极限计算方法大盘点

现极限计算方法大盘点于下，遇到未熟练的内容，请及时复习相关内容和例题。

7 种极限的计算方法基本类似通用。

1、善于恒等化简和极限的四则运算法则。

2、常用极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{f(n)}\right]^{f(n)}=\lim\left[1+\frac{1}{g(x)}\right]^{g(x)}=e$ （ $f(n),g(x)\to\infty$ ），

$\lim\limits_{n\to\infty}[1+f(n)]^{\frac{1}{f(n)}}=\lim[1+g(x)]^{\frac{1}{g(x)}}=e$ （ $f(n),g(x)\to 0$ ），

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin f(n)}{f(n)}=\lim\frac{\sin g(x)}{g(x)}=1$ （ $f(n),g(x)\to 0$ ），

$\lim\limits_{n\to\infty}u(n)^{v(n)}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}u(n)\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}v(n)}$ $(\lim\limits_{n\to\infty}u(n)>0)$，

$\lim u(x)^{v(x)}=\left(\lim u(x)\right)^{\lim v(x)}$ $(\lim u(x)>0)$。

3、一些常用的处理方法

(1)分子分母都除以 n 的最高次幂。

例如：$\frac{2n^6+4n^3+7n^2}{n^6+6n^5-n^3}=\frac{2+\frac{4}{n^3}+\frac{7}{n^4}}{1+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^3}}$，$\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^4+5n^3}}=\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{5}{n}}}$。

当 $x\to\infty$ 时，$\frac{2x^6+4x^3+7x^2}{x^6+6x^5-x^3}=\frac{2+\frac{4}{x^3}+\frac{7}{x^4}}{1+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3}}$，

$\frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[4]{x^4+5x^3}}=\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{5}{x}}}$。

(2)根号差的消除。

例如：$\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}=\frac{f(n)-g(n)}{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}}$，$\frac{1}{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}=\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}{f(x)-g(x)}$。

4、利用指数函数的极限。

当 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}[f(n)]^{g(n)} = \lim_{n\to\infty}[1+f(n)-1]^{\frac{1}{f(n)-1}[f(n)-1]g(n)} = \lim_{n\to\infty}\left\{[1+f(n)-1]^{\frac{1}{f(n)-1}}\right\}^{[f(n)-1]g(n)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}[f(n)-1]g(n)}\text{。}$$

当 $\lim f(x)=1$ 时，

$$\lim[f(x)]^{g(x)} = \lim[1+f(x)-1]^{\frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]g(x)} = \lim\left\{[1+f(x)-1]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{[f(x)-1]g(x)}\text{。}$$

$$= e^{\lim[f(x)-1]g(x)}$$

5、利用两边夹原理。

要求 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)(\lim f(x))$ 。$\underset{（简单）}{g(n)} \underset{（缩小一点点）}{\le} \underset{（复杂）}{f(n)} \underset{（放大一点点）}{\le} \underset{（简单）}{h(n)}$

（$\underset{（简单）}{g(x)} \underset{（缩小一点点）}{\le} \underset{（复杂）}{f(x)} \underset{（放大一点点）}{\le} \underset{（简单）}{h(x)}$），使容易求得 $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)=\lim\limits_{n\to\infty} h(n)=A$

（$\lim g(x)=\lim h(x)=A$），则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$ （$\lim f(x)=A$）。

6、当 x_n 用递推式给出时

（1）用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 是单调有界的，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$ 存在；

（2）对 x_n 的递推式两边取极限得关于 A 的方程，再解出 A 。

7、记得一些等价关系

当 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=0$ 时，

$\sin f(n)\sim f(n)$，$\tan f(n)\sim f(n)$，$\arcsin f(n)\sim f(n)$，$\arctan f(n)\sim f(n)$

$1-\cos f(n)\sim\frac{1}{2}[f(n)]^2$，$[1+f(n)]^{\alpha}-1\sim\alpha f(n)$，$e^{f(n)}-1\sim f(n)$，

$\ln[1+f(n)]\sim f(n)$

当 $\lim f(x)=0$ 时，

$\sin f(x) \sim f(x)$，$\tan f(x) \sim f(x)$，$\arcsin f(x) \sim f(x)$，$\arctan f(x) \sim f(x)$

$1-\cos f(x) \sim \frac{1}{2}[f(x)]^2$，$[1+f(x)]^\alpha - 1 \sim \alpha f(x)$，$e^{f(x)}-1 \sim f(x)$，

$\ln[1+f(x)] \sim f(x)$

用等价代换使极限变简单。

8、在分段函数的分段点求极限时，先计算左右极限。

9、复合函数求极限：

（1）先算出 $\lim \varphi(t) = x_0$；

（2）$\lim f(\varphi(t)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$。

导数的计算总结

现总结导数的计算于下，遇到未熟练的内容，请及时复习相关内容和例题。

1. 用定义计算导数

当要求导的函数不是初等函数时，比如分段函数的分段点或函数没有具体表示式时，直接用定义计算它在 x_0 点的导数。

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2. 用求导公式计算导数

当要求导的函数是初等函数时，用求导公式和复合函数求导法求导数。要记熟用熟相关公式。

3. 复合函数求导

（1）一层复合

如果 $y=f(u), u=\varphi(x), y=f(\varphi(x))$，则

$$y' = \frac{dy}{dx} = [f(\varphi(x))]' = \frac{d}{dx} f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

（2）多层复合

如果 $y=f(u),u=\varphi(x),x=\psi(t),y=f(\varphi(\psi(t)))$，则

$$\frac{dy}{dt}=\left[f(\varphi(\psi(t)))\right]'=\frac{d}{dx}f(\varphi(\psi(t)))=f'(\varphi(\psi(t)))\varphi'(\psi(t))\psi'(t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

更多层次的复合函数的求导方法类推。不管多少层复合都是两层两层地实现的，熟练两层复合就够用。

4．隐函数求导

（1）一阶导数的求导步骤：

（a）把 y 看成 x 的函数时，$F(x,y)=0$ 是一个恒等式；

（b）用复合函数求导方法对恒等式 $F(x,y)=0$ 两边对 x 求导（求导时记得 y 中有 x）得新的恒等式 $G(x,y,y')=0$；

（c）从 $G(x,y,y')=0$ 解出 $y'=D(x,y)$。

（2）要求二阶导数时，有两种方法：

（a）用复合函数求导方法恒等式 $G(x,y,y')=0$ 两边对 x 求导（求导时记得 y 和 y' 中都有 x）得新的恒等式 $H(x,y,y',y'')=0$，再从 $H(x,y,y',y'')=0$ 解出 $y''=E(x,y,y')$，最后代入 $y'=D(x,y)$ 得 $y''=E(x,y,D(x,y))$。

（b）用复合函数求导方法恒等式 $y'=D(x,y)$ 两边对 x 求导（求导时记得 y 中有 x）得 $y''=F(x,y,y')$，最后代入 $y'=D(x,y)$ 得 $y''=F(x,y,D(x,y))$。

更高阶导数的求导方法类推。

5．参数表示的函数求导

（1）$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 表示的函数 $y=y(x)$ 在 t 点的一阶导数

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

（2）要求二阶导数时，可对$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ p=y'=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$表示的函数$p=p(x)$再次求导：

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}y'=\frac{dp}{dx}=\frac{\left[\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]_t'}{\varphi'(t)}$$

更高阶导数的求导方法类推。

6．对数求导法

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]'=\left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]'\text{（复合函数求导法）}$$