参考答案

一

1 $\frac{1+ye^{xy}}{x+y^2+e^{xy}}dx+\frac{2y+xe^{xy}}{x+y^2+e^{xy}}dy$

2 $\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-0}{1}$

3 -5

4 $c_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}[c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]$

二

1 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\cdot 2x+f_2\cdot y$ --3 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[f_{11}\cdot(-2y)+f_{12}\cdot x]+f_2+y[f_{21}\cdot(-2y)+f_{22}\cdot x]$ --------------------7 分

2 $F_1\cdot(1-2z_x)+F_2\cdot 3z_x=0$ --3 分

$z_x=\frac{F_1}{-3F_2+2F_1}$ ---7 分

3 $\lambda^2-\lambda-6=0$
$\lambda=-2,\lambda=3$ ---2 分

齐次方程通解为 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}$ ---3 分

设特解为 $y^*=x\cdot ae^{-2x}$ --5 分

代入原方程得 $a=\frac{3}{5}$ ---6 分

故通解为 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}+\frac{3}{5}xe^{-2x}$ --7 分

4 交换次序得 原式$=\int_0^1 dy\int_0^y x\sin y^3 dx$ ---4 分

$=\frac{1}{2}\int_0^1\sin y^3\cdot y^2dy=\frac{1}{6}(1-\cos 1)$ -----------------------------------7 分

5 由对称性知 $\iiint\limits_{(V)}xdV=\iiint\limits_{(V)}ydV=0$ ---2 分

故原式$=\iiint\limits_{(V)}zdV=\int_0^9 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}zdxdy$ ---5 分

$=\int_0^9 z\cdot\pi z\cdot dz=243\pi$ ---7 分

6 $\oint_L 2y^2ds=\oint_L 2x^2ds=\frac{1}{2}\oint_L(2x^2+2y^2)ds$ ---4 分

$=\int_L 4ds=4\cdot 2\pi\cdot 2=16\pi$ ---7 分

7 $W=\int_L\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$ ----------------------2 分

$$=\int_L+\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BO}}-\int_{\overline{AB}}-\int_{\overline{BO}}$$ --4 分

$$=-\iint_D 0dxdy-\int_{\overline{AB}}-\int_{\overline{BO}}$$ --5 分

$$=-\int_1^0(1-2y+3\frac{\pi^2}{4^2}\cdot y^2)dy-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 0dx=\frac{\pi^2}{4}$$ --7 分

或者 $\because\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$ $\therefore$积分与路径无关， 故$W=\int_L=\int_{OAB}=\int_{\overline{OB}}+\int_{\overline{BA}}=\frac{\pi^2}{4}$

8 $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$ --3 分

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n$$ ---6 分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n$$ --7 分

9 奇延拓 则 $a_n=0\ \ (n=0,1,2......)$ ---3 分

$$b_n=2\int_0^1(1-x)\sin n\pi xdx=-\frac{2}{n\pi}[(1-x)\cos n\pi x\big|_0^1+\int_0^1\cos n\pi xdx]$$

$$=\frac{2}{n\pi}$$

$\therefore(1-x)=\frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi x$ --7 分

三 $\sum$ 表示 $z=0,x^2+y^2\le R^2$ 取上侧

$$I=\iint_{(S)}+\iint_{\Sigma}-\iint_{\Sigma}$$ ---3 分

$$=-\iiint_{(V)}xydV-\iint_{\Sigma}$$

$$=-\iint_{\Sigma}=-\iint_{x^2+y^2\le R^2}dxdy$$ ---6 分

$$=-\pi R^2$$ ---8 分

四

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{\left|x^n\right|}{n2^n}}=\frac{|x|}{2}<1$$ --2 分

故 收敛半径为 2.

在 $x=-2$ 点收敛，在 $x=2$ 发散，

得收敛域为$[-2,2)$， ---3 分

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$， 则 $x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}=S(\frac{x}{2})$，

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ --5 分

故　$S(\frac{x}{2})=-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ --6 分

当 $x\neq 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}=-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ --7 分

当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{2}$ --8 分

五　设 $L=x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2)$ ----------------------------------2 分

令　$L_x=0, L_y=0, L_z=0;$ ---3 分

解之得　$x=y=z=a\pm\frac{\sqrt{3}}{3}a$ --5 分

最小值为　$3a-\sqrt{3}a$ --6 分

所以 $\iint_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}a)^3 dS\geq\iint_{\Sigma}(3a)^3 dS$ ---------------------------------------7 分

$=27a^3\cdot 4\pi a^2=108\pi a^5$ ---9 分

附加题

1.

$\vec{n}=(2x,2y,-1)|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2})}=(1,1,-1)$ ---2 分

切平面：

$(x-\frac{1}{2})+(y-\frac{1}{2})-(z-\frac{3}{2})=0$　即　$z=x+y+\frac{1}{2}$ ------------------4 分

$V=\iint_D(x+y+\frac{1}{2})dxdy$ --6 分

$=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1\rho(\sin\theta+\cos\theta)\rho d\rho+\iint_D\frac{1}{2}dxdy$ -------------------------------------8 分

$=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{8}$ ---10 分

2　证明　只需证明积分与路径无关 ，即

$\frac{\partial}{\partial y}(yf(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}(-xf(x,y))$ --2 分

亦即　$xf_x+yf_y+2f=0$ ---5 分

又　$f(tx,ty)=\frac{1}{t^2}f(x,y)$ 两边对 t 求导，---7 分

令 t=1; $xf_x+yf_y=-2f$ --10 分