装订线 任课教师: 学号: 装订线 姓名: 班级: 装订线

西 安 电 子 科 技 大 学

考试时间 120 分钟

试 题 A

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										

1.考试形式：闭卷☐ √ 开卷☐ 2.考试日期：2021.12.28

一、（8 分）试确定 $\dfrac{22}{7}$ 作为 π（π =**3.141592…**）的近似值具有几位有效数字，并确定其相对误差限.

解 因为 $\dfrac{22}{7}$ =**3.142857…**= $0.3142857\cdots\times10^{-1}$

π =**3.141592…**

所以

$$\left|\pi-\frac{22}{7}\right|=0.001264\cdots<0.005=\frac{1}{2}\times10^{-2}=\frac{1}{2}\times10^{1-3}$$

这里，$m=0, m-n+1=-2, n=3$ ---4 分

由有效数字的定义可知 $\dfrac{22}{7}$ 作为 π 的近似值具有 **3** 位有效数字。

而相对误差限

$$\varepsilon_r=\frac{\left|\pi-\frac{22}{7}\right|}{\pi}=\frac{0.001264\cdots}{\pi}\approx0.0004138<0.0005=\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

---8 分

二、（10 分）证明用牛顿迭代法求解方程 $x-2\sin x=0$ 正根时迭代格式是收敛的，并写出迭代格式。

证明：设

（**1**）$f(0)=1>0, f(1)=-10<0,$（**2**）$f'(x)=3x^2-12\neq0$，$x\in(0,1)$

（**3**）$f''(x)=6x>0$（即不变号），$x\in(0,1)$

（**4**）选取初值 $x_0=0$，则满足 $f(x_0)f''(x_0)>0$

所以用牛顿迭代法求解此方程是收敛的。 **------7** 分

牛顿迭代法的迭代格式为：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n{}^3-12x_n+1}{3x_n{}^2-12}$$ **-------10 分**

三、（20 分）已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&4\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$.

(1)用直接三角分解法（Doolittle 分解）解方程组 $Ax=b$；
(2)试讨论用高斯-塞德尔迭代求解 $Ax=b$ 的收敛性.

解　(1)设 $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&4\end{bmatrix}=LU$，可得 $L=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，　$U=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ -----4 分

前代求 $Ly=b$ 解：得 $y=[2\ \ 4\ \ 3]$

回代求 $Ux=y$ 解：得 $x=[1\ \ 2\ \ 1]$.　　-----10 分

(2) 高斯-塞德尔迭代矩阵为 $B_G=-(D+L)^{-1}U=-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

-----14 分

$\left|\lambda I-B_G\right|=\left|(D+L)^{-1}\right|\left|\lambda(D+L)+U\right|=0$，故 $\begin{bmatrix}\lambda&0&1\\0&2\lambda&0\\\lambda&0&4\lambda\end{bmatrix}=8\lambda^3-2\lambda^2=0$，

得 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=\frac{1}{4}$，所以 $\rho(B_G)=\frac{1}{4}$。　　-----20 分

四、（**12** 分）已知连续函数 $f(x)$ 在 $x=-1,0,2,3$ 点的值分别为 $-4,-1,0,3$，分别求出 $f(x)$ 的二次及三次牛顿插值多项式，并用三次插值多项式求 $f(1.5)$ 的近似值。

解 x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-1	-4	3		
0	-1	**3**		
2	**0**	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}$	

$3 \quad 3 \quad 3 \quad \frac{5}{6} \quad -\frac{5}{12}$ -----6 分

$$N_2(x) = -4 + 3(x+1) - \frac{5}{6}(x+1)x$$

$$N_3(x) = -4 + 3(x+1) - \frac{5}{6}(x+1)x + \frac{5}{12}(x+1)x(x-2)$$ -----10 分

$$f(1.5) \approx -0.40625$$ -----12 分

五、(12分) 已知 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \varphi_2 = x^2 - \frac{1}{3}$ 在 $[-1,1]$ 两两正交，试求函数 $f(x) = e^x$ 在 $[-1,1]$ 上最佳 平方逼近二次多项式， 并写出误差估计 .

解 以 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 作为基函数，设 $p_2(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$

根据基函数的正交性，得到

$$c_0 = \frac{(f,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)} = \frac{\int_{-1}^{1} e^x dx}{\int_{-1}^{1} dx} = \frac{e-e^{-1}}{2} = \frac{e^2-1}{2e} = 1.17520$$

$$c_1 = \frac{(f,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)} = \frac{\int_{-1}^{1} xe^x dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \frac{3}{e} = 1.10364$$

$$c_2 = \frac{(f,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)} = \frac{\int_{-1}^{1} (x^2-\frac{1}{3})e^x dx}{\int_{-1}^{1} (x^2-\frac{1}{3})^2 dx} = \frac{2e^2-14}{3e} \div \frac{8}{45} = 0.53671$$

从而求得 $p_2(x) = 1.17520 + 1.10364x + 0.53671(x^2 - \frac{1}{3})$

... 10 分

误差为 $\delta^2 = \int_{-1}^{1} f^2(x)dx - \sum_{i=0}^{2} c_i \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_i(x)dx$

$$= \frac{e^4-1}{2e^2} - 1.17520 \times \frac{e^2-1}{e} - 1.10364 \times \frac{2}{e} - 0.53671 \times \frac{2e^2-14}{3e}$$

$$= 0.00145$$

... 12 分

六、(12 分) 某物质的溶解度 y 和温度 x 的关系经测定满足下面数据表,试求

x	−2	0	2
y	0.12	0.23	0.45

最小二乘拟合函数 $y=c_0+c_1x+c_2x^2$，并写出误差表示式及 MATLAB 代码.

解 $A^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 4\end{bmatrix}$, $Y^T=[0.12,\ 0.23,\ 0.45]$

法方程组 $\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 0 & 8 & 0\\ 8 & 0 & 32\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8\\ 0.66\\ 2.28\end{bmatrix}$,

解得 $c_0\approx 0.2483, c_1\approx 0.0825, c_2\approx 0.006875$

因此，溶解度和温度的近似满足关系

$$p_2^*(x)=0.2483+0.0825x+0.006875x^2$$

... 8 分

拟合曲线的平方偏差公式为 $|\delta|=\sqrt{\sum_{i=0}^{2}(p_2^*(x_i)-y_i)^2}$

... 10 分

MATLAB 代码

```
x= [-2   0   2]
y=[0.12   0.23   0.45]
p2=polyfit(x,y,2)
```

....12 分

七、(10 分) 判断下面求积公式具有几阶代数精度

$$\int_0^h f(x)dx\approx\frac{2h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)+\frac{h^2}{6}f'(0)$$

解 在 $\int_0^h f(x)dx\approx\frac{2h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)+\frac{h^2}{6}f'(0)$ 中，

分别令 $f(x)=1,x,x^2,x^3$，直接带入公式验证 **----- 8 分**

公式对 $f=x^3$ 不成立，其余情形成立

所以该公式有 **2** 阶代数精度. **-----10 分**

八、(10 分) 写出用 Euler 方法及 Euler 预估-校正法求解下列常微分方程初值问题的计算公式，并比较这两种方法的精度、收敛性与稳定性.

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解 Euler 方法：$y_{n+1} = y_n + h(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n})$

Euler 预估-校正法：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + h(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n} + \bar{y}_{n+1} - \dfrac{2x}{\bar{y}_{n+1}}) \end{cases}$$ -----6 分

Euler 方法；1 阶精度，收敛，稳定条件为 $-2 \le \lambda h \le 0$

Euler 预估-校正法：2 阶精度，收敛，稳定条件为 $-2 \le \lambda h \le 0$ -----10 分

九、（6 分） 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，定义 $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$，$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$

证明 （1） $\|\boldsymbol{x}\|_1$ 是向量范数； （2） $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_1 \le n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$

证明 设 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

（1） 用向量范数定义验证 -----3 分

（2）因为 $\max_{1\le i\le n} |x_i| \le \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le n \max_{1\le i\le n} |x_i|$

所以

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \le \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le n \max_{1\le i\le n} |x_i| = n\|x\|_\infty$$ ----6 分