

总复习



1. 行列式
2. 矩阵及其运算
3. 向量组 矩阵的秩
4. 向量空间与线性变换
5. 特征值问题
6. 二次型

1. 行列式

2. 矩阵及其运算

3. 向量组 矩阵的秩

4. 向量空间与线性变换

5. 特征值问题

6. 二次型

1.1 知识点



► 行列式的定义

余子式、代数余子式、行列式的按行（列）展开

► 行列式的性质

- 互换行与列，行列式不变
- 某行全为零，行列式为零
- 两行相等，行列式为零
- 两行成比例，行列式为零
- 行倍加，行列式不变
- 行倍乘，行列式倍乘
- 交换两行，行列式反号
-

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} |A|$$

► 行列式的计算

- 通过初等行变换化为上三角行列式
- 降阶法 (使某行 (列) 只有一个非零元)
- 升阶法 (加边法), 适用于

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

或

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

一些特殊的行列式

- ▶ 奇数阶反对称矩阵的行列式等于零
- ▶ 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

- ▶ 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & * & & \\ & \vdots & & \\ & * & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

- ▶ 斜三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & & a_n \\ & & & a_{n-1} & * \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

► 对角块行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{vmatrix} = |A_1| |A_2| \cdots |A_n|$$

$$\begin{vmatrix} A & \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B|$$

► 爪形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

► 爪形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$


其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。

► 爪形行列式


$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其解法固定，即从第二行开始，每行依次乘一个系数然后加到第一行，使得第一行除第一个元素外都为零，从而得到一个下三角行列式。


类似的方式还可用于求解如下形式的“爪型行列式”



(g)



(h)



(i)

► 发散型行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & c & d & \\ & & & & \\ c & & & & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^n$$

► 范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

常见题型

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

1.2 往年试题



例 1 (2005 - 2006 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $|AA^T|$ 。

例 1 (2005 - 2006 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $|AA^T|$ 。

解 因 $|AA^T| = |A| |A^T| = |A|^2$, 而

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 11 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 11 & 7 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -6 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 50 \end{aligned}$$

故

$$|AA^T| = 2500$$

例 2 (2009 - 2010 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, 求 $|AA^T|$ 。

例 2 (2009 - 2010 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, 求 $|AA^T|$ 。

解 因 $r(AA^T) \leq r(A) \leq 3$, 故 AA^T 为降秩矩阵, 从而 $|AA^T| = 0$ 。

例 3 (2006 - 2007 第一学期) 设 $A = (a_{ij})$ 为 2007 阶方阵, 其中 $a_{ij} = i - j$,
求 $|A|$

例 3 (2006 - 2007 第一学期) 设 $A = (a_{ij})$ 为 2007 阶方阵, 其中 $a_{ij} = i - j$, 求 $|A|$

解 注意到

$$a_{ij} = i - j = -(j - i) = -a_{ji},$$

故 A 为反对称矩阵, 由奇数阶反对称矩阵的行列式为零可知,

$$|A| = 0.$$

例 4 (2006 - 2007 第二学期) 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} \quad (n \geq 1)$$

例 4 (2006 - 2007 第二学期) 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} \quad (n \geq 1)$$

解

$$D \xrightarrow[i=2, \dots, n]{r_i + r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n!$$

例 5 (2006 - 2007 第二学期) 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

例 5 (2006 - 2007 第二学期) 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xrightarrow[i=n, n-1, \dots, 2]{r_i - r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例 6 (2007 - 2008 第一学期, 2010 - 2011 第二学期, 2011 - 2012 第一学期)

$$\text{计算 } D = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

例 6 (2007 - 2008 第一学期, 2010 - 2011 第二学期, 2011 - 2012 第一学期)

$$\text{计算 } D = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

解 (加边法)

- ▶ 当 $x=0$ 时, $D=0$
- ▶ 当 $x \neq 0$ 时,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{x} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = x^{n-1} \left(x + \sum_{i=1}^n a_i \right)$$

例 7 (2008 - 2009 第一学期) 计算

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

例 8 (2011 - 2012 第二学期)

计算 $D =$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & x \end{vmatrix}$$

例 8 (2011 - 2012 第二学期)

计算 $D =$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & x \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} D &= (x+45) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x & 9 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & x \end{vmatrix} = (x+45) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & x-8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x-9 \end{vmatrix} \\ &= (x+45) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x-8 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x-9 \end{vmatrix} = (x+45)(x-1)(x-2)\cdots(x-9) \end{aligned}$$

例 9 (2012 - 2013 第二学期) 计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

例 9 (2012 - 2013 第二学期) 计算

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解 可用加边法

例 10 (2007 - 2008 第一学期, 2010 - 2011 第一学期) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m, \quad |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n,$$

求四阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2|$

例 10 (2007 - 2008 第一学期, 2010 - 2011 第一学期) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m, \quad |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n,$$

求四阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2|$

解

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2| &= |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| + |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| \\ &= |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| - |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = m - n \end{aligned}$$

例 11 (2007 - 2008 第二学期) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都是三维列向量, 记三阶矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3),$$

已知 $|A| = 1$, 求 $|B|$ 。

例 11 (2007 - 2008 第二学期) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都是三维列向量, 记三阶矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3),$$

已知 $|A| = 1$, 求 $|B|$ 。

解 因

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

而

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

故

$$|B| = 2|A| = 2.$$

例 12 (2008 - 2009 第一学期) 计算 $D = \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -cf \end{vmatrix}$

例 12 (2008 - 2009 第一学期) 计算 $D = \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -cf \end{vmatrix}$

解

$$\begin{aligned} D &= adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -c \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 0 & 2e \\ 0 & 2c & e-c \end{vmatrix} \\ &= -adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 2c & e-c \\ 0 & 0 & 2e \end{vmatrix} = -adf \cdot (-b) \cdot 2c \cdot 2e = 4abcdef \end{aligned}$$

例 13 (2012 - 2013 第二学期) 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

例 13 (2012 - 2013 第二学期) 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 = 30$$

例 14 (2013 - 2014 第一学期) 在 n 阶行列式 D 中, 如果把第一列移到最后一列, 而其余各列保持原来次序各向左移动了一列, 得到行列式 Δ , 问 Δ 与 D 有何关系?

例 14 (2013 - 2014 第一学期) 在 n 阶行列式 D 中, 如果把第一列移到最后一列, 而其余各列保持原来次序各向左移动了一列, 得到行列式 Δ , 问 Δ 与 D 有何关系?

解

$$\Delta = (-1)^{n-1} D$$

1. 行列式

2. 矩阵及其运算

3. 向量组 矩阵的秩

4. 向量空间与线性变换

5. 特征值问题

6. 二次型

2.1 往年试题



例 15 (2005-2006 第一学期) 已知 A 为 $n(n \geq 2)$ 矩阵, 且 A 非奇异, 求 $(A^*)^*$ 。

例 15 (2005-2006 第一学期) 已知 A 为 $n(n \geq 2)$ 矩阵, 且 A 非奇异, 求 $(A^*)^*$ 。

解 由 $A^{-1} = A^* / |A|$, 可知 $A^* = |A|A^{-1}$, 从而 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。而

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{n-2}A.$$

例 16 (2005-2006 第一学期, 2009-2010 第一学期, 2010-2011 第一学期,

2011-2012 第一学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a \end{pmatrix}$, 且 $r(A) = 2$, X 满足

$AX + I = A^2 + X$, 求 a 和 X 。

例 16 (2005-2006 第一学期, 2009-2010 第一学期, 2010-2011 第一学期,

2011-2012 第一学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a \end{pmatrix}$, 且 $r(A) = 2$, X 满足

$AX + I = A^2 + X$, 求 a 和 X 。

解 因 $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$, 由 $r(A) = 2$ 知 $a = 1$, 故 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AX + I = A^2 + X \Rightarrow (A - I)X = A^2 - I = (A - I)(A + I)$$

因 $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆, 故

$$X = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

例 17 (2005-2006 第一学期) 设 A 为 n 阶实矩阵,

- (1) 当 n 为奇数且 $AA^T = I$ 及 $|A| = 1$ 时, 证明 $|I - A| = 0$;
- (2) 当 m 为任意给定正整数且 $(A + I)^m = \mathbf{0}$, 证明 A 可逆。

例 17 (2005-2006 第一学期) 设 A 为 n 阶实矩阵,

(1) 当 n 为奇数且 $AA^T = I$ 及 $|A| = 1$ 时, 证明 $|I - A| = 0$;

(2) 当 m 为任意给定正整数且 $(A + I)^m = \mathbf{0}$, 证明 A 可逆。

证明.

(1) 由 $AA^T = I$ 知 $A^T = A^{-1}$ 。又 $I - A = (A^{-1} - I)A = (A^T - I)A$, 故

$$|I - A| = |A^T - I||A| = |A - I| = (-1)^n = |I - A|$$

而 n 为奇数, 于是 $|I - A| = -|I - A|$, 即 $|I - A| = 0$ 。

例 17 (2005-2006 第一学期) 设 A 为 n 阶实矩阵,

(1) 当 n 为奇数且 $AA^T = I$ 及 $|A| = 1$ 时, 证明 $|I - A| = 0$;

(2) 当 m 为任意给定正整数且 $(A + I)^m = 0$, 证明 A 可逆.

证明.

(1) 由 $AA^T = I$ 知 $A^T = A^{-1}$. 又 $I - A = (A^{-1} - I)A = (A^T - I)A$, 故

$$|I - A| = |A^T - I||A| = |A - I| = (-1)^n = |I - A|$$

而 n 为奇数, 于是 $|I - A| = -|I - A|$, 即 $|I - A| = 0$.

(2) 由 $(A + I)^m = 0$, 即 $A^m + C_m^{m-1}A^{m-1} + \cdots + C_m^1A + I = 0$ 可知,

$$A(A^{m-1} + C_m^{m-1}A^{m-2} + \cdots + C_m^1I) = -I$$

故

$$A^{-1} = -(A^{m-1} + C_m^{m-1}A^{m-2} + \cdots + C_m^1I).$$



例 18 (2005-2006 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $A^2 - AB = I$,

(1) 求 B ;

(2) 令 $C = 4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$, 计算 C^* 。

例 18 (2005-2006 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $A^2 - AB = I$,

(1) 求 B ;

(2) 令 $C = 4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$, 计算 C^* 。

解

(1) 由 $A^2 - AB = I$ 知 $AB = A^2 - I$ 。利用如下过程可求得 B :

$$(A, A^2 - I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I, B)$$

易求得 $A^2 - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 易求得

$$\mathbf{C} = (2\mathbf{A} - \mathbf{B})(2\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{C}| = 64.$$

故

$$\mathbf{C}^* = |\mathbf{C}| \mathbf{C}^{-1} = 16 \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 19 (2006-2007 第一学期) 设三阶方阵 $A = (a_{ij})$,

- (1) 若 $A^T = A$ 且 $A^2 = \mathbf{0}$, 证明 $A = \mathbf{0}$; 并由反例说明一般情况下 $A^2 = \mathbf{0}$ 得不出 $A = \mathbf{0}$;
- (2) 若 A 可逆, 将其第二行的 2 倍加到第三行的矩阵为 B , 问 $BA^{-1} - AB^{-1}$ 是否可逆?

例 19 (2006-2007 第一学期) 设三阶方阵 $A = (a_{ij})$,

- (1) 若 $A^T = A$ 且 $A^2 = \mathbf{0}$, 证明 $A = \mathbf{0}$; 并由反例说明一般情况下 $A^2 = \mathbf{0}$ 得不出 $A = \mathbf{0}$;
- (2) 若 A 可逆, 将其第二行的 2 倍加到第三行的矩阵为 B , 问 $BA^{-1} - AB^{-1}$ 是否可逆?

解

- (1) 由条件知 $A^T A = \mathbf{0}$, 而 $(A^T A)_{ii} = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 0$, 故 $a_{ij} = 0$, 即 $A = \mathbf{0}$. 反例: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$, 但 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例 19 (2006-2007 第一学期) 设三阶方阵 $A = (a_{ij})$,

- (1) 若 $A^T = A$ 且 $A^2 = \mathbf{0}$, 证明 $A = \mathbf{0}$; 并由反例说明一般情况下 $A^2 = \mathbf{0}$ 得不出 $A = \mathbf{0}$;
- (2) 若 A 可逆, 将其第二行的 2 倍加到第三行的矩阵为 B , 问 $BA^{-1} - AB^{-1}$ 是否可逆?

解

- (1) 由条件知 $A^T A = \mathbf{0}$, 而 $(A^T A)_{ii} = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 0$, 故 $a_{ij} = 0$, 即 $A = \mathbf{0}$ 。反例: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$, 但 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

- (2) 由题意知 $B = PA$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 故

$$\begin{aligned} BA^{-1} - AB^{-1} &= PAA^{-1} - AA^{-1}P^{-1} = P - P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

显然不可逆。

例 20 (2006-2007 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)$;

(2) 求 A^{-1} 。

例 20 (2006-2007 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)$;

(2) 求 A^{-1} 。

解

$$(1) (A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = BA - AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & -3 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

例 20 (2006-2007 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)$;

(2) 求 A^{-1} 。

解

$$(1) (A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = BA - AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & -3 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} (A, I) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 21 (2006-2007 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$;

(2) 求 $|A^*|$ 。

例 21 (2006-2007 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$;

(2) 求 $|A^*|$ 。

解

$$(1) \quad 4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB = (2A - B)(2A + B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -44 & -24 & -60 \\ -5 & -25 & 11 \end{pmatrix}$$

例 21 (2006-2007 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 $4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$;

(2) 求 $|A^*|$ 。

解

$$(1) \quad 4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB = (2A - B)(2A + B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -44 & -24 & -60 \\ -5 & -25 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \text{因 } |A^*| = |A|^2, \text{ 而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ 故 } |A^*| = 0.$$

例 22 (2007-2008 第一学期) 证明

- (1) 设 A 为 n 阶方阵, 证明: 若 $|A| = 0$, 则 $|A^*| = 0$;
- (2) 设 A, B 为 n 阶方阵, 且满足 $A^2 = A, B^2 = B, r(A + B - I) = n$, 证明:
 $r(A) = r(B)$ 。

例 22 (2007-2008 第一学期) 证明

- (1) 设 A 为 n 阶方阵, 证明: 若 $|A| = 0$, 则 $|A^*| = 0$;
(2) 设 A, B 为 n 阶方阵, 且满足 $A^2 = A, B^2 = B, r(A + B - I) = n$, 证明:
 $r(A) = r(B)$ 。

证明.

(1) $|A^*| = |A|^{n-1} = 0$;

例 22 (2007-2008 第一学期) 证明

- (1) 设 A 为 n 阶方阵, 证明: 若 $|A| = 0$, 则 $|A^*| = 0$;
(2) 设 A, B 为 n 阶方阵, 且满足 $A^2 = A, B^2 = B, r(A + B - I) = n$, 证明:
 $r(A) = r(B)$ 。

证明.

- (1) $|A^*| = |A|^{n-1} = 0$;
(2) 由 $r(A + B - I) = n$ 知 $A + B - I$ 可逆。故

$$r(A) = r(A(A + B - I)) = r(AB)$$

$$r(B) = r((A + B - I)B) = r(AB)$$

于是 $r(A) = r(B)$.



例 23 (2007-2008 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,

$AC - I = B + C$, 求 C 。

例 23 (2007-2008 第二学期) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,

$AC - I = B + C$, 求 C 。

解 由题意可知 $(A - I)C = B + I$,

$$\begin{aligned}(A - I, B + I) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & -5 & 11 \end{pmatrix} \\&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 24 (2008-2009 第一学期) 设 A, B 为三阶方阵, 满足 $AB + I = A^2 + B$, 且

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } B \text{ 及 } B^*。$$

例 24 (2008-2009 第一学期) 设 A, B 为三阶方阵, 满足 $AB + I = A^2 + B$, 且

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } B \text{ 及 } B^*.$$

解 依题意可知

$$(A - I)B = A^2 - I = (A - I)(A + I),$$

而 $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 非奇异, 故

$$B = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

例 25 (2009-2010 第一学期) 计算下列各题:

(1) 已知 $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 A^{2010} ;

(2) 设 $n(n \geq 2)$ 阶方阵 A 非奇异, 求 $(A^*)^*$ 。

例 25 (2009-2010 第一学期) 计算下列各题:

(1) 已知 $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 A^{2010} ;

(2) 设 $n(n \geq 2)$ 阶方阵 A 非奇异, 求 $(A^*)^*$ 。

解

(1) 由 $|A - \lambda I| = (a + b + c - \lambda)\lambda^2 = 0$ 知, 特征值为 $\lambda_{1,2} = 0$ 与 $\lambda_3 = a + b + c$ 。

► $\lambda_{1,2} = 0$, 方程为 $x + y + z = 0$, 基础解系为 $\boxed{\mathbf{x}_1 = (-1, 1, 0)^T, \mathbf{x}_2 = (-1, 0, 1)^T}$ 。

► $\lambda_3 = a + b + c$, 方程为 $\begin{pmatrix} -b-c & a & a \\ b & -a-c & b \\ c & c & -a-b \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$, 基础解系为

$\boxed{\mathbf{x}_3 = (a, b, c)^T}$ 。

故

$$A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & a+b+c \end{pmatrix}$$

从而

$$A^{2010} = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & a+b+c \end{pmatrix}^{2010} P^{-1}$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} -b & a+c & -b \\ -c & -c & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$A^{2010} = (a+b+c)^{2009} \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

例 26 (2009-2010 第一学期, 2011-2012 第二学期) 设三阶方阵 A 满足

$$AX = A + 2X, \text{ 且 } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 求 } X。$$

例 26 (2009-2010 第一学期, 2011-2012 第二学期) 设三阶方阵 A 满足

$$AX = A + 2X, \text{ 且 } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 求 } X.$$

解 依题意可知 $(A - 2I)X = A$, 解此矩阵方程即可求得 X 。

例 26 (2009-2010 第一学期, 2011-2012 第二学期) 设三阶方阵 A 满足

$$AX = A + 2X, \text{ 且 } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 求 } X.$$

解 依题意可知 $(A - 2I)X = A$, 解此矩阵方程即可求得 X 。

$$\begin{aligned} (A - 2I, A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 27 (2009-2010 第二学期) 已知矩阵方程满足 $(2I - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 求 A , 其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 27 (2009-2010 第二学期) 已知矩阵方程满足 $(2I - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 求 A , 其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解 依题意知 $A^T = (2I - C^{-1}B)^{-1}C^{-1} = (C(2I - C^{-1}B))^{-1} = (2C - B)^{-1}$

$$(2C - B, I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 28 (2012-2013 第二学期) 已知 A 为三阶矩阵, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4I$, I 为三阶单位矩阵, 求矩阵 A 。

例 28 (2012-2013 第二学期) 已知 A 为三阶矩阵, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且满足

$2A^{-1}B = B - 4I$, I 为三阶单位矩阵, 求矩阵 A 。

解 依题意 $A(B - 4I) = 2B$, 可用 $\left(\begin{array}{c} B - 4I \\ 2B \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等列变换}} \left(\begin{array}{c} I \\ A \end{array} \right)$ 求 A 。

$$\left(\begin{array}{c} B - 4I \\ 2B \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

例 29 (2012-2013 第二学期) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $A^*BA = 2BA - 9I$, 求 B 。

例 29 (2012-2013 第二学期) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足

$A^*BA = 2BA - 9I$, 求 B 。

解 易知 $|A| = -1$, 即 A 可逆, 由 $AA^* = |A|I = -I$ 可得

$$A^*BA = 2BA - 9I \Rightarrow AA^*BA = A(2BA - 9I)$$

$$\Rightarrow -BA = 2ABA - 9A \Rightarrow -B = 2AB - 9I \Rightarrow (2A + I)B = 9I$$

$$(2A + I, 9I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

例 30 (2012-2013 第二学期) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 A^n ;

(2) 设 $A^2 + AB - A = I$, 求 $|B|$ 。

例 30 (2012-2013 第二学期) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 A^n ;

(2) 设 $A^2 + AB - A = I$, 求 $|B|$ 。

解

(1) 求矩阵的特征值与特征向量。

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)^3 \end{aligned}$$

- 当 $\lambda_{1,2,3} = 2$ 时, $(A - \lambda I)x = 0$ 为

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

基础解系为

$$x_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \quad x_2 = (-1, 0, 1, 0)^T, \quad x_3 = (-1, 0, 0, 1)^T.$$

故对应于 $\lambda_{1,2,3} = 2$ 的特征向量为 $k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$, (k_1, k_2, k_3 不全为零);

- 当 $\lambda_4 = -2$ 时, $(A - \lambda I)x = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应方程为

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

基础解系为

$$x_3 = (1, 1, 1, 1)^T$$

取

$$P = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $AP = P\Lambda$, 即

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

从而

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = 2^n P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

当 n 为偶数时, $A^n = 2^n I$ 当 n 为奇数时, $A^n = 2^n P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ 而

$$A = 2P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ 故 } A^n = 2^{n-1} A。$$

(2) 依题意,

$$AB = I - A + A^2 = I - A + 4I = -A + 5I$$

故

$$|A||B| = |-A + 5I|$$

即

$$-16|B| = |A - 5I| = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 189$$

故

$$|B| = -\frac{189}{16}.$$

1. 行列式
2. 矩阵及其运算
3. 向量组 矩阵的秩
4. 向量空间与线性变换
5. 特征值问题
6. 二次型

3.1 知识点



设 $m \times n$ 矩阵 A 按列分块为

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

其中 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 m 维列向量, 则线性组合

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$$

可表示为矩阵形式

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

结论 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 等价于齐次方程组

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

有非零解, 也等价于

$$r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < n = \text{矩阵 } A \text{ 的列数}.$$

结论 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 等价于齐次方程组

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

只有零解, 也等价于

$$r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = n = \text{矩阵 } A \text{ 的列数}.$$

结论 向量 \boldsymbol{b} 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示, 等价于方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

有解, 也等价于

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

结论 向量 \boldsymbol{b} 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一地线性表示, 等价于方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

有惟一解, 也等价于

$$r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \text{ 的列数.}$$

结论 关于向量组的线性相关性，有如下结论：

- ▶ 部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关。

▶

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{无关}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+m,1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ a_{n+1,s} \\ \vdots \\ a_{n+m,s} \end{pmatrix} \text{相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \text{相关}$$

向量组和矩阵的秩

定义 (向量组的秩) 设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 。如果能从其中选出 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 满足

- ▶ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
- ▶ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关,

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为原向量组的一个**极大线性无关组**, 简称**极大无关组**。

极大线性无关组所含向量的个数 r , 称为原向量组的**秩**。

定义 (矩阵的秩) 矩阵的行秩或列秩的数值, 称为矩阵的秩。

向量组的秩

结论 设

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = p, \quad r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r,$$

如果向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可由 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 则

$$r \leq p.$$

以上结论中, 向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可看作是向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个线性组合。由此可知

结论 (★★★★★) 对向量组进行线性组合, 秩不变或减少。

矩阵的秩

性质

$$\max\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\} \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}).$$

$$r(\mathbf{A}) \leq r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq r(\mathbf{A}) + 1.$$

设 $r(\mathbf{A}) = p$, $r(\mathbf{B}) = q$, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的列向量组的极大无关组分别为

$$\alpha_1, \dots, \alpha_p \text{ 和 } \beta_1, \dots, \beta_q.$$

显然 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 的列向量组可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ 线性表示。

矩阵的秩

注 1



$$\min\{r(A), r(B)\} \leq r(A, B)$$

意味着：在 A 的右侧添加新的列，只有可能使得秩在原来的基础上得到增加；当 B 的列向量能被 A 的列向量线性表示时，等号成立。



$$r(A, B) \leq r(A) + r(B)$$

意味着：对 (A, B) ，有可能 A 的列向量与 B 的列向量出现线性相关，合并为 (A, B) 的秩一般会比 $r(A) + r(B)$ 要小。

矩阵的秩

性质

$$r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}).$$

设 $r(\mathbf{A}) = p$, $r(\mathbf{B}) = q$, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的列向量组的极大无关组分别为

$$\alpha_1, \dots, \alpha_p \text{ 和 } \beta_1, \dots, \beta_q.$$

矩阵的秩

性质

$$r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}).$$

设 $r(\mathbf{A}) = p$, $r(\mathbf{B}) = q$, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的列向量组的极大无关组分别为

$$\alpha_1, \dots, \alpha_p \text{ 和 } \beta_1, \dots, \beta_q.$$

显然 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 的列向量组可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ 线性表示。

注 2 将矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 合并、相加, 秩不变或减小。

矩阵的秩

性质

$$r(\mathbf{AB}) \leq \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})).$$

矩阵的秩

性质

$$r(\mathbf{AB}) \leq \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})).$$

证明. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵, 将 \mathbf{A} 按列分块, 则

$$\mathbf{AB} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知, \mathbf{AB} 的列向量组可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 故

$$r(\mathbf{AB}) = \mathbf{AB} \text{ 的列秩} \leq \mathbf{A} \text{ 的列秩} = r(\mathbf{A}).$$

矩阵的秩

性质

$$r(\mathbf{AB}) \leq \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})).$$

证明. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵, 将 \mathbf{A} 按列分块, 则

$$\mathbf{AB} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

由此可知, \mathbf{AB} 的列向量组可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 故

$$r(\mathbf{AB}) = \mathbf{AB} \text{ 的列秩} \leq \mathbf{A} \text{ 的列秩} = r(\mathbf{A}).$$

类似地, 将 \mathbf{B} 按行分块, 可得

$$r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{B}).$$



矩阵的秩

性质 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, P, Q 分别为 m 阶、 n 阶可逆矩阵, 则

$$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ).$$

齐次线性方程组解的结构

定义 (基础解系) 设 x_1, x_2, \dots, x_p 为 $Ax=0$ 的解向量, 若

(1) x_1, x_2, \dots, x_p 线性无关

(2) $Ax=0$ 的任一解向量可由 x_1, x_2, \dots, x_p 线性表示。

则称 x_1, x_2, \dots, x_p 为 $Ax=0$ 的一个基础解系。

定理 (★★★★★) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 若 $r(A) = r < n$, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在基础解系, 且基础解系含 $n-r$ 个解向量。

齐次线性方程组的全部解可由基础解系给出:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_p x_p \quad (k_1, k_2, \dots, k_p \text{ 为任意常数}).$$

非齐次线性方程组

结论 (非齐次线性方程组解的结构)

“ $Ax = b$ 的通解” = “ $Ax = 0$ 的通解” + “ $Ax = b$ 的特解”

几类重要的矩阵

定义 (阶梯形矩阵) 若矩阵 A 满足

- (1) 零行在最下方;
- (2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增,

则称 A 为**阶梯形矩阵**。

几类重要的矩阵

定义 (阶梯形矩阵) 若矩阵 A 满足

- (1) 零行在最下方;
- (2) 非零行首元的列标号随行标号的增加而严格递增,

则称 A 为**阶梯形矩阵**。

例 31

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

几类重要的矩阵

定义 (行简化阶梯形矩阵) 若矩阵 A 满足

- (1) 它是阶梯形矩阵;
- (2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外, 其余元素全为零,

则称 A 为行简化阶梯形矩阵。

几类重要的矩阵

定义 (行简化阶梯形矩阵) 若矩阵 A 满足

- (1) 它是阶梯形矩阵;
- (2) 非零行首元所在的列除了非零行首元外, 其余元素全为零,

则称 A 为行简化阶梯形矩阵。

例 32

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

几类重要的矩阵

定义 (行最简阶梯形矩阵) 若矩阵 A 满足

- (1) 它是行简化阶梯形矩阵;
- (2) 非零行首元为 1,

则称 A 为行最简阶梯形矩阵。

几类重要的矩阵

定义 (行最简阶梯形矩阵) 若矩阵 A 满足

- (1) 它是行简化阶梯形矩阵;
- (2) 非零行首元为 1,

则称 A 为行最简阶梯形矩阵。

例 33

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 典型例题 1 （线性相关性）



典型例题 1 (线性相关性)

例 34 (2007-2008 第一学期, 2010-2011 第一学期) 若有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使得 $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m + \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_m \beta_m = \mathbf{0}$ 成立, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 也线性相关。试讨论该结论是否正确?

典型例题 1 (线性相关性)

例 34 (2007-2008 第一学期, 2010-2011 第一学期) 若有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使得 $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m + \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_m \beta_m = \mathbf{0}$ 成立, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 也线性相关。试讨论该结论是否正确?

该题可转换为:

$$(A+B)x = \mathbf{0} \text{ 有非零解 } \stackrel{?}{\implies} Ax = \mathbf{0} \text{ 和 } Bx = \mathbf{0} \text{ 都有非零解}$$

典型例题 1 (线性相关性)

例 35 (2007-2008 第二学期) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, I 为单位矩阵, 易知 $BA = I$, 试判断 A 的列向量组是否线性相关? 为什么?

典型例题 1 (线性相关性)

例 35 (2007-2008 第二学期) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, I 为单位矩阵, 易知 $BA = I$, 试判断 A 的列向量组是否线性相关? 为什么?

解 一方面

$$r(A) \geq r(BA) = n,$$

另一方面

$$r(A) \leq n$$

故 $r(A) = n$, 于是 A 的列向量组线性无关。

典型例题 1 (线性相关性)

例 36 (2012-2013 第二学期) 设 A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times n$ 矩阵, $n < m$ 且 $AB = I$, 证明 B 的列向量组线性无关。

典型例题 1 （线性相关性）

例 37 (2008-2009 第一学期) 证明：与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系。

典型例题 1 (线性相关性)

例 37 (2008-2009 第一学期) 证明: 与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系。

证明 设 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为基础解系, $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 A 的等价组, 且线性无关。由于 B 等价于 A , 故 A, B 可以互相线性表示。因 A 为基础解系, 齐次线性方程组的全部解能由 A 线性表示, 而 A 可由 B 线性表示, 故齐次线性方程组的全部解能由 B 线性表示。注意到 $r(A) = r$ 和 $r(B) = s$, 而 A 与 B 等价, 故 $r(A) = r(B)$, 即 $r = s$ 。综上所述, B 也为基础解系。

典型例题 1 (线性相关性)

例 38 (2009-2010 第一学期) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关,

- 1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是否线性无关, 并说明理由。
- 2 常数 l, m 满足何种条件时, $l\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, m\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关, 并说明理由。

典型例题 1 (线性相关性)

例 38 (2009-2010 第一学期) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关,

- 1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是否线性无关, 并说明理由。
- 2 常数 l, m 满足何种条件时, $l\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, m\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关, 并说明理由。

证明

- 1 整体无关, 则部分无关。
- 2 设 $x_1(l\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + x_3(m\alpha_3 + \alpha_1) = \mathbf{0}$ 即

$$(lx_1 + x_3)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + (x_2 + mx_3)\alpha_3 = \mathbf{0}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故

$$\begin{cases} lx_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + mx_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解。

3.3 典型例题 2 （极大无关组与向量组的秩）



典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

例 39 (★★★★★) 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

例 39 (★★★★★) 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解 作矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, 由

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{r_1 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_4 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

将最后一个阶梯矩阵 \mathbf{B} 记为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

将最后一个阶梯矩阵 B 记为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$

易知 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ 为 B 的列向量组的一个极大无关组, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 也为 A 的列向量组的一个极大无关组, 故

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3,$$

且

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4,$$

例 40 (★★★★★) 设

$\alpha_1 = (1, 3, 1, 2)$, $\alpha_2 = (2, 5, 3, 3)$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)$, $\alpha_4 = (3, 10, k, 4)$, 试求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩, 并将 α_4 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

例 40 (★★★★★) 设

$\alpha_1 = (1, 3, 1, 2)$, $\alpha_2 = (2, 5, 3, 3)$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)$, $\alpha_4 = (3, 10, k, 4)$, 试求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩, 并将 α_4 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

解 将 4 个向量按列排成一个矩阵 A , 对 A 进行初等变换, 将其化为阶梯形矩阵 U , 即

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix} = U$$

例 40 (★★★★★) 设

$\alpha_1 = (1, 3, 1, 2)$, $\alpha_2 = (2, 5, 3, 3)$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)$, $\alpha_4 = (3, 10, k, 4)$, 试求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩, 并将 α_4 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

解 将 4 个向量按列排成一个矩阵 A , 对 A 进行初等变换, 将其化为阶梯形矩阵 U , 即

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix} = U$$

(1) 当 $a=1$ 或 $k=2$ 时, U 只有 3 个非零行, 故

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(A) = 3.$$

例 40 (★★★★★) 设

$\alpha_1 = (1, 3, 1, 2)$, $\alpha_2 = (2, 5, 3, 3)$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)$, $\alpha_4 = (3, 10, k, 4)$, 试求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩, 并将 α_4 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

解 将 4 个向量按列排成一个矩阵 A , 对 A 进行初等变换, 将其化为阶梯形矩阵 U , 即

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix} = U$$

(1) 当 $a=1$ 或 $k=2$ 时, U 只有 3 个非零行, 故

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(A) = 3.$$

(2) 当 $a \neq 1$ 且 $k \neq 2$ 时,

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(A) = 4.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

► 当 $k=2$ 且 $a \neq 1$ 时, α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且

$$\alpha_4 = -\frac{1+5a}{1-a}\alpha_1 + \frac{2+a}{1-a}\alpha_2 + \frac{3}{1-a}\alpha_3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- 当 $k=2$ 且 $a \neq 1$ 时, α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且

$$\alpha_4 = -\frac{1+5a}{1-a}\alpha_1 + \frac{2+a}{1-a}\alpha_2 + \frac{3}{1-a}\alpha_3.$$

- 当 $k \neq 2$ 或 $a = 1$ 时, α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

例 41 (★★★★★) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $r(A) = 2$, 求 t 。

例 41 (★★★★★) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $r(A) = 2$, 求 t 。

解

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

例 41 (★★★★★) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

已知 $r(A) = 2$, 求 t 。

解

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2+t & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

由于 $r(B) = r(A)$, 故 B 中第 2、3 行必须成比例, 即

$$\frac{-2}{2+t} = \frac{-4}{6},$$

即得 $t = 1$ 。

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

例 42 (2005-2006 第二学期) 设

$$\alpha_1 = (1, 0, 2, 1), \alpha_2 = (2, 0, 1, -1), \alpha_3 = (1, 1, 0, 1), \alpha_4 = (4, 1, 3, 1),$$

求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组。

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

例 43 (2006-2007 第二学期) 计算向量组

$$\alpha_1 = (1, -2, 3, -1, 2)^T, \alpha_2 = (2, 1, 2, -2, -3)^T,$$

$$\alpha_3 = (5, 0, 7, -5, -4)^T, \alpha_4 = (3, -1, 5, -3, -1)^T$$

的秩和一个极大无关组, 同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

例 44 (2007-2008 第二学期) 计算向量组

$$\xi_1 = (1, 2, 3)^T, \xi_2 = (-8, 4, 8)^T, \xi_3 = (2, -1, -2)^T, \xi_4 = (10, 5, 6)^T$$

的秩和一个极大无关组, 同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

例 45 (2008-2009 第一学期) 计算向量组

$$\xi_1 = (1, 0, 2, 1)^T, \xi_2 = (2, 0, 1, -1)^T, \xi_3 = (1, 1, 0, 1)^T, \xi_4 = (4, 1, 3, 1)^T$$

的秩和一个极大无关组, 同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

例 46 (2008-2009 第一学期) 计算向量组

$$\xi_1 = (1, 1, 0)^T, \xi_2 = (0, 1, 1)^T, \xi_3 = (1, 1, 1)^T, \xi_4 = (1, 2, 1)^T$$

的秩和一个极大无关组, 并给出向量组中不能由其余向量线性表示的向量。

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

例 47 (2009-2010 第一学期) 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解, 其中

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1 求 λ, a .
- 2 求其通解。

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

例 48 (2009-2010 第一学期) 设有向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, 0)^T, \alpha_2 = (1, a+2, -3a)^T, \alpha_3 = (-1, -b-2, a+2b)^T, \beta = (1, 3, -3)^T,$$

讨论当 a, b 为何值时,

- 1 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;
- 2 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示, 并求出表示式;
- 3 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式。

典型例题 2 (极大无关组与向量组的秩)

例 49 (2012-2013 第二学期) 已知

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ b \\ 4 \end{pmatrix}$$

问 a, b 为何值时,

- 1 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;
- 2 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示, 并求出表示式;
- 3 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式;
- 4 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 并在此时求它的秩和一个最大无关组, 且用该最大无关组表示其余向量。

3.4 典型题型 3 （非齐次线性方程组）



典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 50 (★★★★★) 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时, 此方程组

- (1) 有唯一解?
- (2) 无解?
- (3) 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 50 (★★★★★) 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_1 & +(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & x_1 & +x_2 & +(1+\lambda)x_3 & = & \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时, 此方程组

- (1) 有唯一解?
- (2) 无解?
- (3) 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2.$$

故当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时, 有唯一解。

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

当 $\lambda = 0$ 时, 原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组, 故无解。

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

当 $\lambda = 0$ 时, 原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组, 故无解。

当 $\lambda = -3$ 时, 增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

当 $\lambda = 0$ 时, 原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组, 故无解。

当 $\lambda = -3$ 时, 增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

当 $\lambda = 0$ 时, 原方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它为矛盾方程组, 故无解。

当 $\lambda = -3$ 时, 增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 51 (2005-2006 第一学期) 已知 $Ax = b$, 其中

$A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}$, 问 λ 为何值时, 该方程组有唯一解、无解或无穷多解? 并在有无穷多解时求其解。

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 52 (2005-2006 第二学期; 2006-2007 第二学期) 设线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 1 \end{cases}, \text{ 问 } \lambda \text{ 为何值时, 此方程组有唯一解、无解或无穷多} \\ \text{个解? 并在无穷多解时求出其通解。}$$

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 53 (2006-2007 第一学期) 当 a, b 为何值时, 方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & a+8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b+7 \end{pmatrix}$$

有唯一解、无解或无穷多解? 在有解时, 给出方程组的解。

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 54 (2007-2008 第一学期, 2010-2011 第二学期) 设线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= -2 \end{cases}, \text{ 问 } \lambda \text{ 为何值时, 此方程组有唯一解、无解或无穷多} \\ \text{个解? 并在无穷多解时求出其通解。}$$

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 55 (2008-2009 第一学期) 设线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix},$$
 问 λ 为何值时, 此方程组有唯一解、无解或无穷多个解? 并在无穷多解时求出其通解。

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 56 (2009-2010 第一学期) 设线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix},$$
 问 λ 为何值时, 此方程组有唯一解、无解或无穷多个解? 并在无穷多解时求出其通解。

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 57 (2009-2010 第一学期) 设线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, 问 a, b 为何值时, 此方程组有唯一解、无解或无穷多个解? 并在无穷多解时求出其通解。

例 58 (2011-2012 第一学期) 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形, 对 λ 进行讨论, 并在无穷多解时求其通解。

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 59 (2011-2012 第二学期) 已知线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & a & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}. \text{ 就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸}$$

情形, 对 a, b 进行讨论, 并在无穷多解时求其通解。

例 60 (2012-2013 第二学期) 已知线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \lambda - 5 \\ 2 & 5 - \lambda & -4 \\ 2 - \lambda & 2 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ 就该方程组无解、有唯一解、有无穷}$$

多解诸情形, 对 λ 进行讨论, 并在无穷多解时求其通解。

典型题型 3 (非齐次线性方程组)

例 61 (2013-2014 第一学期) 已知线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2b \end{pmatrix}.$$

就该方程组无解、有唯一解、有无穷多解诸情形, 对 a, b 进行讨论, 并在无穷多解时求其通解。

1. 行列式
2. 矩阵及其运算
3. 向量组 矩阵的秩
4. 向量空间与线性变换
5. 特征值问题
6. 二次型

4.1 知识点



基与坐标

定义 (\mathbb{R}^n 的基与向量关于基的坐标) 设有序向量组 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \subset \mathbb{R}^n$, 如果 B 线性无关, 则 \mathbb{R}^n 中任一向量 α 均可由 B 线性表示, 即

$$\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n,$$

称 B 为 \mathbb{R}^n 的一组基, 有序数组 (a_1, a_2, \dots, a_n) 是向量 α 在基 B 下的坐标, 记作

$$\alpha_B = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{或} \quad \alpha_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

并称之为 α 的坐标向量。

$$\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

定理 设 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, 且

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n, \\ \eta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n, \\ \dots\dots\dots \\ \eta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n. \end{cases}$$

则 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 线性无关的充要条件是

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

设 \mathbb{R}^n 的两组基 $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 和 $B_2 = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ 满足关系式

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵。

定理 设 α 在两组基 $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 与 $B_2 = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ 的坐标分别为

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad \text{和} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 A , 则

$$A\mathbf{y} = \mathbf{x} \quad \text{或} \quad \mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{x}$$

例 62 已知 \mathbb{R}^3 的一组基为 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, 其中

$$\beta_1 = (1, 2, 1)^T, \beta_2 = (1, -1, 0)^T, \beta_3 = (1, 0, -1)^T,$$

求自然基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

例 63 已知 \mathbb{R}^3 的两组基为 $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 和 $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, 其中

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \quad \alpha_3 = (0, 0, 1)^T,$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \beta_2 = (0, 1, -1)^T, \quad \beta_3 = (1, 2, 0)^T.$$

(1) 求基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 α 在基 B_1 的坐标为 $(1, -2, -1)^T$, 求 α 在基 B_2 下的坐标。

定义 (内积) 在 \mathbb{R}^n 中, 对于 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 和 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 规定 α 和 β 的内积为

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

当 α 和 β 为列向量时,

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha.$$

内积

性质 对于 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{R}$,

(i) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

(ii) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$

(iii) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$

(iv) $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\alpha = 0$.

定义 (向量长度) 向量 α 的长度定义为

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

内积

定理 (柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式)

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$$

定义 (向量之间的夹角) 向量 α, β 之间的夹角定义为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

定理

$$\alpha \perp \beta \iff (\alpha, \beta) = 0$$

定理 (三角不等式)

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

标准正交基

定理 \mathbb{R}^n 中两两正交且不含零向量的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是线性无关的。

定义 (标准正交基) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基。

标准正交基

例 64 设 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基, 求 \mathbb{R}^n 中向量 β 在基 B 下的坐标。

解

$$\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n$$

$$\Rightarrow (\beta, \alpha_j) = (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n, \alpha_j) = x_j (\alpha_j, \alpha_j)$$

$$\Rightarrow x_j = (\beta, \alpha_j)$$

施密特正交化过程

目标

从线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 出发, 构造**标准正交向量组**。

施密特正交化过程

给定 \mathbb{R}^n 中的线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,

► 正交化

1.

$$\beta_1 = \alpha_1$$

2.

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

3.

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

4.

.....

5.

$$\beta_m = \alpha_m - \frac{(\alpha_m, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_m, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_m, \beta_{m-1})}{(\beta_{m-1}, \beta_{m-1})} \beta_{m-1}.$$

► 单位化

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \xrightarrow{\eta_j = \frac{\beta_j}{\|\beta_j\|}} \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$$

例 65 已知 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 其中

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, -1, 1)^T.$$

试用施密特正交化方法, 由 B 构造 \mathbb{R}^3 的一组标准正交基。

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -1, 0)^T,$$

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ &= (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(1, -1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 \\ &= (1, -1, 1)^T - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T - \frac{2}{2}(1, -1, 0)^T = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

解 (续)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ \boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \\ \boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).\end{aligned}$$

正交矩阵

定义 (正交矩阵) 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果

$$A^T A = I$$

则称 A 为正交矩阵。

定理

A 为正交矩阵 $\iff A$ 的列向量组为一组标准正交基。

正交矩阵

定理 设 A, B 皆为 n 阶正交矩阵, 则

(1) $|A| = 1$ 或 -1

(2) $A^{-1} = A^T$

(3) A^T 也是正交矩阵

(4) AB 也是正交矩阵

定理 若列向量 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 的作用下变换为 $Ax, Ay \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度与向量间的夹角都保持不变.

线性空间的定义

定义 数域 F 上的线性空间 V 是一个非空集合, 存在两种运算

- ▶ 加法 ($\alpha + \beta$)
- ▶ 数乘 ($\lambda \in \alpha$)

其中 $\alpha, \beta \in V, \lambda \in F$, 且 V 对两种运算封闭, 并满足以下 8 条性质:

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. 存在 $0 \in V$ 使得 $\alpha + 0 = \alpha$, 其中 0 称为 V 的零元素
4. 存在 $-\alpha \in V$, 使得 $\alpha + (-\alpha) = 0$, 其中 $-\alpha$ 称为 α 的负元素
5. $1\alpha = \alpha$
6. $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
7. $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$
8. $k(\alpha + \beta) = k\alpha + l\alpha$

其中 $\alpha, \beta, \gamma \in V, k, l \in F$ 。

例 66

- ▶ 数域 F 上的全体多项式 $F(x)$, 对通常的多项式加法和数乘多项式的运算构成数域 F 上的线性空间, 其中
- ▶ 如果只考虑次数小于 n 的实系数多项式, 则它们连同零多项式一起构成实数域 R 上的线性空间, 记为 $\mathbb{R}[x]_n$ 。

例 67 对矩阵的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间，记为 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 。

线性空间的定义

例 68 对于 $[a, b]$ 上的全体实连续函数, 加法与数乘运算构成实数域上的线性空间, 记为 $C[a, b]$ 。

对于 (a, b) 上全体 k 阶导数连续的实函数, 对同样的加法和数乘运算也构成实线性空间, 记为 $C^k(a, b)$ 。

线性空间的性质

性质 线性空间的零元素是唯一的。

性质 线性空间中任一元素 α 的负元素是唯一的。

性质 若 $\alpha, \beta \in V; k, l \in F$, 则

$$k(\alpha - \beta) = k\alpha - l\beta, \quad (k - l)\alpha = k\alpha - l\alpha.$$

性质

- ▶ $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- ▶ $k(-\beta) = -(k\beta)$
- ▶ $0\alpha = \mathbf{0}$
- ▶ $(-l)\alpha = -(l\alpha).$

性质 设 $\alpha \in V, k \in F$, 若 $k\alpha = \mathbf{0}$, 则 $k = 0$ 或 $\alpha = \mathbf{0}$.

线性子空间

定义 (线性子空间) 设 $V(F)$ 是一个线性空间, W 是 V 的一个非空子集。如果 W 对 $V(F)$ 中定义的**线性运算**也构成数域 F 上的一个线性空间, 则称 W 为 $V(F)$ 上的一个**线性子空间** (简称**子空间**)。

定理 线性空间 $V(F)$ 的非空子集 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 V 的两种运算封闭。

例 69 在线性空间 V 中,

- ▶ 由单个的零向量组成的子集合 $\{0\}$ 是 V 的一个子空间, 称为**零子空间**;
- ▶ V 本身也是 V 的一个子空间,

这两个子空间都称为 V 的**平凡子空间**, 而 V 的其他子空间称为**非平凡子空间**。

例 70 设 $A \in F^{m \times n}$, 则 $Ax = 0$ 的解集合

$$S = \{x \mid Ax = 0\}$$

是 F^n 的一个子空间, 称为齐次线性方程组的解空间 (也称矩阵 A 的零空间, 记作 $\mathcal{N}(A)$)。

注: 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集合不是 F^n 的子空间。

例 71 全体 n 阶实数量矩阵、实对角矩阵、实对称矩阵、实上（下）三角矩阵分别组成的集合，都是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间。

例 72 设 \mathbb{R}^3 的子集合

$$V_1 = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}, V_2 = \{(1, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\},$$

则 V_1 是 \mathbb{R}^3 的子空间, V_2 不是 \mathbb{R}^3 的子空间。

注: 在 \mathbb{R}^3 中,

- ▶ 凡是过原点的平面或直线上的全体向量组成的子集合都是 \mathbb{R}^3 的子空间;
- ▶ 凡是不过原点的平面或直线上的全体向量组成的子集合都不是 \mathbb{R}^3 的子空间。

定理 设 V 是数域 F 上的线性空间, S 是 V 的一个非空子集, 则 S 中的一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W = \{k_1 \alpha_1 + \cdots + k_m \alpha_m \mid \alpha_i \in S, k_i \in F, i = 1, \cdots, m\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间。

这里, W 称为由 V 的非空子集 S 生成的子空间。

特别地, 当 S 为有限子集 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 时, 记

$$W = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \text{ 或 } W = \text{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$$

为由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 生成的子空间。

例 73

- ▶ $Ax = 0$ 的解空间是由它的基础解系生成的子空间；
- ▶ \mathbb{R}^3 中任一个过原点的平面上的全体向量所构成的子空间，是由该平面上任意两个线性无关的向量生成的子空间。

定理 设 W_1, W_2 是数域 F 上的线性空间 V 上的两个子空间, 且

$$W_1 = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad W_2 = L(\beta_1, \dots, \beta_t),$$

则 $W_1 = W_2$ 的充分必要条件是二个向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 和 β_1, \dots, β_t 等价。

定义 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间, 则 V 的子集合

$$W_1 \cap W_2 = \{\alpha \mid \alpha \in W_1 \text{ 且 } \alpha \in W_2\},$$

$$W_1 + W_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

分别称为两个子空间的**交**与**和**。

如果 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, 则称 $W_1 + W_2$ 为**直和**, 记为 $W_1 \oplus W_2$ 。

定理 线性空间 $V(F)$ 的两个子空间 W_1, W_2 的交与和仍是 V 的子空间。

定义 矩阵 A 的列（行）向量组生成的子空间，称为矩阵 A 的列（行）空间，记为 $\mathcal{R}(A)$ ($\mathcal{R}(A^T)$)。

若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，则

- ▶ A 的列向量组为

$$\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}^m$$

- ▶ A 的行向量组为

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}^n$$

于是

- ▶ $\mathcal{R}(A) = L(\beta_1, \dots, \beta_n)$ 是 \mathbb{R}^m 的一个子空间；
- ▶ $\mathcal{R}(A^T) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间。

非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解

$\Leftrightarrow b$ 是 A 的列向量组的线性组合

$\Leftrightarrow b$ 属于 A 的列空间, 即 $b \in \mathcal{R}(A)$

定义 设 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, W 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间。如果对于任意的 $\gamma \in W$, 均有

$$(\alpha, \gamma) = 0,$$

则称 α 与子空间 W 正交, 记作 $\alpha \perp W$ 。

定义 设 V 和 W 是 \mathbb{R}^n 的两个子空间。如果对于任意的 $\alpha \in V, \beta \in W$, 均有

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称 V 与 W 正交, 记作 $V \perp W$ 。

例 74 对于齐次线性方程组 $Ax = 0$, 其每个解向量与系数矩阵 A 的每个行向量都正交, 故解空间与 A 的行空间是正交的, 即

$$\mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A^T).$$

定理 \mathbb{R}^n 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\alpha \mid \alpha \perp V, \alpha \in \mathbb{R}^n\}$$

是 \mathbb{R}^n 的一个子空间。

定义 \mathbb{R}^n 中与子空间 V 正交的全体向量构成的子空间 W , 称为 V 的**正交补**, 记为 $W = V^\perp$ 。

例 75 $Ax = 0$ 的解空间 $\mathcal{N}(A)$ 由与 A 的行向量都正交的全部向量构成, 故

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^\perp.$$

这是 $Ax = 0$ 的解空间的一个基本性质。

线性空间的基、维数和向量的坐标

在一般的线性空间 $V(F)$ 中讨论元素（或称向量）的线性相关性、基、维数以及坐标。

例 76 证明：线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中元素 $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = x^2, \dots, f_{n-1} = x^{n-1}$ 是线性无关。

例 77 证明：线性空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中的元素

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是线性无关的。

线性空间的基、维数和向量的坐标

显然, 在 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中, 矩阵

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是也线性无关的, 且 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中任一矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}.$$

在 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中任意 5 个元素 (二阶矩阵) A, B, C, D, Q 是线性相关的, 若 A, B, C, D 线性无关, 则 Q 可由 A, B, C, D 线性表出, 且表示法唯一。

由此可以发现 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的这些属性与 \mathbb{R}^4 是类似的, 我们可以把线性空间的这些属性抽象为基、维数与坐标的概念。

线性空间的基、维数和向量的坐标

定义 如果线性空间 $V(F)$ 中存在线性无关的向量组 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 且任一 $\alpha \in V$ 都可以由 B 线性表示为

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n,$$

则称

- ▶ V 是 n 维线性空间 (或者说 V 的维数为 n , 记作 $\dim V = n$);
- ▶ B 是 V 的一个基;
- ▶ 有序数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为 α 关于基 B 的坐标 (向量), 记作

$$\alpha_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in F^n.$$

线性空间的基、维数和向量的坐标

在 n 维线性空间 V 中,

- ▶ 任意 $n+1$ 个元素 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ 都可以由 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示,
- ▶ n 维线性空间中任意 $n+1$ 个元素都是线性相关的,

故 n 维线性空间 V 中, 任何 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

例 78

- ▶ $F[x]_n$ 是 n 维线性空间, $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ 是它的一组基;
- ▶ $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是 4 维线性空间, $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 是它的一组基;
- ▶ $F^{m \times n}$ 是 $m \times n$ 维线性空间, $\{E_{ij}\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ 是它的一组基。

线性空间的基、维数和向量的坐标

在线性空间 V 中, $\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的基。

例 79 矩阵 A 的列空间 $\mathcal{R}(A)$ 和行空间 $\mathcal{R}(A^T)$ 的维数都等于 A 的秩。 V 的零子空间 $\{0\}$ 的维数为零。

$Ax = 0$ 的基础解系是其解空间 $\mathcal{N}(A)$ 的基, 如果 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = r$, 则解空间 $\mathcal{N}(A)$ 的维数为 $n - r$, 所以

$$\dim(\mathcal{R}(A^T)) + \dim(\mathcal{N}(A)) = n.$$

线性空间的基、维数和向量的坐标

定理 设 V 是 n 维线性空间, W 是 V 的 m 维子空间, 且 $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ 是 W 中的一组基, 则 B_1 可以扩充为 V 的基, 即在 B_1 的基础上可以添加 $n-m$ 个向量而成为 V 的一组基.

定理 (子空间的维数公式) 设 W_1, W_2 是线性空间 $V(F)$ 的子空间, 则

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2).$$

线性空间的基、维数和向量的坐标

n 维线性空间 $V(F)$ 中向量在基 B 下的坐标, 与 F^n 中向量关于基 B 的坐标是完全类似的, 主要有以下几个结论:

- ▶ 向量在给定基下的坐标是唯一的;
- ▶ 由基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵是可逆的;
- ▶ 基变换与坐标变换的公式

在这里都是适用的。

线性空间的基、维数和向量的坐标

给定 $V(F)$ 中的一组基 $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, $V(F)$ 中的向量及其坐标 (F^n 中的向量) 不仅是一一对应的, 而且这种对应保持线性运算关系不变, 即

$$V(F) \text{ 中 } \alpha + \gamma \text{ 对应于 } F^n \text{ 中 } \alpha_B + \gamma_B$$

$$V(F) \text{ 中 } \lambda \alpha \text{ 对应于 } F^n \text{ 中 } \lambda \alpha_B$$

事实上, 若 $\alpha = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n, \gamma = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \dots + y_n\beta_n, \lambda \in F$, 则有

$$(\alpha + \beta) = (x_1 + y_1)\beta_1 + (x_2 + y_2)\beta_2 + \dots + (x_n + y_n)\beta_n,$$

$$\lambda \alpha = (\lambda x_1)\beta_1 + (\lambda x_2)\beta_2 + \dots + (\lambda x_n)\beta_n$$

故

$$(\alpha + \beta)_B = \alpha_B + \beta_B, \quad (\lambda \alpha)_B = \lambda \alpha_B.$$

线性空间的基、维数和向量的坐标

具有上述对应关系的两个线性空间 $V(F)$ 和 F^n ，称它们是**同构**的。

也就是说，研究任何 n 维线性空间 $V(F)$ ，都可以通过基和坐标，转化为研究 n 维向量空间 F^n 。

这样，我们对不同的 n 维线性空间就有了统一的研究方法，统一到研究 F^n 。

因此，通常把线性空间也成为向量空间，线性空间中的元素也称为向量。

线性空间的基、维数和向量的坐标

例 80 证明: $B = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组基, 并求

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

在基 B 下的坐标。

证明. 前面我们已经证明 B 是线性无关的, 且 $\forall p(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ 均可表示成

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1},$$

故 B 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组基 (自然基), 因此 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 n 维实线性空间。 $p(x)$ 在基 B 下的坐标为

$$(p(x))_B = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T.$$

$$p(x) = (1, x, \dots, x^{n-1}) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$



例 81 设 $B_1 = (g_1, g_2, g_3), B_2 = (h_1, h_2, h_3)$, 其中

$$\begin{cases} g_1 = 1, \\ g_2 = -1 + x, \\ g_3 = 1 - x + x^2, \end{cases}, \quad \begin{cases} h_1 = 1 - x - x^2, \\ h_2 = 3x - 2x^2, \\ h_3 = 1 - 2x^2, \end{cases}$$

1. 证明 B_1, B_2 是 $\mathbb{R}[x]_3$ 的基
2. 求 B_1 到 B_2 的过渡矩阵
3. 已知 $[p(x)]_{B_1} = (1, 4, 3)^T$, 求 $[p(x)]_{B_2}$.

定义 (线性变换) 设 $V(F)$ 是一个向量空间, 若 $V(F)$ 的一个变换 σ 满足条件:
 $\forall \alpha, \beta \in V$ 和 $\lambda \in F$,

1. $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$

2. $\sigma(\lambda\alpha) = \lambda\sigma(\alpha)$

就称 σ 是 $V(F)$ 的一个**线性变换**, 并称 $\sigma(\alpha)$ 为 α 的象, α 为 $\sigma(\alpha)$ 的原象。

线性运算等价于: $\forall \alpha, \beta \in V$ 和 $\lambda, \mu \in F$, 有

$$\sigma(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\sigma(\alpha) + \mu\sigma(\beta).$$

线性变换的定义

例 82 (旋转变换) \mathbb{R}^2 中每个向量绕原点按逆时针方向旋转 θ 角的变换 R_θ 是 \mathbb{R}^2 的一个线性变换。

例 83 (镜像变换) \mathbb{R}^2 中每个向量关于过原点的直线 L (看做镜面) 相对称的变换 ϕ 也是 \mathbb{R}^2 的一个线性变换, 即

$$\phi(\alpha) = \alpha'.$$

例 84 (投影变换) 把 \mathbb{R}^3 中向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ 投影到 xOy 平面上的向量 $\beta = (x_1, x_2, 0)$ 的投影变换 $P(\alpha) = \beta$, 即

$$P(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$$

是 \mathbb{R}^3 的一个线性变换。

例 85 (恒等变换、零变换、数乘变换)

- ▶ 恒等变换 $\sigma(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$
- ▶ 零变换 $\sigma(\alpha) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$
- ▶ 数乘变换 $\sigma(\alpha) = \lambda\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$

例 86 \mathbb{R}^3 中定义变换

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - 4x_3, 2x_3),$$

则 σ 是 \mathbb{R}^3 的一个线性变换。

例 87 \mathbb{R}^3 中定义变换

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3, x_2),$$

则 σ 不是 \mathbb{R}^3 的一个线性变换。

对于 \mathbb{R}^n 的变换

$$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

- ▶ 当 y_i 都是 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性组合时, σ 是 \mathbb{R}^n 的线性变换。
- ▶ 当 y_i 有一个不是 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性组合时, σ 不是 \mathbb{R}^n 的线性变换。

线性变换的简单性质

对于数域 F 上的向量空间 V 中的线性变换 σ

- ▶ $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$, $\forall \alpha \in V$;
- ▶ 若 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$, $k_i \in F$, $\alpha_i \in V$, 则

$$\sigma(\alpha) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_n\sigma(\alpha_n).$$

- ▶ 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 则其象向量组 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_n)$ 也线性相关。

注 3 但 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 不能推导出 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_n)$ 也线性无关。

线性变换的矩阵表示

定理 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 $V(F)$ 的一组基, 若 $V(F)$ 的两个线性变换 σ 和 τ 关于这组基的象相同, 即

$$\sigma(\alpha_i) = \tau(\alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则 $\sigma = \tau$.

线性变换的矩阵表示

因 $\sigma(\alpha_i) \in V(F)$, 故它们可由 $V(F)$ 的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 线性表出, 即有

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n, \\ \sigma(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n, \\ \dots\dots\dots \\ \sigma(\alpha_n) = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n. \end{array} \right.$$

记

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n))$$

其矩阵形式为

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}. \quad (1)$$

线性变换的矩阵表示

定义 若 $V(F)$ 中的线性变换 σ , 使得 $V(F)$ 的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 和 σ 关于基的象 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)$ 满足

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A,$$

就称 A 是 σ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下对应的矩阵。

线性变换的矩阵表示

定理 设 $V(F)$ 中,

- ▶ 线性变换 σ 在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为 A ,
- ▶ 向量 α 在基下的坐标向量为 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$,
- ▶ $\sigma(\alpha)$ 在基下的坐标向量为 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$,

则

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}.$$

线性变换的矩阵表示

例 88 旋转变换 R_θ 在 \mathbb{R}^2 的标准正交基 $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ 和 $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

例 89 镜像变换 φ 在 \mathbb{R}^2 的标准正交基 $\{\omega, \eta\}$ 下所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 90 \mathbb{R}^n 的恒等变换、零变换和数乘变换在任何基下的矩阵分别都是 $I_n, \mathbf{0}_n, \lambda I_n$ 。

例 91 设 σ 是 \mathbb{R}^3 的一个线性变换, $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 已知

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1, 0, 0)^T, & \alpha_2 &= (1, 1, 0)^T, & \alpha_3 &= (1, 1, 1)^T, \\ \sigma(\alpha_1) &= (1, -1, 0)^T, & \sigma(\alpha_2) &= (-1, 1, -1)^T, & \sigma(\alpha_3) &= (1, -1, 2)^T.\end{aligned}$$

1. 求 σ 在基 B 下对应的矩阵;
2. 求 $\sigma^2(\alpha_1), \sigma^2(\alpha_2), \sigma^2(\alpha_3)$;
3. 已知 $\sigma(\beta)$ 在基 B 下的坐标为 $(2, 1, -2)^T$, 问 $\sigma(\beta)$ 的原象 β 是否唯一? 并求 β 在基 B 下的坐标。

解 1. 由 $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$ 可知

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

可求得

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解 2. 由

$$\sigma(\alpha_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma(\alpha_1), \sigma(\sigma_2), \sigma(\sigma_3)) = (\alpha_1, \sigma_2, \sigma_3)A$$

可知

$$\begin{aligned}\sigma(\sigma(\alpha_1), \sigma(\sigma_2), \sigma(\sigma_3)) &= \sigma((\alpha_1, \sigma_2, \sigma_3)A) \\ &= (\sigma(\alpha_1, \sigma_2, \sigma_3))A = (\alpha_1, \sigma_2, \sigma_3)A^2 \\ &= (\alpha_1, \sigma_2, \sigma_3) \begin{pmatrix} 6 & -10 & 14 \\ -4 & 9 & -14 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

解 3. 设 $(\beta)_B = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

解得

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 0) + k(1, 2, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

故 $\sigma(\beta)$ 的原象 β 不唯一。

线性变换的矩阵表示

定理 设线性变换 σ 在基 $B_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 和基 $B_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 下的矩阵分别为 A 和 B , 且 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 C , 则

$$B = C^{-1}AC.$$

例 92 设 \mathbb{R}^3 的线性变换 σ 在自然基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 求 σ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的矩阵, 其中

$$\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \quad \beta_2 = (-1, 1, 0)^T, \quad \beta_3 = (-1, 0, 1)^T.$$

2. $\alpha = (1, 2, 3)^T$, 求 σ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的坐标向量 $(y_1, y_2, y_3)^T$ 及 $\sigma(\alpha)$.

线性变换的矩阵表示

解 1. 由

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C$$

知

$$C = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

于是 σ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的矩阵为

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 2. α 在自然基下的坐标向量为其本身, 即 $(1, 2, 3)^T$, 因此, 由坐标变换公式得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

σ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的坐标向量为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

线性变换的矩阵表示

由

$$\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} := (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

知, 给定 \mathbb{R}^n 中的一组基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, \mathbb{R}^n 中任一向量组 β_1, \dots, β_n 就等价于任给上式中的一个矩阵 A 。

反过来, 任给 n 个向量 β_1, \dots, β_n , 是否存在唯一的一个线性变换 σ , 使得 $\sigma(\alpha_j) = \beta_j$?

线性变换的矩阵表示

定理 设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基, β_1, \dots, β_n 是在 \mathbb{R}^n 中任意给定的 n 个向量, 则一定存在唯一的线性变换 σ , 使得

$$\sigma(\alpha_j) = \beta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

线性变换的矩阵表示

综上所述，可得重要结论：

给定 \mathbb{R}^n 的一组基后， \mathbb{R}^n 中的线性变换与 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的矩阵一一对应。

定义 设 σ 与 τ 是线性空间 $V(F)$ 的两个线性变换, $\lambda \in F$, 定义

$$\begin{aligned}(\sigma + \tau)(\alpha) &= \sigma(\alpha) + \tau(\alpha), \\(\lambda\sigma)(\alpha) &= \lambda\sigma(\alpha), \\(\sigma\tau)(\alpha) &= \sigma(\tau(\alpha))\end{aligned}$$

上述定义的 $\sigma + \tau, \lambda\sigma, \sigma\tau$ 仍是 $V(F)$ 的线性变换。

线性变换的运算

定理 设线性空间 $V(F)$ 的线性变换 σ 与 τ 在 V 的基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下对应的矩阵分别为 A 和 B , 则 $\sigma + \tau$, $\lambda\sigma$ 和 $\sigma\tau$ 在该组基下对应的矩阵分别为 $A + B$, λA 和 AB 。

定义 如果线性变换 σ 对应的矩阵 A 为可逆矩阵, 则称 σ 是**可逆的线性变换**。
 σ 可逆也可定义为: 如果存在线性变换 τ 使得

$$\sigma\tau = \tau\sigma = I$$

则称 σ 为**可逆的线性变换**。

线性变换的象（值域）与核

定义 设 σ 是线性空间 $V(F)$ 的一个线性变换,

- 把 V 中所有元素在 σ 下的象所组成的集合

$$\sigma(V) = \{\beta \mid \beta = \sigma(\alpha), \alpha \in V\}$$

称为 σ 的**象或值域**, 记为 $\text{Im } \sigma$;

- V 的零元 0 在 σ 下的完全原象

$$\sigma^{-1}(0) = \{\alpha \mid \sigma(\alpha) = 0, \alpha \in V\}$$

称为 σ 的核, 记为 $\text{Ker } \sigma$ 。

线性变换的象（值域）与核

- (1) $\sigma(V)$ (或 $\text{Im } \sigma$) 是线性空间 $V(F)$ 的一个子空间;
- (2) $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ (或 $\text{Ker } \sigma$) 也是线性空间 $V(F)$ 的一个子空间;
- (3) 线性变换 σ 是单射的充分必要条件是 $\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$ 。

线性变换的象（值域）与核

- ▶ $\dim \sigma(V)$ 称为 σ 的秩, 记作 $r(\sigma)$;
- ▶ $\dim \sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 称为 σ 的零度, 记作 $\mathcal{N}(\sigma)$ 。

线性变换的象（值域）与核

定理 设线性空间 $V(F)$ 的维数为 n , σ 是 $V(F)$ 的一个线性变换, 则

$$\dim \sigma(V) + \dim \sigma^{-1}(\mathbf{0}) = n.$$

线性变换的象（值域）与核

$$\dim \sigma(V) = r(A).$$

$$\dim \sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \dim \mathcal{N}(A).$$

4.2 往年试题



例 93 (13-14 上) 在 \mathbb{R}^4 中, 已知

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2-a \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 1 求 a 使得 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 为 \mathbb{R}^4 的基;
- 2 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵 P .

例 94 在 $P[x]_3$ 中, 求 $f(x) = 3x^2 + 7x + 3$ 在基: $f_1 = x^2 + x, f_2 = x^2 - x, f_3 = x + 1$ 下的坐标。

解 设 $f = k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3$ 得

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 3, \\ k_1 - k_2 + k_3 = 7, \\ k_3 = 3 \end{cases}$$

它有唯一解 $(k_1, k_2, k_3) = (\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 3)$ 。故 $f(x)$ 在所给基下的坐标为 $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 3)$ 。

例 95 在 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中所有 2 阶实对称矩阵所组成的集合构成 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的一个子空间 V 。

在 V 中定义线性变换 $T: T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求线性变换 T 在基

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵。

解 设

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$T(A_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$T(A_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A_2 + 2A_3,$$

$$T(A_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A_3,$$

故所求矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

例 96 已知 \mathbb{R}^3 中的一组基为 $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 2, -1)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, -1)^T$, 线性变换 T 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别变到 $\beta_1 = (1, 1, -1)^T$, $\beta_2 = (0, 3, -2)^T$, $\beta_3 = (1, 0, -1)^T$ 。

1. 线性变换 T 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵表示 A ;
2. 求 $\xi = (1, 2, -1)^T$ 以及 $T(\xi)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标。

解

1. 由 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (T(\alpha_1), T(\alpha_2), T(\alpha_3)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$ 得矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} A$$

可求得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 设 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 那么 $\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x$, 即

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

解得

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

例 97 设 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 表示由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 生成的子空间, 设有子空间

$$V_1 = \left\{ \alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

1. 将 V_1 和 V_2 用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 表示出来;
2. 求子空间 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的维数和一组基。

解

1. 解 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ 得基础解系:

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 0, 1)^T$$

- 解 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ 得基础解系:

$$\beta_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \beta_2 = (-1, 0, 1, 0)^T, \beta_3 = (1, 0, 0, 1)^T$$

故

$$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad V_2 = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

2. 显然 $\dim V_1 = \dim V_2 = 3$, $V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 。而

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & & & & & -1 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & 1 \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \end{bmatrix}$$

由此可以看出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 是 $V_1 + V_2$ 的一组基, 从而 $\dim(V_1 + V_2) = 4$ 。由 $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2)$ 知 $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$ 。解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

可得 $V_1 \cap V_2$ 的一组基

$$\gamma_1 = (-1, 0, 1, 0)^T, \quad \gamma_2 = (0, -1, 0, 1)^T.$$

例 98

1. $1+x, x+x^2, x^2-1$ 可否作为 $L(1+x, x+x^2, x^2-1)$ 的一组基? 求 $L(1+x, x+x^2, x^2-1)$ 的维数;
2. 求 $V \rightarrow W$ 的线性变换 $T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ 0 & 2a+b+2c \end{bmatrix}$ 的值域的基和零空间的基。

解

1. 因 $[1+x, x+x^2, x^2-1] = [1, x, x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 而

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 故 $1+x, x+x^2$ 可作为 $L(1+x, x+x^2, x^2-1)$ 的一组基, 其维数为 2。
2. 因 $T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ 0 & 2a+b+2c \end{bmatrix} = (E_{11}, E_{12}, E_{22}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
 而 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 故 $R(T)$ 的基为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
 $\ker(T)$ 的基为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

1. 行列式
2. 矩阵及其运算
3. 向量组 矩阵的秩
4. 向量空间与线性变换
5. 特征值问题
6. 二次型

5.1 知识点



特征值与特征向量

定义 (特征值与特征向量) 设 A 为复数域 \mathbb{C} 上的 n 阶矩阵, 如果存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 n 维向量 x 使得

$$Ax = \lambda x$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值, x 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

- (1) 特征向量 $x \neq 0$;
- (2) 特征值问题是对方针而言的。

特征值与特征向量

由定义, n 阶矩阵 A 的特征值, 就是使齐次线性方程组

$$(A - \lambda I)x = 0$$

有非零解的 λ 值, 即满足方程

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

的 λ 都是矩阵 A 的特征值。

特征值与特征向量

定义 (特征多项式、特征矩阵、特征方程) 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, 则

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

称为矩阵 A 的特征多项式, $A - \lambda I$ 称为 A 的特征矩阵, $\det(A - \lambda I) = 0$ 称为 A 的特征方程。

例 99 例 1 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

例 99 例 1 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-2)^2 = 0$$

故特征值为 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = 2$ (二重特征值)。

特征值与特征向量

- 对于特征值 $\lambda_1 = 3$, 齐次线性方程组 $(A - 3I)x = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $x_1 = (1, 1, 1)^T$, 因此 $k_1 x_1 (k_1 \neq 0)$ 是 A 对应于 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量。

- 对于特征值 $\lambda_{2,3} = 2$, 齐次线性方程组 $(A - 2I)x = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $x_2 = (1, 1, 2)^T$, 因此 $k_2 x_2 (k_2 \neq 0)$ 是 A 对应于 $\lambda_{2,3} = 2$ 的全部特征向量。

特征值与特征向量的性质

定理 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

$$(1) \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$(2) \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$$

- ▶ 当 $\det(A) \neq 0$, 即 A 为可逆矩阵时, 其特征值全为非零数;
- ▶ 奇异矩阵 A 至少有一个零特征值。

特征值与特征向量的性质

定理 一个特征向量不能属于不同的特征值。

特征值与特征向量的性质

性质 性质 1

表: 特征值与特征向量

	特征值	特征向量
A	λ	x
kA	$k\lambda$	x
A^m	λ^m	x
A^{-1}	λ^{-1}	x

性质 性质 2 矩阵 A 与 A^T 的特征值相同。

特征值与特征向量的性质

例 100 例 对于下列矩阵 A 的特征值，能做怎样的断言？

(1) $\det(I - A^2) = 0$

(2) $A^k = 0$

(3) $A = kI - B$ (λ_0 为 B 的特征值)

定义 (相似矩阵) 对于方阵 A 和 B , 若存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

就称 A 相似于 B , 记作 $A \sim B$.

定理 相似矩阵的特征值相同。

矩阵可对角化的条件

矩阵可对角化，即矩阵与对角阵相似。

定理 矩阵可对角化 \iff n 阶矩阵有 n 个线性无关的特征向量

定理 A 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

推论 推论 若 A 有 n 个互不相同的特征值，则 A 与对角阵相似。

矩阵可对角化的条件

例 101 例 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问 A 是否可对角化？若可对角化，求对角阵 Λ 及可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ ，再求 A^k 。

矩阵可对角化的条件

例 101 例 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

问 A 是否可对角化？若可对角化，求对角阵 Λ 及可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ ，再求 A^k 。

证明

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 2)^3$$

故特征值为 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3,4} = 2$

矩阵可对角化的条件

- 对于特征值 $\lambda_1 = -2$, 齐次线性方程组 $(A + 2I)x = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为

$$x_1 = (1, 1, 1, 1)^T,$$

故对应于 $\lambda_1 = -2$ 的全部特征向量为 $k_1 x_1 (k_1 \neq 0)$.

矩阵可对角化的条件

- 对于特征值 $\lambda_1 = -2$, 齐次线性方程组 $(A + 2I)x = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为

$$x_1 = (1, 1, 1, 1)^T,$$

故对应于 $\lambda_1 = -2$ 的全部特征向量为 $k_1 x_1 (k_1 \neq 0)$.

- 对于特征值 $\lambda_{2,3,4} = 2$, 齐次线性方程组 $(A - 2I)x = 0$ 为

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为

$$x_2 = (1, -1, 0, 0)^T, \quad x_3 = (1, 0, -1, 0)^T, \quad x_4 = (1, 0, -1, 0)^T,$$

故对应于 $\lambda_2 = 2$ 的全部特征向量为 $k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 (k_2, k_3, k_4 \text{不全为零})$

矩阵可对角化的条件

由特征值问题定义可知

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

取

$$P = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

则 $AP = P\Lambda$, 注意到 $\det(P) \neq 0$, 于是

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

矩阵可对角化的条件

例 102 例 2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是主对角元全为 2 的上三角矩阵, 且存在 $a_{ij} \neq 0 (i < j)$, 问 A 是否可对角化?

矩阵可对角化的条件

例 102 例 2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是主对角元全为 2 的上三角矩阵, 且存在 $a_{ij} \neq 0 (i < j)$, 问 A 是否可对角化?

证明

$$A = \begin{pmatrix} 2 & * & \cdots & * \\ 0 & 2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^n \Rightarrow \lambda = 2 \text{ 为 } A \text{ 的 } n \text{ 重特征值}$$

$$r(2I - A) \geq 1 \Rightarrow (2I - A)x = 0 \text{ 的基础解系所含向量个数} \leq n - 1$$

$$\Rightarrow A \text{ 的线性无关的特征向量的个数} \leq n - 1$$

$$\Rightarrow A \text{ 不与对角阵相似。}$$

实对称矩阵的对角化

定理 实对称矩阵 A 的任一特征值都是实数。

定理 实对称矩阵 A 对应于不同特征值的特征向量**正交**。

实对称矩阵的对角化

定理 对于 n 阶实对称矩阵 A , 存在 n 阶正交矩阵 T , 使得

$$T^{-1}AT = \Lambda$$

例 103 例 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

求正交阵 T , 使 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

例 103 例 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

求正交阵 T , 使 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 7)$$

特征值为 $\lambda_{1,2} = 2$ (二重) 和 $\lambda_3 = -7$ 。

实对称矩阵的对角化

- 对于特征值 $\lambda_{1,2} = 2$, 齐次线性方程组 $(A - 2I)x = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量 $x_1 = (2, -1, 0)^T$, $x_2 = (2, 0, 1)^T$ 。

- 对于特征值 $\lambda_2 = -7$, 齐次线性方程组 $(A - \lambda_2 I)x = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量 $x_3 = (1, 2, -2)^T$ 。

实对称矩阵的对角化

- 对特征向量 $\mathbf{x}_1 = (2, -1, 0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)^T$, 先用施密特正交化过程正交化, 然后单位化。

先正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{x}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

实对称矩阵的对角化

- 对特征向量 $\mathbf{x}_1 = (2, -1, 0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)^T$, 先用施密特正交化过程正交化, 然后单位化。

先正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{x}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

再单位化得

$$\mathbf{y}_1 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right)^T, \quad \mathbf{y}_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{15}, -\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^T$$

- 对特征向量 $\mathbf{x}_3 = (1, 2, -2)^T$ 单位化, 得 $\mathbf{y}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)^T$ 。

实对称矩阵的对角化

取正交矩阵

$$T = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$T^{-1}AT = \text{diag}(2, 2, -7).$$

实对称矩阵的对角化

例 104 例 设实对称矩阵 A 和 B 是相似矩阵, 证明: 存在正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$ 。

实对称矩阵的对角化

例 104 例 设实对称矩阵 A 和 B 是相似矩阵, 证明: 存在正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$ 。

证明

$$A \sim B \implies A, B \text{ 有相同的特征值 } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$$\implies \exists \text{ 正交阵 } P_1, P_2, \text{ s.t. } P_1^{-1}AP_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = P_2^{-1}AP_2$$

$$\implies P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$$

取 $P = P_1P_2^{-1}$, 则 P 为正交阵, 且

$$P^{-1}AP = B$$

实对称矩阵的对角化

例 105 例 设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, 若存在正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT, T^{-1}BT$ 都是对角阵, 则 AB 是实对称矩阵。

实对称矩阵的对角化

例 105 例 设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, 若存在正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT, T^{-1}BT$ 都是对角阵, 则 AB 是实对称矩阵。

证明

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} T^{-1}AT = \Lambda_1 \\ T^{-1}BT = \Lambda_2 \end{array} \right\} &\Rightarrow (T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = \Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1 = (T^{-1}BT)(T^{-1}AT) \\ &\Rightarrow T^{-1}ABT = T^{-1}BAT \\ &\Rightarrow AB = BA \\ &\Rightarrow (AB)^T = B^T A^T = BA = AB \end{aligned}$$

实对称矩阵的对角化

例 106 ★★★ 三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征向量为 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$, 求 A 。

实对称矩阵的对角化

例 106 ★★★ 三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征向量为 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$, 求 A .

证明

$$A \sim \text{diag}(-1, 1, 1)$$

注意不同特征值对应的特征向量正交, 在与 α_1 正交的平面上取两个线性无关的向量, 如 $\alpha_2 = (1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (0, 1, -1)^T$, 则

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

注意到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交, 单位化即得标准正交向量组

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T, \quad \beta_2 = (1, 0, 0)^T, \quad \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)^T.$$

令 $P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 则

$$A = P \Lambda P^{-1} = P \Lambda P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.2 往年试题



例 107 (05-06 上) 设二阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2I = \mathbf{0}$, 求 A 所有可能的特征值。

例 108 (05-06 下) 设三阶方阵 A 有三个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 且 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 α_1 和 α_2 , λ_3 对应一个特征向量 α_3 , 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

例 109 (05-06 下) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x 为实数, 试讨论 x 为何值时, A 可与对角阵相似?

例 110 (06-07 上, 08-09 上) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

- ▶ 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?
- ▶ 当 $k=0$ 时, A 能否与对角阵相似?

例 111 (07-08 上) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

- ▶ 求 A 的特征值和特征向量;
- ▶ 求 A^k 及其特征值和特征向量;

例 112 (07-08 下) 已知 $1, 1, -1$ 是三阶实对称矩阵 A 的三个特征值, 向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2, 1)^T$ 是 A 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量。

- (1) 能否求出 A 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量? 如能, 试求出该特征向量, 若不能, 请说明理由;
- (2) 能否由此求得 A ? 若能, 试求之, 若不能请说明理由。

例 113 (08-09 上) 已知 A 是三阶方阵, 且 $A^2 \neq \mathbf{0}, A^3 = \mathbf{0}$ 。

- (1) 能否求出 A 的特征值? 如能, 试求出该特征值, 若不能, 请说明理由;
- (2) A 能否对角化? 若能, 试求之, 若不能请说明理由。
- (3) 已知 $B = A^3 - 5A^2 + 3I$, 能否求得 $\det(B)$, 若能, 试求之, 若不能请说明理由。

例 114 (09-10 下) 设 α 是 n 维非零实列向量, $A = I - \frac{2}{\alpha^T \alpha} \alpha \alpha^T$,

- (1) 计算 A^T , 并回答 $kI - A$ 能否对角化? 请说明理由, 其中 k 为常数;
- (2) 计算 A^2 , 并回答 $kI - A$ 是否可逆? 请说明理由, 其中 $k \neq \pm 1$ 为常数;
- (3) 给出 $I - 2\alpha \alpha^T$ 为正交矩阵的充分必要条件。

例 115 (08-09 上) 已知 A 是三阶方阵, 且 $A^2 \neq 0, A^3 = 0$ 。

- (1) 能否求出 A 的特征值? 如能, 试求出该特征值, 若不能, 请说明理由;
- (2) A 能否对角化? 若能, 试求之, 若不能请说明理由。
- (3) 已知 $B = A^3 - 5A^2 + 3I$, 能否求得 $\det(B)$, 若能, 试求之, 若不能请说明理由。

例 116 (12-13 下) 已知 A 是三阶实对称阵, 且 $A^2 + 2A = \mathbf{0}$, 已知 $r(A) = 2$ 。

- (1) 求 A 的全部特征值?
- (2) 计算 $\det(A + 4I)$
- (3) 当 k 为何值时, $A + kI$ 正定。

例 117 (12-13 下) 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 求 $\det(A^3 - 5A^2 + 7A)$

例 118 (12-13 下) 证明：设 A 为 n 阶非零实对称矩阵，则存在 n 维列向量 x 使得 $x^T A x \neq 0$.

例 119 (13-14 上) 设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T, \beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 且 $\alpha^T \beta = 2, A = \alpha \beta^T$,

(1) 求 A 的特征值;

(2) 求可逆阵 P 及对角阵 Λ 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

1. 行列式
2. 矩阵及其运算
3. 向量组 矩阵的秩
4. 向量空间与线性变换
5. 特征值问题
6. 二次型

6.1 知识点



二次型的定义和矩阵表示

定义 n 元变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \\ & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & \qquad \qquad \qquad \cdots \qquad \qquad \qquad \cdots \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

其矩阵形式为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

二次型的定义和矩阵表示

例 120 设 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 5x_4^2$, 则它的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

二次型的定义和矩阵表示

设 α 在两组基 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ 和 $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ 下的坐标向量分别为

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad \text{和} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

又

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)C$$

故

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y}$$

从而

$$f(\alpha) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (C^T \mathbf{A} C) \mathbf{y}$$

二次型的定义和矩阵表示

设 α 在两组基 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ 和 $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ 下的坐标向量分别为

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad \text{和} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

又

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)C$$

故

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y}$$

从而

$$f(\alpha) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (C^T A C) \mathbf{y}$$

二次型 $f(\alpha)$ 在两组基 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ 和 $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ 下所对应的矩阵分别为

$$A \quad \text{和} \quad C^T A C$$

定义 (矩阵的合同) 对于两个矩阵 A 和 B , 若存在可逆矩阵 C , 使得

$$C^T A C = B,$$

就称 A 合同于 B , 记作 $A \simeq B$ 。

用正交变换法将二次型化为标准型

- ▶ 含平方项而不含混合项的二次型称为**标准二次型**。
- ▶ 化二次型为标准型，就是对实对称矩阵 A ，寻找可逆阵 C ，使 $C^T A C$ 成为对角矩阵。

用正交变换法将二次型化为标准型

定理 (主轴定理) 对于任一个 n 元二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x},$$

存在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ (\mathbf{Q} 为正交阵), 使得

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}) \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 \mathbf{A} 的 n 个特征值, \mathbf{Q} 的 n 个列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbf{A} 对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的标准正交特征向量。

用正交变换法将二次型化为标准型

例 121 ★★★★★ 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

用正交变换法将二次型化为标准型

例 121 ★★★★★ 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

对应方程为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

用正交变换法将二次型化为标准型

例 121 ★★★★★ 用正交变换法，将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准型。

对应方程为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

得特征值 $\lambda_{1,2} = 1$ 和 $\lambda_3 = 10$.

用正交变换法将二次型化为标准型

$$(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)^T.$$

$$(A - 10I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_3 = (1, 2, -2)^T.$$

用正交变换法将二次型化为标准型

$$\begin{aligned}(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{x}_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)^T.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A - 10I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{x}_3 = (1, 2, -2)^T.\end{aligned}$$

对 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 用施密特正交化过程先正交化，再单位化，得

$$\xi_1 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)^T, \quad \xi_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$$

对 \mathbf{x}_3 单位化，得

$$\xi_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$$

用正交变换法将二次型化为标准型

取正交矩阵

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \text{diag}(1, 1, 10).$$

用正交变换法将二次型化为标准型

取正交矩阵

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \text{diag}(1, 1, 10).$$

令 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T$, 做正交变换 $x = Qy$, 原二次型就化成标准型

$$x^T Ax = y^T (Q^T AQ) y = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2.$$

惯性定理和二次型的规范形

定理 (惯性定理) 对于一个 n 元二次型 $x^T A x$, 不论做怎样的坐标变换使之化为标准形, 其中正平方项的项数 p 和负平方项的项数 q 都是唯一确定的。或者说, 对一个 n 阶实对称矩阵 A , 不论取怎样的可逆矩阵 C , 只要使

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & d_p & & & & & \\ & & & -d_{p+1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -d_{p+q} & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $d_i > 0 (i = 1, 2, \dots, p+q), p+q \leq n$ 成立, 则 p 和 q 是由 A 唯一确定的。

定义 二次型 $x^T Ax$ 的标准形中,

- ▶ 正平方项的项数 (与 A 合同的对角阵中正对角元的个数), 称为二次型 (或 A) 的**正惯性指数**;
- ▶ 负平方项的项数 (与 A 合同的对角阵中负对角元的个数), 称为二次型 (或 A) 的**负惯性指数**;
- ▶ 正、负惯性指数的差称为符号差;
- ▶ 矩阵 A 的秩也成为**二次型 $x^T Ax$ 的秩**。

惯性定理和二次型的规范形

定义 二次型 $x^T Ax$ 的标准形中,

- ▶ 正平方项的项数 (与 A 合同的对角阵中正对角元的个数), 称为二次型 (或 A) 的**正惯性指数**;
- ▶ 负平方项的项数 (与 A 合同的对角阵中负对角元的个数), 称为二次型 (或 A) 的**负惯性指数**;
- ▶ 正、负惯性指数的差称为符号差;
- ▶ 矩阵 A 的秩也成为**二次型 $x^T Ax$ 的秩**。

设 $r(A) = r$, 正惯性指数为 p , 则

- ▶ 负惯性指数为 $q = r - p$
- ▶ 符号差为 $p - q = 2p - r$
- ▶ 与 A 合同的对角阵的零对角元个数为 $n - r$ 。

惯性定理和二次型的规范形

推论 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 若 A 的正、负惯性指数分别为 p 和 q , 则

$$A \simeq \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p \uparrow}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q \uparrow}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p-q \uparrow})$$

A 的合同规范形

惯性定理和二次型的规范形

推论 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 若 A 的正、负惯性指数分别为 p 和 q , 则

$$A \simeq \underbrace{\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p \uparrow}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q \uparrow}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p-q \uparrow})}_{A \text{ 的合同规范形}}$$

或者说, 对于二次型 $x^T A x$, 存在坐标变换 $x = C y$, 使得

$$x^T A x = \underbrace{y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2}_{x^T A x \text{ 的规范形}}.$$

定义 如果对于任意的非零向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 恒有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0,$$

就称 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 为正定二次型, 称 \mathbf{A} 为正定矩阵。

正定二次型和正定矩阵

定义 如果对于任意的非零向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 恒有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0,$$

就称 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 为正定二次型, 称 \mathbf{A} 为正定矩阵。

注: 正定矩阵是针对对称矩阵而言的。

结论 二次型 $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2$ 正定
 $\iff d_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

结论 一个二次型 $x^T A x$, 经过非退化线性变换 $x = C y$, 化为 $y^T (C^T A C) y$, 其正定性保持不变。即当

$$x^T A x \xleftrightarrow{x = C y} y^T (C^T A C) y \quad (C \text{可逆})$$

时, 等式两端的二次型有相同的正定性。

定理 若 A 是 n 阶实对称矩阵, 则以下命题等价:

- (1) A 正定;
- (2) A 的正惯性指数为 n , 即 $A \simeq I$;
- (3) 存在可逆矩阵 P 使得 $A = P^T P$;
- (4) A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 全大于零。
- (5) A 的 n 个顺序主子式全大于零。

定理

$$A \text{ 正定} \implies a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 且 } \det(A) > 0$$

例 122 A 正定 $\Rightarrow A^{-1}$ 正定

例 123 判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

是否为正定二次型。

例 124 判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

是否为正定二次型。

6.2 典型例题



例 125 (2005-2006 第一学期) 求二次型
 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩。

例 126 (2005-2006 第一学期) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1,$$

- (1) 求二次型 f 的矩阵 A 的全部特征值;
- (2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵;
- (3) 计算 $\det(A^m)$.

例 127 (2005-2006 第二学期) 判断二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 的正定性。

例 128 (2006-2007 第一学期) 设二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$, 试求该二次型的矩阵, 并指出 λ 取何值时, f 正定?

例 129 (2006-2007 第二学期) 判断二次型 $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz$

- (1) 用正交变换化二次型 f 为标准型, 并写出相应的正交阵;
- (2) 求 $f(x, y, z)$ 在单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的最大值和最小值。

例 130 (2006-2007 第二学期) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

- (1) 写出二次型 f 的矩阵 A ;
- (2) 求出 A 的全部特征值和特征向量;
- (3) 化 f 为标准型;
- (4) 判断 f 是否正定.

例 131 (2007-2008 第一学期, 2009-2010 第一学期) 对于二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ ($b > 0$), 其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

- (1) 求 a, b ;
- (2) 化 f 为标准型, 并写出所用的正交变换和正交矩阵。

例 132 (2007-2008 第二学期) 设二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, a, b, c$ 为常数, 则

- (1) 写出二次型 f 的具体形式;
- (2) 求出 A 的全部特征值和特征向量;
- (3) 求正交变换 $x = Py$, 化 f 为标准型;
- (4) 在 $\|x\| = 1$ 的条件下, 求 f 的最大值和最小值.

例 133 (2008-2009 第一学期) 设二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$, 经正交变换 $x = Py$ 化为标准型 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 试求 a, b 。

例 134 (2008-2009 第一学期) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1,$$

- (1) 求出 A 的全部特征值和特征向量;
- (2) 求正交变换 $x = Py$, 化 f 为标准型;
- (3) 计算 $\det(A^m)$

例 135 (2009-2010 第二学期) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 + x_2^2$,

- (1) 求出 A 的全部特征值和特征向量;
- (2) 求正交变换 $x = Py$, 化 f 为标准型。

例 136 (2010-2011 第一学期) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3,$$

- (1) 写出 A ;
- (2) 求正交变换 $x = Py$, 化 f 为标准型。

例 137 (2010-2011 第二学期) 设二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 的矩阵是奇异阵,

- (1) 写出 A 并求 t 的值;
- (2) 根据所求 t 的值, 求一个可逆矩阵 P 和一个对角阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;
- (3) 求 $A^n (n \geq 2)$.

例 138 (2011-2012 第二学期) 在正交变换 $x = Qy$ 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准型。

例 139 (2012-2013 第二学期) 已知二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2,

(1) 求 a ;

(2) 求正交变换 $x = Py$, 将 f 化为标准型.

例 140 (2012-2013 第二学期) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$ 的秩为 2,

- (1) 把 f 写成 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的形式;
- (2) 求 \mathbf{A} 的特征值和特征向量;
- (3) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, 将 f 化为标准型.

例 141 (2013-2014 第一学期) 用正交变换化二次型
 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为标准型.