武汉大学 2013-2014 学年第二学期期末考试线性代数 C 解答

一、（6 分）下列命题是否正确？如正确，请证明，若不正确请举反例：向量组 $a_1,a_2,...,a_s(s\ge 2)$ 线性无关的充分必要条件是存在一组不全为零的常数 $k_1,...,k_s$，使得 $k_1a_1+...+k_sa_s\ne 0.$

解 不正确。 3 分

如 $a_1=(1,2,3),a_2=(2,4,6)$，存在 $k_1=k_2=1\ne 0$，使得 $k_1a_1+k_2a_2\ne 0$，但是 a_1,a_2 线性相关。

3 分

二、（6 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&1&3\\0&5&1\end{pmatrix}$，问 A 是否可逆？如可逆求 A^{-1}，如不可逆，求 A 的伴随矩阵 A^*.

解 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&5&1\\0&5&1\end{vmatrix}=0$ A 不可逆 3 分

而 $A^*=\begin{pmatrix}-14&-7&7\\2&1&-1\\-10&-5&5\end{pmatrix}$ 3 分

三、（6 分）给正交矩阵 A 的某一行（或某一列）乘上 -1 后所得的矩阵 B 是否仍是正交矩阵？为什么？

解 设 $A=(a_{ij})$ 是正交矩阵，给第 i 行乘以 -1 得 $B=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{i1}&\cdots&-a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，则由

$a_{k1}^2+\cdots+a_{kn}^2=1(k=1,...,n)$ 当 $k=i$ 时为 $(-a_{k1})^2+...+(-a_{kn})^2=1$ 仍成立 4 分

$a_{k1}a_{p1}+...+a_{kn}a_{pn}=0(k\ne p)$ 当 $k=i$ 时得 $-a_{i1}a_{p1}+...+(-a_{in}a_{pn})=0$ 即 B 仍是正交矩阵。

2 分

四、（12 分）设 $\alpha_1=(1,0,2,1)$，$\alpha_2=(1,2,0,1)$，$\alpha_3=(2,1,3,0)$，$\alpha_4=(2,5,-1,4)$，$\alpha_5=(1,-1,3,-1)$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量.

解 令 $A=\left[\alpha_1^T\ \alpha_2^T\ \alpha_3^T\ \alpha_4^T\ \alpha_5^T\right]$，对 A 作初等行变换：

$A\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是给定向量组的一个最大无关组。 8 分

且 $\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_5=0\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ 4 分

五、（12 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&3&0\\5&4&2\end{pmatrix}$，求 $\left|(4E-A)^T(4E-A)\right|$.

解 $\left|(4E-A)'(4E-A)\right|=\left|(4E-A)'\right|\left|(4E-A)\right|=\left|4E-A\right|^2$ 6 分

$|4E-A|=\begin{vmatrix}3&0&0\\1&1&0\\-5&-4&2\end{vmatrix}=6$ $\left|(4E-A)'(4E-A)\right|=36.$ 6 分

六、（12 分）写出二次型 $f(x_1,x_2)=-3x_1^2+5x_2^2+2x_1x_2$ 在正交变换下所化成标准形，并指出是正定的还是负定的.

解 由二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{5}\end{pmatrix}$，解方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}\mathbf{3}-\lambda&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{5}-\lambda\end{vmatrix}=\mathbf{0}$ 得特征值

$\lambda_1=1+\sqrt{17}$，$\lambda_2=1-\sqrt{17}$ 8 分

故 f 的标准形为：$\left(1+\sqrt{17}\right)y_1^2+\left(1-\sqrt{17}\right)y_2^2$，由二次型的正惯性指数与负惯性指数均为 1，所以二次型 f 既不正定也不负定。 4 分

七、（16 分）设有方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5=2\\3x_1-5x_2+7x_3+2x_4+3x_5=5\\2x_1-3x_2+4x_3+3x_4+x_5=a\\-x_1+x_2-x_3-4x_4+x_5=b\end{cases}$，试讨论 a,b 取何值时，方程组有解，并求解.

解 由 $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-2}&\mathbf{3}&\mathbf{-1}&\mathbf{2}&\mathbf{2}\\\mathbf{3}&\mathbf{-5}&\mathbf{7}&\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{5}\\\mathbf{2}&\mathbf{-3}&\mathbf{4}&\mathbf{3}&\mathbf{1}&a\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-4}&\mathbf{1}&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}&\mathbf{9}&\mathbf{-4}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-2}&\mathbf{5}&\mathbf{-3}&\mathbf{-1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&a-\mathbf{3}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&b+\mathbf{1}\end{pmatrix}$ 10 分

故当 $a=3$ 且 $b=-1$ 时，方程组有解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-9\\-5\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}4\\3\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$t_1,t_2,t_3\in R$

当 $(a-3)^2+(b+1)^2\neq0$ 时，方程组无解. 6 分

八、（10 分）设 $AX=B+X$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\-3&2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&-1&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解 $|A-E|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\-3&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-3&2&-2\end{vmatrix}=-1\neq 0$ 5 分

$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\3&-3&-1\\-2&3&1\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\3&-3&-1\\-2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\2&-1&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7&1\\0&11&1\\1&-8&0\end{pmatrix}$ 5 分

九、（10 分）若实向量 $\alpha=(b,c,d,e)^T$ 是单位列向量，矩阵 $H=2\alpha\alpha^T-E$. 证明：H 是正交矩阵.

证 $H^T=(2\alpha\alpha^T-E)=2(\alpha\alpha^T)^T-E=2\alpha\alpha^T-E$ 4 分

$HH^T=(2\alpha\alpha^T-E)(2\alpha\alpha^T-E)=4(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)-2\alpha\alpha^TE-2E\alpha\alpha'+E$

$=4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha-4\alpha\alpha^T+E=4\alpha\alpha^T-4\alpha\alpha^T+E=E$ 故 H 为正交矩阵。 6 分

十、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的全部特征值之积为 24.(1) 求 a 的值；(2) 讨论 A 能否对角化，若能，求一个可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵.

解 (1) 因 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|$ 得 $a=-2$； 5 分

(2) 由 $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-3\\-1&4-\lambda&-3\\1&-2&5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$ ，故特征值为

$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$，又当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，$r(2I-A)=1$，矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量，故 A 能对角化，当 $\boldsymbol{\lambda=2}$ 时，解方程组 $\boldsymbol{(2E-A)x=0}$，得基础解系

$$\boldsymbol{p_1=(-1,1,0)^T\ p_2=(1,0,1)^T}$$

当 $\boldsymbol{\lambda=6}$ 时，解方程组 $\boldsymbol{(6E-A)x=0}$，得基础解系

$$\boldsymbol{p_3=(1,-2,3)^T}$$

取可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，使 $P^{-1}AP=D=diag(2,2,6)$ 为对角阵。 5 分