提示：本试题中默认 $z=x+iy$，x、y 为实数.

一．(20 分) 判断命题正确与否(正确打√，错误打×)　　$2'\times 10$

（　）1. 旋度为 0 的矢量场叫做无旋场

（　）2. 无旋场的散度处处为 0

（　）3. 对于复数 z_1，z_2，$Arg(z_1z_2)=Argz_1+Argz_2$ 成立

（　）4. 关于复数 $2i<3i$

（　）5. $f(z)$ 在 z_0 点可微，则 $f(z)$ 在 z_0 解析

（　）6. 每一个幂函数在它的收敛圆周上处处收敛

（　）7. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛，而 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ 发散，则 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 1

（　）8. $z=\pi$ 是 $\dfrac{\sin z}{z-\pi}$ 的本质奇点

（　）9. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则它在该点的某个领域内可以展开为幂级数

（　）10. 函数 $u=y-x$ 是 $v=y+x$ 的共轭调和函数

二．(10 分) 填空　$2'\times 5$

1. $3^i=$__________

2. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^n}{2^n}$的收敛半径$R=$________

3. $\operatorname{Re}s\left[\sin\frac{1}{z-1},1\right]=$________

4. 已知分式线性映射$w=L(z)$将单位圆$\{z||z|<1\}$映射为单位圆$\{w||w|<1\}$，且$L\left(\frac{1}{2}i\right)=0$，则$L(2i)=$________

5. 求数量场$u=x^2yz^3$在$M(2,1,-1)$处最大导数的方向为______，其最大值为_____

三．(70 分) 简答或计算题

1. (10 分) 计算下列各值

（1）$\left(\sqrt{3}+i\right)^4$

（2）$(1-i)^{\frac{1}{3}}$

2. (10 分) 设 $f\left(z\right)=x^2+axy+by^2+i\left(cx^2+dxy+y^2\right)$，求 a,b,c,d 的值，使得 $f\left(z\right)$ 在复平面处处解析。

3. (10 分) 将函数 $z^2e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<\left|z\right|<\infty$ 的圆环内展开成洛朗级数

4. (10 分) 利用留数定理求积分 $\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} dz$ （圆周取正向）

5. (10 分) 分式线性映射 $w = \frac{z}{z-1}$ 将单位圆盘 $|z| \le 1$ 映射成 w 平面上的什么区域？

6. (10 分) 求平面数量场 $u(x,y)=(x+1)^2+y^2$，沿曲线 $y=x^2$ 过点 $M(2,4)$ 的切线方向的方向导数及梯度

7. (10 分) 求矢量场 $\boldsymbol{A}=x(z-y)\boldsymbol{i}+y(x-z)\boldsymbol{j}+z(y-x)\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿方向 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的环量面密度