武汉大学 2014-2015 学年第一学期

《高等数学 B1》期中考试

一、（8″ ）设 $0<x_1<4$， $x_{n+1}=\sqrt{x_n(4-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限，并求这个极限。

解：记 $f(x)=x(4-x)(0\le x\le 4)$

$$f'(x)=2(2-x)\begin{cases}>0, & x<2\\ <0, & x>2\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上严格单调增加在 $[2,4]$ 上严格单调减少。

$$0=f(0)=f(4)<f(x)<f(2)=4(0\le x\le 4)$$

$0<x_2=\sqrt{f(x_1)}<\sqrt{4}=2$ 。归纳地假设 $0<x_n<2(n\ge 2)$ 。则 $0=f(0)=f(4)<f(x_n),0<x_{n+1}=\sqrt{f(x_n)}<\sqrt{f(2)}=2$ 。根据数学归纳法，

$$0<x_n<2(n\ge 2)。$$

$\{x_n\}$ 有界。

记 $g(x)=1-(1-x)^2(0\le x\le 2)$ 。

$$g'(x)=2(1-x)\begin{cases}>0, & x<1\\ <0, & x>1\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调增加在 $[1,2]$ 上严格单调减少。$n\ge 2$ 时

$$x_{n+1}^2-x_n^2=x_n(4-x_n)-x_n^2=2(1-(1-x_n)^2)=2g(x_n)>2g(0)=2g(2)=0$$

$n \in Z^+$。$\{x_n\}$在$n \geq 2$时是单调增加的。

故$\{x_n\}$存在极限。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$。对$x_{n+1} = \sqrt{x_n(4-x_n)}$两边取极限得$A = \sqrt{A(4-A)}$。解得$A=2$（$x_2 > A = 0$舍去）。故，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$。

二、(10'')试确定常数 A, B, C 的值，使得$e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)=1+Ax+o(x^3)$，其中$o(x^3)$是当 $x \to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小。

解：$e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)=1+Ax+o(x^3) \Leftrightarrow e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)-1-Ax=o(x^3)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)-1-Ax}{x^3}=0$。

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)-1-Ax}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\left(1+Bx+Cx^2\right)-1-Ax}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+B-A)x+(0.5+B+C)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=0$$

所以$\begin{cases}1+B-A=0\\0.5+B+C=0\\\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0\end{cases}$。解得$\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=-\frac{2}{3}\\C=\frac{1}{6}\end{cases}$。此时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)-1-Ax}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0$$

三、求下列函数的极限：(18'', 每题 6'')

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sin 3x}$　　2、$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$　　3、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$

解：1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x}{3x}=-\dfrac{1}{6}$。

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$。

3、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x\ln x}=1$。

四、(8″) 设 $f(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 可导且 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，证明 $F(x)$在 $x=0$ 处可导的充要条件为 $f(0)=0$.

证：$f(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 可导则 $f(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 连续。

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f'(0)+f(0)$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f'(0)-f(0)$$

故，$F(x)$在 $x=0$ 处可导的充要条件为 $f(0)=0$.

五、(8″)求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间$(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型。

解：$f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 是初等函数，在有定义的点都是连续的。

让 $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 在 $(0,2\pi)$ 内解得 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$；让 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 在 $(0,2\pi)$ 内解得 $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$。$f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的全部间断点：$\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} e^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\ln(1+x)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^+} e^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\ln(1+x)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} f(x)=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=\left(\frac{4+3\pi}{4}\right)^{\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=\left(\frac{4+3\pi}{4}\right)^{0}=1$$

$$\lim_{x\to\frac{7\pi}{4}} f(x)=\lim_{x\to\frac{7\pi}{4}}(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=\left(\frac{4+7\pi}{4}\right)^{\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=\left(\frac{4+7\pi}{4}\right)^{0}=1$$

可见，前两点是第二类的无穷间断点；后两点是第一类的可去间断点。

六、(10”) 就 k 的不同取值情况，确定方程 $x-\frac{\pi}{2}\sin x=k$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内根的个数，并证明你的结论。

解：$f(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x-k, g(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x$ 到处可导。让

$g'(x)=f'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos x=0$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一解 $0<x_0<\frac{\pi}{2}$。

$g'(x)=f'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos x\begin{cases}<0, & 9<x<x_0\\ >0, & x_0<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$。可见，$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上单调减

少，在$\left[x_0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加。所以，

$$g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,g(x_0)=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0<0,f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-k,f(x_0)=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0-k$$

故有结论：方程$x-\frac{\pi}{2}\sin x=k$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内，（1）当$k\geq 0$时根的个数是 0；（2）当$0>k>x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0$时根的个数是 2；（3）当$k=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0$时根的个数是 1；（4）当$k<x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0$时根的个数是 0。

七、（7″）设函数 $y=y(x)$ 由方程$\begin{cases} x=\arctan t \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$所确定，求$\frac{dy}{dx}$。

解： $2y-ty^2+e^t=5$两边微分得$2dy-y^2dt-2tydy+e^tdt=0$。解得$dy=\frac{y^2-e^t}{2-2ty}dt$ 。

$\frac{dy}{dt}=\frac{y^2-e^t}{2-2ty}$。$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$。$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{y^2-e^t}{2-2ty}\Big/\frac{1}{1+t^2}=\frac{\left(1+t^2\right)\left(y^2-e^t\right)}{2-2ty}$。

八、求下列函数的导数：（21 分，每题 7 分）

1、 $y=\sin(\sin(\sin x))$ ，求y'。

2、$y=f(e^x)e^{f(x)}$，其中f 具有二阶导数，求y''。

3、$y=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n}$，求$y'$。

解：1、 $y'=\cos(\sin(\sin x))\cos(\sin x)\cos x$ 。

2、$y'=e^xf'(e^x)e^{f(x)}+f(e^x)f'(x)e^{f(x)}$ 。

$$y''=e^{x}f'(e^{x})e^{f(x)}+e^{2x}f''(e^{x})e^{f(x)}+e^{x}f'(e^{x})^{2}e^{f(x)}$$
$$+e^{x}f'(e^{x})f'(x)e^{f(x)}+f(e^{x})f''(x)e^{f(x)}+f(e^{x})f'(x)^{2}e^{f(x)}。$$

3、$y'=k_1(x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n}+k_2(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2-1}\cdots(x-a_n)^{k_n}$
$+\cdots+k_n(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n-1}$。

九、（10″）设函数 $f(x)$ 在闭区间$[-1,1]$上二次可导，且 $f(-1)=0$，又 $g(x)=[\sin\pi(x+1)]f(x)$，证明在 $(-1,1)$ 上至少存在一点ξ，使得$g''(\xi)=0$。

证：因为$f(x)$ 在闭区间$[-1,1]$上二次可导，所以$g'(x),g''(x)$都在闭区间$[-1,1]$上存在，并且$g(x)$和$g'(x)$都在闭区间$[-1,1]$上连续。$g(-1)=g(0)=g(1)=0$。根据罗尔中值定理，分别在$(-1,0),(0,1)$内存在ξ_1,ξ_2使得$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$。再根据罗尔中值定理，在$(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)$内至少存在一点ξ，使得$g''(\xi)=0$。