第一章行列式

习题 1—14

14. 计算数字行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

习题 1—14

14. 计算数字行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

14. 计算数字行列式$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_5}$$

习题 1—14

14. 计算数字行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_5} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

习题 1—14

14. 计算数字行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_5} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

习题 1—14

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

习题 1—14

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1\times 2,r_5-r_1\times 3]{r_2-r_1\times 2,r_3-r_1\times 3}$$

习题 1—14

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1\times 2, r_5-r_1\times 3]{r_2-r_1\times 2, r_3-r_1\times 3} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

习题 1—14

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1\times 2, r_5-r_1\times 3]{r_2-r_1\times 2, r_3-r_1\times 3} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=3,4,5]{r_i-r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

习题 1—14

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1\times 2, r_5-r_1\times 3]{r_2-r_1\times 2, r_3-r_1\times 3} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=3,4,5]{r_i-r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_5-r_4\times 2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

习题 1—14

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1\times 2, r_5-r_1\times 3]{r_2-r_1\times 2, r_3-r_1\times 3} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=3,4,5]{r_i-r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_5-r_4\times 2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

19. 证明恒等式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

19. 证明恒等式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证: 由行列式的线性性质，可将左边的行列式拆分为 4 个行列式的和，即

左边 $=$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix}$$

19. 证明恒等式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证: 由行列式的线性性质，可将左边的行列式拆分为 4 个行列式的和，即

左边 $=$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

19. 证明恒等式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证: 由行列式的线性性质，可将左边的行列式拆分为 4 个行列式的和，即

左边 =

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix}$$

19. 证明恒等式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证: 由行列式的线性性质，可将左边的行列式拆分为 4 个行列式的和，即

左边 =

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

习题 1—19

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix}$$

习题 1—19

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 x & c_1 \\ a_2 & a_2 x & c_2 \\ a_3 & a_3 x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

习题 1—19

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix}$$

习题 1—19

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

习题 1—19

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

习题 1—19

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

习题 1—19

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1x & b_1x & c_1 \\ a_2x & b_2x & c_2 \\ a_3x & b_3x & c_3 \end{vmatrix}$$

习题 1—19

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1x & b_1x & c_1 \\ a_2x & b_2x & c_2 \\ a_3x & b_3x & c_3 \end{vmatrix} + 0$$

习题 1—19

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1x & b_1x & c_1 \\ a_2x & b_2x & c_2 \\ a_3x & b_3x & c_3 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

36. 证明下列等式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n})\frac{1}{a_i}\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

(方法一)证: 左边＝

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

36. 证明下列等式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n})\frac{1}{a_i}\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

(方法一)证: 左边＝

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

习题 1—36

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

习题 1—36

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i - r_1}$$

习题 1—36

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

习题 1—36

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_1+c_i\times\frac{1}{a_i}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_1+c_i\times\frac{1}{a_i}} \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} =$$

习题 1—36

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_1+c_i\times\frac{1}{a_i}} \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \text{右边}$$

习题 1—36

(方法二)证:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

习题 1—36

(方法二)证:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

习题 1—36

(方法二)证:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_i\times\frac{a_1}{a_i}} \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

习题 1—36

(方法二)证:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_i\times\frac{a_1}{a_i}} \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i})a_2\cdots a_n$$

习题 1—36

(方法二)证:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_i\times\frac{a_1}{a_i}} \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i})a_2\cdots a_n$$

$$= a_1a_2\cdots a_n$$

习题 1—36

(方法二)证:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 + c_i \times \frac{a_1}{a_i}} \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i})a_2\cdots a_n$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).$$

习题 1—36

(方法三)证:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

(方法三)证:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=1,2,\cdots,n}{\overset{r_i\text{提取}a_i}{=\!=\!=\!=}}$$

习题 1—36

(方法三)证:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{r_i\text{提取}a_i} a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

习题 1—36

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_1+r_i} a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \cdots & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

习题 1—36

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_1+r_i} a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \cdots & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

习题 1—36

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_1} a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

习题 1—36

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i - c_1} a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right).$$

习题 1—37

37. 证明
$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}.$$

37. 证明
$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}.$$

(方法一)证: 从最后一列起, 依次将后一列的 x 倍加到前一列:

37. 证明
$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}.$$

(方法一)证: 从最后一列起, 依次将后一列的 x 倍加到前一列:

习题 1—37

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

习题 1—37

$$
\begin{vmatrix}
x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
a_n + a_{n-1}x + \cdots + x^n & & & \cdots & a_2 + x(x+a_1) & x+a_1
\end{vmatrix}
$$

习题 1—37

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + \cdots + x^n & \bigstar & \bigstar & \cdots & a_2 + x(x+a_1) & x + a_1 \end{vmatrix}$$

习题 1—37

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + \cdots + x^n & \bigstar & \bigstar & \cdots & a_2 + x(x+a_1) & x + a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1} (a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

习题 1—37

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + \cdots + x^n & \bigstar & \bigstar & \cdots & a_2 + x(x+a_1) & x + a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1} (a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + \cdots + x^n & \bigstar & \bigstar & \cdots & a_2 + x(x+a_1) & x + a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1} (a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = \text{右边}.$$

习题 1—37

(方法二)**证:** 按 c_1 展开:

(方法二)**证:** 按 c_1 展开:

左边 $= D_n$

习题 1—37

(方法二)**证:** 按 c_1 展开:

$$\text{左边} = D_n = xD_{n-1}$$

习题 1—37

(方法二)证: 按 c_1 展开:

$$左边 = D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

习题 1—37

(方法二)证: 按 c_1 展开:

$$左边 = D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1}$$

习题 1—37

(方法二)证: 按 c_1 展开:

$$左边 = D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n$$

习题 1—37

(方法二)证: 按 c_1 展开:

$$左边 = D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}$$

习题 1—37

(方法二)**证:** 按 c_1 展开:

$$左边 = D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n$$

习题 1—37

(方法二)证: 按 c_1 展开:

$$\text{左边} = D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n$$

$$= x[xD_{n-2} + a_{n-1}] + a_n$$

习题 1—37

(方法二)证: 按 c_1 展开:

$$\text{左边} = D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n$$

$$= x[xD_{n-2} + a_{n-1}] + a_n = x^2D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n$$

习题 1—37

(方法二)**证:** 按 c_1 展开:

$$\text{左边} = D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n (-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n$$

$$= x[xD_{n-2} + a_{n-1}] + a_n = x^2 D_{n-2} + a_{n-1} x + a_n = \cdots\cdots\cdots$$

习题 1—37

(方法二)证: 按 c_1 展开:

$$
左边 = D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n
$$

$$
= x[xD_{n-2} + a_{n-1}] + a_n = x^2D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n = \cdots\cdots\cdots
$$

$$
= x^{n-2}D_2 + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n
$$

再将 $D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x + a_1 \end{vmatrix}$

习题 1—37

再将 $D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1 x + a_2$

习题 1—37

再将 $D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1 x + a_2$ 代入

$$x^{n-2} D_2 + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

即可.

习题 1—43

43. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

解: (方法一)原式

$$\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,2]{r_{i+1}-r_i}$$

习题 1—43

解: (方法一)原式

$$\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,2]{r_{i+1}-r_i}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_1}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

习题 1—43

$$\underline{\underline{c_1+c_i\times\frac{1}{n}}}$$

习题 1—43

$$\xlongequal{c_1+c_i\times\frac{1}{n}}\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按} c_1} \frac{1}{2}(n+1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1} \frac{1}{2}(n+1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-n)^{n-1}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1} \frac{1}{2}(n+1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-n)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(-1)^{\frac{n(n-1)}{n}}\frac{1}{2}(n+1)n^{n-1}.$$

(方法二)原式$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i}$

习题 1—43

$$(方法二)原式 \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,2]{r_{i+1}-r_i}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[i=n-1,n-2,\cdots,2]{r_{i+1}-r_i} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_1} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{c_1+c_i}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_1} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{c_1+c_i} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{c_i+c_1}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{c_i+c_1} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{c_i+c_1} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_{n-1}} \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{1+(n-1)}(-1) \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

习题 1—43

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{c_i+c_1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & -n\\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_{n-1}}\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{1+(n-1)}(-1)\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & -n\\ 0 & \cdots & -n & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ -n & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}_{n-1}$$

习题 1—43

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^n(-1)(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}(-n)^{n-2}$$

习题 1—43

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^n(-1)(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}(-n)^{n-2}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

第二章 矩阵

赵 燕 芬

Email: wangzhaoyanfen@gmail.com

武汉大学 数学与统计学院

2007 年 12 月 3 日

习题 2—21

21. 已知 $A = P\Lambda Q$, 其中

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad QP = I_2.$$

计算：$A^8, A^9, A^{2n}, A^{2n+1}$ $(n$为正整数$)$.

习题 2—21

21. 已知 $A = P\Lambda Q$, 其中

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad QP = I_2.$$

计算：$A^8, A^9, A^{2n}, A^{2n+1}$ $\quad (n$为正整数$)$.

解:

对正整数 m,

习题 2—21

21. 已知 $A = P\Lambda Q$, 其中

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad QP = I_2.$$

计算：$A^8, A^9, A^{2n}, A^{2n+1}$ $(n$为正整数$)$.

解:

对正整数 m,

$$A^m = (P\Lambda Q)(P\Lambda Q)\cdots(P\Lambda Q)$$

习题 2—21

21. 已知 $A = P\Lambda Q$, 其中

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad QP = I_2.$$

计算：$A^8, A^9, A^{2n}, A^{2n+1} \quad (n$为正整数$)$.

解:

对正整数 m,

$$A^m = (P\Lambda Q)(P\Lambda Q)\cdots(P\Lambda Q) = P\Lambda(QP)\Lambda(QP)\cdots(QP)\Lambda Q$$

习题 2—21

21. 已知 $A=P\Lambda Q$, 其中

$$P=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\quad \Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\quad Q=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix},\quad QP=I_2.$$

计算：$A^8, A^9, A^{2n}, A^{2n+1}$ $(n$为正整数).

解:

对正整数 m,

$$A^m=(P\Lambda Q)(P\Lambda Q)\cdots(P\Lambda Q)=P\Lambda(QP)\Lambda(QP)\cdots(QP)\Lambda Q$$

$$=P\Lambda I_2\Lambda I_2\cdots\Lambda Q$$

习题 2—21

21. 已知 $A = P\Lambda Q$, 其中

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad QP = I_2.$$

计算：$A^8, A^9, A^{2n}, A^{2n+1}$ $(n$为正整数$)$.

解:

对正整数 m,

$$A^m = (P\Lambda Q)(P\Lambda Q)\cdots(P\Lambda Q) = P\Lambda(QP)\Lambda(QP)\cdots(QP)\Lambda Q$$

$$= P\Lambda I_2 \Lambda I_2 \cdots \Lambda Q = P\Lambda^m Q$$

习题 2—21

当 m 为偶数时，

习题 2—21

当 m 为偶数时，$\Lambda^m = I_2$,

习题 2—21

当 m 为偶数时，$\Lambda^m = I_2$，当 m 为奇数时，

习题 2—21

当 m 为偶数时，$\Lambda^m = I_2$，当 m 为奇数时，$\Lambda^m = \Lambda$,

习题 2—21

当 m 为偶数时，$\Lambda^m = I_2$，当 m 为奇数时，$\Lambda^m = \Lambda$, 因此

习题 2—21

当 m 为偶数时，$\Lambda^m = I_2$，当 m 为奇数时，$\Lambda^m = \Lambda$, 因此

- $A^8 = A^{2n} = PI_2Q = PQ = I_2$

习题 2—21

当 m 为偶数时，$\Lambda^m = I_2$，当 m 为奇数时，$\Lambda^m = \Lambda$, 因此

- $A^8 = A^{2n} = PI_2Q = PQ = I_2$
- $A^9 = A^{2n+1} = P\Lambda Q$

习题 2—21

当 m 为偶数时，$\Lambda^m = I_2$，当 m 为奇数时，$\Lambda^m = \Lambda$, 因此

- $A^8 = A^{2n} = PI_2Q = PQ = I_2$
- $A^9 = A^{2n+1} = P\Lambda Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

习题 2—21

当 m 为偶数时，$\Lambda^m = I_2$，当 m 为奇数时，$\Lambda^m = \Lambda$, 因此

- $A^8 = A^{2n} = PI_2Q = PQ = I_2$
- $A^9 = A^{2n+1} = P\Lambda Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

习题 2—26

26. 求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

解:

设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,满足 $A^2 = O$, 即

习题 2—26

26. 求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

解:

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,满足 $A^2=O$, 即

$$A^2=$$

26. 求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

解:

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,满足 $A^2=O$, 即

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

习题 2—26

26. 求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

解:

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,满足 $A^2=O$, 即

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$$

习题 2—26

26. 求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

解:

设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,满足 $A^2 = O$, 即

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

习题 2—26

26. 求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

解:

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,满足 $A^2=O$, 即

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是有

$$\begin{cases} a^2+bc=0, & (1) \\ b(a+d)=0, & (2) \\ c(a+d)=0, & (3) \\ d^2+bc=0, & (4) \end{cases}$$

习题 2—26

26. 求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵.

解:

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,满足 $A^2=O$, 即

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是有

$$\begin{cases} a^2+bc=0, & (1) \\ b(a+d)=0, & (2) \\ c(a+d)=0, & (3) \\ d^2+bc=0, & (4) \end{cases}$$

习题 2—26

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0, & (1) \\ b(a+d) = 0, & (2) \\ c(a+d) = 0, & (3) \\ d^2 + bc = 0, & (4) \end{cases}$$

由 (1) 和 (4) 知 $a^2 = d^2$，即 $a = \pm d$.

习题 2—26

$$\begin{cases} a^2+bc=0, & (1) \\ b(a+d)=0, & (2) \\ c(a+d)=0, & (3) \\ d^2+bc=0, & (4) \end{cases}$$

由 (1) 和 (4) 知 $a^2=d^2$，即 $a=\pm d$.

当 $a=-d$ 时，(2) 和 (3) 成立.

习题 2—26

$$\begin{cases} a^2+bc=0, & (1) \\ b(a+d)=0, & (2) \\ c(a+d)=0, & (3) \\ d^2+bc=0, & (4) \end{cases}$$

由 (1) 和 (4) 知 $a^2=d^2$，即 $a=\pm d$.

当 $a=-d$ 时，(2) 和 (3) 成立.

当 $a^2=d^2=-bc$ 时，(1) 和 (4) 成立.

习题 2—26

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0, & (1) \\ b(a+d) = 0, & (2) \\ c(a+d) = 0, & (3) \\ d^2 + bc = 0, & (4) \end{cases}$$

由 (1) 和 (4) 知 $a^2 = d^2$，即 $a = \pm d$.

当 $a = -d$ 时，(2) 和 (3) 成立.

当 $a^2 = d^2 = -bc$ 时，(1) 和 (4) 成立.

因此所求矩阵为

习题 2—26

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0, & (1) \\ b(a+d) = 0, & (2) \\ c(a+d) = 0, & (3) \\ d^2 + bc = 0, & (4) \end{cases}$$

由 (1) 和 (4) 知 $a^2 = d^2$，即 $a = \pm d$.

当 $a = -d$ 时，(2) 和 (3) 成立.

当 $a^2 = d^2 = -bc$ 时，(1) 和 (4) 成立.

因此所求矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

习题 2—26

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0, & (1) \\ b(a+d) = 0, & (2) \\ c(a+d) = 0, & (3) \\ d^2 + bc = 0, & (4) \end{cases}$$

由 (1) 和 (4) 知 $a^2 = d^2$，即 $a = \pm d$.

当 $a = -d$ 时，(2) 和 (3) 成立.

当 $a^2 = d^2 = -bc$ 时，(1) 和 (4) 成立.

因此所求矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \qquad bc = -a^2$$

习题2—28

28. 求与 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$ 可交换的全体三阶矩阵.

解: 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}$ 满足 $AB=BA$,而

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}$$

习题2—28

28. 求与 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$ 可交换的全体三阶矩阵.

解: 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}$ 满足 $AB=BA$,而

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b+2d&c+2e\\0&b-2d&c-2e\end{pmatrix}$$

习题2—28

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b+2d & c+2e \\ 0 & b-2d & c-2e \end{pmatrix}$$

BA

习题2—28

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b+2d & c+2e \\ 0 & b-2d & c-2e \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

习题2—28

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b+2d&c+2e\\0&b-2d&c-2e\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b+c&2b-2c\\0&d+e&2d-2e\end{pmatrix}.$$

习题2—28

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b+2d&c+2e\\0&b-2d&c-2e\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b+c&2b-2c\\0&d+e&2d-2e\end{pmatrix}.$$

比较得 $c=2d$,于是所求矩阵为

习题2—28

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b+2d&c+2e\\0&b-2d&c-2e\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&d&e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b+c&2b-2c\\0&d+e&2d-2e\end{pmatrix}.$$

比较得 $c=2d$,于是所求矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&2d\\0&d&b-3d\end{pmatrix}$$.其中, a,b,d 为任意实数.

习题2—29

29. 已知 A 是对角元互不相等的 n 阶对角矩阵，即

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

当 $i \neq j$ 时， $a_i \neq a_j \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$. 证明：与 A 可交换的矩阵必是对角矩阵.

29. 已知 A 是对角元互不相等的 n 阶对角矩阵，即

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

当 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 证明：与 A 可交换的矩阵必是对角矩阵.

解:

设矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 与对角矩阵 A 可交换，即 $AB = BA$. 而

习题2—29

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

习题2—29

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \cdots & a_1 b_{1n} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

习题2-29

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

习题2-29

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} & \cdots & a_n b_{1n} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 b_{n1} & a_2 b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

习题2—29

由

$$\begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \cdots & a_1 b_{1n} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} & \cdots & a_n b_{1n} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 b_{n1} & a_2 b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

得

$$a_i b_{ij} = a_j b_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

习题2—29

由

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

得

$$a_ib_{ij} = a_jb_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

因为当 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j$ ，

习题2—29

由

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

得

$$a_ib_{ij} = a_jb_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

因为当 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j$，所以当 $i \neq j$ 时，$b_{ij} = 0$.

习题2—29

由

$$\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

得

$$a_ib_{ij} = a_jb_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

因为当 $i \neq j$ 时， $a_i \neq a_j$ ，所以当 $i \neq j$ 时， $b_{ij} = 0$.

即 B 为对角矩阵.

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2=O$, 证明$A=O$.

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2 = O$, 证明$A = O$.

证: 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2 = O$, 证明$A = O$.

证: 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 因为 A 是实对称矩阵，

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2=O$，证明$A=O$.

证: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，因为 A 是实对称矩阵，所以 $A=A^{\top}$，即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2 = O$, 证明$A = O$.

证: 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A = A^\top$,
即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

设 $A^2 = C = (c_{ij})_{n\times n}$,

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2=O$, 证明$A=O$.

证: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A=A^\top$ ，即

$$a_{ij}=a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

设 $A^2=C=(c_{ij})_{n\times n}$,由矩阵乘法的定义有：

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2=O$, 证明$A=O$.

证: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A=A^\top$,
即

$$a_{ij}=a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

设 $A^2=C=(c_{ij})_{n\times n}$,由矩阵乘法的定义有：

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki}$$

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2=O$, 证明$A=O$.

证: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A=A^{\top}$,
即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

设 $A^2=C=(c_{ij})_{n\times n}$,由矩阵乘法的定义有：

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2,\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2=O$, 证明$A=O$.

证: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A=A^{\top}$，即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

设 $A^2=C=(c_{ij})_{n\times n}$，由矩阵乘法的定义有：

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

即 $\quad 0=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2.$

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2 = O$, 证明$A = O$.

证: 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A = A^\top$,

即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

设 $A^2 = C = (c_{ij})_{n\times n}$,由矩阵乘法的定义有：

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

即 $0 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2.$ 从而

$$a_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n).$$

习题2—38

38. 设 A 是实对称矩阵，且 $A^2=O$, 证明$A=O$.

证: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 因为 A 是实对称矩阵，所以 $A=A^{\top}$,
即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

设 $A^2=C=(c_{ij})_{n\times n}$,由矩阵乘法的定义有：

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

即 $\quad 0=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2.\quad$ 从而

$$a_{ik}=0\quad (i,k=1,2,\cdots,n).$$

故 $\quad A=O.\quad$ 证毕.

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = O$,证明

- (1) A 和 $I - A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A + I$ 和 $A - 2I$ 不同时可逆.

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2I=O$,证明

- (1) A 和 $I-A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A+I$ 和 $A-2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2-A-2I=O$

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2I=O$,证明

- (1) A 和 $I-A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A+I$ 和 $A-2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2-A-2I=O \Rightarrow A^2-A=2I.$

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2I=O$,证明

- (1) A 和 $I-A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A+I$ 和 $A-2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2-A-2I=O \Rightarrow A^2-A=2I. \Rightarrow A(A-I)=2I.$

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = O$,证明

- (1) A 和 $I - A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A + I$ 和 $A - 2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2 - A - 2I = O \Rightarrow A^2 - A = 2I. \quad \Rightarrow \quad A(A - I) = 2I.$

$$\Rightarrow \frac{A(A-I)}{2} = I$$

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2I=O$,证明

- (1) A 和 $I-A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A+I$ 和 $A-2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2-A-2I=O \Rightarrow A^2-A=2I. \Rightarrow A(A-I)=2I.$

$$\Rightarrow \frac{A(A-I)}{2}=I$$

上式说明 A 和 $A-I$ 都可逆，

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = O$,证明

- (1) A 和 $I - A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A + I$ 和 $A - 2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2 - A - 2I = O \Rightarrow A^2 - A = 2I. \Rightarrow A(A - I) = 2I.$

$$\Rightarrow \frac{A(A-I)}{2} = I$$

上式说明 A 和 $A - I$ 都可逆，且

$$(A)^{-1} =$$

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2I=O$,证明

- (1) A 和 $I-A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A+I$ 和 $A-2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2-A-2I=O \Rightarrow A^2-A=2I. \Rightarrow A(A-I)=2I.$

$$\Rightarrow \frac{A(A-I)}{2}=I$$

上式说明 A 和 $A-I$ 都可逆，且

$$(A)^{-1}=\frac{1}{2}(A-I),$$

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2I=O$,证明

- (1) A 和 $I-A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A+I$ 和 $A-2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2-A-2I=O \Rightarrow A^2-A=2I. \Rightarrow A(A-I)=2I.$

$$\Rightarrow \frac{A(A-I)}{2}=I$$

上式说明 A 和 $A-I$ 都可逆，且

$$(A)^{-1}=\frac{1}{2}(A-I), \qquad (A-I)^{-1}=$$

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = O$,证明

- (1) A 和 $I - A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A + I$ 和 $A - 2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2 - A - 2I = O \Rightarrow A^2 - A = 2I. \quad \Rightarrow \quad A(A - I) = 2I.$

$$\Rightarrow \frac{A(A-I)}{2} = I$$

上式说明 A 和 $A - I$ 都可逆，且

$$(A)^{-1} = \frac{1}{2}(A - I), \qquad (A - I)^{-1} = \frac{A}{2}.$$

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2I=O$,证明

- (1) A 和 $I-A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A+I$ 和 $A-2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2-A-2I=O \Rightarrow A^2-A=2I. \Rightarrow A(A-I)=2I.$

$$\Rightarrow \frac{A(A-I)}{2}=I$$

上式说明 A 和 $A-I$ 都可逆，且

$$(A)^{-1}=\frac{1}{2}(A-I), \qquad (A-I)^{-1}=\frac{A}{2}.$$

从而 $I-A$ 也可逆，

习题2—45

45. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = O$,证明

- (1) A 和 $I - A$ 都可逆，并求它们的逆矩阵；
- (2) $A + I$ 和 $A - 2I$ 不同时可逆.

证: (1) $A^2 - A - 2I = O \Rightarrow A^2 - A = 2I. \quad \Rightarrow \quad A(A - I) = 2I.$

$$\Rightarrow \frac{A(A-I)}{2} = I$$

上式说明 A 和 $A - I$ 都可逆，且

$$(A)^{-1} = \frac{1}{2}(A - I), \qquad (A - I)^{-1} = \frac{A}{2}.$$

从而 $I - A$ 也可逆，且

$$(I - A)^{-1} = -\frac{A}{2}.$$

习题2—45

(2) 由 $A^2 - A - 2I = O$ 得：

习题2—45

(2) 由 $A^2 - A - 2I = O$ 得：

$$(A - 2I)(A + I) = O.$$

习题2—45

(2) 由 $A^2 - A - 2I = O$ 得：

$$(A - 2I)(A + I) = O.$$

$\Rightarrow$

习题2—45

(2) 由 $A^2 - A - 2I = O$ 得:

$$(A - 2I)(A + I) = O.$$

$\Rightarrow$

$$|A - 2I| \cdot |A + I| = 0.$$

习题2—45

(2) 由 $A^2 - A - 2I = O$ 得:

$$(A-2I)(A+I)=O.$$

$\Rightarrow$

$$|A-2I|\cdot|A+I|=0.$$

$\Rightarrow$ $|A-2I|=0$ 和 $|A+I|=0$ 至少有一个成立.

习题2—45

(2) 由 $A^2-A-2I=O$ 得：

$$(A-2I)(A+I)=O.$$

$\Rightarrow$

$$|A-2I|\cdot|A+I|=0.$$

$\Rightarrow$ $|A-2I|=0$ 和 $|A+I|=0$ 至少有一个成立.
所以 $A-2I$ 和 $A+I$ 不同时可逆.

习题2—46

46. 设方阵 A 满足 $A^2 - 2A + 4I = O$, 证明 $A + I$ 和 $A - 3I$ 都可逆，并求它们得逆矩阵.

习题2—46

46. 设方阵 A 满足 $A^2-2A+4I=O$, 证明 $A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆，并求它们得逆矩阵.

证: $A^2-2A+4I=O$

习题2—46

46. 设方阵 A 满足 $A^2 - 2A + 4I = O$, 证明 $A + I$ 和 $A - 3I$ 都可逆，并求它们得逆矩阵.

证: $A^2 - 2A + 4I = O \quad \Rightarrow$

习题2—46

46. 设方阵 A 满足 $A^2-2A+4I=O$, 证明 $A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆，并求它们得逆矩阵.

证: $A^2-2A+4I=O \Rightarrow A^2-2A+3I=-I$

习题2—46

46. 设方阵 A 满足 $A^2-2A+4I=O$, 证明 $A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆，并求它们得逆矩阵.

证: $A^2-2A+4I=O \Rightarrow A^2-2A+3I=-I \Rightarrow$

$$(A+I)(A-3I)=-I$$

习题2—46

46. 设方阵 A 满足 $A^2-2A+4I=O$, 证明 $A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆，并求它们得逆矩阵.

证: $A^2-2A+4I=O$ $\Rightarrow$ $A^2-2A+3I=-I$ $\Rightarrow$

$$(A+I)(A-3I)=-I$$

$\Rightarrow$

$$(A+I)(3I-A)=I$$

46. 设方阵 A 满足 $A^2-2A+4I=O$, 证明 $A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆，并求它们得逆矩阵.

证: $A^2-2A+4I=O \Rightarrow A^2-2A+3I=-I \Rightarrow$

$$(A+I)(A-3I)=-I$$

$\Rightarrow$

$$(A+I)(3I-A)=I$$

$\Rightarrow A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆,且

习题2—46

46. 设方阵 A 满足 $A^2-2A+4I=O$, 证明 $A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆，并求它们得逆矩阵.

证: $A^2-2A+4I=O \Rightarrow A^2-2A+3I=-I \Rightarrow$

$$(A+I)(A-3I)=-I$$

$\Rightarrow$

$$(A+I)(3I-A)=I$$

$\Rightarrow A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆,且

$$(A+I)^{-1}=3I-A,$$

习题2—46

46. 设方阵 A 满足 $A^2-2A+4I=O$, 证明 $A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆，并求它们得逆矩阵.

证: $A^2-2A+4I=O \Rightarrow A^2-2A+3I=-I \Rightarrow$

$$(A+I)(A-3I)=-I$$

$\Rightarrow$

$$(A+I)(3I-A)=I$$

$\Rightarrow A+I$ 和 $A-3I$ 都可逆,且

$$(A+I)^{-1}=3I-A,\quad (A-3I)^{-1}=-(A+I).$$

51. 用初等变换法求逆矩阵, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

51. 用初等变换法求逆矩阵, 其中$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

解:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

习题2—51

$$\xrightarrow[i=4,3,2]{r_i - r_{i-1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

习题2—51

$$\xrightarrow[i=4,3,2]{r_i-r_{i-1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

于是

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

习题2—52

52. 用初等变换法求逆矩阵，其中$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

习题2—52

52. 用初等变换法求逆矩阵, 其中$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & a^2 & a^3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

习题2—52

$$\xrightarrow[i=1,2,3]{r_i - r_{i+1} \times a} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

习题2—52

$$\xrightarrow[i=1,2,3]{r_i - r_{i+1}\times a} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

于是

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题2—59

59. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 是 $n \times 1$ 矩阵, 证明: $AB = O$ 的充要条件是 B 的每一列都是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解.

59. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 是 $n \times 1$ 矩阵, 证明： $AB = O$ 的充要条件是 B 的每一列都是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解.

证: 将 $n \times s$ 矩阵 B 和 $m \times s$ 矩阵 O 按列分块为：

习题2—59

59. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 是 $n \times 1$ 矩阵, 证明： $AB = O$ 的充要条件是 B 的每一列都是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解.

证: 将 $n \times s$ 矩阵 B 和 $m \times s$ 矩阵 O 按列分块为：

$$B = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s), \quad O = (\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2, \cdots, \mathbf{0}_s)$$

59. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 是 $n\times 1$ 矩阵, 证明: $AB=O$ 的充要条件是 B 的每一列都是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.

证: 将 $n\times s$ 矩阵 B 和 $m\times s$ 矩阵 O 按列分块为:

$$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s),\quad O=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

于是

$$A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$$

59. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 是 $n\times 1$ 矩阵, 证明： $AB=O$ 的充要条件是 B 的每一列都是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.

证: 将 $n\times s$ 矩阵 B 和 $m\times s$ 矩阵 O 按列分块为：

$$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s),\quad O=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

于是

$$A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=AB=O$$

59. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 是 $n\times 1$ 矩阵, 证明: $AB=O$ 的充要条件是 B 的每一列都是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.

证: 将 $n\times s$ 矩阵 B 和 $m\times s$ 矩阵 O 按列分块为:

$$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s),\quad O=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

于是

$$A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=AB=O=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

习题2—59

59. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 是 $n\times 1$ 矩阵, 证明： $AB=O$ 的充要条件是 B 的每一列都是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.

证: 将 $n\times s$ 矩阵 B 和 $m\times s$ 矩阵 O 按列分块为：

$$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s),\quad O=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

于是

$$A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=AB=O=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

即

$$(A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,A\boldsymbol{\beta}_s)=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

习题2—59

59. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 是 $n\times 1$ 矩阵, 证明： $AB=O$ 的充要条件是 B 的每一列都是齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.

证: 将 $n\times s$ 矩阵 B 和 $m\times s$ 矩阵 O 按列分块为：

$$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s),\quad O=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

于是

$$A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=AB=O=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

即

$$(A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,A\boldsymbol{\beta}_s)=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2,\cdots,\mathbf{0}_s)$$

习题2—59

从而有

$$A\boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{0} \qquad i = 1, 2, \cdots, s$$

从而有

$$A\boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{0} \qquad i = 1, 2, \cdots, s$$

这说明 $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$ 为齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解,结论成立.

习题2—60

60. 设 C 是 n 阶可逆矩阵， D 是 $3\times n$ 矩阵，且

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

试用分块乘法，求一个 $n\times(n+3)$ 矩阵 A ,使得$A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}=I_n$.

习题2—60

60. 设 C 是 n 阶可逆矩阵，D 是 $3\times n$ 矩阵，且

$$D=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

试用分块乘法，求一个 $n\times(n+3)$ 矩阵 A ,使得$A\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}=I_n$.

解: 设 $A=(A_1,\ A_2)$,其中 A_1 为 n 阶方阵, A_2 为 $n\times3$ 阶矩阵, 于是

习题2—60

60. 设 C 是 n 阶可逆矩阵， D 是 $3\times n$ 矩阵，且

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

试用分块乘法，求一个 $n\times(n+3)$ 矩阵 A ,使得$A\begin{pmatrix}C\\ D\end{pmatrix}=I_n.$

解: 设 $A=(A_1,\ A_2)$,其中 A_1 为 n 阶方阵, A_2 为 $n\times 3$ 阶矩阵, 于是

习题2－60

$$I_n = A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

习题2—60

$$I_n = A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (A_1,\ A_2)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

习题2—60

$$I_n = A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (A_1,\ A_2)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = A_1C + A_2D$$

习题2—60

$$I_n = A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (A_1,\ A_2)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = A_1C + A_2D$$

因为 C 可逆, 所以当 $A_1 = C^{-1}$ 且 $A_2D = O$ 时, 上式成立.

习题2—60

$$I_n = A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (A_1,\ A_2)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = A_1C + A_2D$$

因为 C 可逆, 所以当 $A_1 = C^{-1}$ 且 $A_2D = O$ 时, 上式成立.
注意到 D 中只有第一行为非零元,

习题2－60

$$I_n = A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (A_1,\ A_2)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = A_1C + A_2D$$

因为 C 可逆, 所以当 $A_1 = C^{-1}$ 且 $A_2D = O$ 时, 上式成立.

注意到 D 中只有第一行为非零元, 取 A_2 的第一列全为 0 ,则一定满足 $A_2D = O$.

习题2—60

$$I_n = A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (A_1,\ A_2)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = A_1C + A_2D$$

因为 C 可逆, 所以当 $A_1 = C^{-1}$ 且 $A_2D = O$ 时, 上式成立.

注意到 D 中只有第一行为非零元, 取 A_2 的第一列全为 0 ,则一定满足 $A_2D = O$.

于是所求

$$A = (C^{-1}, A_2)$$

习题2—60

$$I_n = A\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (A_1,\ A_2)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = A_1C + A_2D$$

因为 C 可逆, 所以当 $A_1 = C^{-1}$ 且 $A_2D = O$ 时, 上式成立.

注意到 D 中只有第一行为非零元, 取 A_2 的第一列全为 0 ,则一定满足 $A_2D = O$.

于是所求

$$A = (C^{-1}, A_2)$$

其中 A_2 的第一列全为 0 , 另两列为任意元素.

习题2—67

67. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 已知 $|A|=-2$, $|B|=3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|$; (2) $|-AB^T|$; (3) $|(AB)^{-1}|$: (4) $\det[(AB)^T]^{-1}$;

(5) $|-3A^*|$(A^*为 A 的伴随矩阵).

习题2—67

67. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 已知 $|A| = -2$, $|B| = 3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|$; (2) $|-AB^T|$; (3) $|(AB)^{-1}|$: (4) $\det[(AB)^T]^{-1}$;

(5) $|-3A^*|$(A^*为 A 的伴随矩阵).

解:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|$

习题2—67

67. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 已知 $|A| = -2$, $|B| = 3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|$; (2) $|-AB^T|$; (3) $|(AB)^{-1}|$: (4) $\det[(AB)^T]^{-1}$;

(5) $|-3A^*|$(A^*为 A 的伴随矩阵).

解:

$$(1)\quad |\frac{1}{2}AB^{-1}| = (\frac{1}{2})^4|A||B|^{-1}$$

习题2—67

67. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 已知 $|A|=-2$, $|B|=3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|$; (2) $|-AB^T|$; (3) $|(AB)^{-1}|$: (4) $\det[(AB)^T]^{-1}$;

(5) $|-3A^*|$(A^*为 A 的伴随矩阵).

解:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|=(\frac{1}{2})^4|A||B|^{-1}=\frac{1}{16}\times(-2)\times(\frac{1}{3})$

习题2—67

67. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 已知 $|A|=-2$, $|B|=3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|$; (2) $|-AB^T|$; (3) $|(AB)^{-1}|$: (4) $\det[(AB)^T]^{-1}$;

(5) $|-3A^*|$(A^*为 A 的伴随矩阵).

解:

$$(1)\quad |\frac{1}{2}AB^{-1}|=(\frac{1}{2})^4|A||B|^{-1}=\frac{1}{16}\times(-2)\times(\frac{1}{3})=-\frac{1}{24}.$$

习题2—67

67. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 已知 $|A|=-2$, $|B|=3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|$; (2) $|-AB^T|$; (3) $|(AB)^{-1}|$: (4) $\det[(AB)^T]^{-1}$;

(5) $|-3A^*|$(A^*为 A 的伴随矩阵).

解:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|=(\frac{1}{2})^4|A||B|^{-1}=\frac{1}{16}\times(-2)\times(\frac{1}{3})=-\frac{1}{24}$.

(2) $|-AB^T|$

习题2—67

67. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 已知 $|A|=-2$, $|B|=3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|$; (2) $|-AB^T|$; (3) $|(AB)^{-1}|$: (4) $\det[(AB)^T]^{-1}$;

(5) $|-3A^*|$(A^*为 A 的伴随矩阵).

解:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}| = (\frac{1}{2})^4|A||B|^{-1} = \frac{1}{16}\times(-2)\times(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{24}$.

(2) $|-AB^T| = (-1)^4|A||B^T|$

习题2—67

67. 设 A, B 均为 4 阶方阵, 已知 $|A|=-2$, $|B|=3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}AB^{-1}|$; (2) $|-AB^T|$; (3) $|(AB)^{-1}|$: (4) $\det[(AB)^T]^{-1}$;

(5) $|-3A^*|$(A^*为 A 的伴随矩阵).

解:

$$(1)\quad |\frac{1}{2}AB^{-1}|=(\frac{1}{2})^4|A||B|^{-1}=\frac{1}{16}\times(-2)\times(\frac{1}{3})=-\frac{1}{24}.$$

$$(2)\ |-AB^T|=(-1)^4|A||B^T|=|A||B|=(-2)\times 3=-6.$$

习题2—67

(3) $|(AB)^{-1}|$

习题2—67

(3) $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}|$

习题2—67

(3) $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B|^{-1}|A|^{-1}$

习题2—67

(3) $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B|^{-1}|A|^{-1} = \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}.$

习题2—67

$$(3)\ |(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B|^{-1}|A|^{-1} = \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}.$$

$$(4)\det[(AB)^T]^{-1} = |[(AB)^T]^{-1}|$$

习题2—67

(3) $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B|^{-1}|A|^{-1} = \dfrac{1}{3} \times (-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{6}.$

(4)$\det[(AB)^T]^{-1} = |[(AB)^T]^{-1}| = |[(AB)^{-1}]^T|$

习题2—67

$$(3)\ |(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B|^{-1}|A|^{-1} = \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}.$$

$$(4)\det[(AB)^T]^{-1} = |[(AB)^T]^{-1}| = |[(AB)^{-1}]^T| = |(AB)^{-1}| = -\frac{1}{6}.$$

习题2—67

(3) $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B|^{-1}|A|^{-1} = \dfrac{1}{3} \times (-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{6}.$

(4)$\det[(AB)^T]^{-1} = |[(AB)^T]^{-1}| = |[(AB)^{-1}]^T| = |(AB)^{-1}| = -\dfrac{1}{6}.$

(5) $|-3A^*|$

习题2—67

(3) $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B|^{-1}|A|^{-1} = \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}.$

(4)$\det[(AB)^T]^{-1} = |[(AB)^T]^{-1}| = |[(AB)^{-1}]^T| = |(AB)^{-1}| = -\frac{1}{6}.$

(5) $|-3A^*| = (-3)^4|A|^{4-1}$

习题2—67

(3) $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B|^{-1}|A|^{-1} = \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}.$

(4)$\det[(AB)^T]^{-1} = |[(AB)^T]^{-1}| = |[(AB)^{-1}]^T| = |(AB)^{-1}| = -\frac{1}{6}.$

(5) $|-3A^*| = (-3)^4|A|^{4-1} = 81 \times (-8) = -648.$

习题2—68

68. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,\frac{1}{2},0)^T$，$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，求 $|A^{100}|$.

习题2—68

68. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,\frac{1}{2},0)^T$，$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，求 $|A^{100}|$.

解:

$$|A|=|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T|$$

习题2—68

68. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,\frac{1}{2},0)^T$，$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，求 $|A^{100}|$.

解:

$$|A|=|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T|=\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}(-1,\frac{1}{2},0)\right|$$

习题2—68

68. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,\frac{1}{2},0)^T$，$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，求 $|A^{100}|$.

解:

$$|A|=|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T|=\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}(-1,\frac{1}{2},0)\right|=\begin{vmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\2&-1&0\\-3&\frac{3}{2}&0\end{vmatrix}$$

习题2—68

68. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,\frac{1}{2},0)^T$，$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，求 $|A^{100}|$.

解:

$$|A|=|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T|=\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\left(-1,\frac{1}{2},0\right)\right|=\begin{vmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\2&-1&0\\-3&\frac{3}{2}&0\end{vmatrix}=0$$

习题2—68

68. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,\frac{1}{2},0)^T$, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 求 $|A^{100}|$.

解:

$$|A|=|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T|=\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\left(-1,\frac{1}{2},0\right)\right|=\begin{vmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\2&-1&0\\-3&\frac{3}{2}&0\end{vmatrix}=0$$

因此

$$|A^{100}|=|A|^{100}=0$$

习题2—72

72. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, $B=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $A=I-B$. 证明

- (1) $B^k=3^{k-1}B(k\geq 2)$为正整数;
- (2) $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆;
- (3) A 及 $A+I$ 均可逆.

习题2—72

72. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, $B=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $A=I-B$. 证明

- (1) $B^k=3^{k-1}B(k\geq 2)$为正整数;
- (2) $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆;
- (3) A 及 $A+I$ 均可逆.

证: (1)因为 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, 所以

习题2—72

72. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, $B=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $A=I-B$. 证明

- (1) $B^k=3^{k-1}B(k\geq 2)$为正整数;
- (2) $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆;
- (3) A 及 $A+I$ 均可逆.

证: (1)因为 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, 所以 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=3$, 于是

习题2—72

72. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, $B=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $A=I-B$. 证明

- (1) $B^k=3^{k-1}B(k\geq 2)$为正整数;
- (2) $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆;
- (3) A 及 $A+I$ 均可逆.

证: (1)因为 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, 所以 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=3$, 于是

$$B^k=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)$$

习题2—72

72. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，已知 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$，$B=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，$A=I-B$. 证明

- (1) $B^k=3^{k-1}B(k\geq 2)$为正整数;
- (2) $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆;
- (3) A 及 $A+I$ 均可逆.

证: (1)因为 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, 所以 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=3$, 于是

$$B^k=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})^{k-1}\boldsymbol{\beta}^T$$

72. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, $B=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $A=I-B$. 证明

- (1) $B^k=3^{k-1}B(k\geq 2)$为正整数;
- (2) $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆;
- (3) A 及 $A+I$ 均可逆.

证: (1)因为 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, 所以 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=3$, 于是

$$B^k=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})^{k-1}\boldsymbol{\beta}^T$$

$$=3^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$$

习题2—72

72. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, $B=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $A=I-B$. 证明

- (1) $B^k=3^{k-1}B(k\geq 2)$为正整数;
- (2) $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆;
- (3) A 及 $A+I$ 均可逆.

证: (1)因为 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, 所以 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=3$, 于是

$$B^k=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})^{k-1}\boldsymbol{\beta}^T$$

$$=3^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=3^{k-1}B.$$

习题2—72

72. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, $B=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $A=I-B$. 证明

- (1) $B^k=3^{k-1}B(k\geq 2)$为正整数;
- (2) $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆;
- (3) A 及 $A+I$ 均可逆.

证: (1)因为 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=3$, 所以 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=3$, 于是

$$B^k=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})^{k-1}\boldsymbol{\beta}^T$$

$$=3^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=3^{k-1}B.$$

习题2—72

(2) 因为 $A = I - B$，所以

习题2—72

(2) 因为 $A=I-B$，所以

$$(A+2I)(A-I)$$

习题2—72

(2) 因为 $A=I-B$，所以

$$(A+2I)(A-I)=(3I-B)(-B)$$

习题2—72

(2) 因为 $A=I-B$，所以

$$(A+2I)(A-I)=(3I-B)(-B)=(B^2-3B)=O$$

从而

$$|A+2I||A-I|=0$$

即

$$|A+2I|=0 \;\; 或 \;\; |A-I|=0$$

习题2—72

(2) 因为 $A = I - B$，所以

$$(A+2I)(A-I) = (3I-B)(-B) = (B^2-3B) = O$$

从而

$$|A+2I||A-I| = 0$$

即

$$|A+2I| = 0 \quad 或 \quad |A-I| = 0$$

故 $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆.

习题2—72

(2) 因为 $A = I - B$，所以

$$(A+2I)(A-I) = (3I-B)(-B) = (B^2-3B) = O$$

从而

$$|A+2I||A-I| = 0$$

即

$$|A+2I| = 0 \quad 或 \quad |A-I| = 0$$

故 $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆.

(3) 因为

$$A(A+I) = (I-B)(2I-B)$$

习题2—72

(2) 因为 $A=I-B$，所以

$$(A+2I)(A-I)=(3I-B)(-B)=(B^2-3B)=O$$

从而

$$|A+2I||A-I|=0$$

即

$$|A+2I|=0 \ \ 或 \ \ |A-I|=0$$

故 $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆.

(3) 因为

$$A(A+I)=(I-B)(2I-B)=2I-3B-B^2=2I$$

即

习题2—72

(2) 因为 $A=I-B$，所以

$$(A+2I)(A-I)=(3I-B)(-B)=(B^2-3B)=O$$

从而

$$|A+2I||A-I|=0$$

即

$$|A+2I|=0 \quad \text{或} \quad |A-I|=0$$

故 $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆.

(3) 因为

$$A(A+I)=(I-B)(2I-B)=2I-3B-B^2=2I$$

即

$$\frac{1}{2}A(A+I)=I$$

习题2—72

(2) 因为 $A=I-B$，所以

$$(A+2I)(A-I)=(3I-B)(-B)=(B^2-3B)=O$$

从而

$$|A+2I||A-I|=0$$

即

$$|A+2I|=0 \quad \text{或} \quad |A-I|=0$$

故 $(A+2I)$ 或 $A-I$ 不可逆.

(3) 因为

$$A(A+I)=(I-B)(2I-B)=2I-3B-B^2=2I$$

即

$$\frac{1}{2}A(A+I)=I$$

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A|>0$, 已知 $A^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 B.

习题2—73

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A|>0$, 已知 $A^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 B.

解: 因为 $|A|>0$, 所以

习题2—73

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A|>0$, 已知 $A^*=\operatorname{diag}(1,-1,-4)$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 B.

解: 因为 $|A|>0$, 所以

$$|A^*|=|\operatorname{diag}(1,-1,-4)|=4=$$

习题2—73

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A|>0$, 已知 $A^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 B.

解: 因为 $|A|>0$, 所以

$$|A^*|=|\mathrm{diag}(1,-1,-4)|=4=|A|^2$$

从而 $|A|=2$, 于是

习题2—73

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A| > 0$, 已知 $A^* = \mathrm{diag}(1, -1, -4)$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$, 求 B.

解: 因为 $|A| > 0$, 所以

$$|A^*| = |\mathrm{diag}(1, -1, -4)| = 4 = |A|^2$$

从而 $|A| = 2$, 于是

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

习题2—73

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A|>0$, 已知 $A^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 B.

解: 因为 $|A|>0$, 所以

$$|A^*|=|\mathrm{diag}(1,-1,-4)|=4=|A|^2$$

从而 $|A|=2$, 于是

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{2}\mathrm{diag}(1,-1,-4)=\mathrm{diag}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2)$$

习题2—73

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A|>0$, 已知 $A^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 B.

解: 因为 $|A|>0$, 所以

$$|A^*|=|\mathrm{diag}(1,-1,-4)|=4=|A|^2$$

从而 $|A|=2$, 于是

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{2}\mathrm{diag}(1,-1,-4)=\mathrm{diag}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2)$$

进一步得到

习题2—73

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A|>0$, 已知 $A^*=\text{diag}(1,-1,-4)$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 B.

解: 因为 $|A|>0$, 所以

$$|A^*|=|\text{diag}(1,-1,-4)|=4=|A|^2$$

从而 $|A|=2$, 于是

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{2}\text{diag}(1,-1,-4)=\text{diag}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2)$$

进一步得到

$$A=\text{diag}(2,-2,-\frac{1}{2})$$

习题2—73

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A|>0$, 已知 $A^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 B.

解: 因为 $|A|>0$, 所以

$$|A^*|=|\mathrm{diag}(1,-1,-4)|=4=|A|^2$$

从而 $|A|=2$, 于是

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{2}\mathrm{diag}(1,-1,-4)=\mathrm{diag}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2)$$

进一步得到

$$A=\mathrm{diag}(2,-2,-\frac{1}{2})$$

$$A-I=\mathrm{diag}(1,-3,-\frac{3}{2})$$

习题2—73

73. 设 A 为 3 阶方阵, $|A|>0$, 已知 $A^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求 B.

解: 因为 $|A|>0$, 所以

$$|A^*|=|\mathrm{diag}(1,-1,-4)|=4=|A|^2$$

从而 $|A|=2$, 于是

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{2}\mathrm{diag}(1,-1,-4)=\mathrm{diag}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2)$$

进一步得到

$$A=\mathrm{diag}(2,-2,-\frac{1}{2})$$

$$A-I=\mathrm{diag}(1,-3,-\frac{3}{2})$$

习题2—73

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$$

习题2—73

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I \Rightarrow (A - I)BA^{-1} = 3I$$

习题2—73

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I \Rightarrow (A - I)BA^{-1} = 3I$$

$$\Rightarrow B = 3(A - I)^{-1}A$$

习题2—73

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I \Rightarrow (A - I)BA^{-1} = 3I$$

$$\Rightarrow B = 3(A - I)^{-1}A = 3\text{diag}(1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})\text{diag}(2, -2, -\frac{1}{2})$$

习题2—73

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I \Rightarrow (A - I)BA^{-1} = 3I$$

$$\Rightarrow B = 3(A - I)^{-1}A = 3\mathrm{diag}(1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})\mathrm{diag}(2, -2, -\frac{1}{2}) = \mathrm{diag}(6, 2, 1).$$

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足： $A^T A = I$ 和 $|A| < 0$, 求 $|A + I|$.

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足：$A^TA = I$ 和 $|A| < 0$, 求 $|A+I|$.

解:

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足：$A^TA = I$ 和 $|A| < 0$, 求 $|A+I|$.

解:

$$A^TA = I$$

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足：$A^TA = I$ 和 $|A| < 0$, 求 $|A+I|$.

解:

$$A^TA = I \Rightarrow |A^T||A| = |A|^2 = 1$$

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足： $A^TA=I$ 和 $|A|<0$, 求 $|A+I|$.

解:

$$A^TA=I\Rightarrow\ |A^T||A|=|A|^2=1$$

因为 $|A|<0$, 所以

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足：$A^TA = I$ 和 $|A| < 0$, 求 $|A+I|$.

解:

$$A^TA = I \Rightarrow |A^T||A| = |A|^2 = 1$$

因为 $|A| < 0$, 所以 $|A| = -1$

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足：$A^TA = I$ 和 $|A| < 0$, 求 $|A+I|$.

解:

$$A^TA = I \Rightarrow |A^T||A| = |A|^2 = 1$$

因为 $|A| < 0$, 所以 $|A| = -1$

$$|A+I|$$

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足： $A^TA = I$ 和 $|A| < 0$, 求 $|A+I|$.

解:

$$A^TA = I \Rightarrow |A^T||A| = |A|^2 = 1$$

因为 $|A| < 0$, 所以 $|A| = -1$

$$|A+I| = |A + A^TA|$$

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足：$A^TA = I$ 和 $|A| < 0$, 求 $|A+I|$.

解:

$$A^TA = I \Rightarrow |A^T||A| = |A|^2 = 1$$

因为 $|A| < 0$, 所以 $|A| = -1$

$$|A+I| = |A + A^TA| = |(I + A^T)A|$$

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足：$A^TA=I$ 和 $|A|<0$, 求 $|A+I|$.

解:

$$A^TA=I \Rightarrow |A^T||A|=|A|^2=1$$

因为 $|A|<0$, 所以 $|A|=-1$

$$|A+I|=|A+A^TA|=|(I+A^T)A|$$

$$=|(I+A)^T||A|$$

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足： $A^TA=I$ 和 $|A|<0$, 求 $|A+I|$.

解:

$$A^TA=I \Rightarrow |A^T||A|=|A|^2=1$$

因为 $|A|<0$, 所以 $|A|=-1$

$$|A+I|=|A+A^TA|=|(I+A^T)A|$$

$$=|(I+A)^T||A|=|I+A||A|$$

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足： $A^TA=I$ 和 $|A|<0$, 求 $|A+I|$.

解:

$$A^TA=I \Rightarrow |A^T||A|=|A|^2=1$$

因为 $|A|<0$, 所以 $|A|=-1$

$$|A+I|=|A+A^TA|=|(I+A^T)A|$$

$$=|(I+A)^T||A|=|I+A||A|=-|A+I|$$

习题2—74

74. 设 n 阶矩阵 A 满足：$A^T A = I$ 和 $|A| < 0$, 求 $|A + I|$.

解:

$$A^T A = I \Rightarrow |A^T||A| = |A|^2 = 1$$

因为 $|A| < 0$, 所以 $|A| = -1$

$$|A + I| = |A + A^T A| = |(I + A^T)A|$$

$$= |(I + A)^T||A| = |I + A||A| = -|A + I|$$

故

$$|A + I| = 0$$

习题2—75

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1}=A^T, |A|=1$, 求 $|I-A|$.

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1}=A^T, |A|=1$, 求 $|I-A|$.

解:

$$|I-A| =$$

习题2—75

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1}=A^T, |A|=1$, 求 $|I-A|$.

解:

$$|I-A|=|AA^{-1}-A|$$

习题2—75

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1} = A^T, |A| = 1$, 求 $|I - A|$.

解:

$$|I - A| = |AA^{-1} - A| = |A||A^{-1} - I|$$

习题2—75

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1} = A^T, |A| = 1$, 求 $|I - A|$.

解:

$$|I - A| = |AA^{-1} - A| = |A||A^{-1} - I|$$

$$= |A^T - I|$$

习题2—75

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1} = A^T, |A| = 1$, 求 $|I - A|$.

解:

$$|I - A| = |AA^{-1} - A| = |A||A^{-1} - I|$$

$$= |A^T - I| = |(A - I)^T|$$

习题2—75

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1}=A^T, |A|=1$, 求 $|I-A|$.

解:

$$|I-A|=|AA^{-1}-A|=|A||A^{-1}-I|$$

$$=|A^T-I|=|(A-I)^T|=|A-I|$$

习题2—75

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1}=A^T, |A|=1$, 求 $|I-A|$.

解:

$$|I-A|=|AA^{-1}-A|=|A||A^{-1}-I|$$

$$=|A^T-I|=|(A-I)^T|=|A-I|$$

因为 A 为奇数阶矩阵,所以

习题2—75

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1} = A^T, |A| = 1$, 求 $|I - A|$.

解:

$$|I - A| = |AA^{-1} - A| = |A||A^{-1} - I|$$

$$= |A^T - I| = |(A - I)^T| = |A - I|$$

因为 A 为奇数阶矩阵,所以

$$|I - A| = |A - I|$$

习题2—75

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1}=A^T, |A|=1$, 求 $|I-A|$.

解:

$$|I-A|=|AA^{-1}-A|=|A||A^{-1}-I|$$

$$=|A^T-I|=|(A-I)^T|=|A-I|$$

因为 A 为奇数阶矩阵,所以

$$|I-A|=|A-I|=|-(I-A)|=-|I-A|$$

习题2—75

75. 设 A 为奇数阶可逆矩阵，且 $A^{-1} = A^T, |A| = 1$, 求 $|I - A|$.

解:

$$|I - A| = |AA^{-1} - A| = |A||A^{-1} - I|$$

$$= |A^T - I| = |(A - I)^T| = |A - I|$$

因为 A 为奇数阶矩阵,所以

$$|I - A| = |A - I| = |-(I - A)| = -|I - A|$$

故

$$|I - A| = 0.$$

习题2—77

77. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T, k$ 为正整数， $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 求 $|kI-A^n|$.

77. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T, k$ 为正整数， $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 求 $|kI-A^n|$.

解:

$$A^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)$$

77. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T, k$ 为正整数， $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 求 $|kI-A^n|$.

解:

$$A^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^T=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

于是

$$|kI-A^n|=\begin{vmatrix}k-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&k&0\\2^{n-1}&0&k-2^{n-1}\end{vmatrix}$$

习题2—77

77. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T, k$ 为正整数， $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 求 $|kI-A^n|$.

解:

$$A^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^T=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

于是

$$|kI-A^n|=\begin{vmatrix}k-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&k&0\\2^{n-1}&0&k-2^{n-1}\end{vmatrix}\overset{\text{按}r_2}{\underset{\text{展开}}{=\!=\!=}}$$

77. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T, k$ 为正整数， $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 求 $|kI-A^n|$.

解:

$$A^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^T=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

于是

$$|kI-A^n|=\begin{vmatrix}k-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&k&0\\2^{n-1}&0&k-2^{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_2}k\begin{vmatrix}k-2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&k-2^{n-1}\end{vmatrix}$$

77. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T, k$ 为正整数， $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 求 $|kI-A^n|$.

解:

$$A^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^T=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

于是

$$|kI-A^n|=\begin{vmatrix}k-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&k&0\\2^{n-1}&0&k-2^{n-1}\end{vmatrix}\overset{\text{按}r_2}{\underset{\text{展开}}{=\!=\!=}}k\begin{vmatrix}k-2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&k-2^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=k^2(k-2^n).$$

习题2—80

80. 设 B 是元素全为 1 的 n $(n \geq 2)$ 阶矩阵，证明：

$$(1)\ B^k = n^{k-1}B\ (k \geq 2\text{为正整数});\qquad (2)\ (I-B)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}B.$$

80. 设 B 是元素全为 1 的 n $(n \geq 2)$ 阶矩阵，证明：

$$(1)\ B^k = n^{k-1}B\ (k \geq 2\text{为正整数}); \qquad (2)\ (I-B)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}B.$$

证: (1) 设 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)$, 则

习题2—80

80. 设 B 是元素全为 1 的 n $(n \geq 2)$ 阶矩阵，证明：

$$(1)\ B^k = n^{k-1}B\ (k \geq 2\text{为正整数}); \qquad (2)\ (I-B)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}B.$$

证: (1) 设 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)$, 则 $B = \alpha^{\mathsf{T}}\alpha$,

习题2—80

80. 设 B 是元素全为 1 的 n $(n \geq 2)$ 阶矩阵，证明：

(1) $B^k = n^{k-1}B$ $(k \geq 2$为正整数$)$; (2) $(I-B)^{-1} = I - \dfrac{1}{n-1}B.$

证: (1) 设 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)$, 则 $B = \alpha^{\mathsf{T}}\alpha$, 于是

$$B^k = (\alpha^{\mathsf{T}}\alpha)(\alpha^{\mathsf{T}}\alpha)\cdots(\alpha^{\mathsf{T}}\alpha)$$

习题2—80

80. 设 B 是元素全为 1 的 n $(n \geq 2)$ 阶矩阵，证明：

$$(1)\ B^k = n^{k-1}B\ (k \geq 2\text{为正整数}); \qquad (2)\ (I-B)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}B.$$

证: (1) 设 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)$, 则 $B = \alpha^{\mathsf{T}}\alpha$, 于是

$$B^k = (\alpha^{\mathsf{T}}\alpha)(\alpha^{\mathsf{T}}\alpha)\cdots(\alpha^{\mathsf{T}}\alpha) = \alpha^{\mathsf{T}}(\alpha\alpha^{\mathsf{T}})(\alpha\alpha^{\mathsf{T}})\cdots(\alpha\alpha^{\mathsf{T}})\alpha.$$

习题2—80

80. 设 B 是元素全为 1 的 n $(n \geq 2)$ 阶矩阵，证明：

$$(1)\ B^k = n^{k-1}B\ (k \geq 2\text{为正整数});\qquad (2)\ (I-B)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}B.$$

证: (1) 设 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)$, 则 $B = \alpha^\mathsf{T}\alpha$, 于是

$$B^k = (\alpha^\mathsf{T}\alpha)(\alpha^\mathsf{T}\alpha)\cdots(\alpha^\mathsf{T}\alpha) = \alpha^\mathsf{T}(\alpha\alpha^\mathsf{T})(\alpha\alpha^\mathsf{T})\cdots(\alpha\alpha^\mathsf{T})\alpha.$$

注意到 $\alpha\alpha^\mathsf{T} = (1, 1, \cdots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

80. 设 B 是元素全为 1 的 n $(n \geq 2)$ 阶矩阵，证明：

$$(1)\ B^k = n^{k-1}B\ (k \geq 2\text{为正整数}); \qquad (2)\ (I-B)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}B.$$

证: (1) 设 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)$, 则 $B = \alpha^{\mathsf{T}}\alpha$, 于是

$$B^k = (\alpha^{\mathsf{T}}\alpha)(\alpha^{\mathsf{T}}\alpha)\cdots(\alpha^{\mathsf{T}}\alpha) = \alpha^{\mathsf{T}}(\alpha\alpha^{\mathsf{T}})(\alpha\alpha^{\mathsf{T}})\cdots(\alpha\alpha^{\mathsf{T}})\alpha.$$

注意到 $\alpha\alpha^{\mathsf{T}} = (1, 1, \cdots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$

习题2－80

所以当 $k \geq 2$ 时，有

$$\begin{aligned}
B^k &= \alpha^{\mathsf{T}}(\alpha\alpha^{\mathsf{T}})(\alpha\alpha^{\mathsf{T}})\cdots(\alpha\alpha^{\mathsf{T}})\alpha \\
&= \alpha^{\mathsf{T}} \cdot n \cdot n \cdots n \cdot \alpha \\
&= n^{k-1}\alpha^{\mathsf{T}}\alpha \\
&= n^{k-1}B.
\end{aligned}$$

习题2—80

(2) 因为由 (1) 的结果可得：

习题2—80

(2) 因为由 (1) 的结果可得：

$$
\begin{aligned}
(I-B)(I-\frac{1}{n-1}B) &= I-\frac{1}{n-1}B-B+\frac{1}{n-1}B^2 \\
&= I-\frac{n}{n-1}B+\frac{1}{n-1}nB \\
&= I.
\end{aligned}
$$

习题2—80

(2) 因为由 (1) 的结果可得：

$$\begin{aligned}(I-B)(I-\frac{1}{n-1}B) &= I-\frac{1}{n-1}B-B+\frac{1}{n-1}B^2\\ &= I-\frac{n}{n-1}B+\frac{1}{n-1}nB\\ &= I.\end{aligned}$$

所以

$$(I-B)^{-1}=I-\frac{1}{n-1}B.$$

习题2—81

81.设A为3阶实对称矩阵，且主对角元全为$0, B=\mathrm{diag}(0,1,2)$，求使 $AB+I$ 为可逆矩阵的条件.

习题2—81

81.设A为3阶实对称矩阵，且主对角元全为$0, B = \mathrm{diag}(0,1,2)$，求使 $AB+I$ 为可逆矩阵的条件.

解: 依题意可设$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$,

习题2—81

81.设A为3阶实对称矩阵，且主对角元全为$0, B=\mathrm{diag}(0,1,2)$,求使 $AB+I$ 为可逆矩阵的条件.

解: 依题意可设$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$,那么

$$AB+I=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题2—81

81.设A为3阶实对称矩阵，且主对角元全为$0, B=\mathrm{diag}(0,1,2)$,求使 $AB+I$ 为可逆矩阵的条件.

解: 依题意可设$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$,那么

$$AB+I=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 0 & 2a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题2—81

81.设A为3阶实对称矩阵，且主对角元全为$0, B = \mathrm{diag}(0,1,2)$，求使 $AB+I$ 为可逆矩阵的条件.

解: 依题意可设$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$,那么

$$AB+I = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 0 & 2a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 1 & 2a_{23} \\ 0 & a_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

习题2—81

81.设A为3阶实对称矩阵，且主对角元全为$0, B = \text{diag}(0,1,2)$,求使 $AB+I$ 为可逆矩阵的条件.

解: 依题意可设$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$,那么

$$AB+I = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 0 & 2a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 1 & 2a_{23} \\ 0 & a_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

习题2—81

那么

$$|AB+I| = 1 - 2a_{23}^2$$

习题2—81

那么

$$|AB+I| = 1 - 2a_{23}^2$$

由矩阵可逆的充要条件可得：$AB+I$ 为可逆矩阵的充要条件是：

习题2—81

那么

$$|AB+I| = 1 - 2a_{23}^2$$

由矩阵可逆的充要条件可得：$AB+I$ 为可逆矩阵的充要条件是：

$$2a_{23}^2 \neq 1$$

习题2—81

那么

$$|AB+I| = 1 - 2a_{23}^2$$

由矩阵可逆的充要条件可得：$AB+I$ 为可逆矩阵的充要条件是：

$$2a_{23}^2 \neq 1$$

即

$$a_{23} \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

习题2—82

82. 已知 P, A 均为可逆矩阵，且
$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|A+2I|$.

习题2—82

82. 已知 P, A 均为可逆矩阵，且

$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|A + 2I|$.

解:

$$|A + 2I|$$

习题2—82

82. 已知 P, A 均为可逆矩阵，且

$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|A + 2I|$.

解:

$$|A + 2I| = |P^{-1}||A + 2I||P|$$

习题2—82

82. 已知 P, A 均为可逆矩阵，且

$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|A+2I|$.

解:

$$|A+2I| = |P^{-1}||A+2I||P| = |P^{-1}AP+2I|$$

习题2－82

82. 已知 P, A 均为可逆矩阵，且

$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ （有 r 个 1), 试计算 $|A+2I|$.

解:

$$|A+2I| = |P^{-1}||A+2I||P| = |P^{-1}AP+2I|$$

$$= |\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)+\mathrm{diag}(2,2,\cdots,2)|$$

习题2—82

82. 已知 P, A 均为可逆矩阵，且

$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|A + 2I|$.

解:

$$|A + 2I| = |P^{-1}||A + 2I||P| = |P^{-1}AP + 2I|$$

$$= |\mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0) + \mathrm{diag}(2, 2, \cdots, 2)|$$

$$= |\mathrm{diag}(3, 3, \cdots, 3, 2, \cdots, 2)|$$

习题2—82

82. 已知 P, A 均为可逆矩阵，且
$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ （有 r 个 1), 试计算 $|A+2I|$.

解:

$$|A+2I| = |P^{-1}||A+2I||P| = |P^{-1}AP+2I|$$

$$= |\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)+\mathrm{diag}(2,2,\cdots,2)|$$

$$= |\mathrm{diag}(3,3,\cdots,3,2,\cdots,2)|$$

其中有 r 个 3 , $n-r$ 个 1 ,所以

习题2—82

82. 已知 P, A 均为可逆矩阵，且

$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|A+2I|$.

解:

$$|A+2I| = |P^{-1}||A+2I||P| = |P^{-1}AP+2I|$$

$$= |\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)+\mathrm{diag}(2,2,\cdots,2)|$$

$$= |\mathrm{diag}(3,3,\cdots,3,2,\cdots,2)|$$

其中有 r 个 3 , $n-r$ 个 1 ,所以

$$|A+2I| = 3^r \cdot 2^{n-r}.$$

习题2—83

83. 设 A 为 n $(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵，证明：

$$(1)\ (A^{\star})^{-1} = (A^{-1})^{\star}; \quad (2)\ (A^{\mathsf{T}})^{\star} = (A^{\star})^{\mathsf{T}};$$

$$(3)\ (kA)^{\star} = k^{n-1}A^{\star} \quad k\text{为非零整数}.$$

习题2—83

83. 设 A 为 n $(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵，证明：

$$(1)\ (A^{\star})^{-1} = (A^{-1})^{\star};\quad (2)\ (A^{\mathsf{T}})^{\star} = (A^{\star})^{\mathsf{T}};$$

$$(3)\ (kA)^{\star} = k^{n-1}A^{\star}\quad k\text{为非零整数}.$$

解: 利用 $A^{-1} = \dfrac{A^{\star}}{|A|}$ 和 $A^{\star} = |A|A^{-1}$ 可得：

习题2—83

83. 设 A 为 n $(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵，证明：

$$(1)\ (A^\star)^{-1} = (A^{-1})^\star;\quad (2)\ (A^\mathsf{T})^\star = (A^\star)^\mathsf{T};$$

$$(3)\ (kA)^\star = k^{n-1}A^\star \quad k\text{为非零整数}.$$

解: 利用 $A^{-1} = \dfrac{A^\star}{|A|}$ 和 $A^\star = |A|A^{-1}$ 可得：

$$(1)\ (A^{-1})^\star$$

习题2—83

83. 设 A 为 n $(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵，证明：

$$(1)\ (A^{\star})^{-1} = (A^{-1})^{\star};\quad (2)\ (A^{\mathsf{T}})^{\star} = (A^{\star})^{\mathsf{T}};$$

$$(3)\ (kA)^{\star} = k^{n-1}A^{\star}\quad k\text{为非零整数}.$$

解: 利用 $A^{-1} = \dfrac{A^{\star}}{|A|}$ 和 $A^{\star} = |A|A^{-1}$ 可得：

$$(1)\ (A^{-1})^{\star} = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1}$$

习题2—83

83. 设 A 为 n $(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵，证明：

$$(1)\ (A^{\star})^{-1} = (A^{-1})^{\star};\quad (2)\ (A^{\mathsf{T}})^{\star} = (A^{\star})^{\mathsf{T}};$$

$$(3)\ (kA)^{\star} = k^{n-1}A^{\star}\quad k\text{为非零整数}.$$

解: 利用 $A^{-1} = \dfrac{A^{\star}}{|A|}$ 和 $A^{\star} = |A|A^{-1}$ 可得：

$$(1)\ (A^{-1})^{\star} = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = |A|^{-1}(A^{-1})^{-1}$$

习题2—83

83. 设 A 为 n $(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵，证明：

$$(1)\ (A^{\star})^{-1} = (A^{-1})^{\star};\quad (2)\ (A^{\mathsf{T}})^{\star} = (A^{\star})^{\mathsf{T}};$$

$$(3)\ (kA)^{\star} = k^{n-1}A^{\star}\quad k\text{为非零整数}.$$

解: 利用 $A^{-1} = \dfrac{A^{\star}}{|A|}$ 和 $A^{\star} = |A|A^{-1}$ 可得：

$$(1)\ (A^{-1})^{\star} = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = |A|^{-1}(A^{-1})^{-1}$$

$$= (|A|A^{-1})^{-1} = (A^{\star})^{-1}.$$

习题2—83

$$(2) \quad (A^T)^\star =$$

习题2—83

(2) $(A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1}$

习题2—83

$$(2)\quad (A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$$

习题2—83

$$(2)\quad (A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$$

$$= (|A|A^{-1})^T$$

习题2—83

$$(2)\quad (A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$$

$$= (|A|A^{-1})^T = (A^\star)^T.$$

习题2—83

$$(2)\quad (A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$$

$$= (|A|A^{-1})^T = (A^\star)^T.$$

$$(3)\quad (kA)^\star$$

习题2—83

$$(2)\quad (A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$$

$$= (|A|A^{-1})^T = (A^\star)^T.$$

$$(3)\quad (kA)^\star = |kA|(kA)^{-1}$$

习题2—83

$$(2)\quad (A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$$

$$= (|A|A^{-1})^T = (A^\star)^T.$$

$$(3)\quad (kA)^\star = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A|$$

习题2—83

$$(2)\quad (A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$$

$$= (|A|A^{-1})^T = (A^\star)^T.$$

$$(3)\quad (kA)^\star = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A|\ \frac{1}{k}A^{-1}$$

习题2—83

$$(2)\quad (A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$$

$$= (|A|A^{-1})^T = (A^\star)^T.$$

$$(3)\quad (kA)^\star = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A|\ \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$= k^{n-1}|A|A^{-1}$$

习题2—83

$$(2)\quad (A^T)^\star = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$$

$$= (|A|A^{-1})^T = (A^\star)^T.$$

$$(3)\quad (kA)^\star = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A|\ \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$= k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^\star.$$

习题2—84

84. 计算下列矩阵的幂:

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n.$$

习题2—84

解: (1) 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

习题2—84

解: (1) 记 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

习题2—84

解: (1) 记 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A=I+B$

,于是

习题2—84

解: (1) 记 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A=I+B$

,于是

$$A^n=(I+B)^n$$

习题2—84

解: (1) 记 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A=I+B$,于是

$$A^n=(I+B)^n=I+C_n^1B+C_n^2B^2+\cdots+C_n^nB^n.$$

习题2—84

解: (1) 记 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A=I+B$

,于是

$$A^n=(I+B)^n=I+C_n^1B+C_n^2B^2+\cdots+C_n^nB^n.$$

习题2—84

注意到:

习题2—84

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2－84

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

习题2—84

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2—84

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2—84

所以

$$A^n$$

习题2—84

所以

$$A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2$$

习题2—84

所以

$$A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

习题2—84

所以

$$A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_n^1 & 0 \\ 0 & 0 & C_n^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

习题2—84

所以

$$A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_n^1 & 0 \\ 0 & 0 & C_n^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_n^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

习题2—84

所以

$$A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_n^1 & 0 \\ 0 & 0 & C_n^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_n^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 \\ 0 & 1 & C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题2—84

(2) 记 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$,

习题2—84

(2) 记 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

习题2—84

(2) 记 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$A = aI + B$$

习题2—84

(2) 记 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$A=aI+B$$

于是

$$A^n=(aI+B)^n$$

习题2—84

(2) 记 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$A=aI+B$$

于是

$$A^n=(aI+B)^n=a^nI+C_n^1a^{n-1}B+C_n^2a^{n-2}B^2+C_n^3a^{n-3}B^3\cdots+C_n^nB^n.$$

习题2—84

(2) 记 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$A = aI + B$$

于是

$$A^n = (aI+B)^n = a^n I + C_n^1 a^{n-1} B + C_n^2 a^{n-2} B^2 + C_n^3 a^{n-3} B^3 \cdots + C_n^n B^n.$$

习题2—84

注意到:

习题2—84

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2—84

注意到:

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};$$

习题2—84

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2—84

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2—84

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2—84

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$A^n$$

习题2—84

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$A^n = a^n I + C_n^1 a^{n-1} B + C_n^2 a^{n-2} B^2 + C_n^3 a^{n-3} B^3.$$

习题2—84

$$
= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} +
$$

习题2—84

$$= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_n^1 a^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_n^1 a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2—84

$$= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_n^1 a^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_n^1 a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_n^2 a^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2—84

$$
= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_n^1 a^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_n^1 a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_n^2 a^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_n^3 a^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

习题2—84

$$= \begin{pmatrix} a^n & C_n^1 a^{n-1} & C_n^2 a^{n-2} & C_n^3 a^{n-3} \\ 0 & a^n & C_n^1 a^{n-1} & C_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & C_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

习题2—86

86. n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元之和称为 A 的迹，记作 $tr(A)$,即

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

证明：若 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $n\times m$ 矩阵，则

$$tr(AB)=tr(BA).$$

习题2—86

86. n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元之和称为 A 的迹，记作 $tr(A)$,即

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

证明：若 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $n\times m$ 矩阵，则

$$tr(AB)=tr(BA).$$

证: 设 $AB=C=(C_{ij})_{m\times m}$, $BA=D=(d_{ij})_{n\times n}$, 那么

习题2—86

86. n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元之和称为 A 的迹，记作 $tr(A)$,即

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

证明：若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则

$$tr(AB)=tr(BA).$$

证: 设 $AB=C=(C_{ij})_{m\times m}$，$BA=D=(d_{ij})_{n\times n}$, 那么

$$tr(AB)=c_{11}+c_{22}+\cdots+c_{mm}$$

习题2—86

86. n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元之和称为 A 的迹，记作 $tr(A)$,即

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

证明：若 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $n\times m$ 矩阵，则

$$tr(AB)=tr(BA).$$

证: 设 $AB=C=(C_{ij})_{m\times m}$, $BA=D=(d_{ij})_{n\times n}$, 那么

$$tr(AB)=c_{11}+c_{22}+\cdots+c_{mm}$$

习题2—86

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1})$$

$$+(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2})$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(a_{m1}b_{1m} + a_{m2}b_{2m} + \cdots + a_{mn}b_{nm})$$

习题2—86

$$\begin{aligned}
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) \\
&+(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) \\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+(a_{m1}b_{1m} + a_{m2}b_{2m} + \cdots + a_{mn}b_{nm})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1m}a_{m1}) \\
&+(b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2m}a_{m2}) \\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+(b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nm}a_{mn})
\end{aligned}$$

习题2—86

$$
\begin{aligned}
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) \\
&+(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) \\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+(a_{m1}b_{1m} + a_{m2}b_{2m} + \cdots + a_{mn}b_{nm})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1m}a_{m1}) \\
&+(b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2m}a_{m2}) \\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+(b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nm}a_{mn})
\end{aligned}
$$

习题2—86

$$= d_{11} + d_{22} + \cdots + d_{nn}$$

$$= d_{11} + d_{22} + \cdots + d_{nn} = tr(BA).$$

$$= d_{11} + d_{22} + \cdots + d_{nn} = tr(BA).$$

结论得证.

习题2—88

88. 若 n 阶矩阵 A 存在正整数 k ,使得 $A^k = O$, 就称 A 为幂零矩阵.

习题2—88

88. 若 n 阶矩阵 A 存在正整数 k ,使得 $A^k = O$, 就称 A 为幂零矩阵.

设幂零矩阵 A 满足 $A^k = O$(k 为正整数), 试证明：$I - A$ 可逆，并求其逆矩阵.

证:

$$A^k = O$$

88. 若 n 阶矩阵 A 存在正整数 k ,使得 $A^k = O$, 就称 A 为幂零矩阵.

设幂零矩阵 A 满足 $A^k = O$(k 为正整数), 试证明: $I - A$ 可逆, 并求其逆矩阵.

证:

$$A^k = O \Rightarrow I - A^k = I$$

习题2—88

88. 若 n 阶矩阵 A 存在正整数 k ,使得 $A^k = O$, 就称 A 为幂零矩阵.

设幂零矩阵 A 满足 $A^k = O$(k 为正整数), 试证明： $I - A$ 可逆，并求其逆矩阵.

证:

$$A^k = O \Rightarrow \ I - A^k = I$$

$$\Rightarrow (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I$$

习题2—88

88. 若 n 阶矩阵 A 存在正整数 k ,使得 $A^k = O$, 就称 A 为幂零矩阵.

设幂零矩阵 A 满足 $A^k = O$(k 为正整数), 试证明： $I - A$ 可逆，并求其逆矩阵.

证:

$$A^k = O \Rightarrow \; I - A^k = I$$

$$\Rightarrow (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I$$

所以 $I - A$ 可逆，并且

习题2—88

88. 若 n 阶矩阵 A 存在正整数 k ,使得 $A^k = O$, 就称 A 为幂零矩阵.

设幂零矩阵 A 满足 $A^k = O$(k 为正整数), 试证明： $I - A$ 可逆，并求其逆矩阵.

证:

$$A^k = O \Rightarrow I - A^k = I$$

$$\Rightarrow (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I$$

所以 $I - A$ 可逆，并且

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

习题2—89

89. 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $f(x)=(x-b)^n$. 试求 $f(A)$, 当 $f(A)$ 可逆时，求其逆矩阵.

89. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $f(x) = (x-b)^n$. 试求 $f(A)$, 当 $f(A)$ 可逆时，求其逆矩阵.

解:

$$f(A) = (A - bI)^n$$

89. 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $f(x)=(x-b)^n$. 试求 $f(A)$, 当 $f(A)$ 可逆时，求其逆矩阵.

解:

$$f(A)=(A-bI)^n=[(a-b)I+B]^n$$

89. 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $f(x)=(x-b)^n$. 试求 $f(A)$, 当 $f(A)$ 可逆时，求其逆矩阵.

解:

$$f(A)=(A-bI)^n=[(a-b)I+B]^n$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

89. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $f(x) = (x-b)^n$. 试求 $f(A)$, 当 $f(A)$ 可逆时，求其逆矩阵.

解:

$$f(A) = (A - bI)^n = [(a-b)I + B]^n$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题2—89

当 $k \geq 4$ 时，$B^k = O$.

习题2—89

当 $k \geq 4$ 时，$B^k = O$.于是

$$f(A) = [(a-b)I + B]^n$$

$$= (a-b)^n I + C_n^1 (a-b)^{n-1} B + C_n^2 (a-b)^{n-2} B^2 + C_n^3 (a-b)^{n-3} B^3$$

习题2—89

当 $k \geq 4$ 时，$B^k = O$.于是

$$f(A) = [(a-b)I + B]^n$$

$$= (a-b)^n I + C_n^1 (a-b)^{n-1} B + C_n^2 (a-b)^{n-2} B^2 + C_n^3 (a-b)^{n-3} B^3$$

$$= \begin{pmatrix} (a-b)^n & C_n^1(a-b)^{n-1} & C_n^2(a-b)^2 & C_n^3(a-b)^3 \\ 0 & (a-b)^n & C_n^1(a-b)^{n-1} & C_n^2(a-b)^2 \\ 0 & 0 & (a-b)^n & C_n^1(a-b)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & (a-b)^n \end{pmatrix}$$

习题2—28

$$(f(A)|I) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
(a-b)^n & C_n^1(a-b)^{n-1} & C_n^2(a-b)^2 & C_n^3(a-b)^3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (a-b)^n & C_n^1(a-b)^{n-1} & C_n^2(a-b)^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & (a-b)^n & C_n^1(a-b)^{n-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (a-b)^n & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

第三章　线性方程组

赵 燕 芬

Email: wangzhaoyanfen@gmail.com

武汉大学　数学与统计学院

2007 年 12 月 3 日

习题3—9

9. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

习题3—9

9. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 充分性：设

习题3—9

9. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 充分性：设

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

习题3—9

9. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 充分性：设

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

习题3—9

9. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 充分性：设

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以

习题3—9

9. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 充分性：设

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以

$$\begin{cases} x_1+x_3 = 0 \\ x_1+x_2 = 0 \\ x_2+x_3 = 0 \end{cases}$$

习题3—9

9. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 充分性：设

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以

$$\begin{cases} x_1+x_3 &= & 0 \\ x_1+x_2 &= & 0 \\ x_2+x_3 &= & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= & 0 \\ x_2 &= & 0 \\ x_3 &= & 0 \end{cases}$$

习题3—9

9. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 充分性：设

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_3 & = & 0 \\ x_1+x_2 & = & 0 \\ x_2+x_3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

习题3—9

必要性：用反证法.

习题3—9

必要性：用反证法.

假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，

习题3－9

必要性：用反证法.

假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，那么其中至少有一个向量能用其余向量线性表示，

习题3—9

必要性：用反证法.

假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，那么其中至少有一个向量能用其余向量线性表示，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，那么

习题3—9

必要性：用反证法.

假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，那么其中至少有一个向量能用其余向量线性表示，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，从而

习题3—9

必要性：用反证法.

假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，那么其中至少有一个向量能用其余向量线性表示，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，从而

$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，

习题3—9

必要性：用反证法.

假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，那么其中至少有一个向量能用其余向量线性表示，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，从而

$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，矛盾！

习题3—31

31. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明：若任一个 n 维向量都是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解，那么 $A=O$.

习题3—31

31. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，证明：若任一个 n 维向量都是 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解，那么 $A = O$.

证: 由题意可知方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系中所含向量的个数为 n ,由

31. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，证明：若任一个 n 维向量都是 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解，那么 $A = O$.

证: 由题意可知方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系中所含向量的个数为 n ,由

$$n = n - r(A)$$

习题3—31

31. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明：若任一个 n 维向量都是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解，那么 $A=O$.

证: 由题意可知方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中所含向量的个数为 n ,由

$$n=n-r(A)$$

得到

$$r(A)=0$$

习题3—31

31. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明：若任一个 n 维向量都是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解，那么 $A=O$.

证: 由题意可知方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中所含向量的个数为 n ,由

$$n=n-r(A)$$

得到

$$r(A)=0$$

故 $A=O$.

习题3—31

另证: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，矩阵 $B = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$,

习题3—31

另证: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，矩阵 $B = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 由题设可得

习题3—31

另证: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，矩阵 $B = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 由题设可得

$$A\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

习题3—31

另证: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，矩阵 $B = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 由题设可得

$$A\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

于是得到

$$AB = O$$

习题3—31

另证: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，矩阵 $B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，由题设可得

$$A\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0},\quad i=1,2,\cdots,n$$

于是得到

$$AB=O$$

又因为 B 可逆，所以

习题3—31

另证: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，矩阵 $B = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，由题设可得

$$A\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

于是得到

$$AB = O$$

又因为 B 可逆，所以

$$A = O$$

习题3—34

34. 设 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵，证明：

(1) $r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当} r(A) = n, \\ 1, & \text{当} r(A) = n-1, \\ 0, & \text{当} r(A) < n-1. \end{cases}$　　(2) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

习题3—34

34. 设 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵，证明：

$$(1)\ r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当} r(A) = n, \\ 1, & \text{当} r(A) = n-1, \\ 0, & \text{当} r(A) < n-1. \end{cases} \qquad (2) |A^*| = |A|^{n-1}.$$

证: (1) 当 $r(A) = n$ 时, 有

习题3—34

34. 设 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵，证明：

(1) $r(A^*) = \begin{cases} n, & 当 r(A) = n, \\ 1, & 当 r(A) = n-1, \\ 0, & 当 r(A) < n-1. \end{cases}$ (2) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

证: (1) 当 $r(A) = n$ 时, 有 $|A| \neq 0$, 且 $|A^*| = |A|^{n-1}$,

习题3—34

34. 设 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵，证明：

$$(1)\ r(A^*)=\begin{cases} n, & \text{当} r(A)=n, \\ 1, & \text{当} r(A)=n-1, \\ 0, & \text{当} r(A)<n-1. \end{cases} \qquad (2)|A^*|=|A|^{n-1}.$$

证: (1) 当 $r(A)=n$ 时, 有 $|A|\neq 0$, 且 $|A^*|=|A|^{n-1}$, 所以 $|A^*|\neq 0$,

习题3—34

34. 设 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵，证明：

$$(1)\ r(A^*)=\begin{cases} n, & 当 r(A)=n, \\ 1, & 当 r(A)=n-1, \\ 0, & 当 r(A)<n-1. \end{cases} \qquad (2) |A^*|=|A|^{n-1}.$$

证: (1) 当 $r(A)=n$ 时, 有 $|A|\neq 0$, 且 $|A^*|=|A|^{n-1}$, 所以 $|A^*|\neq 0$, 从而 $r(A^*)=n$.

习题3—34

当 $r(A) = n - 1$ 时, 有

习题3—34

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式,

习题3—34

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元,

习题3—34

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(A^*)\geq 1$.

习题3－34

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(A^*)\geq 1$.

又因为 $AA^*=A^*A=|A|I=O$,

习题3—34

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(A^*)\geq 1$.

又因为 $AA^*=A^*A=|A|I=O$, 所以 $r(A)+r(A^*)\leq n$

习题3—34

当 $r(A) = n-1$ 时, 有 $|A| = 0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(A^*) \geq 1$.

又因为 $AA^* = A^*A = |A|I = O$, 所以 $r(A) + r(A^*) \leq n$ 即

$$r(A^*) \leq n - r(A)$$

习题3—34

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(A^*)\geq 1$.

又因为 $AA^*=A^*A=|A|I=O$, 所以 $r(A)+r(A^*)\leq n$ 即

$$r(A^*)\leq n-r(A)=n-(n-1)=1.$$

习题3—34

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(A^*)\geq 1$.

又因为 $AA^*=A^*A=|A|I=O$, 所以 $r(A)+r(A^*)\leq n$ 即

$$r(A^*)\leq n-r(A)=n-(n-1)=1.$$

综合可得 $\quad r(A^*)=1.$

习题3—34

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(A^*)\geq 1$.

又因为 $AA^*=A^*A=|A|I=O$, 所以 $r(A)+r(A^*)\leq n$ 即

$$r(A^*)\leq n-r(A)=n-(n-1)=1.$$

综合可得 $r(A^*)=1$.

当 $r(A)\leq n-1$ 时， A 中所有 $n-1$ 阶子式均为 0

习题3—34

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(A^*)\geq 1$.

又因为 $AA^*=A^*A=|A|I=O$, 所以 $r(A)+r(A^*)\leq n$ 即

$$r(A^*)\leq n-r(A)=n-(n-1)=1.$$

综合可得 $\quad r(A^*)=1.$

当 $r(A)\leq n-1$ 时， A 中所有 $n-1$ 阶子式均为 0 ,于是 $A^*=O,$

习题3—34

当 $r(A)=n-1$ 时, 有 $|A|=0$, 且 A 中至少有一个 $n-1$ 阶非零子式, 于是 A^* 中至少有一个非零元, 从而 $r(A^*)\geq 1$.

又因为 $AA^*=A^*A=|A|I=O$, 所以 $r(A)+r(A^*)\leq n$ 即

$$r(A^*)\leq n-r(A)=n-(n-1)=1.$$

综合可得 $r(A^*)=1$.

当 $r(A)\leq n-1$ 时, A 中所有 $n-1$ 阶子式均为 0 ,于是 $A^*=O$, 故 $r(A^*)=0$.

习题3—34

(2) 因为 $AA^* = A^*A = |A|I$, 所以

习题3—34

(2) 因为 $AA^* = A^*A = |A|I$, 所以

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

(2) 因为 $AA^* = A^*A = |A|I$, 所以

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

于是当 $|A| \neq 0$ 时, 有

习题3—34

(2) 因为 $AA^* = A^*A = |A|I$, 所以

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

于是当 $|A| \neq 0$ 时, 有

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

习题3—34

(2) 因为 $AA^* = A^*A = |A|I$, 所以

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

于是当 $|A| \neq 0$ 时, 有

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

当 $|A| = 0$ 时，有 $r(A) < n$,

习题3—34

(2) 因为 $AA^* = A^*A = |A|I$, 所以

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

于是当 $|A| \neq 0$ 时, 有

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

当 $|A| = 0$ 时，有 $r(A) < n$, 由(1)可知此时 $r(A^*) < n$,

习题3—34

(2) 因为 $AA^* = A^*A = |A|I$, 所以

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

于是当 $|A| \neq 0$ 时, 有

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

当 $|A| = 0$ 时，有 $r(A) < n$, 由(1)可知此时 $r(A^*) < n$, 故

$$|A^*| = 0 = 0^{n-1} = |A|^{n-1}.$$

习题3—36

36. 设 A 是 n 阶矩阵. 证明：非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对任何 $\boldsymbol{b}$ 都有解得充要条件是 $|A|\neq 0$.

习题3—36

36. 设 A 是 n 阶矩阵. 证明：非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对任何 $\boldsymbol{b}$ 都有解得充要条件是 $|A| \neq 0$.

证: 充分性：

习题3—36

36. 设 A 是 n 阶矩阵. 证明：非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对任何 $\boldsymbol{b}$ 都有解得充要条件是 $|A|\neq 0$.

证: 充分性：

当 $|A|\neq 0$ 时, A 可逆. 于是对任意 $\boldsymbol{b}$, 由 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可得：

习题3—36

36. 设 A 是 n 阶矩阵. 证明：非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对任何 $\boldsymbol{b}$ 都有解得充要条件是 $|A|\neq 0$.

证: 充分性：

当 $|A|\neq 0$ 时, A 可逆. 于是对任意 $\boldsymbol{b}$, 由 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可得：

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

习题3—36

36. 设 A 是 n 阶矩阵. 证明：非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对任何 $\boldsymbol{b}$ 都有解得充要条件是 $|A|\neq 0$.

证: 充分性：

当 $|A|\neq 0$ 时, A 可逆. 于是对任意 $\boldsymbol{b}$, 由 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可得：

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

充分性得证.

习题3—36

36. 设 A 是 n 阶矩阵. 证明：非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对任何 $\boldsymbol{b}$ 都有解得充要条件是 $|A|\neq 0$.

证: 充分性：

当 $|A|\neq 0$ 时, A 可逆. 于是对任意 $\boldsymbol{b}$, 由 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可得：

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

充分性得证.

习题3—36

必要性：

习题3—36

必要性：

取 n 个线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$, 设 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$ 的解为 $\boldsymbol{x}_i$,$(i = 1, 2, \cdots, n)$.

习题3—36

必要性：

取 n 个线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$，设 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$ 的解为 $\boldsymbol{x}_i$,$(i = 1, 2, \cdots, n)$. 那么

$$A(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n).$$

习题3—36

必要性：

取 n 个线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$，设 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$ 的解为 $\boldsymbol{x}_i$,$(i = 1, 2, \cdots, n)$. 那么

$$A(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n).$$

两边取行列式并注意到 $|\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n| \neq 0$,

习题3—36

必要性：

取 n 个线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$, 设 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$ 的解为 $\boldsymbol{x}_i$,$(i = 1, 2, \cdots, n)$. 那么

$$A(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n).$$

两边取行列式并注意到 $|\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n| \neq 0$, 于是

$$|A| \neq 0.$$

习题3—46

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k \geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k \geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ (1)

习题3－46

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k \geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ (1)

两边同时左乘 A^{k-1} 得:

习题3－46

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k \geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (1)$

两边同时左乘 A^{k-1} 得：

$$l_1A^{k-1}(\alpha) + l_2A^k\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (1')$$

习题3－46

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k \geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ (1)

两边同时左乘 A^{k-1} 得:

$$l_1A^{k-1}(\alpha) + l_2A^k\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (1')$$

因为 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,所以

习题3—46

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k \geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ (1)

两边同时左乘 A^{k-1} 得:

$$l_1A^{k-1}(\alpha) + l_2A^k\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (1')$$

因为 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,所以

$$A^k\boldsymbol{\alpha} = A^{k+1}\boldsymbol{\alpha} = \cdots = A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

习题3－46

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k \geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (1)$

两边同时左乘 A^{k-1} 得:

$$l_1A^{k-1}(\alpha) + l_2A^k\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (1')$$

因为 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,所以

$$A^k\boldsymbol{\alpha} = A^{k+1}\boldsymbol{\alpha} = \cdots = A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

代入 $(1')$ 式得:

习题3－46

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k \geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ (1)

两边同时左乘 A^{k-1} 得:

$$l_1A^{k-1}(\alpha) + l_2A^k\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (1')$$

因为 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,所以

$$A^k\boldsymbol{\alpha} = A^{k+1}\boldsymbol{\alpha} = \cdots = A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

代入 $(1')$ 式得:

$$l_1A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

习题3－46

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k \geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (1)$

两边同时左乘 A^{k-1} 得:

$$l_1A^{k-1}(\alpha) + l_2A^k\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (1')$$

因为 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,所以

$$A^k\boldsymbol{\alpha} = A^{k+1}\boldsymbol{\alpha} = \cdots = A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

代入 $(1')$ 式得:

$$l_1A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

因为 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$,所以

习题3－46

46. 设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 k $(k \geq 2)$ 使得 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 但 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 为非零列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证: 设 $l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ (1)

两边同时左乘 A^{k-1} 得:

$$l_1A^{k-1}(\alpha) + l_2A^k\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_kA^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (1')$$

因为 $A^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,所以

$$A^k\boldsymbol{\alpha} = A^{k+1}\boldsymbol{\alpha} = \cdots = A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

代入 (1′) 式得:

$$l_1A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

因为 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$,所以 $\qquad l_1 = 0$

习题3—46

将 $l_1 = 0$ 代入 (1) 式得：

习题3－46

将 $l_1 = 0$ 代入 (1) 式得：

$$l_2 A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_k A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

两边同时左乘 A^{k-2} 得：

习题3—46

将 $l_1 = 0$ 代入 (1) 式得：

$$l_2 A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_k A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{2}$$

两边同时左乘 A^{k-2} 得：

$$l_2 A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} + l_3 A^{k}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_k A^{2k-3}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

习题3—46

将 $l_1=0$ 代入 (1) 式得：

$$l_2 A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_k A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{2}$$

两边同时左乘 A^{k-2} 得：

$$l_2 A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} + l_3 A^{k}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_k A^{2k-3}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

注意到

$$A^{k}\boldsymbol{\alpha} = A^{k+1}\boldsymbol{\alpha} = \cdots = A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$$

习题3—46

将 $l_1 = 0$ 代入 (1) 式得：

$$l_2 A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_k A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

两边同时左乘 A^{k-2} 得：

$$l_2 A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} + l_3 A^{k}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_k A^{2k-3}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

注意到

$$A^{k}\boldsymbol{\alpha} = A^{k+1}\boldsymbol{\alpha} = \cdots = A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$$

于是得到$l_2 = 0$,

习题3—46

将 $l_1=0$ 代入 (1) 式得:

$$l_2 A\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0} \tag{2}$$

两边同时左乘 A^{k-2} 得:

$$l_2 A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+l_3 A^{k}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k A^{2k-3}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

注意到

$$A^{k}\boldsymbol{\alpha}=A^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\quad A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$$

于是得到$l_2=0$, 类似可得

习题3－46

将 $l_1 = 0$ 代入 (1) 式得：

$$l_2 A\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_k A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{2}$$

两边同时左乘 A^{k-2} 得：

$$l_2 A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} + l_3 A^{k}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_k A^{2k-3}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

注意到

$$A^{k}\boldsymbol{\alpha} = A^{k+1}\boldsymbol{\alpha} = \cdots = A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad A^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$$

于是得到$l_2 = 0$，类似可得

$$l_3 = l_4 = \cdots = l_k = 0.$$

习题3—46

将 $l_1=0$ 代入 (1) 式得：

$$l_2 A\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0} \tag{2}$$

两边同时左乘 A^{k-2} 得：

$$l_2 A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+l_3 A^{k}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k A^{2k-3}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

注意到

$$A^{k}\boldsymbol{\alpha}=A^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=A^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\quad A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$$

于是得到$l_2=0$，类似可得

$$l_3=l_4=\cdots=l_k=0.$$

因此结论成立.

习题3—50

50. 设 n 阶矩阵 A 的每行元素之和均为 0 ,又 $r(A) = n - 1$,求齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的通解.

习题3—50

50. 设 n 阶矩阵 A 的每行元素之和均为 0 ,又 $r(A)=n-1$,求齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解.

解: 由题设可知 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中只有一个解向量,

习题3—50

50. 设 n 阶矩阵 A 的每行元素之和均为 0 ,又 $r(A)=n-1$,求齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解.

解: 由题设可知 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 且 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,\cdots,1)^T$ 是方程组的一个解,

习题3—50

50. 设 n 阶矩阵 A 的每行元素之和均为 0 ,又 $r(A)=n-1$,求齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解.

解: 由题设可知 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 且 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,\cdots,1)^T$ 是方程组的一个解,因此所求通解为

习题3—50

50. 设 n 阶矩阵 A 的每行元素之和均为 0 ,又 $r(A)=n-1$,求齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解.

解: 由题设可知 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 且 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,\cdots,1)^T$ 是方程组的一个解,因此所求通解为

$$\boldsymbol{x}=k(1,1,\cdots,1)^T(k\text{为任意常数}).$$

习题3—51

51. 已知下列线性方程组 I, II 为同解线性方程组, 求参数 m, n, t 之值.

$$I:\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3; \end{cases}$$

$$II:\begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1. \end{cases}$$

习题3—51

解: 对方程组I的增广矩阵做初等行变换：

习题3—51

解: 对方程组I的增广矩阵做初等行变换:

$$(A,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

习题3—51

解: 对方程组I的增广矩阵做初等行变换:

$$(A,\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3\times r_1]{r_3-4\times r_1}$$

习题3—51

解: 对方程组I的增广矩阵做初等行变换：

$$(A,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3\times r_1]{r_3-4\times r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\0&-5&-1&7&25\\0&-4&-1&6&21\end{pmatrix}$$

习题3—51

解: 对方程组I的增广矩阵做初等行变换：

$$(A,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3\times r_1]{r_3-4\times r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\0&-5&-1&7&25\\0&-4&-1&6&21\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3}$$

习题3—51

解: 对方程组I的增广矩阵做初等行变换：

$$(A,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3\times r_1]{r_3-4\times r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\0&-5&-1&7&25\\0&-4&-1&6&21\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\0&-1&0&1&4\\0&-4&-1&6&21\end{pmatrix}$$

习题3—51

解: 对方程组I的增广矩阵做初等行变换:

$$(A,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3\times r_1]{r_3-4\times r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\0&-5&-1&7&25\\0&-4&-1&6&21\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\0&-1&0&1&4\\0&-4&-1&6&21\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-4\times r_2}$$

习题3—51

解: 对方程组I的增广矩阵做初等行变换:

$$(A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3\times r_1]{r_3-4\times r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & 25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-4\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

习题3—51

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

习题3—51

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2}$$

习题3—51

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

习题3—51

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3]{r_i\times(-1)}$$

习题3—51

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3]{r_i\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

习题3—51

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3]{r_i\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

由上述矩阵可以得到方程组I的特解为：

习题3—51

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3]{r_i\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

由上述矩阵可以得到方程组I的特解为：

$$\boldsymbol{\xi}_0 = (-2, -4, -5, 0)^T$$

习题3—51

由于两方程组同解，所以方程组I的解也是方程组II的解, 将 ξ_0 代入方程组II得：

习题3—51

由于两方程组同解，所以方程组I的解也是方程组II的解，将 ξ_0 代入方程组II得：

$$\begin{cases} -2-4m+5 & = -5 \\ -4n+5 & = -11 \\ -5 & = -t+1 \end{cases}$$

习题3—51

由于两方程组同解，所以方程组I的解也是方程组II的解, 将 ξ_0 代入方程组II得：

$$\begin{cases} -2-4m+5 & = -5 \\ -4n+5 & = -11 \\ -5 & = -t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m & = 2 \\ n & = 4 \\ t & = 6 \end{cases}$$

52. 设

$\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (1, \frac{1}{2}, 0)^T$, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 8)^T$, $A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $B = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x} = A^4\boldsymbol{x} + B^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}$.

习题3—52

52. 设

$\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (1, \frac{1}{2}, 0)^T$, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 8)^T$, $A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $B = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x} = A^4\boldsymbol{x} + B^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出：

习题3—52

52. 设

$\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (1, \frac{1}{2}, 0)^T$, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 8)^T$, $A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $B = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x} = A^4\boldsymbol{x} + B^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出：

$$B = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha} = (1, \frac{1}{2}, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

习题3—52

52. 设

$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}=(0,0,8)^T$, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x}=A^4\boldsymbol{x}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出:

$$B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=(1,\frac{1}{2},0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$$

52. 设

$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}=(0,0,8)^T$, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x}=A^4\boldsymbol{x}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出:

$$B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=(1,\frac{1}{2},0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$$

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},0)$$

52. 设
$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}=(0,0,8)^T$, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x}=A^4\boldsymbol{x}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出:

$$B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=(1,\frac{1}{2},0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$$

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},0)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

习题3—52

52. 设

$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T,\ \boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},0)^T,\ \boldsymbol{\gamma}=(0,0,8)^T,\ A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T,\ B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x}=A^4\boldsymbol{x}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出：

$$B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=(1,\frac{1}{2},0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$$

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},0)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)$$

52. 设

$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}=(0,0,8)^T$, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x}=A^4\boldsymbol{x}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出：

$$B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=(1,\frac{1}{2},0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$$

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},0)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T=2A,\quad A^4=3A$$

52. 设

$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}=(0,0,8)^T$, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, $B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$, 求解方程 $2B^2A^2\boldsymbol{x}=A^4\boldsymbol{x}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

解: 首先可计算出:

$$B=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=(1,\frac{1}{2},0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$$

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},0)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T=2A,\quad A^4=3A$$

习题3—52

于是方程组为:

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x} = 8A\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} = \gamma$

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x} = 8A\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} = \gamma$ 即 $(8A - 16I)\boldsymbol{x} = \gamma$

习题3－52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x} = 8A\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} = \gamma$ 即 $(8A - 16I)\boldsymbol{x} = \gamma$

对方程组的增广矩阵作初等行变换:

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x} = 8A\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} = \gamma$ 即 $(8A - 16I)\boldsymbol{x} = \gamma$

对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix}$$

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x}=8A\boldsymbol{x}+16\boldsymbol{x}=\gamma$ 即 $(8A-16I)\boldsymbol{x}=\gamma$

对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix} \to$$

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x} = 8A\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} = \gamma$ 即 $(8A - 16I)\boldsymbol{x} = \gamma$

对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x} = 8A\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} = \gamma$ 即 $(8A - 16I)\boldsymbol{x} = \gamma$

对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_3 = 0$ 得非齐次方程组的特解为:

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x}=8A\boldsymbol{x}+16\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$ 即 $(8A-16I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$

对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_3=0$ 得非齐次方程组的特解为: $\boldsymbol{\xi}_0=(\frac{1}{2},1,0)^T$.

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x}=8A\boldsymbol{x}+16\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$ 即 $(8A-16I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$

对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_3=0$ 得非齐次方程组的特解为: $\boldsymbol{\xi}_0=(\frac{1}{2},1,0)^T$.

取 $x_3=1$ 得齐次方程组的基础解系为:

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x}=8A\boldsymbol{x}+16\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$ 即 $(8A-16I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$

对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_3=0$ 得非齐次方程组的特解为: $\boldsymbol{\xi}_0=(\frac{1}{2},1,0)^T$.

取 $x_3=1$ 得齐次方程组的基础解系为: $\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,1)^T$.

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x} = 8A\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} = \gamma$ 即 $(8A - 16I)\boldsymbol{x} = \gamma$

对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_3 = 0$ 得非齐次方程组的特解为: $\boldsymbol{\xi}_0 = (\frac{1}{2}, 1, 0)^T$.

取 $x_3 = 1$ 得齐次方程组的基础解系为: $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 2, 1)^T$.

于是方程组的通解为：

习题3—52

于是方程组为:$16A\boldsymbol{x} = 8A\boldsymbol{x} + 16\boldsymbol{x} = \gamma$ 即 $(8A - 16I)\boldsymbol{x} = \gamma$

对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_3 = 0$ 得非齐次方程组的特解为: $\boldsymbol{\xi}_0 = (\frac{1}{2}, 1, 0)^T$.

取 $x_3 = 1$ 得齐次方程组的基础解系为: $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 2, 1)^T$.

于是方程组的通解为：

$$\boldsymbol{\xi} = k(1,2,1)^T + (\frac{1}{2}, 1, 0) \quad (k\text{为任意实数}).$$

习题3—53

53. 设 n 阶矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的行列式 $|A|\neq 0$, A 的前 $n-1$ 列构成的 $n\times(n-1)$ 矩阵记为 $A_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$, 问方程组 $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_n$ 是否有解?

习题3—53

53. 设 n 阶矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的行列式 $|A|\neq 0$, A 的前 $n-1$ 列构成的 $n\times(n-1)$ 矩阵记为 $A_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$, 问方程组 $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_n$ 是否有解?

解: 由题设可知

习题3—53

53. 设 n 阶矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的行列式 $|A|\neq 0$, A 的前 $n-1$ 列构成的 $n\times(n-1)$ 矩阵记为 $A_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$, 问方程组 $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_n$ 是否有解?

解: 由题设可知

$$r(A_1)=$$

53. 设 n 阶矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的行列式 $|A|\neq 0$, A 的前 $n-1$ 列构成的 $n\times(n-1)$ 矩阵记为 $A_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$, 问方程组 $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_n$ 是否有解?

解: 由题设可知

$$r(A_1)=n-1\neq n$$

习题3—53

53. 设 n 阶矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的行列式 $|A|\neq 0$, A 的前 $n-1$ 列构成的 $n\times(n-1)$ 矩阵记为 $A_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$, 问方程组 $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_n$ 是否有解?

解: 由题设可知

$$r(A_1)=n-1\neq n=r(A,\boldsymbol{\alpha}_n)$$

习题3—53

53. 设 n 阶矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的行列式 $|A|\neq 0$, A 的前 $n-1$ 列构成的 $n\times(n-1)$ 矩阵记为 $A_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$, 问方程组 $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_n$ 是否有解?

解: 由题设可知

$$r(A_1)=n-1\neq n=r(A,\boldsymbol{\alpha}_n)$$

所以无解.

习题3—54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明： A 中任意两行或两列成比例.

习题3—54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明： A 中任意两行或两列成比例.

分析：

习题3—54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明: A 中任意两行或两列成比例.

分析: 即证 A 中任意两行或两列线性相关,

习题3—54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明： A 中任意两行或两列成比例.

分析： 即证 A 中任意两行或两列线性相关, 亦即 $r(A)=1$.

证: 一方面

习题3—54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明： A 中任意两行或两列成比例.

分析： 即证 A 中任意两行或两列线性相关, 亦即 $r(A)=1$.

证: 一方面

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$$

习题3—54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明: A 中任意两行或两列成比例.

分析: 即证 A 中任意两行或两列线性相关, 亦即 $r(A)=1$.

证: 一方面

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T \Rightarrow r(A)\leq min\{r(\boldsymbol{\alpha}),r(\boldsymbol{\beta}^T)\}=1.$$

习题3－54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明： A 中任意两行或两列成比例.

分析： 即证 A 中任意两行或两列线性相关, 亦即 $r(A)=1$.

证: 一方面

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T \Rightarrow r(A)\leq min\{r(\boldsymbol{\alpha}),r(\boldsymbol{\beta}^T)\}=1.$$

另一方面, 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量,

习题3—54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明： A 中任意两行或两列成比例.

分析： 即证 A 中任意两行或两列线性相关, 亦即 $r(A)=1.$

证: 一方面

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T \Rightarrow r(A)\leq min\{r(\boldsymbol{\alpha}),r(\boldsymbol{\beta}^T)\}=1.$$

另一方面, 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, 所以 A 为非零矩阵, 于是

习题3—54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明： A 中任意两行或两列成比例.

分析： 即证 A 中任意两行或两列线性相关, 亦即 $r(A)=1$.

证: 一方面

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T \Rightarrow r(A)\le min\{r(\boldsymbol{\alpha}),r(\boldsymbol{\beta}^T)\}=1.$$

另一方面, 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, 所以 A 为非零矩阵, 于是

$$r(A)>0.$$

习题3—54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明： A 中任意两行或两列成比例.

分析： 即证 A 中任意两行或两列线性相关, 亦即 $r(A)=1$.

证: 一方面

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T \Rightarrow r(A)\leq min\{r(\boldsymbol{\alpha}),r(\boldsymbol{\beta}^T)\}=1.$$

另一方面, 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, 所以 A 为非零矩阵, 于是

$$r(A)>0.$$

综合可得

习题3—54

54. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,证明: A 中任意两行或两列成比例.

分析: 即证 A 中任意两行或两列线性相关, 亦即 $r(A)=1$.

证: 一方面

$$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T \Rightarrow r(A)\leq min\{r(\boldsymbol{\alpha}),r(\boldsymbol{\beta}^T)\}=1.$$

另一方面, 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零的 n 维列向量, 所以 A 为非零矩阵, 于是

$$r(A)>0.$$

综合可得 $r(A)=1$. 从而结论成立.

习题3—56

56. 设 A, B 皆为 n 阶矩阵，证明：

$$(1)\begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} = |I - AB|; (2)|I - BA| = |I - AB|;$$

$$(3)det(\lambda I - AB) = det(\lambda I - BA)(\lambda\text{为任意常数}).$$

习题3—56

56. 设 A, B 皆为 n 阶矩阵，证明：

$$(1)\begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} = |I - AB|; (2)|I - BA| = |I - AB|;$$

$$(3)det(\lambda I - AB) = det(\lambda I - BA)(\lambda\text{为任意常数}).$$

解:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix}$$

习题3—56

56. 设 A, B 皆为 n 阶矩阵，证明：

$$(1)\begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} = |I - AB|;(2)|I - BA| = |I - AB|;$$

$$(3)det(\lambda I - AB) = det(\lambda I - BA)(\lambda\text{为任意常数}).$$

解:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} \underline{\underline{r_2 - r_1 \times A}}$$

习题3—56

56. 设 A, B 皆为 n 阶矩阵，证明：

$$(1)\begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} = |I - AB|; (2)|I - BA| = |I - AB|;$$

$$(3)det(\lambda I - AB) = det(\lambda I - BA)(\lambda\text{为任意常数}).$$

解:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1 \times A} \begin{vmatrix} I & B \\ O & I - AB \end{vmatrix}$$

56. 设 A, B 皆为 n 阶矩阵，证明：

$$(1)\begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} = |I - AB|; (2)|I - BA| = |I - AB|;$$

$$(3)det(\lambda I - AB) = det(\lambda I - BA)(\lambda\text{为任意常数}).$$

解:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1 \times A} \begin{vmatrix} I & B \\ O & I - AB \end{vmatrix} = |I||I - AB|$$

习题3—56

56. 设 A, B 皆为 n 阶矩阵，证明：

$$(1)\begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} = |I-AB|;(2)|I-BA| = |I-AB|;$$

$$(3)det(\lambda I - AB) = det(\lambda I - BA)(\lambda\text{为任意常数}).$$

解:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1 \times A} \begin{vmatrix} I & B \\ O & I-AB \end{vmatrix} = |I||I-AB| = |I-AB|.$$

习题3—56

56. 设 A, B 皆为 n 阶矩阵，证明：

$$(1)\begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} = |I - AB|;(2)|I - BA| = |I - AB|;$$

$$(3)det(\lambda I - AB) = det(\lambda I - BA)(\lambda\text{为任意常数}).$$

解:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} \overset{r_2 - r_1 \times A}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} I & B \\ O & I - AB \end{vmatrix} = |I||I - AB| = |I - AB|.$$

习题3—56

(2) $|I-AB| = \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix}$

习题3—56

$$(2)\ \ |I-AB| = \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2 \times A}$$

习题3—56

(2) $$|I-AB| = \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2\times A} \begin{vmatrix} I-BA & B \\ O & I \end{vmatrix}$$

习题3—56

(2) $|I-AB| = \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2\times A} \begin{vmatrix} I-BA & B \\ O & I \end{vmatrix} = |I-BA||I|$

习题3—56

$$(2)\ \ |I-AB| = \begin{vmatrix} I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2\times A} \begin{vmatrix} I-BA & B \\ O & I \end{vmatrix} = |I-BA||I| = |I-BA|$$

习题3—56

(3) 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix}$$

习题3—56

(3) 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2 \times A}$$

习题3—56

(3) 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2 \times A} \begin{vmatrix} \lambda I - BA & B \\ O & I \end{vmatrix}$$

习题3—56

(3) 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2 \times A} \begin{vmatrix} \lambda I - BA & B \\ O & I \end{vmatrix} = det(\lambda I - BA)$$

习题3—56

(3) 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2 \times A} \begin{vmatrix} \lambda I - BA & B \\ O & I \end{vmatrix} = det(\lambda I - BA)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix}$$

习题3—56

(3) 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \underline{\underline{c_1 - c_2 \times A}} \begin{vmatrix} \lambda I - BA & B \\ O & I \end{vmatrix} = det(\lambda I - BA)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \underline{\underline{r_1 - r_2 \times B}}$$

习题3—56

(3) 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2 \times A} \begin{vmatrix} \lambda I - BA & B \\ O & I \end{vmatrix} = det(\lambda I - BA)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 - r_2 \times B} \begin{vmatrix} \lambda I - AB & O \\ A & I \end{vmatrix}$$

习题3—56

(3) 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2 \times A} \begin{vmatrix} \lambda I - BA & B \\ O & I \end{vmatrix} = det(\lambda I - BA)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 - r_2 \times B} \begin{vmatrix} \lambda I - AB & O \\ A & I \end{vmatrix} = det(\lambda I - AB)$$

习题3—56

(3) 因为

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2\times A} \begin{vmatrix} \lambda I - BA & B \\ O & I \end{vmatrix} = det(\lambda I - BA)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I & B \\ A & I \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-r_2\times B} \begin{vmatrix} \lambda I - AB & O \\ A & I \end{vmatrix} = det(\lambda I - AB)$$

所以

$$det(\lambda I - AB) = det(\lambda I - BA).$$

习题3—57

57. 证明：若 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = r$, 则存在 $m \times r$ 矩阵 B ,$r \times n$ 矩阵 C, 且 $r(B) = r(C) = r$, 使得 $A = BC$.

习题3—57

57. 证明：若 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = r$, 则存在 $m \times r$ 矩阵 B ,$r \times n$ 矩阵 C, 且 $r(B) = r(C) = r$, 使得 $A = BC$.

证: 因为 $r(A) = r$,

习题3—57

57. 证明：若 A 是 $m\times n$ 矩阵, $r(A)=r$, 则存在 $m\times r$ 矩阵 B ,$r\times n$ 矩阵 C, 且 $r(B)=r(C)=r$, 使得 $A=BC$.

证: 因为 $r(A)=r$, 所以存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

习题3—57

57. 证明：若 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = r$, 则存在 $m \times r$ 矩阵 B ,$r \times n$ 矩阵 C, 且 $r(B) = r(C) = r$, 使得 $A = BC$.

证: 因为 $r(A) = r$, 所以存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ$$

习题3—57

57. 证明：若 A 是 $m\times n$ 矩阵, $r(A)=r$, 则存在 $m\times r$ 矩阵 B ,$r\times n$ 矩阵 C, 且 $r(B)=r(C)=r$, 使得 $A=BC$.

证: 因为 $r(A)=r$, 所以存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

习题3—57

57. 证明：若 A 是 $m\times n$ 矩阵, $r(A)=r$, 则存在 $m\times r$ 矩阵 B ,$r\times n$ 矩阵 C, 且 $r(B)=r(C)=r$, 使得 $A=BC$.

证: 因为 $r(A)=r$, 所以存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}=U$$

习题3—57

57. 证明：若 A 是 $m\times n$ 矩阵, $r(A)=r$, 则存在 $m\times r$ 矩阵 B ,$r\times n$ 矩阵 C, 且 $r(B)=r(C)=r$, 使得 $A=BC$.

证: 因为 $r(A)=r$, 所以存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}=U$$

于是

$$A=P^{-1}UQ^{-1}$$

习题3—57

将矩阵 P^{-1} 和 Q^{-1} 分块为

习题3—57

将矩阵 P^{-1} 和 Q^{-1} 分块为

$$P^{-1} = (B_{m\times r}, M_{m\times(m-r)}),$$

习题3—57

将矩阵 P^{-1} 和 Q^{-1} 分块为

$$P^{-1} = (B_{m\times r}, M_{m\times(m-r)}), \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ N_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$$

习题3—57

将矩阵 P^{-1} 和 Q^{-1} 分块为

$$P^{-1} = (B_{m\times r}, M_{m\times(m-r)}), \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ N_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$$

因为 B 中的 r 列线性无关, C 中的 r 行线性无关,

习题3—57

将矩阵 P^{-1} 和 Q^{-1} 分块为

$$P^{-1} = (B_{m\times r}, M_{m\times(m-r)}), \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ N_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$$

因为 B 中的 r 列线性无关, C 中的 r 行线性无关, 所以

$$r(B) = r(C) = r$$

习题3—58

且

$$A = P^{-1}UQ^{-1}$$

$$= (B_{m\times r}, M_{m\times(m-r)})\begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ N_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$$

习题3—58

且

$$A = P^{-1}UQ^{-1}$$

$$= (B_{m\times r}, M_{m\times(m-r)}) \begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ N_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$$

$$= (B_{m\times r}, O_{m\times(n-r)}) \begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ N_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$$

习题3—58

且

$$A = P^{-1}UQ^{-1}$$

$$= (B_{m\times r}, M_{m\times(m-r)})\begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ N_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$$

$$= (B_{m\times r}, O_{m\times(n-r)})\begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ N_{(n-r)\times n} \end{pmatrix} = BC$$

习题3—58

且

$$A = P^{-1}UQ^{-1}$$

$$= (B_{m\times r}, M_{m\times(m-r)}) \begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ N_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$$

$$= (B_{m\times r}, O_{m\times(n-r)}) \begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ N_{(n-r)\times n} \end{pmatrix} = BC$$

结论得证.

习题3—59

59. 证明： $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ (其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1<i\leq r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

习题3—59

59. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ (其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 < i \leq r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 充分性显然.

习题3—59

59. 证明： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ (其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 < i \leq r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 充分性显然.

必要性:

习题3—59

59. 证明： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ (其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 < i \leq r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 充分性显然.

必要性: 考虑下列所有的线性组合

$$k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$$

习题3—59

59. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ (其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 < i \leq r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 充分性显然.

必要性: 考虑下列所有的线性组合

$$k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0} \qquad k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$$

习题3—59

59. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$（其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$）线性相关的充要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1<i\leq r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 充分性显然.

必要性: 考虑下列所有的线性组合

$$k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}\qquad k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$$

$$k_{31}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{32}\boldsymbol{\alpha}_2+k_{33}\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

59. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ (其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 < i \leq r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 充分性显然.

必要性: 考虑下列所有的线性组合

$$k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0} \qquad k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$$

$$k_{31}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{32}\boldsymbol{\alpha}_2 + k_{33}\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k_{r1}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{r2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$$

习题3—59

59. 证明： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ (其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 < i \leq r)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示, 且表示法唯一.

证: 充分性显然.

必要性: 考虑下列所有的线性组合

$$k_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0} \qquad k_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$$

$$k_{31}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{32}\boldsymbol{\alpha}_2 + k_{33}\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k_{r1}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_{r2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$$

习题3—59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,

习题3—59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,所以存在一组不全为0的数使得某一个式子成立.

习题3—59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,所以存在一组不全为0的数使得某一个式子成立.

设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为0的数,

习题3—59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,所以存在一组不全为0的数使得某一个式子成立.

设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为0的数, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$,

习题3—59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,所以存在一组不全为0的数使得某一个式子成立.

设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为0的数, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $1 < i \leq r$.

习题3—59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,所以存在一组不全为0的数使得某一个式子成立.

设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为0的数, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $1 < i \leq r$.

因为 $k_{ii} \neq 0$,

习题3—59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,所以存在一组不全为0的数使得某一个式子成立.

设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为0的数, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$, 所以 $1<i\leq r$.

因为 $k_{ii}\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示.

习题3—59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,所以存在一组不全为0的数使得某一个式子成立.

设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为0的数, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $1 < i \leq r$.

因为 $k_{ii} \neq 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示.

又因为系数还满足满足

习题3—59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,所以存在一组不全为0的数使得某一个式子成立.

设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为0的数, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $1 < i \leq r$.

因为 $k_{ii} \neq 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示.

又因为系数还满足满足

$$k_{11} = k_{21} = k_{22} = \cdots = k_{i,i-1} = 0$$

习题3－59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,所以存在一组不全为0的数使得某一个式子成立.

设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为0的数, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $1 < i \leq r$.

因为 $k_{ii} \neq 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示.

又因为系数还满足满足

$$k_{11} = k_{21} = k_{22} = \cdots = k_{i,i-1} = 0$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性无关,

习题3—59

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,所以存在一组不全为0的数使得某一个式子成立.

设 k_{ii} 是所有系数中第一个不为0的数, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$, 所以 $1 < i \leq r$.

因为 $k_{ii} \neq 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示.

又因为系数还满足满足

$$k_{11} = k_{21} = k_{22} = \cdots = k_{i,i-1} = 0$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性无关,所以表示法唯一.

习题3－62

62. 证明：在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中, 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

习题3—62

62. 证明：在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中, 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证: 充分性同教材116页定理3.3中表示法唯一的证明.

习题3—62

62. 证明：在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中, 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证: 充分性同教材116页定理3.3中表示法唯一的证明.

下面证明必要性.

习题3—62

62. 证明：在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中, 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证: 充分性同教材116页定理3.3中表示法唯一的证明.

下面证明必要性. 用反证法：

习题3－62

62. 证明：在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证：充分性同教材116页定理3.3中表示法唯一的证明.

下面证明必要性. 用反证法：假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,

习题3—62

62. 证明：在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中, 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证: 充分性同教材116页定理3.3中表示法唯一的证明.

下面证明必要性. 用反证法：假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 即存在不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

习题3－62

62. 证明：在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证: 充分性同教材116页定理3.3中表示法唯一的证明.

下面证明必要性. 用反证法：假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，即存在不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

习题3－62

62. 证明：在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中, 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证: 充分性同教材116页定理3.3中表示法唯一的证明.

下面证明必要性. 用反证法：假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 即存在不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

由条件又有

习题3－62

62. 证明：在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证：充分性同教材116页定理3.3中表示法唯一的证明.

下面证明必要性. 用反证法：假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，即存在不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

由条件又有

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

习题3—62

于是得到

习题3—62

于是得到

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0}$$

于是得到

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0}$$

$$= (k_1 + \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 + \lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_s + \lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s$$

习题3－62

于是得到

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0}$$

$$= (k_1 + \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 + \lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_s + \lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s$$

即向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示的方法有两种,

习题3—62

于是得到

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0}$$

$$= (k_1 + \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 + \lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_s + \lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s$$

即向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示的方法有两种, 矛盾!

习题3—66

66. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明：BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

习题3—66

66. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明：BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得：

习题3—66

66. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明： BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得：

$$CA^T = O$$

习题3—66

66. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明：BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得：

$$CA^T=O\Rightarrow CA^TB^T=O$$

习题3—66

66. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明：BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得：

$$CA^T=O\Rightarrow CA^TB^T=O\Rightarrow C(BA)^T=O$$

习题3－66

66. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明： BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得：

$$CA^T = O \Rightarrow CA^T B^T = O \Rightarrow C(BA)^T = O$$

即 $(BA)^T$ 的 m 个列向量都是 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解,

习题3—66

66. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明： BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得：

$$CA^T=O\Rightarrow CA^TB^T=O\Rightarrow C(BA)^T=O$$

即 $(BA)^T$ 的 m 个列向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解,亦即 BA 的 m 个行向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.

习题3－66

66. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明：BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得：

$$CA^T = O \Rightarrow CA^T B^T = O \Rightarrow C(BA)^T = O$$

即 $(BA)^T$ 的 m 个列向量都是 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解,亦即 BA 的 m 个行向量都是 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解.又因为矩阵 B 可逆,

习题3—66

66. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明：BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得：

$$CA^T=O\Rightarrow CA^TB^T=O\Rightarrow C(BA)^T=O$$

即 $(BA)^T$ 的 m 个列向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解,亦即 BA 的 m 个行向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.又因为矩阵 B 可逆, 所以

$$r(BA)=r(A)=m$$

习题3—66

66. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明： BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得:

$$CA^T=O \Rightarrow CA^TB^T=O \Rightarrow C(BA)^T=O$$

即 $(BA)^T$ 的 m 个列向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解,亦即 BA 的 m 个行向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.又因为矩阵 B 可逆, 所以

$$r(BA)=r(A)=m=BA\text{的行数}$$

习题3—66

66. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明：BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得：

$$CA^T=O\Rightarrow CA^TB^T=O\Rightarrow C(BA)^T=O$$

即 $(BA)^T$ 的 m 个列向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解,亦即 BA 的 m 个行向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.又因为矩阵 B 可逆, 所以

$$r(BA)=r(A)=m=BA\text{的行数}=\text{基础解系中解向量的个数}$$

习题3—66

66. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵. 证明：BA 的行向量组也是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: 由题设可得：

$$CA^T=O\Rightarrow CA^TB^T=O\Rightarrow C(BA)^T=O$$

即 $(BA)^T$ 的 m 个列向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解,亦即 BA 的 m 个行向量都是 $C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.又因为矩阵 B 可逆, 所以

$$r(BA)=r(A)=m=BA\text{的行数}=\text{基础解系中解向量的个数}$$

故结论成立.

习题3—67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

习题3—67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0$$

习题3－67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0 \Rightarrow r(A)<n$$

习题3—67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0 \Rightarrow r(A)<n \Rightarrow r(A^*)=0\text{或}1.$$

习题3—67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0 \Rightarrow r(A)<n \Rightarrow r(A^*)=0\text{或}1.$$

若 $r(A^*)=0$

习题3—67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0 \Rightarrow r(A)<n \Rightarrow r(A^*)=0\text{或}1.$$

$$\text{若 } r(A^*)=0 \Rightarrow A^*=O,$$

习题3—67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0 \Rightarrow r(A)<n \Rightarrow r(A^*)=0\text{或}1.$$

若 $r(A^*)=0 \Rightarrow A^*=O$,

结论成立.

习题3—67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0 \Rightarrow r(A)<n \Rightarrow r(A^*)=0\text{或}1.$$

若 $r(A^*)=0 \Rightarrow A^*=O$,

结论成立.

若 $r(A^*)=1$

习题3—67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0 \Rightarrow r(A)<n \Rightarrow r(A^*)=0\text{或}1.$$

若 $r(A^*)=0 \Rightarrow A^*=O$,

结论成立.

若 $r(A^*)=1 \Rightarrow A^*$中任意两行（列）线性相关,

习题3—67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0 \Rightarrow r(A)<n \Rightarrow r(A^*)=0\text{或}1.$$

若 $r(A^*)=0 \Rightarrow A^*=O$,

结论成立.

若 $r(A^*)=1 \Rightarrow A^*$中任意两行（列）线性相关, 即成比例.

习题3—67

67. 证明：若 A 是 n 阶矩阵 $(n>1)$,且 $|A|=0$, 则 $|A|$ 中任意两行（列）对应元素的代数余子式成比例.

证:

$$|A|=0 \Rightarrow r(A)<n \Rightarrow r(A^*)=0\text{或}1.$$

若 $r(A^*)=0 \Rightarrow A^*=O$,

结论成立.

若 $r(A^*)=1 \Rightarrow A^*$中任意两行（列）线性相关, 即成比例.

结论成立.

68. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 矩阵, $|A_j|$ 表示 A 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明:

(1) $(-|A_1|, |A_2|, \cdots, (-1)^n|A_n|)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解;

(2) 若 $|A_j|\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, 则 (1) 中的解是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

习题3—68

68. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 矩阵, $|A_j|$ 表示 A 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明:

(1) $(-|A_1|, |A_2|, \cdots, (-1)^n|A_n|)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解;

(2) 若 $|A_j|\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, 则 (1) 中的解是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

证: (1) 在矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的前面加上一行

68. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 矩阵, $|A_j|$ 表示 A 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明:

(1) $(-|A_1|, |A_2|, \cdots, (-1)^n|A_n|)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解;

(2) 若 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, 则 (1) 中的解是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: (1) 在矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的前面加上一行 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$,

习题3—68

68. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 矩阵, $|A_j|$ 表示 A 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明:

(1) $(-|A_1|, |A_2|, \cdots, (-1)^n|A_n|)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解;

(2) 若 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, 则 (1) 中的解是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: (1) 在矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的前面加上一行 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$, 得到 n 阶矩阵 $B=(b_{ij})$.

习题3—68

68. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 矩阵, $|A_j|$ 表示 A 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明:

(1) $(-|A_1|,|A_2|,\cdots,(-1)^n|A_n|)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解;

(2) 若 $|A_j|\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, 则 (1) 中的解是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: (1) 在矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的前面加上一行 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$, 得到 n 阶矩阵 $B=(b_{ij})$.

显然有

习题3—68

68. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 矩阵, $|A_j|$ 表示 A 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明:

(1) $(-|A_1|,|A_2|,\cdots,(-1)^n|A_n|)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解;

(2) 若 $|A_j|\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, 则 (1) 中的解是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: (1) 在矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的前面加上一行 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$, 得到 n 阶矩阵 $B=(b_{ij})$.

显然有 $|B|=0$.

习题3—68

68. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 矩阵, $|A_j|$ 表示 A 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明:

(1) $(-|A_1|, |A_2|, \cdots, (-1)^n|A_n|)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解;

(2) 若 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, 则 (1) 中的解是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: (1) 在矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的前面加上一行 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$, 得到 n 阶矩阵 $B=(b_{ij})$.

显然有 $|B|=0$. 下面考虑:

习题3—68

68. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 矩阵, $|A_j|$ 表示 A 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明:

(1) $(-|A_1|, |A_2|, \cdots, (-1)^n|A_n|)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解;

(2) 若 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, 则 (1) 中的解是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证: (1) 在矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的前面加上一行 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$, 得到 n 阶矩阵 $B=(b_{ij})$.

显然有 $|B|=0$. 下面考虑:

$$b_{i1}M_{11}-b_{i2}M_{12}+b_{i3}M_{13}-\cdots+(-1)^{1+n}b_{in}M_{1n}$$

习题3—68

68. 设 A 是 $(n-1)\times n$ 矩阵, $|A_j|$ 表示 A 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明:

(1) $(-|A_1|,|A_2|,\cdots,(-1)^n|A_n|)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解;

(2) 若 $|A_j|\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零, 则 (1) 中的解是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

证: (1) 在矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的前面加上一行 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$, 得到 n 阶矩阵 $B=(b_{ij})$.

显然有 $|B|=0$. 下面考虑:

$$b_{i1}M_{11}-b_{i2}M_{12}+b_{i3}M_{13}-\cdots+(-1)^{1+n}b_{in}M_{1n}=\begin{cases}|B|=0, & \text{当}i=1\text{时};\\ 0, & \text{当}i>1\text{时}\end{cases}$$

习题3—68

注意到:

习题3—68

注意到：$b_{ij} =$

习题3—68

注意到：$b_{ij}=a_{i-1,j}\quad(i=2,3,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,n)$,

习题3—68

注意到：$b_{ij} = a_{i-1,j} \quad (i = 2, 3, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n)$，
且$M_{1j} = |A_j|$，

习题3—68

注意到：$b_{ij}=a_{i-1,j}\quad(i=2,3,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,n)$，且$M_{1j}=|A_j|$,所以当 $1\le i\le n$ 时, 总有

$$b_{i1}|A_1|-b_{i2}|A_2|+b_13|A_3|-\cdots+(-1)^{1+n}b_{in}|A_n|=0$$

习题3－68

注意到： $b_{ij} = a_{i-1,j} \quad (i = 2, 3, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n)$,
且$M_{1j} = |A_j|$,所以当 $1 \le i \le n$ 时, 总有

$$b_{i1}|A_1| - b_{i2}|A_2| + b_13|A_3| - \cdots + (-1)^{1+n} b_{in}|A_n| = 0$$

两边同时乘以 (-1) 得：

习题3—68

注意到： $b_{ij}=a_{i-1,j}\quad(i=2,3,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,n)$,
且$M_{1j}=|A_j|$,所以当 $1\le i\le n$ 时, 总有

$$b_{i1}|A_1|-b_{i2}|A_2|+b_13|A_3|-\cdots+(-1)^{1+n}b_{in}|A_n|=0$$

两边同时乘以 (-1) 得：

$b_{i1}(-|A_1|)$

习题3—68

注意到：$b_{ij}=a_{i-1,j}\quad(i=2,3,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,n)$，
且$M_{1j}=|A_j|$,所以当 $1\le i\le n$ 时，总有

$$b_{i1}|A_1|-b_{i2}|A_2|+b_13|A_3|-\cdots+(-1)^{1+n}b_{in}|A_n|=0$$

两边同时乘以 (-1) 得：

$b_{i1}(-|A_1|)+b_{i2}|A_2|$

习题3—68

注意到：$b_{ij} = a_{i-1,j} \quad (i = 2, 3, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n)$,
且$M_{1j} = |A_j|$,所以当 $1 \leq i \leq n$ 时, 总有

$$b_{i1}|A_1| - b_{i2}|A_2| + b_13|A_3| - \cdots + (-1)^{1+n} b_{in}|A_n| = 0$$

两边同时乘以 (-1) 得：

$b_{i1}(-|A_1|)+b_{i2}|A_2|+b_{i3}(-|A_3|)+\cdots$

习题3—68

注意到：$b_{ij}=a_{i-1,j}\quad(i=2,3,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,n)$,
且$M_{1j}=|A_j|$,所以当 $1\le i\le n$ 时, 总有

$$b_{i1}|A_1|-b_{i2}|A_2|+b_13|A_3|-\cdots+(-1)^{1+n}b_{in}|A_n|=0$$

两边同时乘以 (-1) 得：

$$b_{i1}(-|A_1|)+b_{i2}|A_2|+b_{i3}(-|A_3|)+\cdots+b_{in}((-1)^n|A_n|)$$

习题3—68

注意到：$b_{ij} = a_{i-1,j} \quad (i = 2, 3, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n)$,
且$M_{1j} = |A_j|$,所以当 $1 \leq i \leq n$ 时, 总有

$$b_{i1}|A_1| - b_{i2}|A_2| + b_13|A_3| - \cdots + (-1)^{1+n} b_{in}|A_n| = 0$$

两边同时乘以 (-1) 得：

$$b_{i1}(-|A_1|) + b_{i2}|A_2| + b_{i3}(-|A_3|) + \cdots + b_{in}((-1)^n|A_n|) = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$$

习题3—68

注意到：$b_{ij}=a_{i-1,j}\quad(i=2,3,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,n)$,
且$M_{1j}=|A_j|$,所以当 $1\le i\le n$ 时，总有

$$b_{i1}|A_1|-b_{i2}|A_2|+b_13|A_3|-\cdots+(-1)^{1+n}b_{in}|A_n|=0$$

两边同时乘以 (-1) 得：

$$b_{i1}(-|A_1|)+b_{i2}|A_2|+b_{i3}(-|A_3|)+\cdots+b_{in}((-1)^n|A_n|)=0(i=1,2,\cdots,n)$$

故结论 (1) 成立.

习题3—68

(2) 由 $|A_j|\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零

习题3—68

(2) 由 $|A_j|$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 不全为零$\Rightarrow$ $r(A) \geq n - 1$,

习题3—68

(2) 由 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零 $\Rightarrow$ $r(A)\geq n-1$, 另一方面又显然有

习题3—68

(2) 由 $|A_j|\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零$\Rightarrow$ $r(A)\geq n-1$, 另一方面又显然有 $r(A)\leq n-1$,

习题3—68

(2) 由 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零$\Rightarrow$ $r(A)\geq n-1$, 另一方面又显然有 $r(A)\leq n-1$, 所以

$$r(A)=n-1.$$

习题3—68

(2) 由 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零 $\Rightarrow$ $r(A)\geq n-1$, 另一方面又显然有 $r(A)\leq n-1$, 所以

$$r(A)=n-1.$$

于是方程组的基础解系中解向量的个数为

习题3—68

(2) 由 $|A_j|\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零$\Rightarrow$ $r(A)\geq n-1$, 另一方面又显然有 $r(A)\leq n-1$, 所以

$$r(A)=n-1.$$

于是方程组的基础解系中解向量的个数为

$$n-r(A)$$

习题3—68

(2) 由 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零 $\Rightarrow$ $r(A)\geq n-1$, 另一方面又显然有 $r(A)\leq n-1$, 所以

$$r(A)=n-1.$$

于是方程组的基础解系中解向量的个数为

$$n-r(A)=n-(n-1)=1.$$

习题3—68

(2) 由 $|A_j|$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 不全为零 $\Rightarrow$ $r(A) \geq n - 1$, 另一方面又显然有 $r(A) \leq n - 1$, 所以

$$r(A) = n - 1.$$

于是方程组的基础解系中解向量的个数为

$$n - r(A) = n - (n - 1) = 1.$$

又因为 (1) 中的解为非零解,

习题3—68

(2) 由 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零 $\Rightarrow$ $r(A)\geq n-1$, 另一方面又显然有 $r(A)\leq n-1$, 所以

$$r(A)=n-1.$$

于是方程组的基础解系中解向量的个数为

$$n-r(A)=n-(n-1)=1.$$

又因为 (1) 中的解为非零解, 从而线性无关,

习题3—68

(2) 由 $|A_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零 $\Rightarrow$ $r(A) \geq n-1$, 另一方面又显然有 $r(A) \leq n-1$, 所以

$$r(A) = n-1.$$

于是方程组的基础解系中解向量的个数为

$$n - r(A) = n - (n-1) = 1.$$

又因为 (1) 中的解为非零解, 从而线性无关, 所以 (1) 中的解是一个基础解系.

习题3—69

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明

$$r(A) + r(A - I) = n.$$

习题3—69

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明

$$r(A) + r(A - I) = n.$$

证: 一方面

$$r(A) + r(A - I)$$

习题3—69

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明

$$r(A) + r(A - I) = n.$$

证: 一方面

$$r(A) + r(A - I) = r(A) + r(I - A)$$

习题3—69

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明

$$r(A) + r(A - I) = n.$$

证: 一方面

$$r(A) + r(A - I) = r(A) + r(I - A) \geq r(A + I - A)$$

习题3—69

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明

$$r(A) + r(A - I) = n.$$

证: 一方面

$$r(A) + r(A - I) = r(A) + r(I - A) \geq r(A + I - A) = r(I) = n$$

习题3—69

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明

$$r(A) + r(A - I) = n.$$

证: 一方面

$$r(A) + r(A - I) = r(A) + r(I - A) \geq r(A + I - A) = r(I) = n$$

另一方面

$$A^2 = A$$

习题3—69

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明

$$r(A) + r(A - I) = n.$$

证: 一方面

$$r(A) + r(A - I) = r(A) + r(I - A) \geq r(A + I - A) = r(I) = n$$

另一方面

$$A^2 = A \Rightarrow A^2 - A = O$$

习题3—69

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2=A$, 证明

$$r(A)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面

$$r(A)+r(A-I)=r(A)+r(I-A)\geq r(A+I-A)=r(I)=n$$

另一方面

$$A^2=A \Rightarrow A^2-A=O \Rightarrow A(A-I)=O$$

习题3－69

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明

$$r(A) + r(A - I) = n.$$

证: 一方面

$$r(A) + r(A - I) = r(A) + r(I - A) \geq r(A + I - A) = r(I) = n$$

另一方面

$$A^2 = A \Rightarrow A^2 - A = O \Rightarrow A(A - I) = O$$

$$\Rightarrow r(A) + r(A - I) \leq n$$

综合可得

习题3—69

69. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明

$$r(A) + r(A - I) = n.$$

证: 一方面

$$r(A) + r(A - I) = r(A) + r(I - A) \geq r(A + I - A) = r(I) = n$$

另一方面

$$A^2 = A \Rightarrow A^2 - A = O \Rightarrow A(A - I) = O$$

$$\Rightarrow r(A) + r(A - I) \leq n$$

综合可得

$$r(A) + r(A - I) = n.$$

习题3—70

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = I$, 证明

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

习题3—70

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = I$, 证明

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面

$r(A+I)+r(A-I)$

习题3—70

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = I$, 证明

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面

$$r(A+I)+r(A-I)=r(A+I)+r(I-A)$$

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = I$, 证明

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面

$$r(A+I)+r(A-I)=r(A+I)+r(I-A)\geq r(A+I+I-A)$$

习题3—70

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = I$, 证明

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面

$$r(A+I)+r(A-I)=r(A+I)+r(I-A)\geq r(A+I+I-A)=r(2I)=n$$

习题3—70

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = I$, 证明

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面

$$r(A+I)+r(A-I)=r(A+I)+r(I-A)\geq r(A+I+I-A)=r(2I)=n$$

另一方面

$A^2 = I$

习题3—70

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = I$, 证明

$$r(A+I) + r(A-I) = n.$$

证: 一方面

$$r(A+I)+r(A-I) = r(A+I)+r(I-A) \geq r(A+I+I-A) = r(2I) = n$$

另一方面

$$A^2 = I \Rightarrow A^2 - A = O$$

习题3—70

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = I$, 证明

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面

$$r(A+I)+r(A-I)=r(A+I)+r(I-A)\geq r(A+I+I-A)=r(2I)=n$$

另一方面

$$A^2=I \Rightarrow A^2-A=O \Rightarrow (A+I)(A-I)=O$$

习题3—70

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2=I$, 证明

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面

$$r(A+I)+r(A-I)=r(A+I)+r(I-A)\geq r(A+I+I-A)=r(2I)=n$$

另一方面

$$A^2=I\Rightarrow A^2-A=O\Rightarrow (A+I)(A-I)=O\Rightarrow r(A+I)+r(A-I)\leq n$$

综合可得

习题3—70

70. 若 A 为一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = I$, 证明

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

证: 一方面

$$r(A+I)+r(A-I)=r(A+I)+r(I-A)\geq r(A+I+I-A)=r(2I)=n$$

另一方面

$$A^2=I \Rightarrow A^2-A=O \Rightarrow (A+I)(A-I)=O \Rightarrow r(A+I)+r(A-I)\leq n$$

综合可得

$$r(A+I)+r(A-I)=n.$$

习题3—71

71. 设 A, B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

习题3—71

71. 设 A, B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

证: 由练习15的结论可知：

习题3—71

71. 设 A, B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

证: 由练习15的结论可知：

$$r(A) + r(B)$$

71. 设 A, B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

证: 由练习15的结论可知:

$$r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

习题3—71

71. 设 A, B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

证: 由练习15的结论可知：

$$r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix}$$

习题3—71

71. 设 A,B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n.$$

证: 由练习15的结论可知:

$$r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\leq r\begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix}$$

$$=r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & B \end{pmatrix}$$

习题3—71

71. 设 A, B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

证: 由练习15的结论可知:

$$r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & O \end{pmatrix}$$

71. 设 A, B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

证: 由练习15的结论可知:

$$r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & O \end{pmatrix} = r(I) + r(-AB)$$

习题3—71

71. 设 A, B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

证: 由练习15的结论可知:

$$r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & O \end{pmatrix} = r(I) + r(-AB) = n + r(AB)$$

习题3—71

71. 设 A, B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

证: 由练习15的结论可知:

$$r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & O \end{pmatrix} = r(I) + r(-AB) = n + r(AB)$$

于是得到

习题3—71

71. 设 A, B 皆为 n 阶方阵，证明

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

证: 由练习15的结论可知:

$$r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & O \end{pmatrix} = r(I) + r(-AB) = n + r(AB)$$

于是得到 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$

习题3—72

72. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$. 证明: 如果

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

习题3—72

72. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$. 证明: 如果

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \; i = 1, 2, \cdots, n,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证: 用反证法.

习题3—72

72. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$. 证明: 如果

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证: 用反证法. 假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关,

习题3—72

72. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^T\ \ (j=1,2,\cdots,n)$. 证明: 如果

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\ i=1,2,\cdots,n,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证: 用反证法. 假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 则齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 有非零解.

72. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^T\ \ (j=1,2,\cdots,n)$. 证明: 如果

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\ i=1,2,\cdots,n,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证: 用反证法. 假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 则齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 有非零解.设非零解为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

72. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$. 证明: 如果

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证: 用反证法. 假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 则齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$ 有非零解.设非零解为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中

$$x_i \geq x_j (j \neq i).$$

习题3—72

72. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$. 证明: 如果

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证: 用反证法. 假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 则齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$ 有非零解.设非零解为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中

$$x_i \geq x_j (j \neq i).$$

习题3—72

于是由

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

习题3—72

于是由

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

得到

$$|a_{ii}||x_i| = -|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_j|$$

习题3—72

于是由

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

得到

$$|a_{ii}||x_i| = -|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

习题3—72

于是由

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

得到

$$|a_{ii}||x_i| = -|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

即

$$|a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\frac{|x_j|}{|x_i|}$$

习题3—72

于是由

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

得到

$$|a_{ii}||x_i| = -|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

即

$$|a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

习题3—72

于是由

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

得到

$$|a_{ii}||x_i| = -|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

即

$$|a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

矛盾!

第四章　向量空间与线性变换

赵 燕 芬

Email: wangzhaoyanfen@gmail.com

武汉大学　数学与统计学院

2007 年 12 月 3 日

习题4—7

7. 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一个线性组合正交.

习题4—7

7. 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一个线性组合正交.

证: 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合,

习题4—7

7. 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一个线性组合正交.

证: 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合,注意到 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0 \ \ (i = 1, 2, \cdots, m)$

习题4—7

7. 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一个线性组合正交.

证: 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合,注意到 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0 \ \ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 则

习题4—7

7. 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一个线性组合正交.

证: 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合,注意到 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0 \ \ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 则

$$(\boldsymbol{\beta}, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m)$$

习题4—7

7. 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一个线性组合正交.

证: 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合,注意到 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i)=0\ \ (i=1,2,\cdots,m)$ 则

$$(\boldsymbol{\beta},k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)$$

$$=k_1(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_m)$$

习题4—7

7. 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一个线性组合正交.

证: 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合,注意到 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$ 则

$$(\boldsymbol{\beta}, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m)$$

$$= k_1(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_m(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_m)$$

$$= 0.$$

习题4—7

7. 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一个线性组合正交.

证: 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合,注意到 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0 \ \ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 则

$$(\boldsymbol{\beta}, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m)$$

$$= k_1(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_m(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_m)$$

$$= 0.$$

即结论成立.