武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试线性代数 C 试题（A）参考解答

一、（8 分）不求出行列式的值，用行列式的性质，判断行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ 能被17 整除.

解： 因为$204,527,255$都能被17整除. 所以第一列的 100 倍，第二列的 10 倍加到第三列得 204, 527, 255，而这三项能提出公因子 17. 故原行列式的值能被 17 整除.

二、（10 分）什么样的矩阵 X 满足下面等式：$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解： 设 $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ 则 $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \qquad y_1 - 3y_2 + 2y_3 = -2$

$-x_1 + 3x_2 = 2, \qquad -y_1 + 3y_2 = 2 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -2+3k_1 & 1+3k_2 \\ k_1 & 1+k_2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$（$k_1, k_2$ 为任意实数）

三、（10 分）设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$。求矩阵 B.

解：由 $|A^*| = |A|^{n-1}$，有 $|A|^3 = 8$，得 $|A| = 2$。

用 A^*，A 左右乘方程的两端，得 $(2E - A^*)B = 6E$

$$B = 6(2E - A^*)^{-1} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

四、（10 分）计算 n 阶行列式 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

解：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&b_1\\0&1&0&\cdots&0&b_2\\0&0&1&\cdots&0&b_3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&b_n\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_n-a_1r_1-a_2r_2-\ldots-a_nr_n}\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&b_1\\0&1&0&\cdots&0&b_2\\0&0&1&\cdots&0&b_3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&b_n\\0&0&0&\cdots&0&-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\end{vmatrix}=-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

五、（12分）求向量组 $\alpha_1=(1,3,3,1)$，$\alpha_2=(1,4,1,2)$，$\alpha_3=(1,0,2,1)$，$\alpha_4=(1,7,2,2)$ 的秩及一个最大无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量。

解： 令 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}&\alpha_2^{\mathrm T}&\alpha_3^{\mathrm T}&\alpha_4^{\mathrm T}\end{bmatrix}$，对 A 作初等行变换：$A\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

故给定向量组的秩为3。$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个最大无关组。且 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

六、（6分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $AX=0$ 的解，求证：$\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性无关。

证明：假设 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性有关，则存在不全为零的 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 使得

$$\lambda_0\beta+\lambda_1(\beta+\alpha_1)+\cdots\lambda_r(\beta+\alpha_r)=0,$$

于是 $-(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_r)\beta=\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_r\alpha_r$，

又由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性无关性知 $-(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_r)\neq0$，于是

$\beta=-\dfrac{1}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_r}(\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_r\alpha_r)$，这与已知向量 β 不是方程组 $AX=0$ 的解矛盾。

七、（10分）已知三阶方阵 A 满足 $A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}$，

(1)求 A.（2）计算行列式 $|A|$ 和 $|A^2-2A+3I|$ 的值；（3）判断 A 是否为正定矩阵。

解： （1）设 $p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$，则 p_1,p_2,p_3 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征向量，且对应的特征值分别为 $1,2,3$，设 $P=(p_1,p_2,p_3)$。则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，故

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{pmatrix}$$

（2） $|A|=1\cdot 2\cdot 3=6$ 设 $\varphi(A)=A^2-2A+3I$，则有 $\varphi(1)=1^2-2+3=2$，$\varphi(2)=2^2-4+3=3$

$\varphi(3)=3^2-6+3=6$，故 $|A^2-2A+3I|=\varphi(1)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(3)=36$

(3) 由三阶矩阵 A 为实对称矩阵，且有三个大于零的特征值，故 A 为正定矩阵。

八、(10 分) 已知向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的基，说明 $\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 也是 $\boldsymbol{R}^3$ 的基。若向量 α 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下坐标为 $(1,1,1)^T$，求向量 α 在基 $\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 的坐标。

解：由题条件可知 $(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，记 $P=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

由 $|P|=2$ 可知 P 可逆，故 $\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 也能表示 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，故它们等价

故 $R(\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\})=3$，又 $\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 有 3 个向量，故

由题条件可知 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

故 $\alpha=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3)P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

故 α 在基 $\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$ 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$

九、(10 分) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，求正交变换 $X=PY$ 将 $\boldsymbol{f}$ 化为标准形。

解 法一：$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1-r_1}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda&\lambda-1&0\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_2-c_1}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\-1&-1-\lambda&1\\1&2&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应 $\lambda_1=-2$，解方程 $(A+2E)x=0$，由

$A+2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 单位化得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$，解方程 $(A-E)x=0$，由 $A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

得 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 将ξ_2,ξ_3正交化，取$\eta_2=\xi_2$，

$$\eta_3=\xi_3-\frac{[\eta_2,\xi_3]}{[\eta_2,\eta_2]}\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

将 η_2,η_3 单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 得正交矩阵

$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，故有正交变换 $x=Py$ 将 $\boldsymbol{f}$ 化为标准形

$-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

解法二：$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1-r_1}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & \lambda-1 & 0\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}\overset{c_2-c_1}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ -1 & -1-\lambda & 1\\ 1 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

得 A 的特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应$\lambda_1=-2$，解方程$(A+2E)x=0$，由

$A+2E=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 单位化得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，对应

$\lambda_2=\lambda_3=1$，

解方程$(A-E)x=0$，由$A-E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 得正交矩阵

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

故有正交变换 $x=Py$ 将 $\boldsymbol{f}$ 化为标准形 $-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

十、（14 分）讨论 a,b 为何值时，方程 $ax_1+x_2+x_3=4$ 与方程组 $\begin{cases}x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+3bx_2+x_3=9\end{cases}$ 无公共解，有唯一公共解，有无穷多公共解，并写出相应的公共解？

解：问题等价于 a,b 为何值时方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+3bx_2+x_3=9\end{cases}$ （*）无解，有唯一解，和无数多个解。（*）的线性矩阵的行列式值为 $|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&3b&1\end{vmatrix}=2b(1-a)$，由克拉姆法则知

$|A|\neq 0$，即 $a\neq 1,b\neq 0$（*）有唯一解 $\left(\frac{3-4b}{b(1-a)},\frac{3}{b},\frac{4b-3}{b(1-a)}\right)$

当 $a=1$ 时（*）增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&b&1&3\\1&3b&1&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&4\\0&0&0&-4b+3\end{pmatrix}$，

故当 $a=1$ 时，且 $b\neq\frac{3}{4}$ 时（*）无解；

当 $a=1$，且 $b=\frac{3}{4}$ 时（*）与 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=4\\x_3=x_3\end{cases}$，故有解 $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数

当 $b=0$ 时（*）增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}a&1&1&4\\1&0&1&3\\1&0&1&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1-a&4-3a\\0&0&0&6\end{pmatrix}$，故

$R(A)=2<3=R(\overline{A})$，（*）无解。故

当 $b=0$ 或当 $a=1$ 且 $b\neq\frac{3}{4}$ 时，两个方程无公共解。

当 $a\neq 1,b\neq 0$ 两个方程有唯一公共解 $\left(\frac{3-4b}{b(1-a)},\frac{3}{b},\frac{4b-3}{b(1-a)}\right)$。

当 $a=1$ 时，且 $b=\frac{3}{4}$ 时两个方程有无数个共解 $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$