《高等数学》（2008-2009 上）期中试题

一、已知函数 $f(x)$ 是周期为 5 的周期函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式：

$$f[1+\ln(1+4x)]-2f(1-\sin 3x)=10x+\tan^2 x，且 f(x) 在 x=1 处可导，求 f'(11)。$$

解. 在 $x=0$ 处对 $f[1+\ln(1+4x)]-2f(1-\sin 3x)=10x+\tan^2 x$ 两边求导得

$$f'(1)\frac{d}{dx}[1+\ln(1+4x)]\Big|_{x=0}-2f'(1)\frac{d}{dx}(1-\sin 3x)\Big|_{x=0}=10+2\tan x\frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{x=0} 即$$

$$4f'(1)+6f'(1)=10$$

故 $f'(11)=f'(1)=1$。

二、设 $y=xf(x-u)$，且当 $x=1$ 时，$y=u^2+e^u$，求：$f(x)$ 和 $f'(2)$。

解. $f(1-u)=u^2+e^u$。令 $1-u=x$ 得 $f(x)=(1-x)^2+e^{1-x}$。

$f'(2)=[-2(1-x)-e^{1-x}]\big|_{x=2}=2-e^{-1}$。

三、求下列函数的极限：1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}$；2、$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}}$。

解. 1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1-\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}+1}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\tan^2 x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}-1}{\tan^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}2\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=-\frac{1}{6}。$$

2、$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[(x+e^{2x})\right]^{\frac{1}{x+e^{2x}-1}}\right\}^{\frac{x+e^{2x}-1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+e^{2x}-1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}}$。

$$=e^{1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}}=e^3$$

四、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，

$g(0)=1, g'(0)=-1$。问：1）a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；2）求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解. 1）$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{1}=g'(0)+1=0$，故 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

2）当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\left(\frac{g(x)-e^{-x}}{x}\right)'=\frac{x(g'(x)+e^{-x})-g(x)+e^{-x}}{x^2}$

$=\frac{xg'(x)+xe^{-x}-g(x)+e^{-x}}{x^2}$。

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}(g''(0)-1)$。

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)+xe^{-x}-g(x)+e^{-x}}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{xg''(x)-xe^{-x}}{2x}=\frac{1}{2}(g''(0)-1)=f'(0)$$

可见，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

五、求下列函数的导数：1、设 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\ln x}$，求 y'；2、设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x=t^2-2t-3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\frac{dy}{dx}$；3、设 $y=x^2\cos^2 x$，求 $y^{(n)}$；4、求曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线。

解. 1、$y'=\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\ln x}\right]'=\left(e^{\ln x\ln\frac{\sin x}{x}}\right)'=e^{\ln x\ln\frac{\sin x}{x}}\left(\ln x\ln\frac{\sin x}{x}\right)'$

$$=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}+\left(\frac{x}{\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)\ln x\right]=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}+\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$$

2、$\frac{dx}{dt}=2t-2$，

把 y 看成 x 的函数，对 $e^y\sin t-y+1=0$ 两边求导得

$e^y\sin t\frac{dy}{dt}+e^y\cos t-\frac{dy}{dt}=0$,解出 $\frac{dy}{dt}=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$，从而

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^y\cos t}{2(t-1)(1-e^y\sin t)}$。

3、$y=x^2\cos^2 x=\dfrac{1}{2}x^2(1+\cos 2x)$。$y^{(n)}=\dfrac{1}{2}[x^2(1+\cos 2x)]^{(n)}$

$v(x)=x^2$，$u(x)=1+\cos 2x$，$v'(x)=2x$，$v''(x)=2$，$v^{(k)}(x)=0(k>2)$，

$u^{(l)}(x)=2^l\cos(2x+\dfrac{l\pi}{2})$

$y^{(n)}=2^{n-1}x^2\cos(2x+\dfrac{n\pi}{2})+2^{n-1}nx\cos(2x+\dfrac{(n-1)\pi}{2})+2^{n-3}n(n-1)\cos(2x+\dfrac{(n-2)\pi}{2})$

。

4、$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+e^x)=\infty$，

垂直渐近线：$x=0$。

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=0, b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$，

左渐近线：$y=0$。

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=1$，

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1+e^x}{e^x}=0$

右渐近线：$y=x$。

六、设曲线 $y=f(x)$ 过原点且在原点与 x 轴相切，其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(0)\neq 0$。（1）求 $y=f(x)$ 在原点处的曲率半径 R；（2）证明 $\left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2f(x)}\right|=R$。

解. （1）曲线 $y=f(x)$ 过原点且在原点与 x 轴相切得 $f(0)=f'(0)=0$。

$K=\dfrac{|f''(0)|}{\left(1+f'(0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=|f''(0)|$，$R=\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{|f''(0)|}$。

（2）$\left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2f(x)}\right|=\left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f'(x)}\right|=\left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f''(x)}\right|=\dfrac{1}{|f''(0)|}=R$。

七、设 $f(x)$ 在 $[-2a,2a]$ 上具有二阶导数，且 $|f''(x)|<\frac{1}{4a}$，又 $f(0)=a, f(a)=b, f'(0)=-1$。证明：（1）$\forall x\in[-2a,2a]$有$|1+f'(x)|<\frac{1}{2}$；（2）$a+b\in[-2a,2a]$；（3）$|f(a+b)|<\frac{a}{4}$。

证明. $f(x)$ 在 $[-2a,2a]$ 上具有二阶导数，则 $f(x)和f'(x)$ 都在 $[-2a,2a]$ 上连续。又 $f(0)=a, f(a)=b, f'(0)=-1$，$|f''(x)|<\frac{1}{4a}$，根据中值定理

（1）$\forall x\in[-2a,2a]$，$|1+f'(x)|=|f'(x)-f'(0)|=|f''(\xi)||x|<\frac{1}{4a}2a=\frac{1}{2}$。

（2）$a+b=2a+f(a)-f(0)=2a+f'(\xi_1)a$ （$\xi_1\in(0,a)\subset[-2a,2a]$）。

由（1），$-\frac{3}{2}<f'(\xi_1)<-\frac{1}{2}$。因此$\frac{a}{2}<a+b<\frac{3a}{2}$，故$a+b\in[-2a,2a]$。

（3）（2）已得$\frac{a}{2}<a+b<\frac{3a}{2}$从而$-\frac{a}{2}<b<\frac{a}{2}$，又由（1），

$|f(a+b)|=|b+f(a+b)-f(a)|=|b[f(\xi_3)+1]|<\frac{1}{2}|b|$ （ξ_3在$a和a+b$之间）

故$|f(a+b)|<\frac{a}{4}$。

八、在抛物线 $y=4-x^2$ 上的第一象限部分求一点 p，过 p 点作切线，使该切线与坐标轴所围成的三角形的面积最小。

解. 在第一象限 $0\le x\le 2$，$y'=-2x$。$x=t$ 处的切线：$y=4-t^2-2t(x-t)$。与坐标轴的交点：$(0,4+t^2),(\frac{4+t^2}{2t},0)$。面积

$$S=\frac{(4+t^2)^2}{4t}=\frac{1}{4}t^3+2t+\frac{4}{t},(0<t<2(\text{最小值不在端点}))$$

$S'=\frac{3}{4}t^2+2-\frac{4}{t^2}$，令 $S'=0$ 得 $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$。根据问题的实际，这就是最小值点。此时 $y=\frac{8}{3}$。

故 $p=(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{8}{3})$。