武汉大学 2015-2016 学年第二学期期末考试

线性代数 C（A 卷）

1、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，问 A 是否可逆？如可逆求 A^{-1}，如不可逆，求 A 的伴随矩阵 A^*.

解 $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ -3 & -1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ -2 & -3 & 0\end{vmatrix}=0$ A 不可逆

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 4 & 4\\ 7 & 7 & 7\end{pmatrix}$$

2、（10 分）已知矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 可交换. 试求 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ 的值.

解 由 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 可交换. 得 $a_2=b_3=1, b_1=a_3=2, a_1=b_2=3.$

所求行列式为 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=18$

3、（10 分）设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i$ $(i=1,2,3)$ 其中列向量 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}, \alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$ 求矩阵 A.

解 因 $A\alpha_i=i\alpha_i$，$\alpha_i\neq 0$ $(i=1,2,3)$，故 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$ 是 A 的特征值且特征值互不相同，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$，则 P 可逆，

$P^{-1}=\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}$ 由，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$

$$A = P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

4、（12 分）设 3 阶方阵 A 的特征值分别为$1,-1,0,$ 方阵 $B=2A^2-3A-4E$

1）试求矩阵 B 的特征值及与 B 相似的对角矩阵；2）验证 B 可逆，并求 B^{-1} 的特征值及行列式$\left|B^{-1}\right|$之值。

解　1）B 的特征值分别为$u_1=-5;u_2=1;u_3=-4$　与 B 相似的对角矩阵为$\Lambda=\begin{pmatrix} -5 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$

2）$|B|=(-5)\times 1\times(-4)=20\neq 0$ 故 B 可逆。

B^{-1} 的 3 个特征值分别为$-\frac{1}{5},1,-\frac{1}{4}$　　$\left|B^{-1}\right|=-\frac{1}{5}\times 1\times(-\frac{1}{4})=\frac{1}{20}$

5、（10 分）设$\alpha_1=(2,1,3,1)$，$\alpha_2=(1,2,0,1)$，$\alpha_3=(-1,1-3,0)$，$\alpha_4=(1,1,1,1)$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示该组中其它向量。

解　设 $A=\left[\alpha_1'\ \alpha_2'\ \alpha_3'\ \alpha_4'\right]$，对 A 作初等行变换：$A\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是该向量组的一个最大无关组，且有$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$

6、（10 分）设二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$ 其中 k 为参数，确定 k 的取值范围使 f 为正定的。

解　$A=\begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{bmatrix}$　由 $\Delta_1=1>0$　$\Delta_2=2-k^2>0$　$\Delta_3=|A|=k(k-2)(k+1)>0$

可得$-1<k<0$

7、（10 分）设有向量组 $I:\alpha_1=(1,2,1),\alpha_2=(2,3,3),\alpha_3=(3,7,1),$ 及量组 $II:\beta_1=(3,1,4),\beta_2=(5,2,1),\ \beta_3=(1,1,-6)$。证明：组 I 与组 II 等价.

证明　因为$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$。故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，它可作为 R^3 的一个基。即(II)可由(I)线性表出。又因为$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$。故$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关，它可作 R^3 的一个基，可知(I)可由(II)线性表出。故(I)与(II)可互相线性表出，即它们等价。

8、（12 分）设有方程组$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=-1 \\ -x_1+4x_2+mx_3=k \end{cases}$，问$m,k$为何值时, 方程组有唯一解?无解?有无穷多解?在有无穷多解时, 求出一般解.

解 $\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & m & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & m+1 & k-1 \end{bmatrix}$

①当$m\neq -1$时, 方程组有唯一解,
②当$m=-1, k\neq 1$时, 方程组无解.
③当$m=-1$且$k=1$时, 方程组有无穷多解.

此时 $\overline{A}\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore X=k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$

9、（10 分）用正交变换化二次型 $f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_3+2x_1x_2$ 为标准形，并写出所用正交变换及 f 的标准形。

解 $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=3$

$e_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $e_2=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$, $e_3=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$

经正交变换$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ $\quad f$ 化为标准形：$y_2^2+3y_3^2$

10、（6 分）设$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$是$R^n$中$n-1$线性无关的向量，$\beta_i$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$均正交$(i=1,2)$，证明：$\beta_1,\beta_2$线性相关。

证明 因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$，$\beta_1,\beta_2$是$n+1$个$n$维向量，故必线性相关，存在$k_1,\cdots,k_{n-1},\ell_1,\ell_2$使

得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2=0 \quad \cdots\cdots(1)$

因$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关，故$\ell_1,\ell_2$不全为0 用$\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2$与$(1)$式两边作内积得

$[\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2, \ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2]=0$ 故$\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2=0$，$\ell_1,\ell_2$不全为$0$，$\beta_1,\beta_2$线性相关。