高数上册复习考试

第八章 空间解析几何与向量代数

一、向量及其运算.

1、空间直角坐标系

空间直角坐标系：三条两两垂直相交于原点的坐标轴，x 轴、y 轴和 z 轴构成右手关系。

（1） 学会：a）找出空间中给定点的坐标。b）找出空间中以给定 (x, y, z) 为坐标的点。

c）空间各部分点坐标的特点。

（2） 两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离公式

$$d(M_1, M_2) = \left|M_1M_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2、向量

（1）向量的概念

数量：只有大小；

向量：既有大小又有方向。向量只有大小和方向。

在空间中用有向线段表示向量。其长度表示向量的大小也称为模或范数；其方向表示向量的方向。一个向量可以放在空间中任意位置。

（2）特殊向量

零向量 $\vec{0}$：大小为 0。任意方向都是 $\vec{0}$ 的方向。只有一个零向量。

单位向量：大小为 1。有无穷多个单位向量。如果 $\vec{a} \neq \vec{0}$，则

$$\vec{e}_a = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$$

是与 $\vec{a}$ 方向一致的单位向量，称为 $\vec{a}$ 的单位化。

（3）两向量的关系

向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 有夹角 $\theta = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), 0 \le \theta \le \pi$。

当 $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$ 时说 $\vec{a} \perp \vec{b}$；当 $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ 或 π 时说 $\vec{a} // \vec{b}$。

（4）向量的坐标

把向量 $\vec{a}$ 的始点放在原点，得 $\vec{a}$ 的终点 $M(a_x, a_y, a_z)$ $(\vec{a} = \overrightarrow{OM})$，则有 $\vec{a}$ 的分解式

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是标准单位向量。$\{a_x, a_y, a_z\}$ 是向量 $\vec{a}$ 的坐标。a_x, a_y, a_z 分别是 $\vec{a}$ 在 x、y、z 轴上的投影；$a_x\vec{i}, a_y\vec{j}, a_z\vec{k}$ 分别是 $\vec{a}$ 在 x、y、z 轴上的投影向量。

向量与坐标一一对应。向量的理论分为两部分：用几何描述的向量理论和用坐标描述的向量理论。两部分理论对应地出现，互相翻译。

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

（终点坐标减始点坐标。）始点坐标、终点坐标、向量坐标知其二求第三。

（5）模和方向余弦

设$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$，则

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

其中α, β, λ分别是$\vec{a}$与x、y、z轴的夹角，它们支定了$\vec{a}$的方向。$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$。一次性求出三个方向余弦：

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

3、向量运算

（1）加减法

a）几何方法

两向量用平行四边形法则或三角形法则（接龙法）相加。

$-\vec{a}$与$\vec{a}$大小相等方向相反。$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$。

b）坐标方法

设$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$，$\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$，则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$$

（2）数乘向量

a）几何方法

$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$。$\lambda\vec{a}$的方向：当$\lambda > 0$时与$\vec{a}$同向；当$\lambda < 0$时与$\vec{a}$反向。

b）坐标方法

$$\lambda\{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

（3）两向量的数量积

a）几何方法

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}) = |\vec{a}|prj_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|prj_{\vec{b}}\vec{a}$$

b）坐标方法

设$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

c）物理意义

位移$\vec{r}$外力$\vec{F}$做的功

$$W = \vec{F}\cdot\vec{r}$$

（4）两向量的向量积

$\vec{a}\times\vec{b}$是一个新的向量。

a）几何方法

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$；$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}, (\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$成右手关系。

b）坐标方法

设$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$，则

$$\vec{a}\times\vec{b} = \{a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

c）几何意义

$|\vec{a}\times\vec{b}| =$以$\vec{a}, \vec{b}$为边的平行四边形的面积。

（5）三向量的混合积

a）$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$。$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$。

b）几何意义

$|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| =$以$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$为边的平行六面体的体积。

（6）熟悉各种运算的运算律。

4、平行、垂直、共面条件

（1）设$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \neq \vec{0}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$。下列命题等价：

a）$\vec{a}//\vec{b}$；

b）存在实数 λ 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$；

c）$b_x : a_x = b_y : a_y = b_z : a_z$；

d）$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$。

（2）下列命题等价：

a）$\vec{a} \perp \vec{b}$；

b）$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$；

（3）$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$。

二、空间解析几何

1、一般概念

空间几何对象：曲面和曲线。平面是特殊的曲面，直线是特殊的曲线。

空间解析几何就是用代数方程研究几何对象。

几何对象 Σ 和它的代数方程 K 的关系如下：

（1）Σ 上每点的坐标都满足方程 K；

（2）坐标满足方程 K 的点都在 Σ 上。

空间解析几何的主要任务：

（1）根据已知条件写出几何对象的方程；

（2）根据几何对象的方程分析几何对象的形状。

2、空间解析几何

（1）平面

a）点法式方程

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

其中 $\vec{n} = \{A, B, C\} \neq \vec{0}$ 是 π 的随便一个固定的法向量，$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ 是随便固定的一点。利用条件求出 $\vec{n}, M_0$ 即可写出平面的点法式方程。

b）一般方程

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

其中 $\vec{n} = \{A, B, C\} \neq \vec{0}$ 是 π 的法向量。

$$(0,0,0) \in \pi \Leftrightarrow D = 0$$

$$\pi \,//\, x(y, z)\text{轴} \Leftrightarrow A(B, C) = 0$$

可以用一般式方程写满足条件的平面方程。利用条件求出 A, B, C, D 即可写出平面的一般方程。

c）三点式方程

i）取 $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times M_1M_3$, $M_0 = M_1$

ii）写出点法式方程。

d）截距式方程

如果平面 π 与 x, y, z 轴分别交于非原点 $(a,0,0), (0,b,0), (0,0,c)$，则

$$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

e）点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

f）设

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

则

$$\cos(\pi_1 \hat{,} \pi_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2$$

（2）直线

a）点向式方程

$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

其中 $\vec{s} = \{m, n, p\} \neq \vec{0}$ 是 l 的随便一个固定的方向向量，$M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ 是随便固定的一点。利用条件求出 $\vec{s}, M_0$ 即可写出直线的点向式方程。

b）参数方程

$$l: \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

其中 $\vec{s} = \{m, n, p\} \neq \vec{0}$ 是 l 的随便一个固定的方向向量，$(x_0, y_0, z_0) \in l$ 是随便固定的

一点，t 是参数。

c）一般方程

$$l:\begin{cases}\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

l 作为平面 π_1 和 π_2 的交线。

d）点向式方程

$$l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

化为一般方程

$$l:\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}\\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}\end{cases}$$

e）一般方程化点向式方程：

i）求出 l 方程组的一个解 $M_0(x_0, y_0, z_0)$；

ii）取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}$；

iii）用 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $\vec{s}$ 写出点向式方程。

f）两直线

$$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

的夹角

$$\cos(l_1,\hat{\ }l_2)=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\vec{s}_1\perp\vec{s}_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$$l_1 // l_2\Leftrightarrow\vec{s}_1 // \vec{s}_2\Leftrightarrow m_1:m_2=n_1:n_2=p_1:p_2$$

直线

$$l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

与平面

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

的夹角

$$\sin(\widehat{l,\pi}) = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} // \vec{n} \Leftrightarrow m : A + n : B + p : C$$

$$l // \pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow mA + nB + pC = 0$$

g）过直线

$$l : \begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的平面束

$$\pi_\lambda : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

用已知条件确定λ，从而在平面束中求出满足要求的平面。

（3）常见的空间曲面

（1）柱面

二元方程 $F(x, y) = 0$（或$F(z, y) = 0$或$F(x, z) = 0$）在空间中表示母线平行于 z（或x或y）轴的柱面。

（2）旋转曲面

曲线$\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$绕 y 轴旋转一周得的旋转曲面的方程为

$$f(y, \pm\sqrt{z^2 + x^2}) = 0$$

其它曲线绕其它轴转的情况类似（请你试写出来）。

（3）二次曲面

a）学会用“截痕法”分析曲面的形状。

b）熟悉 P56-P64 列出的各种二次曲面及它们的方程。

c）特别常用的曲面：柱面、锥面、（椭）球面、抛物面。

（4）空间曲线

a）空间曲线的一般方程（曲线作为两曲面的交线）

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

b）由一般方程写参数方程的常用方法：先由一般方程变形出$(\cdots)_1^2 + (\cdots)_2^2 = 1$；令

$(\cdots)_1 = \cos\theta, (\cdots)_2 = \sin\theta$；再进一步写出参数方程。

c）曲线在坐标平面上的投影

由方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

消去z(或x或y)得到在xy(或yz或zx)面上的投影

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \left(\text{或} \begin{cases} H(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} H(z, x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right)$$

第九章　多元函数微分法及其应用

一、多元函数的极限和连续性

1．多元函数的极限

（1）计算多元函数极限的方法：（i）要善于变形；（ii）把一组东西看出一个整体，转化为一元函数的极限，再用一元函数求极限的方法求极限。

（2）证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在：举一些 $\begin{matrix} x\to x_0\\ y\to y_0\end{matrix}$ 的方式（比如 $y=y_0+k(x-x_0)$），使极限不存在或与方式（k）有关。

2．多元函数的连续性

（1）证明 f 在 (x_0,y_0) 点不连续：（i）用前面方法证明 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在；或（ii）求出 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\neq f(x_0,y_0)$。

（2）证明 f 在 (x_0,y_0) 点连续就是证明 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$。

二、偏导数和全微分

1．偏导数

（1）$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的偏导数分两步：（i）作一元函数 $\varphi(x)=f(x,y_0),\psi(y)=f(x_0,y)$；（ii）$f_x(x_0,y_0)=\varphi'(x_0), f_y(x_0,y_0)=\psi'(y_0)$。因此

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

（2）偏导数的几何意义：（i）$f_x(x_0,y_0)$ ＝ 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y_0)\\ y=y_0\end{cases}$ 在 (x_0,y_0) 点切线对 x 轴的斜率；（ii）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y_0)\\ y=y_0\end{cases}$ 在 (x_0,y_0) 点切线对 z 轴的斜率 ＝ $\dfrac{1}{f_x(x_0,y_0)}$。关于 $f_y(x_0,y_0)$ 完全类似。

（3）当相应的高阶导数连续时，高阶偏导数与求导次序无关。

2．全微分

（1）全微分概念

如果存在与 Δx 和 Δy 无关的 $A(x_0,y_0)$ 和 $B(x_0,y_0)$ 使

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+\circ\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$

则称 f 在 (x_0,y_0) 点可微。f 在 (x_0,y_0) 点的全微分

$$dz=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y=A(x_0,y_0)dx+B(x_0,y_0)dy$$

关于任意点(x,y)的全微分，上面(x_0,y_0)改为(x,y)。当(x,y)是复合函数的中间变量时，全微分公式也一样。

（2）如果f在(x_0,y_0)点可微，则f在(x_0,y_0)点的偏导数都存在，并且

$$dz = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy$$

（3）（i）f在(x_0,y_0)点可微$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - [f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

(ii)证明f在(x_0,y_0)点不可微就是证明极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - [f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

不存在或不为 0。

3．导数的计算

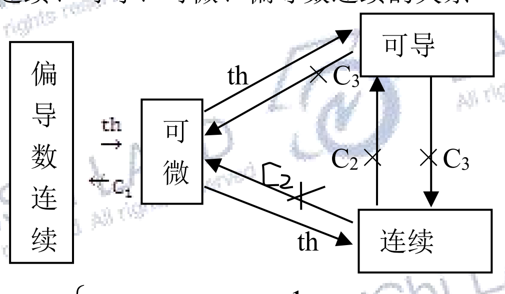
（1）一般函数求导方法：（i）保留求导变元，固定其他变元为常数，得一元函数；（ii）对此一元函数求导。

（2）复合函数求导方法：（i）画复合函数图；（ii）根据复合函数图写求导公式（设对x求导）：每个x所在的路径都对应一项：此路径中的每个相邻函数关系都求导，这些导数相乘作公式的一个求导项；（iii）根据求导公式求得偏导数。（iv）利用低阶偏导数求高阶偏导数，遇到求偏导函数的导数时，各阶偏导函数与原函数有相同的函数图。（复合函数求导一定要求到底！）

（3）隐函数求导方法：（i）把隐函数变量看作其它变量的函数得恒等式（组）；（ii）对恒等式（组）两边求导得含所求导数的方程（组）；（iii）解方程（组）得所求导数；（iv）求隐函数的高阶偏导数有两种方法：(a) 利用低阶偏导数求高阶偏导数；(b)继续对求低阶导数时得的方程（组）求导，得含高阶导数的方程（组），解此方程（组）得高阶导数。不管用哪种方法，都要代入低阶导数的结果，都要清清楚楚地知道哪里含有要求导的变量。

隐函数求导也可解出隐函数再求导。反函数看作隐函数处理。

4．连续、可导、可微、偏导数连续的关系



反例：C_1: $\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \mathrm{x=y=0} \end{cases}$；$C_2$: $|x|$；C_3: $\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \mathrm{x=y=0} \end{cases}$ 都在(0,0)点。要熟悉一些典型例题。

三、多元函数微分法的应用

1．曲线$L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$在$(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$的切向量

$$\vec{\tau}=\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)$$

切线：$\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

法平面：$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0$

如果$L:\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$则用$x$作参数$L:\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$。（用$y$或$z$作参数的情况类似）

2．曲面$\Sigma: F(x,y,z)=0$在(x_0,y_0,z_0)点的法向量

$$\vec{n}=\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\right)$$

切平面：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线：

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

当曲面以参数方程给出时，消去参数变成一般方程再做。

3．方向导数与梯度

（1）$f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)沿方向$\vec{l}$的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$
$$=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$\vec{l}$的方向余弦。

求$f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)沿方向$\vec{l}$的方向导数的方法：（i）求导$f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),f_z(x_0,y_0,z_0)$；（ii）求$\vec{l}$的方向余弦$\dfrac{1}{|\vec{l}|}\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$；（iii）代入上面公式。有时要用上面极限求方向导数。

（2） $f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)的梯度

$$\overrightarrow{grad}\, f\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\{f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),f_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

梯度是方向导数最大的方向，梯度的反方向是方向导数最小的方向，与梯度垂直方向的方向导数为 0：

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\begin{cases}\left|\overrightarrow{grad}\, f\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}\right|, & \vec{l}\text{与梯度同向}\\ -\left|\overrightarrow{grad}\, f\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}\right|, & \vec{l}\text{与梯度反向。}\\ 0, & \vec{l}\perp\text{梯度}\end{cases}$$

梯度是等值面$f(x,y,z)=C$的法向量。

4．极值与最值

（1）无条件极值

如果存在去心邻域$\mathring{U}=\mathring{U}((x_0,y_0),\delta)$使

$$f(x,y)\begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix} f(x_0,y_0),\left((x,y)\in\mathring{U}\right)$$

则称(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极$\begin{matrix}\text{大}\\ \text{小}\end{matrix}$值点，称$f(x_0,y_0)$为$f(x,y)$的极$\begin{matrix}\text{大}\\ \text{小}\end{matrix}$值。可见，极值是小范围的最值。

如果$f(x,y)$在(x_0,y_0)点有二阶偏导数，

必要条件：$\begin{cases}f_x(x_0,y_0)=0\\ f_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$；

充分条件：$\begin{cases}AC-B^2>0\begin{cases}A<0\Rightarrow(x_0,y_0)\text{是}f\text{的极大值点；}\\ A>0\Rightarrow(x_0,y_0)\text{是}f\text{的极小值点；}\end{cases}\\ AC-B^2<0\Rightarrow(x_0,y_0)\text{不是}f\text{的极值点。}\end{cases}$ 其中

$A=f_{xx}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0)$。

解无条件极值问题的方法：

（i）$\begin{cases}\text{求出}f_{xx}(x,y)\text{或}f_{yy}(x,y)\text{或}f_{xy}(x,y)\text{不存在的全部点：}(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1),\cdots,(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n);\\ \text{求出}\begin{cases}f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{cases}\text{的全部解：}(x_1,y_1),\cdots,(x_m,y_m)\end{cases}$ (ii)用定

义对$(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1),\cdots,(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)$逐点判定；用充分条件对$(x_1,y_1),\cdots,(x_m,y_m)$逐点判定。是否极值点，是极大值点还是极小值点，一定要有明确的结论；(iii)必要时求出相应的极值。

（2）最值

$f(x,y)$在(闭)区域D上的最大（小）值点有两种可能$\begin{cases}\text{在}D\text{的边界}\partial D\text{上；}\\ \text{在}D\text{的内部。}\end{cases}$因此

求最大（小）值的方法：（i）求$f(x,y)$在∂D的最大值M（最小值m）；（ii）求出

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y)\text{或}f_{yy}(x,y)\text{或}f_{xy}(x,y)\text{不存在的全部点：}(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1),\cdots,(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n); \\ \begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}\text{的全部解：}(x_1,y_1),\cdots,(x_m,y_m) \end{cases}$$

（iii）结果

$$\text{最大值}=\max\{M,f(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1),\cdots,f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n),f(x_1,y_1),\cdots,f(x_m,y_m)\}$$

$$\text{最小值}=\min\{m,f(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1),\cdots,f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n),f(x_1,y_1),\cdots,f(x_m,y_m)\}$$

如果根据问题的实际知：最大（小）值在D内部取得，并且，在D内部到处可导且只有唯一一个驻点或导数不存在的点，则这点就是最大（小）值点。

5．条件极值

条件极值问题$\begin{cases} z=f(x_1,\cdots,x_n) \\ \phi_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \cdots \\ \phi_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$的解法：

（i）写拉格朗日函数$L=f(x,\cdots,x_n)+\lambda_1\phi_1(x,\cdots,x_n)+\cdots+\lambda_m\phi_m(x,\cdots,x_n)$；

（ii）求函数L非条件极值的驻点（$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$不用解出）；

（iii）根据问题的实际判断每个驻点是否极值点，是极大值点还是极小值点。

6．泰勒公式

设函数$f(x,y)$充分可导，则

$$f(x_0+h,y_0+k)$$

$$=f(x_0,y_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

其中$0<\theta<1$。

有时可以把一组东西看作一个t，利用一元函数写出关于t的泰勒公式，再把t代回得到原函数的泰勒公式。

四、**相关题目**

1．求多元函数的极限；
2．证明多元函数在某点的极限不存在；
3．证明多元函数在某点不连续（连续）；
4．求给定多元函数（在某点）的偏导数；
5．求多元函数（在某点）的全微分；
6．求多元复合函数、隐函数的一阶或高阶偏导数，或全微分；
7．求曲线在某点的切线方程、法面方程；求曲面在某点的切面方程、法线方程；（可能要先根据已知写出方程）
8．求给定函数在某点的梯度，在某点沿某方向的方向导数；
9．求函数的极值、最大（小）值、条件极值；
10．证明多元函数在某点不可导（不可微或导函数不连续）。

第 10 章　重积分

一、二重积分

1．二重积分的概念

设 D 是平面上的有界闭区域，$f(x,y)$ 是 D 上有界函数。

分割：把 D 分割为 n 个小区域：$\Delta\sigma_1,\cdots,\Delta\sigma_n$

“近似”：$\forall(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，作

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

取极限：记 $\lambda=\max_i|\Delta\sigma_i|$，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\begin{cases}\text{不存在，称}f(x,y)\text{在}D\text{上不可积；}\\ =A\text{存在，称}A\text{为}f(x,y)\text{在}D\text{上的二重积分，记为}\end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

当 $f(x,y)$ 有了实际意义，

$$\iint_D f(x,y)d\sigma$$

也相应地有实际意义。例如，如果 $f(x,y)$ 是质量面密度，则二重积分就是 D 的总质量；当 $f(x,y)$ 是以 D 为底的曲顶柱体的高度函数时，二重积分是此曲顶柱体的体积。

$$\iint_D 0d\sigma=0,\iint_D f(x,y)d\sigma=0(D\text{的面积}=0),\iint_D d\sigma=D\text{的面积}$$

2．二重积分的性质

（1）线性性

$$\iint_D[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma$$

（2）可加性

如果 D 分割成两个区域 D_1 和 D_2，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

（3）单调性

如果

$$f(x,y) \le g(x,y),((x,y) \in D)$$

则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$$

特别，如果

$$f(x,y) \ge (\le) 0,((x,y) \in D)$$

则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \ge (\le) 0$$

如果

$$m \le f(x,y) \le M,((x,y) \in D)$$

则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

其中 σ 是 D 的面积。

（4）中值定理

如果 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则存在 $(\xi,\eta) \in D$ 使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

其中 σ 是 D 的面积。

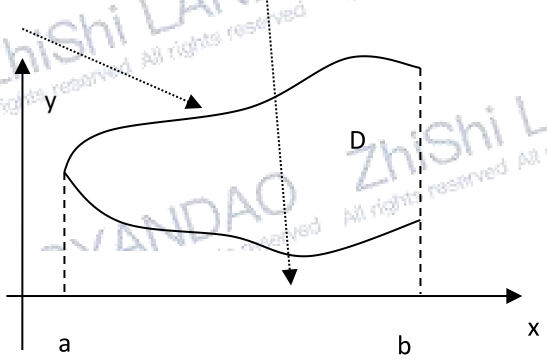
3．二重积分的计算

（1）直角坐标

X-型区域

$D = \{(x,y) | y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$

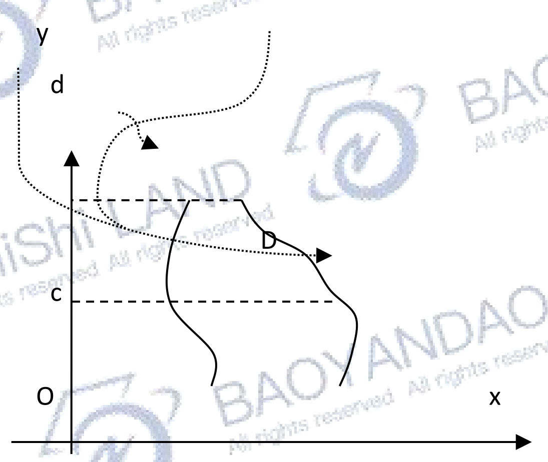
其中，小 y 边界：$y = y_1(x)$；大 y 边界：$y = y_2(x)$。$(a \le x \le b)$



Y-型区域

$D=\{(x,y)|x_1(y)\le x\le x_2(y),c\le y\le d\}$

其中，小 x 边界：$x=x_1(y)$；大 x 边界：$x=x_2(y)$。$(c\le y\le d)$



如果 D 是 X-型区域，则（后 x 积分）

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

如果 D 是 Y-型区域，则（后 y 积分）

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

如果 D 既是 X-型区域又是 Y-型区域，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

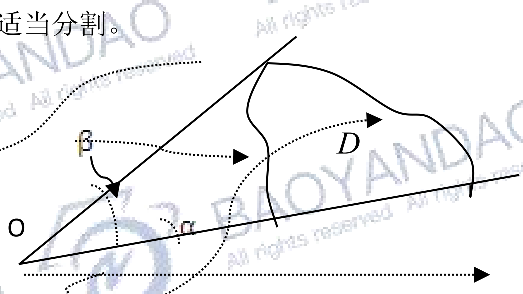
哪个简单就计算哪个。**里层上下限总是外层积分变量的函数。**

如果 D 既不是 X-型区域又不是 Y-型区域，则需作适当分割。

（2）极坐标

如果

$D=\{(\theta,\rho)|\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$



其中 $\alpha\le\theta\le\beta$ 是 D 的张角；$\rho=\rho_1(\theta)$ 是小 ρ 边界；$\rho=\rho_2(\theta)$ 是大 ρ 边界（右图）。

则（总是后 θ 积分）

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

注意：面积元素多一个ρ；当D包含原点时$\alpha=0,\beta=2\pi,\rho_1(\theta)=0$ ）。当D的边界是圆弧或被积函数含有x^2+y^2时，用极坐标积分比较简单。

曲线极坐标方程的求法：设曲线方程$F(x,y)=0$，则$F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=0$，解出$\rho=\rho(\theta)$。

二、三重积分

1．三重积分的概念

设v是空间的有界闭区域，$f(x,y,z)$是v上有界函数。

分割：把v分割为n个小区域：$\Delta v_1,\cdots,\Delta v_n$

“近似”：$\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta v_i$，作

$$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

求和：$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$

取极限：记$\lambda=\max_i|\Delta v_i|$，

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i\begin{cases}\text{不存在，称}f(x,y)\text{在}v\text{上不可积；}\\ =A\text{存在，称}A\text{为}f(x,y)\text{在}v\text{上的三重积分，记为}\end{cases}$$

$$\iiint_v f(x,y,z)dv=\iiint_v f(x,y,z)dxdydz=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

当$f(x,y,z)$有了实际意义，

$$\iiint_v f(x,y,z)dv$$

也相应地有实际意义。例如，如果$f(x,y,z)$是质量体密度，则三重积分就是v的总质量。

$$\iiint_v 0dv=0,\iiint_v f(x,y,z)dv=0(v\text{的体积}=0),\iiint_v dv=v\text{的体积}$$

2．三重积分的性质

（1）线性性

$$\iiint_v [\alpha f(x,y,z)+g(x,y,z)]dv=\alpha\iiint_v f(x,y,z)dv+\beta\iiint_v g(x,y,z)dv$$

（2）可加性

如果v分割成两个区域v_1和v_2，则

$$\iiint_v f(x,y,z)dv=\iiint_{v_1} f(x,y,z)dv+\iiint_{v_2} f(x,y,z)dv$$

（3）单调性

如果

$$f(x,y,z)\le g(x,y,z),((x,y,z)\in v)$$

则

$$\iiint_v f(x,y,z)dv\le\iiint_v g(x,y,z)dv$$

特别，如果

$$f(x,y,z)\ge(\le)0,((x,y,z)\in v)$$

则

$$\iiint_v f(x,y,z)dv\ge(\le)0$$

如果

$$M\ge f(x,y,z)\ge m,((x,y,z)\in v)$$

则

$$Mv\ge\iiint_v f(x,y,z)dv\ge mv$$

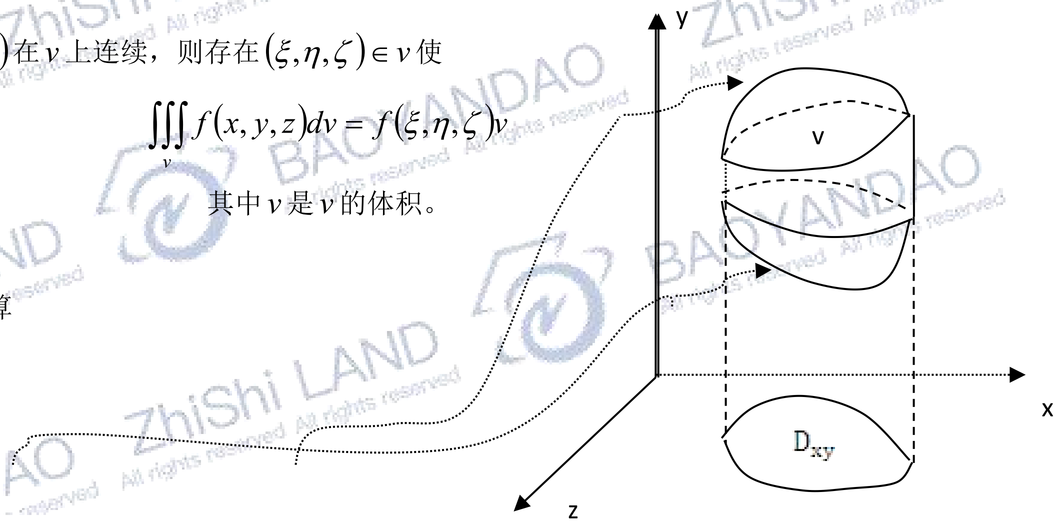
其中v是v的体积。

（4）中值定理

如果$f(x,y,z)$在v上连续，则存在$(\xi,\eta,\zeta)\in v$使

$$\iiint_v f(x,y,z)dv=f(\xi,\eta,\zeta)v$$

其中v是v的体积。



3．三重积分的计算

（1）直角坐标

（i）二套一

设区域

$$v=\left\{(x,y,z)\left|\begin{matrix}z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\\ (x,y)\in D_{xy}\end{matrix}\right.\right\}$$

其中，D_{xy} 是 v 在 xy 平面上的投影，小 z 边界：$z=z_1(x,y)$；大 z 边界：$z=z_2(x,y)$。

$(x,y)\in D_{xy}$（右图）。则

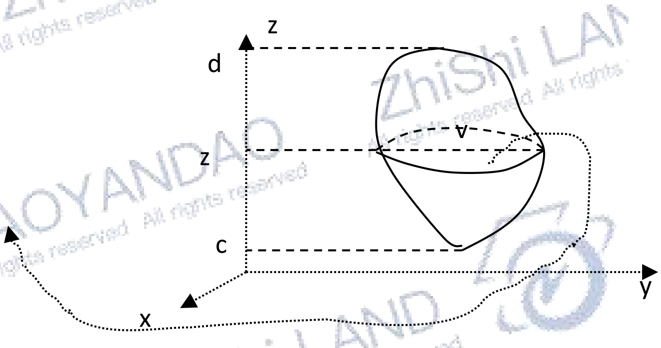
x $$\iiint\limits_{v} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy$$

ii）一套二

设区域

$$v=\{(x,y,z)|(x,y)\in D_z,c\le z\le d\}$$

其中，$[c,d]$ 是 v 在 z 轴上的投影；D_z 是平面 $Z=z$ 截 v 的截口。则



$$\iiint\limits_{v} f(x,y,z)dv=\int_c^d dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy=\int_c^d\left[\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right]dz$$

一般情况下用二套一方法计算；当 $f(x,y,z)$ 不含 (x,y)，或用极坐标计算

$$\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

时不含 (θ,ρ)，用一套二计算比较简单。

往其它坐标平面或坐标轴投影完全类似。

（2）柱面坐标

用柱面坐标计算三重积分的方法：

（i）先把三重积分写成二套一

$$\iiint\limits_{v} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

（ii）再用极坐标计算外层积分

$$\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho d\rho\int_{z_1(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_2(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$$

往其它坐标平面投影完全类似。

（3）球面坐标

（i）球面坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta; \quad dxdydz = r^2\sin\varphi d\theta d\varphi dr \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

（ii）主要掌握以下三种简单情形：

(a) 原点是v的内点。此时

$$\iiint_v f(x,y,z)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr$$

其中$r = r(\theta,\varphi)$是v的外边界。

(b) v的边界在原点与 xy 平面相切，v包含 z 轴正向。此时

$$\iiint_v f(x,y,z)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr$$

其中$r = r(\theta,\varphi)$是v的外边界。

(c) v是锥面$\varphi = \alpha$与外边界$r = r(\theta,\varphi)$包围。此时

$$\iiint_v f(x,y,z)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{r(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr$$

不管是计算二重积分还是三重积分，如果区域边界的表达式不一致，就要作适当区域分割。**里层上下限总是外层积分变量的函数**。

三、重积分的应用

1．体积

$$v\text{的体积} = \iiint_v dxdydz$$

2．曲面$z = f(x,y),\left((x,y)\in D_{xy}\right)$的面积

$$A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}dxdy$$

其中$dS = \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}dxdy$是面积微分；$D_{xy}$是曲面在 xy 上的投影。

曲面表示成$y = f(x,z),\left((x,z)\in D_{xz}\right)$或$x = f(y,z),\left((y,z)\in D_{yz}\right)$时类似。

3．质心

设区域v的密度为$f(x,y,z)$，则v的质量

$$M = \iiint_v f(x,y,z)dv$$

质心坐标

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_{v} xf(x,y,z)dv,\bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_{v} yf(x,y,z)dv,\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{v} zf(x,y,z)dv$$

在平面情形少一个坐标且为二重积分。

4．转动惯量

（1）平面情形

设区域D的密度为$f(x,y)$，则转动惯量

$$I_x=\iint_{D} y^2 f(x,y)dxdy,I_y=\iint_{D} x^2 f(x,y)dxdy$$

（2）空间情形

设区域v的密度为$f(x,y,z)$，则v的转动惯量

$$I_x=\iiint_{v}(y^2+z^2)f(x,y,z)dxdydz,I_y=\iiint_{v}(x^2+z^2)f(x,y,z)dxdydz$$

$$I_z=\iiint_{v}(x^2+y^2)f(x,y,z)dxdydz$$

5．引力

设区域v的密度为$f(x,y,z)$，则v对v以外的质量为M的质点(x_0,y_0,z_0)的引力

$$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$$

为

$$F_x=\iiint_{v}\frac{GMf(x,y,z)(x-x_0)}{\left[\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right]^3}dxdydz$$

$$F_y=\iiint_{v}\frac{GMf(x,y,z)(y-y_0)}{\left[\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right]^3}dxdydz$$

$$F_z=\iiint_{v}\frac{GMf(x,y,z)(z-z_0)}{\left[\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right]^3}dxdydz$$

其中的复杂性是由力的分解时乘$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$引起的。

计算时注意对称性。

四、**相关题目**

1．用直角坐标计算二重积分，当边界的表达式不一致时会适当分割区域；知道什么时候用极坐标计算简单并会用极坐标计算二重积分；

2．用直角坐标计算三重积分，当边界的表达式不一致时会适当分割区域；知道什么时候用柱面坐标或球面坐标计算简单并会用柱面坐标或球面坐标坐标计算三重积分；

3．用二重积分或三重积分计算几何体的体积；

4．用二重积分计算空间曲面的面积；

5．用二重积分或三重积分计算质量、质心、转动惯量、引力等物理应用。

第十一章 曲线积分与曲面积分

一、曲线积分

1．对弧长的曲线积分

（1）概念

设L是空间有界曲线，$f(x,y,z)$是L上有界函数。

分割：把L分割为n个小弧段：$M_0,M_1,\cdots,M_n$

“近似”：$\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in$弧$M_{i-1}M_i$，$\Delta s_i$为弧$M_{i-1}M_i$的弧长，作

$$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

求和：$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$

取极限：记$\lambda=\max_i|弧M_{i-1}M_i|$

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i\begin{cases}不存在，说f(x,y,z)在L上第一类不可积;\\ =A存在，称A为f(x,y,z)在L上对弧长的曲线积分，记为\end{cases}$$

$$\int_L f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

当$f(x,y,z)$有了实际意义，

$$\int_L f(x,y,z)ds$$

也相应地有实际意义。例如，如果$f(x,y,z)$是质量弧长密度，则曲线积分就是L的总质量。

平面曲线积分是空间曲线积分的特例。

（2）性质

（i）线性性

$$\int_L[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]ds=\alpha\int_L f(x,y,z)ds+\beta\int_L g(x,y,z)ds$$

（ii）曲线段可加性

把L分割成两段L_1和L_2，则

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_{L_1}f(x,y,z)ds+\int_{L_2}f(x,y,z)ds$$

（iii）单调性

如果在L上有$f(x,y,z)\le g(x,y,z)$，则

$$\int_L f(x,y,z)ds\le\int_L g(x,y,z)ds$$

特别，如果在L上有$f(x,y,z)\ge(\le)0$，则

$$\int_L f(x,y,z)ds \ge (\le) 0$$

如果在L上有$M \ge f(x,y,z) \ge m$，则

$$Ms \ge \int_L f(x,y,z)ds \ge ms$$

其中s是L的弧长。

（iv）中值定理

如果$f(x,y,z)$在L上连续，则存在$(\xi,\eta,\zeta)\in L$使

$$\int_L f(x,y,z)ds = f(\xi,\eta,\zeta)s$$

其中s是L的弧长。

（3）计算

设$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), (\alpha \le t \le \beta) \\ z = z(t) \end{cases}$，则

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

其中$ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$是弧长微分。

当$L:\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$时就用$x$作参数$L:\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$；类似地有时用$y$或$z$作参数。

2．对坐标的曲线积分

（1）概念

设L是空间有界的有向曲线，A是始点B是终点，$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$是$L$上有界向量函数。

分割：把L分割为n个小弧段：$A=M_0,M_1,\cdots,M_n=B$

“近似”：$\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in$弧$M_{i-1}M_i$。设弧$M_{i-1}M_i$的长是$\Delta s_i$，$\vec{e}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$是$L$在$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$点与$L$方向一致的单位切向量。

作

$$\vec{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

求和：$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$

取极限：记$\lambda=\max_i|\text{弧}M_{i-1}M_i|$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

$$\begin{cases}\text{不全存在，称在上第二类不可积；}\\ =A\text{都存在，称}A\text{为}\vec{F}(x,y,z)\text{在}L\text{上对坐标的曲线积分，记为}\end{cases}$$

$$\int_L\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dr}=\int_L\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{e}(x,y,z)ds$$
$$=\int_L\left[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\right]ds$$
$$=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\int_L P(x,y,z)dx+\int_L Q(x,y,z)dy+\int_L R(x,y,z)dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

其中$\vec{e}(x,y,z)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$是$L$与$L$方向一致的单位切向量，

$dx=\cos\alpha ds, dy=\cos\beta ds, dz=\cos\gamma ds, \vec{dr}=\vec{e}(x,y,z)ds$。

当$\vec{F}(x,y,z)$有了实际意义，

$$\int_L\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dr}$$

也相应地有实际意义。例如，如果$\vec{F}(x,y,z)$是外力，则上面曲线积分就是质点沿L从A运动到B外力做的功。

平面曲线积分是空间曲线积分的特例。

（2）性质

（i）线性性

$$\int_L\left[\alpha\vec{F}(x,y,z)+\beta\vec{G}(x,y,z)\right]\cdot\vec{dr}=\alpha\int_L\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dr}+\beta\int_L\vec{G}(x,y,z)\cdot\vec{dr}$$

（ii）曲线段可加性

把L分割成方向一致的两段L_1和L_2，则

$$\int_L\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dr}=\int_{L_1}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dr}+\int_{L_2}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dr}$$

（iii）方向性

如果记L的反方向为L^-，则

$$\int_{L^-}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dr}=-\int_L\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dr}$$

其中$\vec{dr}=(dx,dy,dz)$。

（iv）中值定理

$$\int_L \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{dr} = \vec{F}(\xi,\eta,\zeta)\cdot \vec{e}(\xi,\eta,\zeta)s$$

其中 s 是 L 的弧长。

（3）计算（三个积分一个一个地计算）

设 $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}\begin{pmatrix} t:\alpha \to \beta \\ \text{始} \quad \text{终} \end{pmatrix}$，则

$$\int_L f(x,y,z)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

$$\int_L f(x,y,z)dy = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt$$

$$\int_L f(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

当 $L:\begin{cases} \mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{x}) \\ \mathrm{z} = \mathrm{z}(\mathrm{x}) \end{cases}$ 时就用 x 作参数 $L:\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$；类似地有时用 y 或 z 作参数。

注意：α 和 β 不管哪个大哪个小。

可以利用 $dx = \cos\alpha ds, dy = \cos\beta ds, dz = \cos\gamma ds$ 把三个积分互相转化。

如果 L 垂直于 x 轴则 $\int_L f(x,y,z)dx = 0$；垂直于 y 轴则 $\int_L f(x,y,z)dy = 0$；垂直于 z 轴，则 $\int_L f(x,y,z)dz = 0$。

平面是空间的特例。

二、格林公式、第二类曲线积分与路径无关、原函数

1．格林公式

条件：$P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上无奇点。

结论：

$$\oint_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

如果 L 不封闭，添上简单的 L_1 使 $L+L_1$ 封闭，再用格林公式计算

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy - \int_{L_1} Pdx + Qdy$$

注意：要保持 $L+L_1$ 成为 D 的正向边界。

如果 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 上有奇点，用很小的 r 曲线

$$L': P(x,y),Q(x,y)\text{的分母} = r^2$$

把奇点挖掉再用格林公式。但要保持 L' 的方向成为新的 D' 的正向边界。

2．第二类曲线积分与路径无关

前提：G是单联通区域；$P(x,y),Q(x,y)$在G上没有奇点。

结论：$\int_L Pdx+Qdy$ 在G内与路径无关（只与始终点有关）$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$(在$G$上)。

只要验证了 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，就知道$\int_L Pdx+Qdy$ 在G内与路径无关，就可以选一条简单的路径计算积分$\int_L Pdx+Qdy$。一般来说，平行于坐标轴的折线最简单。

3．原函数

前提：G是单联通区域；$P(x,y),Q(x,y)$在G上没有奇点。

结论：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在G内是某原函数u的全微分$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$(在$G$上)。此时

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx$$

（选平行于坐标轴的折线计算曲线积分）。也可以用凑微分法求$u(x,y)$。

验证了 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$(在$G$上)后，$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的通解为$u(x,y)=C$，其中$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$。

三、曲面积分

1．对面积的曲面积分

设 $f(x,y,z)$在有界曲面Σ上有界。

分割：把Σ分割为n小块：$\Delta S_1,\cdots,\Delta S_n$

“近似”：$\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$，作

$$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

取极限：记$\lambda=\max_i|\Delta S_i|$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\begin{cases}\text{不存在，说}f(x,y,z)\text{在}\Sigma\text{上第一类不可积；}\\ =A\text{存在，称}A\text{为}f(x,y,z)\text{在}\Sigma\text{上对面积的曲面积分，记为}\end{cases}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

当 $f(x,y,z)$ 有了实际意义，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$$

也相应地有实际意义。例如，如果 $f(x,y,z)$ 是质量面密度，则曲面积分就是 Σ 的总质量。

（2）性质

（i）线性性

$$\iint_{\Sigma}[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]dS = \alpha\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS + \beta\iint_{\Sigma} g(x,y,z)dS$$

（ii）可加性

把 Σ 分割成两片 Σ_1 和 Σ_2，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$$

（iii）单调性

如果在Σ上有 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS \le \iint_{\Sigma} g(x,y,z)dS$$

特别，如果在 Σ 上有 $f(x,y,z)\ge(\le)0$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS \ge (\le) 0$$

如果在 Σ 上有 $m\le f(x,y,z)\le M$，则

$$MS \ge \iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS \ge mS$$

其中 S 是 Σ 的面积。

（iv）中值定理

如果 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma$ 使

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = f(\xi,\eta,\zeta)S$$

其中 S 是 Σ 的面积。

（3）计算

设 Σ: $z=z(x,y),((x,y)\in D_{xy})$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

设Σ: $y = y(x,z),((x,z)\in D_{xz})$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz$$

设Σ: $x = x(y,z),((y,z)\in D_{yz})$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz$$

其中，D_{xy},D_{xz},D_{yz} 分别是 Σ 在 xy，xz，yz 平面上的投影；$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz$ 是曲面的面积元素。

2．对坐标的曲面积分

设$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$在有界的有向曲面$\Sigma$上有界。

分割：把Σ分割为m小块：$\Delta S_1,\cdots,\Delta S_m$

“近似”：$\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$，设$\vec{e}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$是$\Sigma$在$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$点与$\Sigma$同向的单位法向量，作

$$\vec{F}(\xi_i,\mu_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

求和：

$$\sum_{i=1}^{m}\vec{F}(\xi_i,\mu_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

取极限：记$\lambda=\max_i|\Delta S_i|$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}\vec{F}(\xi_i,\mu_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

$$\begin{cases}\text{不全存在，说 }\vec{F}(x,y,z)\text{在}\Sigma\text{上第二类不可积；}\\ \qquad = A\text{都存在，称}A\text{为 }\vec{F}(x,y,z)\text{在}\Sigma\text{上对坐标的曲面积分，记为}\end{cases}$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{dS} = \iint_{\Sigma} \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{e}(x, y, z) dS$$
$$= \iint_{\Sigma} \left[P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\right] dS$$
$$= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$$
$$= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx + \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = A$$

其中 $\vec{e}(x, y, z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是 Σ 与 Σ 同向的单位法向量，$dydz = \cos\alpha dS, dzdx = \cos\beta dS, dxdy = \cos\gamma dS, \vec{dS} = \vec{e}(x, y, z) dS$。

当 $\vec{F}(x,y,z)$ 有了实际意义，

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{dS}$$

也相应地有实际意义。例如，如果 $\vec{F}(x,y,z)$ 是流体速度，则曲面积分就是流体在单位时间内通过 Σ 流向 Σ 选定侧的总体积。

（2）性质

（i）线性性

$$\iint_{\Sigma}\left[\alpha\vec{F}+\beta\vec{G}\right]\cdot\vec{dS} = \alpha\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{dS}+\beta\iint_{\Sigma}\vec{G}\cdot\vec{dS}$$

（ii）可加性

把 Σ 分割成两片 Σ_1 和 Σ_2，$\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ 方向一致，则

$$\iint_{\Sigma}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dS} = \iint_{\Sigma_1}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dS} + \iint_{\Sigma_2}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dS}$$

（iii）方向性

如果记 Σ 的反侧为 Σ^-，则

$$\iint_{\Sigma^-}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dS} = -\iint_{\Sigma}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dS}$$

其中，$\vec{dS} = (dydz, dzdx, dxdy)$ 是面积元素向量。

（iv）中值定理

$$\iint_{\Sigma}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{dS} = \vec{F}(\xi,\eta,\zeta)\cdot\vec{e}(\xi,\eta,\zeta)S$$

（3）计算（三个积分一个一个地计算）

设Σ: $z=z(x,y),((x,y)\in D_{xy})$，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

当Σ为上侧时取+号，下侧时取−号。

设Σ: $y=y(x,z),((x,z)\in D_{xz})$，则

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(x,z),z)dzdx$$

当Σ为右侧时取+号，左侧时取−号。

设Σ: $x=x(y,z),((y,z)\in D_{yz})$，则

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$$

当Σ为前侧时取+号，后侧时取−号。

其中。D_{xy},D_{zx},D_{yz}分别是Σ在 xy，xz，yz 平面上的投影。

可以利用$dydz=\cos\alpha dS, dzdx=\cos\beta dS, dxdy=\cos\gamma dS$把三个积分互相转化。

如果Σ垂直于 xy 平面，则$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=0$。垂直于 yz 平面或 zx 平面类似。

四、高斯公式、散度、斯特克斯公式、旋度

1．高斯公式

条件：$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在区域$\Omega$上无奇点。

结论：

$$\oiint_{\partial\Omega^{+}} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

如果Σ不封闭，添上简单的Σ_1使$\Sigma+\Sigma_1$封闭，再用高斯公式计算

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz-\iint_{\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

注意：要保持$\Sigma+\Sigma_1$成为Ω的外侧。

如果$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在区域$\Omega$上有奇点，用很小的$r$曲面

$$\Sigma'：P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\text{的分母}=r^2$$

把奇点挖丢再用高斯公式。但要保持Σ'的方向成为新的Ω'的外侧。

2．散度

向量函数$\vec{F}=(P,Q,R)$在(x_0,y_0,z_0)的散度是实数

$$div\,\vec{F}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

因此

$$\oiint_{\partial\Omega^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega} div\,\vec{F}\,dxdydz$$

3．斯特克斯公式

条件：$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在曲面$\Sigma$上无奇点。

结论：

$$\int_{\partial\Sigma^+} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

可适当选择Σ。

4．旋度

向量函数$\vec{F}=(P,Q,R)$在(x_0,y_0,z_0)的旋度是向量

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}$$

因此

$$\int_{\partial\Sigma^+} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{dS}=\iint_{\Sigma}\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\cdot\{dydz,dzdx,dxdy\}$$

五、**相关题目**

1．计算第一、二类曲线积分；
2．用格林公式（补曲线、挖奇点）计算第二类曲线积分；
3．验证第二类曲线积分与路径无关，然后选简单曲线计算之；
4．已知某第二类曲线积分与路径无关，求被积函数中的未知函数；
5．验证某表达式是某原函数的全微分，并求原函数；
6．已知某表达式是某原函数的全微分，求表达式中的未知函数；
7．计算第一、二类曲面积分；
8．用高斯公式（补曲面、挖奇点）计算第二类曲面积分；
9．计算向量函数的散度、旋度。

第十三章　无穷级数

一、常数项级数

1．常数项级数的概念

形式地用加号把一个数列连起来

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (1)$$

称为一个常数项级数。u_n 称为一般项。一般项确定了级数也就确定了。

（1）的前 n 项的和

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为（1）的部分和。$n = 1,2,3,\cdots$。

$$\lim_{n\to\infty} s_n \begin{cases} \text{发散，则（1）发散（没有和）；} \\ \text{收敛，则（1）收敛（有和），且} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

级数是收敛还是发散的性质称为级数的收敛性。判定级数是否收敛称为审敛。审敛是级数的核心内容。

2．常数项级数的性质

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ku_n = ks$ 也收敛。如果 $k \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 同敛散。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ 都收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (s \pm \sigma)$ 也收敛。

三个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$，如果任意两个收敛，则第三个也收敛；如果有一个发散，则至少有两个发散。

（3）级数的收敛性与前面有限项无关。（但级数的和有关。）

（4）收敛的级数可以随便添括号，不影响收敛性，也不影响和。（注意：逆不成立。）

（5）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$。（千万注意：逆不成立。）

最常用是（5）的逆否：如果 $\lim_{n\to\infty} u_n$ 不存在或不是 0，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

3．熟记一些级数

（1）等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \begin{cases} 发散, & |q| \geq 1 \\ = \dfrac{a}{1-q} 收敛, & |q| < 1 \end{cases}$

（2）调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散。但交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 收敛。

（3）p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} 发散, & p \leq 1 \\ 收敛, & p > 1 \end{cases}$

4．常数项级数的审敛

（1）正项级数审敛法

如果 $u_n \geq 0$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数。

定理 1　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有上界。

定理 2（比较审敛法）　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。如果

$$u_n \leq v_n, \quad (n = 1,2,\cdots) \qquad (*)$$

则

（i）$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（ii）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

（大项级数收敛则小项级数也收敛；小项级数发散则大项级数也发散。）

因为前有限项不影响级数的收敛性，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} kv_n (k > 0)$ 同敛散，所以（*）可改为

$$u_n \leq kv_n, \quad (k > 0, n > N)$$

定理 3（比较审敛法）　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$。

（i）如果 $l = 0$（u_n 是 v_n 的高价无穷小），则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（ii）如果 $l = +\infty$（u_n 是 v_n 的低价无穷小），则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

（iii）如果 $0 < l < +\infty$（u_n 和 v_n 是同价无穷小），则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散。

（常常用等比级数或 p 级数与要审敛的级数比较。）

定理 4（比值审敛法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$。

（i）如果 $\rho < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（ii）如果 $\rho > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

（iii）如果 $\rho = 1$，此法无效。

定理 4（根值审敛法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$。

（i）如果 $\rho < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（ii）如果 $\rho > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

（iii）如果 $\rho = 1$，此法无效。

审敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，当 u_n 可扩大（缩小）一点点得简单级数时，用比较审敛法；当 u_n 是 n 的简单递推时，用比值审敛法；当 u_n 是 n 次幂时，用根值审敛法。

定理 5（积分审敛法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，如果存在在 $[1,+\infty)$ 单调减少的连续函数 $f(x)$ 使得 $f(n) = u_n(n = 1,2,\cdots)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散。

（2）交错级数审敛法

如果 $u_n \ge u_{n+1} \ge 0(n = 1,2,\cdots)$ 且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛。并且，

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \le u_1，\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k\right| \le u_{n+1}$$

（3）绝对审敛法

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛（绝对收敛）。}$$

如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛但$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛。

二、幂级数

1．函数项级数

项是函数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \qquad (\#)$$

称为函数项级数。如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛（发散），则称$x_0$为（#）的收敛（发散）点。集合

$$K=\left\{x\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\text{收敛}\right.\right\}$$

称为（#）的收敛域（可能为空集）。函数

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\ (x\in K)$$

称为（#）的和函数。函数

$$r_n(x)=s(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\ (x\in K)$$

称为（#）的余项。

2．幂级数的收敛域和收敛半径

函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 称为幂级数。

（1）对于任意幂级数，$0\in K\neq\phi$ 。

定理 1　对于任意幂级数，收敛域K都是以0为中心的区间（可能是$\{0\}$、全实数R、开区间、闭区间或半开半闭的区间）。

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛域K的可能性

$$\begin{cases}\text{(i) } K=\{0\}\\ \text{(ii) } K=\text{全体实数}\\ \text{(iii) } \exists\text{正数}R\text{使}(-R,R)\subset K\text{且}K\cap[(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)]=\phi\end{cases}$$

(iii)中的 R 称谓 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，（ii）时收敛半径 $R=+\infty$，（i）时收敛半径 $R=0$。

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 的收敛性要单独审敛。幂级数在 $(-R,R)$ 内绝对收敛。

定理 2　如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$，即

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty \\ 0, & \rho=+\infty \\ +\infty, & \rho=0\end{cases}$$

（2）求收敛半径和收敛域的方法：（i）求收敛半径 R；（ii）如果 $R\neq 0,+\infty$，分别讨论 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 的收敛性；（iii）根据（i）和（ii）确定 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域 K。

（3）连续性、逐项定积分、逐项求导

定理 3　（i）和函数 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛域 K 上连续、可积；在 $(-R,R)$ 中任意阶可导；（ii）可以逐项定积分

$$\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a_{n-1}x^n\text{，（}x\in K\text{）} \qquad (*)$$

可以逐项求导

$$s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}\text{，（}x\in(-R,R)\text{）} \qquad (**)$$

并且，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$、（*）和（**）三级数有相同的收敛半径 R。（但是，三级数在端点的收敛情况可能不同。必要时要分别判定。）

利用逐项定积分、逐项求导、四则运算和一些已知的幂级数和函数，可以方便地求幂级数的和函数。

当要在 x_0 点讨论幂级数时，令 $t = x - x_0$ 利用关于 t 的幂级数讨论得到在 x_0 点幂级

数的结论。

（4）把函数展开成幂级数

若找到 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 使在某区间 I 内

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

则称在 I 内函数 $f(x)$ 展开成幂级数。

由定理 3 知，不是无限阶可导的函数一定不能展开成幂级数。下面设 $f(x)$ 无限阶可导。

（i）泰勒级数和麦克劳琳级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒级数（不管是否收敛，也不管和函数是否 $f(x)$）。当 $x_0 = 0$ 时，称为麦克劳琳级数。

（ii） $f(x)$ 展开幂级数的唯一性

根据逐项求导，如果 $f(x)$ 在 x_0 点能展开成幂级数，则这幂级数一定是 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒级数。

（iii）展开定理

定理 4　设 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

$f(x)$ 能在 x_0 点邻域 I 内展开成（泰勒）幂级数的充要条件是在 I 内

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

（iv）把 $f(x)$ 展开成幂级数的方法

第一步　写出 $f(x)$ 的麦克劳琳级数

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

第二步　在某个范围 I 内证明

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad (x\in I)$$

如果通过恒等变换、逐项求导、逐项积分、变量代换，利用已知的幂级数展开式写出 $f(x)$ 的幂级数，就不需要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$。这就是间接展开法。需要熟记一些常用展开式：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad (x\in(-\infty,+\infty))$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad (x\in(-\infty,+\infty))$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad (x\in(-\infty,+\infty))$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad (-1<x<1)$$

如果要把f(x)展开成 $x-x_0$ 的幂级数，先作变换 $x-x_0=t, f(x)=f(x_0+t)=g(t)$

然后展开 $g(t)$，最后代回 $t=x-x_0$。

三、傅里叶级数

1．三角函数系及三角级数

（1）三角函数系

$$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

的正交性是指如下积分性质

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2dx=2\pi,\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\pi,(n=1,2,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0,(n=1,2,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin lx\sin nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos lx\cos nxdx=0,(k,l,n=1,2,\cdots,l\neq n),$$

(2)函数项级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad (***)$$

称为三角级数。

2．函数展开成傅里叶级数

给定函数 $f(x)$，找到三角级数（***）使

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则称把 $f(x)$ 展开成三角级数。$f(x)$ 一定是周期为 2π 的周期函数。

（1）如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则积分

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,(n=1,2,\cdots),$$

称为 $f(x)$ 的傅里叶系数。以 $f(x)$ 的傅里叶系数写出的三角级数称为 $f(x)$ 的傅里叶级数，记为

$$f(x)\backsim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

（注意：还不能写等号。）

（2）唯一性

如果 $f(x)$ 可以展开成能逐项积分的三角级数，则这三角级数一定是 $f(x)$ 的傅里叶级数。因此，展开成三角级数也称为展开成傅里叶级数。

（3）收敛定理

条件：$f(x)$ 在一个周期内只有有限个第一类间断点，并且只有有限个极值点。

结论：（i）$f(x)$ 的傅里叶级数到处收敛；（ii）设 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数为 $s(x)$，则

$$s(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{是}f\text{的连续点}\\ \frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)], & x\text{是}f\text{的间断点}\end{cases}$$

收敛定理有两个作用：（i）求和函数值 $s(x_0)$；（ii）排除 $f(x)$ 的间断点得展开式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\text{（排除 }f(x)\text{ 的间断点）}$$

（4）把周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数的方法

（i）求出 $f(x)$ 的傅里叶系数；（ii）用傅里叶系数写出 $f(x)$ 的傅里叶级数；（iii）排除 $f(x)$ 的间断点使等号成立。

3．如果 $f(x)$ 只在 $[-\pi,\pi]$ 上有定义，先把 $f(x)$ 拓广成周期为 2π 的周期函数再展开成傅里叶级数。

4．正弦级数和余弦级数

（i）当 $f(x)$ 是奇函数时， $f(x)\cos nx$ 是奇函数 $f(x)\sin nx$ 是偶函数， $[-\pi,\pi]$ 关于原点对称，所以

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0,b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx,(n=1,2,\cdots)$$

$f(x)$ 的傅里叶级数是正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 。

当 $f(x)$ 是偶函数时，$f(x)\cos nx$ 是偶函数 $f(x)\sin nx$ 是奇函数，$[-\pi,\pi]$ 关于原点对称，所以

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0,(n=1,2,\cdots)$$

$f(x)$ 的傅里叶级数是余弦级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 。

(ii)如果 $f(x)$ 只在半个周期 $[0,\pi]$($[-\pi,0]$)上有定义，把 $f(x)$ 作奇拓广再展开成正弦级数；把 $f(x)$ 作偶拓广再展开成余弦级数。（根据题目的要求）

5．周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

周期为 $2l$ 的周期函数与周期为 2π 的周期函数有完全类似的傅里叶级数理论，但此时用的函数系是周期为 $2l$ 的函数系

$$\left\{1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\cdots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\cdots\right\}$$

此时的傅里叶系数公式是

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,(n=1,2,\cdots)$$

周期为 2π 是周期为 $2l$ 的特例。

周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 在变换 $x=\frac{l}{\pi}t$ 下得周期为 2π 的周期函数 $g(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$，先把 $g(x)$ 展开成傅里叶级数，再代回 $t=\frac{\pi}{l}x$ 即得 $f(x)$ 的展开。

四、**相关题目**

1．用比较法（不等式形式和极限形式）、比值法、根植法审敛正项级数；

2．用绝对收敛法审敛一般项级数；

3．用交错审敛法审敛条件收敛级数；（分得清绝对收敛和条件收敛）

4．求幂级数的收敛半径和收敛域；

5．求两个幂级数的乘积；

6．灵活逐项积分和逐项求导（即间接法）求简单幂级数的和函数；

7．用直接法把函数展开成幂级数；用间接法把函数展开成幂级数；（包括在 x_0 点展开）

8．求给定函数的傅里叶系数；把函数展开成傅里叶级数；

9．求给定函数的傅里叶级数的和函数在连续点或间断点的值 $s(x_0)$；

10．写半个周期函数的正弦级数和余弦级数；

11．对一般周期为 $2l$ 的周期函数做 8、9、10。

结束语

只要充分弄懂本《复习考试》所述内容，并能灵活运用于解题，会解各 “相关题目”，期末考试高分就没有问题。