## 第一章

1．数值计算中，误差主要来源于______误差、______误差、______误差和______误差.

2. $\pi = 3.141592653\cdots$，近似值 $x^* = 3.1416$ 与精确值 $\pi$ 比较,有( D )几位有效数字.

A. 2 位　　B. 3 位　　C. 4 位　　D. 5 位

3. $\pi = 3.141592653\cdots$ 的 5 位有效数字,它的绝对误差限是( B )

A. 0.0005　　B. 0.00005　　C. 0.000005　　D. 0.0000005

4．已知 $e = 2.718281828\cdots$，取近似值 $x = 2.7182$，那么 $x$ 具有的有效数字是（A ）

A. 4 位　　B. 5 位　　C. 6 位　　D. 7 位

5. 为了使 $\sqrt{15}$ 的近似值的相对误差限小于 $0.001\%$，问应至少取几位有效数字?

6. $2.0004,\ -0.00200$ 是经过四舍五入得到的有效数字，指出它们有效数字的位数、绝对误差限和相对误差限。

**答案**

**5.** $\sqrt{15} = 3.\cdots$，取 $a_1 = 3$, $\varepsilon_r = \dfrac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$

$$\frac{1}{2\times 4}\times 10^{-n+1} < 10^{-n+1} \le 10^{-5}$$

$$n \ge 6$$

6. $x_1 = 2.0004 = 0.20004 \times 10^1$，其绝对误差限为 $0.00005 = 0.5 \times 10^{1-5}$，

即 $m = 1, n = 5$，故 $x_1 = 2.0004$ 有 5 位有效数字。$a_1 = 2$，

相对误差限 $\varepsilon_r = \dfrac{1}{2a_1} \times 10^{1-5} = 0.000025$

$x_2 = -0.00200 = -0.200 \times 10^{-2}$，其绝对误差限为 $0.000005 = 0.5\times 10^{-5} = 0.5 \times 10^{-2-3}$，

$m = -2, n = 3$，故 $x_2 = -0.00200$ 有 3 位有效数字。

$a_1 = 2$，相对误差限 $\varepsilon_r = \dfrac{1}{2a_1} \times 10^{1-3} = 0.0025$

## 第二章

1．用二分法求方程 $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ 在区间 $[0,2]$ 内的根，进行一步后根的所在区间为 $\underline{\ [0,1]\ }$，进

行两步后根的所在区间为 $x^*=\dfrac{1}{2}$ 。

2．用牛顿法及弦截法求解方程 $f(x)=0$ 的近似根时它们的的迭代公式分别为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 。

3．迭代过程 $x_{k+1}=\dfrac{2}{3}x_k+\dfrac{1}{x_k^2}$ 收敛于 $x^*=\sqrt[3]{3}$ 时，问其有几阶收敛速度。

4．判断用下前列迭代格式求方程 $x^3-2x-5=0$ 在 $[2,3]$ 内的根的收敛性。

（1）$x_{k+1}=\sqrt[3]{2x_k+5}$，　　（2）$x_{k+1}=\dfrac{2x_k+5}{x_k^2},k=0,1,\cdots$

5．证明用牛顿迭代法求解方程 $x-2\sin x=0$ 的正根时迭代格式是收敛的，并写出迭代格式。

**答案**

3．解　因为 $\varphi(x)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{x^2}$，$\varphi'(x)=\dfrac{2}{3}-2\dfrac{1}{x^3},\varphi''(x)=6\dfrac{1}{x^4}$

$$\varphi'(\sqrt[3]{3})=0,\varphi''(x\sqrt[3]{3})=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\neq 0$$

故是二阶收敛。

4．解（1）$\varphi(x)=(2x+5)^{\frac{1}{3}}$，$\varphi'(x)=\dfrac{2}{3}(2x+5)^{-\frac{2}{3}}$，$\varphi'(2)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{81}},\varphi'(3)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{121}}$，

$\max\limits_{2\le x\le 3}|\varphi'(x)|<1$，所以收敛。

（2）$\varphi(x)=\dfrac{2x+5}{x^2}$，$\varphi'(x)=\dfrac{-2(x+5)}{x^3},\varphi'(2)=-\dfrac{14}{8},\varphi'(3)=-\dfrac{16}{27}$，

$\max\limits_{2\le x\le 3}|\varphi'(x)|>1$，发散

5．证明：设

（1）$f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}-2<0,f(\dfrac{5\pi}{6})=\dfrac{5\pi}{6}-1>0,$

（2）$f'(x)=1-2\cos x\neq 0$，$x\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6})$

（3）$f''(x)=2\sin x>0$（即不变号），$x\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6})$

（4）选取初值 $x_0=\dfrac{5\pi}{6}$，则满足 $f(x_0)f''(x_0)>0$

所以用牛顿迭代法求解此方程是收敛的。

牛顿迭代法的迭代格式为：$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\dfrac{x_n-2\sin x_n}{1-2\cos x_n}$

## 第三章

1. $x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$,则 $\|x\|_1=$_____ ，$\|x\|_2=$_____ ，$\|x\|_\infty=$_____ 。

2. $A=\begin{bmatrix}1&3&1\\1&0&3\\3&4&-1\end{bmatrix}$则 $\|A\|_\infty=$______ ，$\|A\|_1=$_____.

3. 矩阵 A 的范数应满足下列四个条件：

__________________________；_________________________ ；

__________________________；__________________________。

4. 设 A=$(a_{ij})_{n\times n}$为对角占优阵，则矩阵 A 的元素应满足条件__________________________________。

5. 已知 A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&25\\0&-5&25\end{pmatrix}$，求$\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_2$。

6. 用平方根法求解下列线性方程组

$$\begin{bmatrix}4&2&6\\2&10&15\\6&15&26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\7\\17\end{bmatrix}$$

7. 写出计算线性方程组

$$\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&3&0\\2&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\\2\end{bmatrix}$$

的 Jacobi 迭代格式，并分析此格式的收敛性。

8. 给定线性方程组$\begin{bmatrix}1&-2&2\\-1&1&-1\\-2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$讨论线性方程组用雅可比迭代法和高斯－塞德尔迭代法的收敛性.

**答案:**

**5.** (1)$\|A\|_1 = \max\{1,10,50\} = 50,$

(2)$\|A\|_\infty = \max\{1,30,30\} = 30$,

(3)$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 25 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 25 \\ 0 & -5 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 1250 \end{pmatrix}$$

.

$$\therefore \left|\lambda E - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 50 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1250 \end{vmatrix} = 0,$$

故：$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 50$，$\lambda_3 = 1250$

$\therefore \|A\|_2 = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}$

6. 解（1） 1）进行三角分解 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 15 \\ 6 & 15 & 26 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 3 & \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

2）用前代法求解 $\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 3 & \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 17 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3）用回代法求解 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 3 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. 雅可比迭代法的迭代格式 $\begin{cases} x_1^{k+1} = 5 + x_2^{\ k} - 2x_3^{\ k} \\ x_2^{k+1} = \dfrac{1}{3}(-1 + x_1^{\ k}) \\ x_3^{k+1} = \dfrac{1}{7}(2 - 2x_1^{\ k}) \end{cases}$

$$B = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \dfrac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{7} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \dfrac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{7} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|B - \lambda I| = B = -D^{-1}(L+U) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ \dfrac{1}{3} & \lambda & 0 \\ -\dfrac{2}{7} & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - \frac{19}{21}) = 0 \qquad \lambda = 0, \quad \pm\sqrt{\frac{19}{21}}, \qquad \rho(B) = 0 < 1$$

8．解 (1) 雅可比迭代矩阵为

$$B=-D^{-1}(L+U)=-\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -1 & \lambda & -1\\ -2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0, \rho(B)=0<1$$

所以雅可比迭代法收敛

（2）高斯—塞德尔迭代矩阵为

$$G=-(D+L)^{-1}U=-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -8 & 6\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-G|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ 0 & \lambda-2 & 1\\ 0 & -8 & \lambda+6\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda(\lambda^2+4\lambda+4)=0,\quad \lambda_1=0,\lambda_2=-2+2\sqrt{2},\lambda_3=-2-2\sqrt{2}$$

$\rho(G)=2+2\sqrt{2}>1$　　　所以高斯—塞德尔迭代法发散

## 第五章

1．已知 $f(x)=8x^8+7x^6+2x^3+9$，则 $f[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]=$（ D ）

A. 8　　　　B. 7　　　　C. 2　　　　D. 0

2．已知 $f(x)=6x^4+5x^2+2x+1$，则 $f[4,5,6,7,8]=$（ A ）

A. 6　　　　B. 5　　　　C. 2　　　　D. 1

3．已知 $f(1)=1, f(2)=4, f(3)=2$，则 $f(x)$ 的分段线性插值函数为_________.

4. 求通过下述数据节点

| $x_i$ | 1 | 2 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $-3$ | 3 | 9 | 27 |

分别求出拉格朗日三次插值多项式和牛顿插值多项式，并计算 $f(3)$ 的近似值。

5. 已知 $f(x)$ 的函数值如下，写出 $f(x)$ 的 3 次 Lagrange 和 Newton 插值多项式。

| $x_i$ | 1 | 3 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|

| $f(x_i)$ | 0 | 2 | 15 | 12 |
|---|---|---|---|---|

**答案**

4 解

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$=\frac{3}{20}(x-2)(x-5)(x-6)+\frac{1}{4}(x-1)(x-5)(x-6)$$
$$-\frac{3}{4}(x-1)(x-2)(x-6)+\frac{27}{20}(x-1)(x-2)(x-5)$$

| $x_k$ | $f(x_k)$ | 1 阶差商 | 2 阶差商 | 3 阶差商 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-3$ | | | |
| 2 | 3 | 6 | | |
| 5 | 9 | 2 | $-1$ | |
| 6 | 27 | 18 | 4 | 1 |

$N(x)=-3+6(x-1)-(x-1)(x-2)+(x-1)(x-2)(x-5)$，　　$f(3)\approx N(3)=3$

5 $L_3(x)=0\times\frac{(x-3)(x-4)(x-7)}{(1-3)(1-4)(1-7)}+2\times\frac{(x-1)(x-4)(x-7)}{(3-1)(3-4)(3-7)}+15\times\frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{(4-1)(4-3)(4-7)}+12\times\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(7-1)(7-3)(7-4)}$

$$=\frac{1}{4}(x-1)(x-4)(x-7)-\frac{5}{3}(x-1)(x-3)(x-7)+\frac{1}{6}(x-1)(x-3)(x-4)$$

用牛顿插值公式，构造差商表

| | | 一阶 | 二阶 | 三阶 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | | |
| 3 | 2 | 1 | | |
| 4 | 15 | 13 | 4 | |
| 7 | 12 | -1 | $-\frac{7}{2}$ | $-\frac{5}{4}$ |

则有 $N_3(x)=0+1(x-1)+4(x-1)(x-3)-\frac{5}{4}(x-1)(x-3)(x-4)$

$f(2)\approx N_n(2)=-\frac{11}{2}$

## 第六章

**1.** $P_{222}$：3，4，6，9，13，19，22　　编写相关算法的程序。

2. 试用法方程方法求 $y=e^x$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式。

［答案：法方程为：$\begin{cases} a_0+\dfrac{1}{2}a_1=e-1 \\ \dfrac{1}{2}a_0+\dfrac{1}{3}a_1=1 \end{cases}$，$a_0=0.873, a_1=1.609$，$\varphi(x)=0.873+1.609x$］

3. 试用 Legendre 多项式构造 $x^4$ 在 $[-1,1]$ 上的二次最佳平方逼近多项式。

［答案: $S_2^*(x)=\dfrac{6}{7}x^2-\dfrac{3}{35}$］

4. 已知函数表为

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |

求其最小二乘拟合函数 $y=c_0+c_1x+c_2x^2$.

［答案：法方程组为：$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$，最小二乘拟合函数 $y=\dfrac{58}{35}-\dfrac{3}{7}x^2$］

5. 求 $y=\arctan x$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式。

［答案:正则方程组为$\begin{cases} a_0+\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2 \\ \dfrac{1}{2}a_0+\dfrac{1}{3}a_1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$，$a_0=0.0429, a_1=0.7918$，$\varphi(x)=0.0429+0.7918x$］

6. 推导下列矩形求积公式：

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3.$$

7. 给出下面数据表

| $x_i$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5 | 4 | 2 | 1 | 1 | 2 |

求一多项式曲线，使其拟合给定的这组数据.

8. 证明是实值函数 $\|f(x)\|=[\int_a^b f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}$ 是定义在 $C[a,b]$ 上的范数。

## 第七、八章

**1.** $P_{256}$: 1, 2, 4, 7，10

2. $P_{265}$：1, 2

**3.** 用三点公式和五点公式求 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x=1.0, 1.1$ 和 $1.2$ 处的导数值，并估计误差. $f(x)$ 的值由表给出.

| $x$ | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.250 0 | 0.266 8 | 0.206 6 | 0.189 0 | 0.173 6 |

**4.**求积公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3}{4}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{4}f(1)$ 的代数精度为多少?

**5** .若 $f''(x)>0,$ 证明用梯形公式计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 所得到的数值计算结果比准确值大，并说明其几何意义。

**6.**设 $f(x)$ 在[a, b]二阶连续可导，使推导下面求积公式，

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{1}{4}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]$$

并证明余项如下

$$R[f]=\frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi),\ \xi\in(a,b)$$

7. 试确定求积系数 A,B,C 使

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx Af(-1)+Bf(0)+Cf(1)$$

具有最高的代数精度

（ 答案：$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}f(-1)+\frac{4}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)$ ）

8. 数值积分方法中 Cotes 公式、复化求积公式、高斯公式的优劣性比较（从精度、收敛性、计算量等）。

## 第九章

**1.** $P_{305}$：1, 2, 3，6, 10, 12, 14, 15　编写相关算法的程序。

**2.** 用改进欧拉法求解处初值问题，要求取步长 h=0.5, 计算结果保留 6 位小数。

$$\begin{cases} y' = 1-\frac{2ty}{1+t^2}, 0<t\le 2 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

3. 对初值问题 $\begin{cases} y'=x-y+1, \\ y(0)=1, \end{cases}$，取步长 $h=0.1$，用四阶龙格-库塔法求 y(0.2)的近似值，并与准确解 $y=x+e^{-x}$.

在 $x^1=0.2$ 的值进行比较。

4. 比较常微分方程数值方法的欧拉法、改进欧拉法（预估-校正法）的优劣。
5. 了解单步法收敛性与稳定性。