2012-2013 线性代数C

A卷 文科54学时

一. (1). $|A| = (3-2)\times(4-2)\times(5-2)\times(4-3)\times(5-3)\times(5-4) = 1\times2\times3\times1\times2\times1 = 12$

(2). $A_{41}+2A_{44} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&1&1\\3&4&5\\9&16&25\end{vmatrix} + 2\times(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix}$

$= -(4-3)\times(5-3)\times(5-4) + 2\times(3-2)\times(4-2)\times(4-3)$

$= -1\times2\times1+2\times1\times2\times1 = 2$

二. (1). $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1\ 2\ -1) = \begin{pmatrix}1\times1 & 1\times2 & 1\times(-1)\\ -1\times1 & -1\times2 & -1\times(-1)\\ 1\times1 & 1\times2 & 1\times(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$

(2).

$A^n = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1\ 2\ -1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdots(1\ 2\ -1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1\ 2\ -1)$

$= \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(-2)^{n-1}(1\ 2\ -1)$

$= (-2)^{n-1}\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$

三. (1). $(A\,\vdots\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&0&1&0&0\\1&3&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-5&0\\0&1&0&-1&2&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$ $A^{-1} = \begin{pmatrix}3&-5&0\\-1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(2). $AC + (C^TB)^T + A = AC + B^TC + A = (A+B^T)C + A = 0$ $(A+B^T)C = -A$

$(A+B^T\,\vdots\,-A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&-2&-5&0\\-1&1&0&-1&-3&0\\1&0&2&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac{2}{7}&\frac{1}{7}\\0&1&0&-1&-\frac{19}{7}&\frac{1}{7}\\0&0&1&0&-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{array}\right)$ $C = \begin{pmatrix}0&\frac{2}{7}&\frac{1}{7}\\-1&-\frac{19}{7}&\frac{1}{7}\\0&-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$

四. $\bar{A} = (A\,\vdots\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\-1&1&0&-1\\1&0&a&b\end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&1&0\\0&0&a-1&b-1\end{array}\right)$

(1). 当 $r(A)=r(\bar{A})=n$ 时，有唯一解，即 $a\neq1$

(2). 当 $r(A)\neq r(\bar{A})$ 时，无解，即 $a=1$，$b\neq1$

(3). 当 $r(A)=r(\bar{A})<n$ 时，有无穷多组解，即 $a=1$，$b=1$

此时 $\bar{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，特解为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，通解为 $\eta = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$c$为任意常数

五. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix}1&2&-1&0\\4&5&2&2\\1&-1&5&2\\0&-3&6&-1\\2&2&2&0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ 极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ $\alpha_3 = 3\alpha_1-2\alpha_2+0\alpha_4$

六、(1). 因为A与B相似，所以 $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$

即 $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

即 $(\lambda-2)(\lambda^2-a\lambda-1)=(\lambda-2)[\lambda^2+(1-b)\lambda-b]$

比较λ同次幂的系数，得 $a=0$，$b=1$

(2). $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

特征值为2，1，-1　线性无关特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$　$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

七、(1). 因为 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

所以 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为矩阵A的属于特征值1的特征向量

设矩阵A的属于特征值2的特征向量为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

因为实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量是正交的

所以 $x_1+x_2+x_3=0$　线性无关特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　$P^{-1}AP=\Lambda$

$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

(2). $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$

八、(1). $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　(2). $\left(\frac{A}{I}\right)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{成对的行列初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(3). f不正定

九、(1). 当 $AX=0$ 时，$A^TAX=A^T0=0$

故 $AX=0$ 的解是 A^TAX 的解

(2). 当 $A^TAX=0$ 时，设 $AX=\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$

$(AX)^T(AX)=X^TA^TAX=X^T0=0$

$(AX)^T(AX)=\beta^T\beta=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2$

则 $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$，$AX=\beta=0$

故 $A^TAX=0$ 的解是 $AX=0$ 的解

综上所述，$A^TAX=0$ 与 $AX=0$ 同解

十、假设 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性相关

因为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关

所以 η^* 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示

所以 η^* 为 $AX=0$ 的解

与 η^* 为 $AX=b\,(b\neq0)$ 的解矛盾

所以 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关