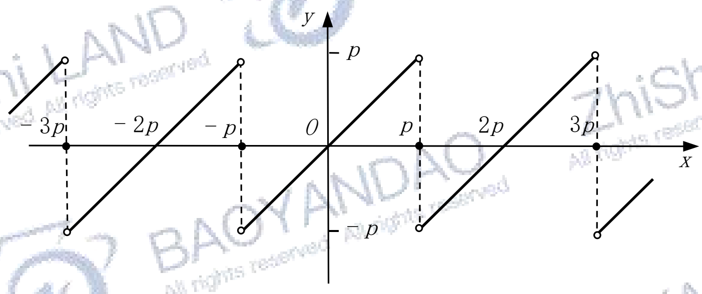

图 7.7

其次，若不计 $x=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数．因此，有

$$a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},\ (n=1,2,\cdots),$$

故 $f(x)$ 的傅立叶展开式为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx\quad(-\infty<x<+\infty;\ x\neq\pm\pi,\ \pm3\pi,\cdots).$$

*【例 7.5】 将周期函数 $u(t)=|E\sin t|$ 展开成傅立叶级数，其中 E 是正常数．

解 所给函数满足收敛定理条件，在整个数轴上连续，因此 $u(t)$ 的傅立叶级数处处收敛于 $u(t)$．函数 $u(t)$（即它的傅立叶级数的和函数）的图形如图 7.8 所示．

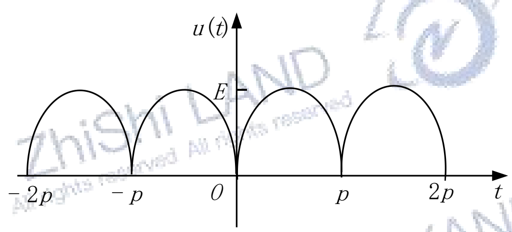

图 7.8

因为 $u(t)$ 是周期为 2π 的偶函数，故

$$b_n=0$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\,dt=\frac{4E}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\cos nt\,dt$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)t-\sin(n-1)t]\,dt$$

$$=\frac{E}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)t}{n+1}+\frac{\cos(n-1)t}{n-1}\right]_0^{\pi}\qquad(n\neq1)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4E}{[(2k)^2-1]\pi}, & n=2k \\ 0, & n=2k+1\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots)$$

当$n=1$时，$a_1=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}u(t)\cos t\,\mathrm{d}t=0$，故

$$u(t)=\frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{15}\cos 4t-\frac{1}{35}\cos 6t-\cdots\right)$$

$$=\frac{2E}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4E}{(4n^2-1)\pi}\cos 2nt\quad(-\infty<t<+\infty).$$

由于理论与实际问题的需要，我们有时还需要把定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成正弦级数或余弦级数．根据前面讨论的结果，这类展开问题可以用如下方法处理：

在 $(-\pi,0]$ 上补充函数 $f(x)$ 的定义，得到 $(-\pi,\pi]$ 上的新函数 $F(x)$，使它在 $(-\pi,\pi]$ 上成为奇函数（或偶函数）：

奇延拓　若 $f(0)=0$（图 7.9）

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le \pi \\ -f(-x), & -\pi<x<0 \end{cases}$$

若 $f(0)\neq 0$（图 7.10）

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x\le \pi \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & -\pi<x<0 \end{cases}$$

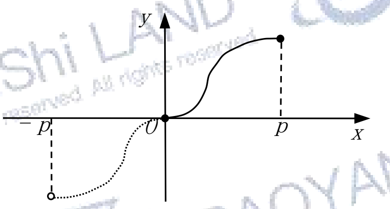

图 7.9

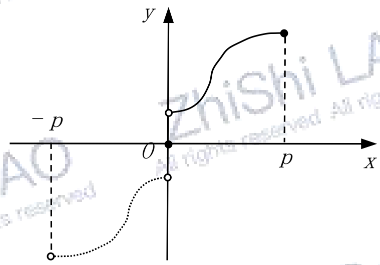

图 7.10

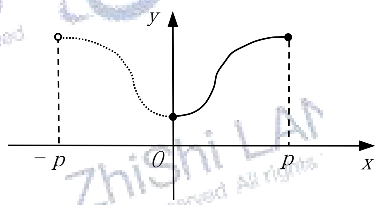

图 7.11

偶延拓（图 7.11）

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le \pi \\ f(-x), & -\pi<x<0 \end{cases}.$$

这种拓广函数定义域的方法称为奇延拓（或偶延拓）．然后将 $F(x)$ 以 2π 为周期进行周期延拓，所得函数的傅立叶展开式必为正弦级数（或余弦级数）．再限制 x 在 $(0,\pi]$ 上，此时 $f(x)\equiv F(x)$，这样便得到了 $f(x)$ 的正弦级数（或余弦级数）的展开式．

【例 7.6】 将 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 对 $f(x)$ 进行奇延拓(图 7.12)，得函数

$$F(x)=\begin{cases} x+1, & 0<x\le\pi \\ 0, & x=0 \\ -(-x+1), & -\pi<x<0 \end{cases}$$

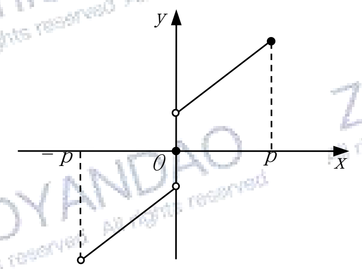

图 7.12

其傅立叶系数如下：

$$a_n=0 \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx$$
$$=\frac{2}{n\pi}\left[1-(\pi+1)(-1)^n\right]\qquad(n=1,2,\cdots)$$

傅立叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-(\pi+1)(-1)^n\right]\cdot\sin nx$，据收敛定理有：

在 $x=0$ 处，它收敛于 $s(0)=\frac{F(0-0)+F(0+0)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0\ne f(0)$；

在 $x=\pi$ 处，它收敛于

$$s(\pi)=\frac{F(\pi-0)+F(\pi+0)}{2}=\frac{F(\pi-0)+F(-\pi+0)}{2}=\frac{(\pi+1)+(-\pi-1)}{2}=0\ne f(\pi)\ ;$$

在 $0<x<\pi$ 内，它收敛于 $f(x)$.

故 $f(x)$ 的傅立叶正弦级数展开式为

$$f(x)=x+1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-(\pi+1)(-1)^n\right]\cdot\sin nx\qquad(0<x<\pi),$$

对 $f(x)$ 进行偶延拓(图 7.13)，可得函数

$$F(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x\le\pi \\ -x+1, & -\pi<x<0 \end{cases}$$

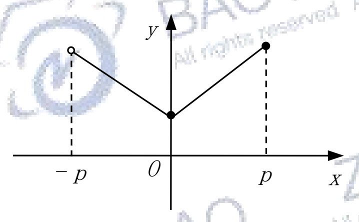

图 7.13

其傅立叶系数为

$$b_n=0 \qquad n=1,2,\cdots$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx,$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,dx=\pi+2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right].$$

傅立叶级数为 $\frac{\pi+2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]\cdot\cos nx$，据收敛定理有：

在 $x=\pi$ 处，它收敛于

$$s(\pi)=\frac{F(\pi-0)+F(\pi+0)}{2}=\frac{F(\pi-0)+F(-\pi+0)}{2}=\pi+1=f(\pi),$$

在 $0\le x\le\pi$ 内，它收敛于 $f(x)$.

故 $f(x)$ 的傅立叶余弦级数展开式为

$$f(x)=x+1=\frac{\pi+2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{2}\pi}\left[(-1)^{n}-1\right]\cos nx,\ (0\le x\le\pi).$$

思考题：

4. 将定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成正弦级数或余弦级数时，必须写出延拓所得函数 $f(x)$ 后，再由 $f(x)$ 作出其正（余）弦级数展开式吗？（只需正确使用傅立叶系数公式。）

5. 定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式是唯一的吗？（不唯一。比如可展成正弦级数也可展成余弦级数。在左边不同的延拓展开成不同的傅里叶级数，但在 $[0,\pi]$ 上都是 $f(x)$。）

习题 13-7

A 类

*1. 证明函数系：

$$\{\sin\omega t,\ \sin 2\omega t,\ \cdots,\ \sin n\omega t,\ \cdots\},\quad \left(t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \omega=\frac{2\pi}{T}\right),\quad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

是所给区间上的三角函数系.

*2. 设 $s(x)$ 是周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数， $f(x)$ 在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & 2<|x|\le\pi\\ x, & |x|\le 2\end{cases},$$

试求 $s(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式.

解 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<-2\\ x, & -2\le x\le 2\\ 0, & 2<x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的间断点是 $x=-2,2$，

$$\lim_{x\to -2^-}f(x)=0,\ \lim_{x\to -2^+}f(x)=-2,\ \lim_{x\to 2^-}f(x)=2,\ \lim_{x\to 2^+}f(x)=0$$

$$s(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<-2\\ -1, & x=-2\\ x, & -2<x<2\\ 1, & x=2\\ 0, & 2<x\le\pi\end{cases}。$$

3. 下列周期函数 $f(x)$（已给出它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式）以 2π 为周期，试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数：

*(1) $f(x)=3x^2+1\quad(-\pi\le x<\pi)$；

(2) $f(x)=e^{3x}\quad(-\pi\le x<\pi)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}bx, & -\pi\le x<0\\ ax, & 0\le x<\pi\end{cases}$ （a,b 为常数，且 $a>b>0$）；

4. 将下列函数展开成傅立叶级数：

*(1) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}\quad(-\pi\le x\le\pi)$；

(2) $f(x)=e^x+1\quad(-\pi\le x<\pi)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5. 将下列函数展开成指定的傅立叶级数：

(1) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}\quad(0\le x\le\pi)$ 正弦级数；

(2) $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<\frac{\pi}{2},\\ \pi-x & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$ 余弦级数；

*(3) $f(x)=2x^2\quad(0\le x\le\pi)$； 正弦级数和余弦级数

解 （3）奇延拓。

$$F(x)=\begin{cases}2x^2, & 0\le x\le\pi\\ -2x^2, & -\pi<x\le 0\end{cases}$$

$$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots),\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nx\,dx\overset{\text{分部积分}}{=}\frac{4(-1)^{n-1}\pi}{n}+\frac{8}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)$$

$$2x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^{n-1}\pi}{n}+\frac{8}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\right]\sin nx,\ (0\le x<\pi)$$

偶延拓。

$$F(x)=2x^2,\ -\pi\le x\le\pi$$

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots),\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2dx=\frac{4\pi^2}{3},\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\cos nx\,dx\overset{\text{分部积分}}{=}\frac{(-1)^n 8}{n^2}$$

$$2x^2=\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 8}{n^2}\cos nx,\ (0\le x\le\pi)$$

（设 $s(x)=\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 8}{n^2}\cos nx,\ (-\infty<x<+\infty)$，$x_0=3\pi, x_1=3\pi-2\pi=\pi$

请问：$s(x_0)=2x_0^2=2(3\pi)^2$，还是 $s(x_0)=2x_1^2=2\pi^2$？）

B类

1．设周期函数 $f(x)$ 周期为 2π，证明：

(1) 如果 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅立叶系数 $a_0=0, a_{2k}=0, b_{2k}=0\ (k=1,2,\cdots)$；

*(2) 如果 $f(x-\pi)=f(x)$，则 $f(x)$ 的傅立叶系数 $a_{2k+1}=0, b_{2k+1}=0\ (k=0,1,2,\cdots)$．