§ 1.2 n 阶行列式的计算

行列式的计算

行列式的计算是线性代数这门课程的重点，也是难点.

行列式的计算

行列式的计算是线性代数这门课程的重点，也是难点. 在计算行列式时，我们应该首先观察其元素特点，再根据特点寻找合适的方法.

行列式的计算

行列式的计算是线性代数这门课程的重点，也是难点. 在计算行列式时，我们应该首先观察其元素特点，再根据特点寻找合适的方法. 行列式的计算方法很多，在这里我们通过例子介绍几种常用的方法.

低阶行列式的计算

- 对于三阶数字行列式，可以直接用定义或沙路法；除此之外，经常用到化三角行列式法和降阶法.

低阶行列式的计算

- 对于三阶数字行列式，可以直接用定义或沙路法；除此之外，经常用到化三角行列式法和降阶法.

例1. 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix}$.

低阶行列式的计算

- 对于三阶数字行列式，可以直接用定义或沙路法；除此之外，经常用到化三角行列式法和降阶法.

例1. 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix}$.

解: 利用沙路法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

- 对于三阶数字行列式，可以直接用定义或沙路法；除此之外，经常用到化三角行列式法和降阶法.

例1. 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix}$.

解: 利用沙路法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times 101 + 2 \times (-1) \times 202 + 1 \times 4 \times 199$$

低阶行列式的计算

- 对于三阶数字行列式，可以直接用定义或沙路法；除此之外，经常用到化三角行列式法和降阶法.

例1. 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix}$.

解: 利用沙路法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & 2 \times 1 \times 101 + 2 \times (-1) \times 202 + 1 \times 4 \times 199 \\ & -1 \times 1 \times 202 - 2 \times (-1) \times 199 - 2 \times 4 \times 101 \end{aligned}$$

低阶行列式的计算

- 对于三阶数字行列式，可以直接用定义或沙路法；除此之外，经常用到化三角行列式法和降阶法.

例1. 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix}$.

解: 利用沙路法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & 2\times 1\times 101 + 2\times(-1)\times 202 + 1\times 4\times 199 \\ & -1\times 1\times 202 - 2\times(-1)\times 199 - 2\times 4\times 101. \end{aligned}$$

$$= -18.$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix}$$

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2}$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1\times 100]{r_2+r_1}$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1\times 100]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1\times 100]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1\times 100]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

另解: 降阶法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1\times 100]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

另解: 降阶法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3\times 2}$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1\times 100]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

另解: 降阶法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3\times 2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 199 & 101 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1\times 100]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

另解: 降阶法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3\times 2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 199 & 101 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1}$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1\times 100]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

另解: 降阶法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3\times 2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 199 & 101 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1} (-1)^{2+1} \times 6 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 199 & 101 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1\times 100]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

另解: 降阶法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3\times 2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 199 & 101 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1} (-1)^{2+1} \times 6 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 199 & 101 \end{vmatrix} = (-6) \times (2 \times 101 - 1 \times 199)$$

低阶行列式的计算

另解: 化为三角行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 206 & 200 & 100 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1\times 100]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

另解: 降阶法

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 202 & 199 & 101 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3\times 2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 199 & 101 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}c_1} (-1)^{2+1}\times 6\times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 199 & 101 \end{vmatrix} = (-6)\times(2\times 101-1\times 199) = -18.$$

说明

- 将行列式化为三角行列式一般是化为上三角行列式, 下面会讲“标准程序”;

说明

- 将行列式化为三角行列式一般是化为上三角行列式, 下面会讲“标准程序”;
- 降阶法及定义都是用低阶行列式表示高阶行列式, 但是如果直接用定义，并没有减少计算量,

说明

- 将行列式化为三角行列式一般是化为上三角行列式, 下面会讲"标准程序";
- 降阶法及定义都是用低阶行列式表示高阶行列式, 但是如果直接用定义，并没有减少计算量, 而降阶法是先将行列式的某行（列）化为只有一个非零元，再按此行（列）展开，从而达到简化的目的.

说明

- 将行列式化为三角行列式一般是化为上三角行列式, 下面会讲“标准程序”;
- 降阶法及定义都是用低阶行列式表示高阶行列式, 但是如果直接用定义，并没有减少计算量, 而降阶法是先将行列式的某行（列）化为只有一个非零元，再按此行（列）展开，从而达到简化的目的.
- 对于文字行列式，一般用降阶法，可以便于发现规律，如因式分解等.

低阶行列式的计算

例2. 已知$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

低阶行列式的计算

例2. 已知 $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

解: $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

例2. 已知$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

解: $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3}$

低阶行列式的计算

例2. 已知$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

解: $$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

例2. 已知$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

解: $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$\overset{c_3-c_1}{=\!=\!=}$

低阶行列式的计算

例2. 已知$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

解: $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$\overset{c_3-c_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+4 & -3 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

低阶行列式的计算

例2. 已知 $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

解:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+4 & -3 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_1}$$

低阶行列式的计算

例2. 已知$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=0$, 求$\lambda$.

解: $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$$\overset{c_3-c_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+4 & -3 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{\text{展开}}{\overset{\text{按}r_1}{=\!=\!=}} (\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

例2. 已知 $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

解: $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+4 & -3 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_1} (\lambda+3) \begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)[(\lambda+4)(\lambda-1)-6]$$

低阶行列式的计算

例2. 已知$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

解: $$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3-c_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+4 & -3 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{\text{按}r_1}{\underset{\text{展开}}{=\!=\!=}} (\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)[(\lambda+4)(\lambda-1)-6] = (\lambda+3)(\lambda+5)(\lambda-2) = 0.$$

低阶行列式的计算

例2. 已知 $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

解: $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$$\overset{c_3-c_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+4 & -3 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{\text{展开}}{\overset{\text{按}r_1}{=\!=\!=}} (\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)[(\lambda+4)(\lambda-1)-6] = (\lambda+3)(\lambda+5)(\lambda-2) = 0.$$

因此

低阶行列式的计算

例2. 已知 $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, 求$\lambda$.

解:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda+4 & -5 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3-c_1}{=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+4 & -3 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{\text{按}r_1}{\underset{\text{展开}}{=\!=}} (\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)[(\lambda+4)(\lambda-1)-6] = (\lambda+3)(\lambda+5)(\lambda-2) = 0.$$

因此 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = 2.$

低阶行列式的计算

例3. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

低阶行列式的计算

例3. 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

例3. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1 \times 2}}$$

低阶行列式的计算

例3. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1 \times 2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2 \times 2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2 \times 2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 1 \times (-3) \times (-19) = 57.$$

低阶行列式的计算

例4. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$.

低阶行列式的计算

例4. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$.

分析:　这里第 1 行第 1 列的数是 2 ,如果直接利用它将第 1 列的其余元素化为 0，会出现分数，不便于计算.

低阶行列式的计算

例4. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$.

分析: 这里第 1 行第 1 列的数是 2 ,如果直接利用它将第 1 列的其余元素化为 0，会出现分数，不便于计算.

解:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$$

例4. 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$.

分析: 这里第 1 行第 1 列的数是 2 ,如果直接利用它将第 1 列的其余元素化为 0，会出现分数，不便于计算.

解:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_1}$$

低阶行列式的计算

例4. 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$.

分析: 这里第 1 行第 1 列的数是 2 ,如果直接利用它将第 1 列的其余元素化为 0，会出现分数，不便于计算.

解:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - r_1 \times 2, \quad r_4 - r_1 \times 4]{r_2 + r_1 \times 3}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1\times 2,\quad r_4-r_1\times 4]{r_2+r_1\times 3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - r_1 \times 2, \quad r_4 - r_1 \times 4]{r_2 + r_1 \times 3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 10 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - r_3}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 14 & 19 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - r_1 \times 2, \quad r_4 - r_1 \times 4]{r_2 + r_1 \times 3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 10 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - r_3 \times 2}$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - r_3 \times 2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -58 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - r_3 \times 2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -58 \end{vmatrix} = 1 \times 7 \times 4 \times (-58)$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - r_3 \times 2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -58 \end{vmatrix} = 1 \times 7 \times 4 \times (-58) = -1624.$$

例5. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$.

低阶行列式的计算

例5. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$.

分析: 此行列式的特点是各行（列）的元素之和相等.

低阶行列式的计算

例5. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$.

分析: 此行列式的特点是各行（列）的元素之和相等.

解:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

例5. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$.

分析: 此行列式的特点是各行（列）的元素之和相等.

解:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}$$

例5. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$.

分析: 此行列式的特点是各行（列）的元素之和相等.

解:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} =$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1} (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1} (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+3a)(x-a)^3.$$

低阶行列式的计算

分析:

低阶行列式的计算

分析: 因为行列式中有很多元素相同，做行（列）减法会出现较多 0 .

低阶行列式的计算

分析: 因为行列式中有很多元素相同，做行（列）减法会出现较多 0 .

另解:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

分析: 因为行列式中有很多元素相同，做行（列）减法会出现较多 0 .

另解:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1}$$

低阶行列式的计算

分析: 因为行列式中有很多元素相同，做行（列）减法会出现较多 0 .

另解:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

分析: 因为行列式中有很多元素相同，做行（列）减法会出现较多 0 .

另解:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

爪型行列式

低阶行列式的计算

分析: 因为行列式中有很多元素相同，做行（列）减法会出现较多 0 .

另解:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

爪型行列式

爪型行列式总可以通过列（行）变换化为上（下）三角行列式.

低阶行列式的计算

分析: 因为行列式中有很多元素相同，做行（列）减法会出现较多 0 .

另解:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

爪型行列式

爪型行列式总可以通过列（行）变换化为上（下）三角行列式.

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_1+c_2+c_3+c_4}}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+3a)(x-a)^3.$$

低阶行列式的计算

分析:

分析: 由解法 2 可以看到,如果第 1 行第 1 列的元素为 a ,那么很容易将它化为上三角行列式.

低阶行列式的计算

分析: 由解法 2 可以看到,如果第 1 行第 1 列的元素为 a ,那么很容易将它化为上三角行列式.

另解:

$$D_4 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

分析: 由解法 2 可以看到,如果第 1 行第 1 列的元素为 a ,那么很容易将它化为上三角行列式.

另解:

$$D_4 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

分析: 由解法 2 可以看到,如果第 1 行第 1 列的元素为 a , 那么很容易将它化为上三角行列式.

另解:

$$D_4 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

分析: 由解法 2 可以看到,如果第 1 行第 1 列的元素为 a ,那么很容易将它化为上三角行列式.

另解:

$$D_4 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

分析: 由解法 2 可以看到,如果第 1 行第 1 列的元素为 a ,那么很容易将它化为上三角行列式.

另解:

$$D_4 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$= a(x-a)^3$$

低阶行列式的计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$= a(x-a)^3 + (x-a)D_3$$

低阶行列式的计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$= a(x-a)^3 + (x-a)D_3 = a(x-a)^3 + (x-a)\underline{[a(x-a)^2 + (x-a)D_2]}$$

低阶行列式的计算

$$= a(x-a)^3 + (x-a)\underline{\{a(x-a)^2 + (x-a)\underline{[a(x-a) + (x-a)D_1]}\}}$$

低阶行列式的计算

$$= a(x-a)^3 + (x-a)\underline{\{a(x-a)^2 + (x-a)\underline{[a(x-a) + (x-a)D_1]}\}}$$

$$= a(x-a)^3 + (x-a)[a(x-a)^2 + (x-a)^2(x+a)]$$

低阶行列式的计算

$$= a(x-a)^3 + (x-a)\underline{\{a(x-a)^2 + (x-a)\underline{[a(x-a) + (x-a)D_1]}\}}$$

$$= a(x-a)^3 + (x-a)[a(x-a)^2 + (x-a)^2(x+a)]$$

$$a(x-a)^3 + [x - a(x-a)^2(x+2a)]$$

低阶行列式的计算

$$= a(x-a)^3 + (x-a)\underline{\{a(x-a)^2 + (x-a)\underline{[a(x-a) + (x-a)D_1]}\}}$$

$$= a(x-a)^3 + (x-a)[a(x-a)^2 + (x-a)^2(x+a)]$$

$$a(x-a)^3 + [x - a(x-a)^2(x+2a)] = (x-a)^3(x+3a).$$

低阶行列式的计算

$$= a(x-a)^3 + (x-a)\underline{\{a(x-a)^2 + (x-a)\underline{[a(x-a) + (x-a)D_1]}\}}$$

$$= a(x-a)^3 + (x-a)[a(x-a)^2 + (x-a)^2(x+a)]$$

$$a(x-a)^3 + [x-a(x-a)^2(x+2a)] = (x-a)^3(x+3a).$$

说明： 本题的方法可以推广到 n 阶行列式.

练习：计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

练习：计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

n 阶行列式的计算

例6. 计算$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n. \end{vmatrix}$

例6. 计算$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

解:

$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - r_1}$$

例6. 计算$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n. \end{vmatrix}$

解:

$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x. \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x. \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因式}]{\text{每列提取}}(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_i}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=\!=\!=\!=}}$$

低阶行列式的计算

$$(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i}(a_1-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x}+\cdots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$(a_1-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x}+\cdots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$(a_1-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x}+\cdots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)(\frac{a_1}{a_1-x}+\frac{x}{a_2-x}+\cdots+\frac{x}{a_n-x})$$

例7. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

解:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_{i-1}}$$

低阶行列式的计算

解:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \overset{r_i - r_{i-1}}{\underset{i=3,4}{=\!=\!=\!=}}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[i=3,4]{r_i - r_{i-1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[i=3,4]{r_i - r_{i-1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - r_3}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[i=3,4]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[i=3,4]{r_i - r_{i-1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

例8. 设$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 380$, 求:

(1) $A_{12} + A_{22} + A_{32} + A_{42}$; (2) $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$;

(3) $M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14}$.

例8. 设$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 380$, 求:

(1) $A_{12} + A_{22} + A_{32} + A_{42}$; (2) $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$;

(3) $M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14}$.

解: (1)

$$A_{12} + A_{22} + A_{32} + A_{42} =$$

解: (1)

$$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=\frac{1}{2}(2A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+2A_{42})$$

低阶行列式的计算

解: (1)

$$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=\frac{1}{2}(2A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+2A_{42})$$

$$=\frac{1}{2}D_4$$

低阶行列式的计算

解: (1)

$$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=\frac{1}{2}(2A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+2A_{42})$$

$$=\frac{1}{2}D_4=190.$$

低阶行列式的计算

解: (1)

$$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=\frac{1}{2}(2A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+2A_{42})$$

$$=\frac{1}{2}D_4=190.$$

(2)

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=0$$

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=$

低阶行列式的计算

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1\times 4]{r_2-r_1\times 2}$$

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1\times 4]{r_2-r_1\times 2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1\times 4]{r_2-r_1\times 2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}$$

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1\times 4]{r_2-r_1\times 2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1\times 2}{\underset{r_4-r_1\times 4}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix} \overset{r_3-r_2\times 2}{\underset{r_4-r_2\times 3}{=\!=\!=\!=}}$$

低阶行列式的计算

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1\times 4]{r_2-r_1\times 2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2\times 3]{r_3-r_2\times 2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & -9 & 21 \end{vmatrix}
$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & -9 & 21 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & -9 & 21 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - r_3 \times 9}$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & -9 & 21 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3\times 9} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -123 \end{vmatrix}$$

低阶行列式的计算

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & -9 & 21 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3\times 9} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -123 \end{vmatrix} = -246.$$

重要例子——奇数阶反对称行列式

例9. 如果行列式 $D=|a_{ij}|$ 的元素满足

$a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 D 是反对称行列式(其中 $a_{ii}=0,\ i=1,2,\cdots,n)$. 证明：奇数阶反对称行列式的值为 0 .

证:

$$设D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

重要例子——奇数阶反对称行列式

例9. 如果行列式 $D=|a_{ij}|$ 的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 D 是反对称行列式(其中 $a_{ii}=0,\ i=1,2,\cdots,n)$. 证明：奇数阶反对称行列式的值为 0 .

证:

设$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$,则$D^T=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

重要例子——奇数阶反对称行列式

$$D \xlongequal{\text{性质 } 1} D^T = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

重要例子——奇数阶反对称行列式

$$D \xlongequal{\text{性质 }1} D^T = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因数}]{\text{提取}}$$

重要例子——奇数阶反对称行列式

$$D \xlongequal{\text{性质 }1} D^T = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因数}]{\text{提取}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

重要例子——奇数阶反对称行列式

$$D \xlongequal{\text{性质 }1} D^T = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因数}]{\text{提取}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

重要例子——奇数阶反对称行列式

$$D \xlongequal{\text{性质 } 1} D^T = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因数}]{\text{提取}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

因为 n 为奇数,

重要例子——奇数阶反对称行列式

$$D \xlongequal{\text{性质 1}} D^T = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因数}]{\text{提取}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

因为 n 为奇数，所以有 $D = -D$,从而

$$D = 0.$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

例10. 证明范德蒙（Vandermonder）行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j).$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

说明：

- 连乘积 $\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

说明：

- 连乘积 $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})$,

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

说明：

- 连乘积 $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})$, 是满足条件 $1\le j<i\le n$ 的所有因子 (x_i-x_j) 的乘积.

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

说明：

- 连乘积 $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})$，是满足条件 $1\le j<i\le n$ 的所有因子 (x_i-x_j) 的乘积.
- 范德蒙（Vandermonder）行列式的特点：

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

说明：

- 连乘积 $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})$, 是满足条件 $1\le j<i\le n$ 的所有因子 (x_i-x_j) 的乘积.
- 范德蒙（Vandermonder）行列式的特点：每列（行）元素是同一个数的不同方幂，

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

说明：

- 连乘积 $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})$，是满足条件 $1\le j<i\le n$ 的所有因子 (x_i-x_j) 的乘积.
- 范德蒙（Vandermonder）行列式的特点：每列（行）元素是同一个数的不同方幂，从上到下(从左到右) 按升幂排列，

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

说明：

- 连乘积 $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})$，是满足条件 $1\le j<i\le n$ 的所有因子 (x_i-x_j) 的乘积.
- 范德蒙（Vandermonder）行列式的特点：每列（行）元素是同一个数的不同方幂，从上到下(从左到右) 按升幂排列，次数从 0 到 $n-1$.

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

证:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

证:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - x_n r_{i-1}}$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - x_n r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & x_{n-1} - x_n & 0 \\ x_1^2 - x_1 x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \cdots & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n & 0 \end{vmatrix}$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - x_n r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & x_{n-1} - x_n & 0 \\ x_1^2 - x_1 x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \cdots & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\cdots(x_{n-1} - x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$V_n = (-1)^{1+n}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$V_n = (-1)^{1+n}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})V_{n-1}$$

$$= \prod_{1 \le i \le n-1} (x_n - x_i) V_{n-1}$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$= \prod_{1\leq i\leq n-1}(x_n - x_i)V_{n-1} = \prod_{1\leq i\leq n-1}(x_n - x_i)$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)V_{n-1} = \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)V_{n-2}$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)V_{n-1} = \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)V_{n-2}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)V_{n-1} = \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)V_{n-2}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)V_{n-1} = \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)V_{n-2}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)\cdots\prod_{i=1,2}(x_3 - x_i)V_2$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)V_{n-1} = \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)V_{n-2}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)\cdots\prod_{i=1,2}(x_3 - x_i)V_2$$

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)\cdots\prod_{i=1,2}(x_3 - x_i)$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)V_{n-1} = \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)V_{n-2}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)\cdots\prod_{i=1,2}(x_3 - x_i)V_2$$

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)\cdots\prod_{i=1,2}(x_3 - x_i)(x_2 - x_1)$$

重要例子——范德蒙（Vandermonder）行列式

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)V_{n-1} = \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)V_{n-2}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)\cdots\prod_{i=1,2}(x_3 - x_i)V_2$$

$$= \prod_{1\le i\le n-1}(x_n - x_i)\prod_{1\le i\le n-2}(x_{n-1} - x_i)\cdots\prod_{i=1,2}(x_3 - x_i)(x_2 - x_1)$$

$$= \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j).$$

重要例子——分块行列式

例11. 证明$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

重要例子——分块行列式

证: 记

$$|A| = |a_{ij}|_1^k, \quad |B| = |b_{ij}|_1^m.$$

重要例子——分块行列式

证: 记

$$|A| = |a_{ij}|_1^k, \quad |B| = |b_{ij}|_1^m.$$

对 $|A|$ 的阶数用数学归纳法.

重要例子——分块行列式

证: 记

$$|A| = |a_{ij}|_1^k, \quad |B| = |b_{ij}|_1^m.$$

对 $|A|$ 的阶数用数学归纳法.

当 $k = 1$ 时, $|A| = |a_{11}|$,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

重要例子——分块行列式

证: 记

$$|A| = |a_{ij}|_1^k, \quad |B| = |b_{ij}|_1^m.$$

对 $|A|$ 的阶数用数学归纳法.

当 $k=1$ 时, $|A| = |a_{11}|$,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{\underset{\text{展开}}{\text{按}_{r_1}}}}$$

重要例子——分块行列式

证: 记

$$|A| = |a_{ij}|_1^k, \quad |B| = |b_{ij}|_1^m.$$

对 $|A|$ 的阶数用数学归纳法.

当 $k = 1$ 时, $|A| = |a_{11}|$,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}_{r_1}} a_{11}|B|$$

重要例子——分块行列式

证: 记

$$|A| = |a_{ij}|_1^k, \quad |B| = |b_{ij}|_1^m.$$

对 $|A|$ 的阶数用数学归纳法.

当 $k=1$ 时, $|A| = |a_{11}|$,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}_{r_1}} a_{11}|B| = |a_{11}||B|$$

重要例子——分块行列式

证: 记

$$|A| = |a_{ij}|_1^k, \quad |B| = |b_{ij}|_1^m.$$

对 $|A|$ 的阶数用数学归纳法.

当 $k=1$ 时, $|A| = |a_{11}|$,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}r_1} a_{11}|B| = |a_{11}||B| = |A||B|.$$

重要例子——分块行列式

假设当 $|A|$ 为 $k-1$ 阶时，结论成立.

重要例子——分块行列式

假设当 $|A|$ 为 $k-1$ 阶时，结论成立.下面考虑 $|A|$ 为 k 阶的情形：

重要例子——分块行列式

假设当 $|A|$ 为 $k-1$ 阶时，结论成立.下面考虑 $|A|$ 为 k 阶的情形：将 D 按第一行展开得

重要例子——分块行列式

假设当 $|A|$ 为 $k-1$ 阶时，结论成立.下面考虑 $|A|$ 为 k 阶的情形：将 D 按第一行展开得

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^D + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^D + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^D$$

这里 M_{1j}^D 表示 a_{1j} 在行列式 D 中的余子式 $j = 1, 2, \cdots, k$.

重要例子——分块行列式

假设当 $|A|$ 为 $k-1$ 阶时，结论成立.下面考虑 $|A|$ 为 k 阶的情形：将 D 按第一行展开得

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^D + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^D + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^D$$

这里 M_{1j}^D 表示 a_{1j} 在行列式 D 中的余子式 $j = 1, 2, \cdots, k$.容易看出 M_{1j}^D 是与 D 同类型的行列式，

重要例子——分块行列式

假设当 $|A|$ 为 $k-1$ 阶时，结论成立.下面考虑 $|A|$ 为 k 阶的情形：将 D 按第一行展开得

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^D + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^D + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^D$$

这里 M_{1j}^D 表示 a_{1j} 在行列式 D 中的余子式 $j = 1, 2, \cdots, k$.容易看出 M_{1j}^D 是与 D 同类型的行列式，并且其左上角是 $k-1$ 阶的，

重要例子——分块行列式

假设当 $|A|$ 为 $k-1$ 阶时，结论成立.下面考虑 $|A|$ 为 k 阶的情形：将 D 按第一行展开得

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^D + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^D + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^D$$

这里 M_{1j}^D 表示 a_{1j} 在行列式 D 中的余子式 $j = 1, 2, \cdots, k$.容易看出 M_{1j}^D 是与 D 同类型的行列式，并且其左上角是 $k-1$ 阶的，由归纳假设有：

重要例子——分块行列式

假设当 $|A|$ 为 $k-1$ 阶时，结论成立.下面考虑 $|A|$ 为 k 阶的情形：将 D 按第一行展开得

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^D + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^D + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^D$$

这里 M_{1j}^D 表示 a_{1j} 在行列式 D 中的余子式 $j = 1, 2, \cdots, k$.容易看出 M_{1j}^D 是与 D 同类型的行列式，并且其左上角是 $k-1$ 阶的，由归纳假设有：

$$M_{1j}^D = M_{1j}^{|A|}|B| \quad j = 1, 2, \cdots, k.$$

其中 $M_{1j}^{|A|}$ 表示 a_{1j} 在行列式 $|A|$ 中的余子式.

重要例子——分块行列式

假设当 $|A|$ 为 $k-1$ 阶时，结论成立.下面考虑 $|A|$ 为 k 阶的情形：将 D 按第一行展开得

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^D + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^D + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^D$$

这里 M_{1j}^D 表示 a_{1j} 在行列式 D 中的余子式 $j = 1, 2, \cdots, k$.容易看出 M_{1j}^D 是与 D 同类型的行列式，并且其左上角是 $k-1$ 阶的，由归纳假设有：

$$M_{1j}^D = M_{1j}^{|A|}|B| \quad j = 1, 2, \cdots, k.$$

其中 $M_{1j}^{|A|}$ 表示 a_{1j} 在行列式 $|A|$ 中的余子式. 于是

重要例子——分块行列式

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^D + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^D + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^D$$

重要例子——分块行列式

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^D + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^D + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^D$$

$$= [a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^{|A|} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^{|A|} + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^{|A|}]|B|$$

重要例子——分块行列式

$$D = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^{D} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^{D} + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^{D}$$

$$= [a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}^{|A|} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}^{|A|} + \cdots + a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^{|A|}]|B|$$

$$= |A||B|.$$

于是所证结论成立.

关于分块行列式的几点说明

(1) 上例的结论可以简记为

$$D = \begin{vmatrix} A & O \\ \star & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

关于分块行列式的几点说明

(1) 上例的结论可以简记为

$$D=\begin{vmatrix} A & O \\ \star & B \end{vmatrix}=|A||B|.$$

(2) 类似的方法可以证明

$$D=\begin{vmatrix} A & \star \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|.$$

关于分块行列式的几点说明

(1) 上例的结论可以简记为

$$D = \begin{vmatrix} A & O \\ \star & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

(2) 类似的方法可以证明

$$D = \begin{vmatrix} A & \star \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

(3) 注意

$$D = \begin{vmatrix} O & A \\ B & \star \end{vmatrix} \neq -|A||B|.$$

关于分块行列式的几点说明

正确结果是

关于分块行列式的几点说明

正确结果是

$$D = \begin{vmatrix} O & A \\ B & \star \end{vmatrix}$$

关于分块行列式的几点说明

正确结果是

$$D = \begin{vmatrix} O & A \\ B & \star \end{vmatrix} \xlongequal[m\text{列对换}]{|A|\text{的每一列依次与其前面的}}$$

关于分块行列式的几点说明

正确结果是

$$D = \begin{vmatrix} O & A \\ B & \star \end{vmatrix} \xlongequal[m\text{列对换}]{|A|\text{的每一列依次与其前面的}} (-1)^{k\times m} \begin{vmatrix} A & O \\ \star & B \end{vmatrix}$$

关于分块行列式的几点说明

正确结果是

$$D = \begin{vmatrix} O & A \\ B & \star \end{vmatrix} \xlongequal[m\text{列对换}]{|A|\text{的每一列依次与其前面的}} (-1)^{k\times m} \begin{vmatrix} A & O \\ \star & B \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k\times m}|A||B|.$$

例12. 设 $D = |a_{ij}|_1^{2007}$,其中 $a_{ij} = i - j$, 计算 D 的值.

例12. 设 $D=|a_{ij}|_1^{2007}$,其中 $a_{ij}=i-j$, 计算 D 的值.

解: 因为 $a_{ij}=i-j=$

例12. 设 $D=|a_{ij}|_1^{2007}$,其中 $a_{ij}=i-j$, 计算 D 的值.

解: 因为 $a_{ij}=i-j=-(j-i)=$

例12. 设 $D=|a_{ij}|_1^{2007}$,其中 $a_{ij}=i-j$, 计算 D 的值.

解: 因为 $a_{ij}=i-j=-(j-i)=-a_{ji}$,所以

例12. 设 $D = |a_{ij}|_1^{2007}$,其中 $a_{ij} = i - j$, 计算 D 的值.

解: 因为 $a_{ij} = i - j = -(j - i) = -a_{ji}$,所以 D 为反对称行列式.

例12. 设 $D = |a_{ij}|_1^{2007}$,其中 $a_{ij} = i - j$, 计算 D 的值.

解: 因为 $a_{ij} = i - j = -(j - i) = -a_{ji}$,所以 D 为反对称行列式.

又因为 D 的阶数 2007 为奇数,

例12. 设 $D=|a_{ij}|_1^{2007}$,其中 $a_{ij}=i-j$, 计算 D 的值.

解: 因为 $a_{ij}=i-j=-(j-i)=-a_{ji}$,所以 D 为反对称行列式.

又因为 D 的阶数 2007 为奇数，所以

$$D=0.$$

行列式的计算(续)

赵 燕 芬

Email: wangzhaoyanfen@gmail.com

武汉大学 数学与统计学院

2007 年 11 月 28 日

更正

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_{i-1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

更正

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=4,3,2]{r_i - r_{i-1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

更正

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[{\color{red}i=4,3,2}]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

从最后一行开始，依次用后行减前行

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

例13. 计算四阶行列式$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}$.

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

例13. 计算四阶行列式$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}$.

解:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & y^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & y^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & y^4 \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

例13. 计算四阶行列式$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}$.

解:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & y^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & y^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & y^4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{Vandermond}{=\!=\!=\!=\!=} (y-x_1)(y-x_2)(y-x_3)(y-x_4)$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

例13. 计算四阶行列式$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}$.

解:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & y^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & y^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & y^4 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{Vandermond}}\ (y-x_1)(y-x_2)(y-x_3)(y-x_4)\cdot \prod_{1\le j<i\le 4}(x_i-x_j)$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

$$= (y - x_1)(y - x_2)(y - x_3)(y - x_4)$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

$$= (y - x_1)(y - x_2)(y - x_3)(y - x_4) \cdot \prod_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j)$$

$$= [y^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)y^3 + \cdots + x_1 x_2 x_3 x_4] \cdot \prod_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j).$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

$$= (y - x_1)(y - x_2)(y - x_3)(y - x_4) \cdot \prod_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j)$$

$$= [y^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)y^3 + \cdots + x_1x_2x_3x_4] \cdot \prod_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j).$$

另一方面, 将 D_5 按最后一列展开得

$$D_5 = 1 \times A_{15} + y \times A_{25} + y^2 \times A_{35} + y^3 \times A_{45} + y^4 \times A_{55}$$

其结果是关于 y 的多项式，其中 y^3 的系数

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

$$= (y - x_1)(y - x_2)(y - x_3)(y - x_4) \cdot \prod_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j)$$

$$= [y^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)y^3 + \cdots + x_1x_2x_3x_4] \cdot \prod_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j).$$

另一方面, 将 D_5 按最后一列展开得

$$D_5 = 1 \times A_{15} + y \times A_{25} + y^2 \times A_{35} + y^3 \times A_{45} + y^4 \times A_{55}$$

其结果是关于 y 的多项式，其中 y^3 的系数

$$A_{45} = (-1)^{4+5} M_{45} = -D_4$$

比较系数可得

比较系数可得

$$-D_4 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \prod_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j).$$

比较系数可得

$$-D_4 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (x_i - x_j).$$

即

$$D_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (x_i - x_j).$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

比较系数可得

$$-D_4 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \prod_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j).$$

即

$$D_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \prod_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j).$$

本题的方法也适用于 n 阶行列式, 练习 P_{37} 第 44 题.

例14. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & b_1a_2 & b_1a_3 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & x_2 & b_2a_3 & \cdots & b_2a_n \\ b_3a_1 & b_3a_2 & x_3 & \cdots & b_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & b_na_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

例14. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & b_1a_2 & b_1a_3 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & x_2 & b_2a_3 & \cdots & b_2a_n \\ b_3a_1 & b_3a_2 & x_3 & \cdots & b_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & b_na_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

分析: 元素特点是除主对角元外, 第 i 行的元素与 b_i 有关, 第 j 列的元素与 a_j 有关.

例14. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & b_1a_2 & b_1a_3 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & x_2 & b_2a_3 & \cdots & b_2a_n \\ b_3a_1 & b_3a_2 & x_3 & \cdots & b_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & b_na_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

分析: 元素特点是除主对角元外, 第 i 行的元素与 b_i 有关, 第 j 列的元素与 a_j 有关. 但各元素均比较复杂.

n 阶行列式的计算－－加边法（升阶法）

解:

$$D_n = D_{n+1}$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

解:

$$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ 0 & b_2a_1 & x_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_na_1 & b_na_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

解:

$$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ 0 & b_2a_1 & x_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_na_1 & b_na_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i - b_{i-1}r_1}$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

解:

$$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ 0 & b_2a_1 & x_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_na_1 & b_na_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-b_{i-1}r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -b_1 & x_1-a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_2 & 0 & x_2-a_2b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -b_1 & x_1 - a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_2 & 0 & x_2 - a_2 b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n b_n \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -b_1 & x_1 - a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_2 & 0 & x_2 - a_2 b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n b_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_1 + \frac{b_i}{x_i - a_i b_i} c_{i+1}}$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

$$
\begin{vmatrix}
1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
-b_1 & x_1 - a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\
-b_2 & 0 & x_2 - a_2 b_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n b_n
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_1 + \frac{b_i}{x_i - a_i b_i} c_{i+1}}
\begin{vmatrix}
1 + \frac{a_1 b_1}{x_1 - a_1 b_1} + \cdots + \frac{a_n b_n}{x_n - a_n b_n} & a_1 & \cdots & a_n \\
0 & x_1 - a_1 b_1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & x_n - a_n b_n
\end{vmatrix}
$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1b_1}{x_1-a_1b_1}+\cdots+\frac{a_nb_n}{x_n-a_nb_n} & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1-a_1b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——加边法（升阶法）

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1b_1}{x_1-a_1b_1}+\cdots+\frac{a_nb_n}{x_n-a_nb_n} & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1-a_1b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$=(1+\frac{a_1b_1}{x_1-a_1b_1}+\cdots+\frac{a_nb_n}{x_n-a_nb_n})(x_1-a_1b_1)\cdots(x_n-a_nb_n).$$

例15. 求方程 $D(x)=0$ 的根, 其中

$$D(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}.$$

例15. 求方程 $D(x)=0$ 的根, 其中

$$D(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}$$

例15. 求方程 $D(x)=0$ 的根, 其中

$$D(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{c_i-c_1}$$

例15. 求方程 $D(x)=0$ 的根, 其中

$$D(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{c_i-c_1} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix}$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix}$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_2}$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_2} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ x-2 & -2 & 0 & 0 \\ x-3 & -3 & -1 & -1 \\ x-4 & -4 & x-1 & -2 \end{vmatrix}$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_2} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ x-2 & -2 & 0 & 0 \\ x-3 & -3 & -1 & -1 \\ x-4 & -4 & x-1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ x-2 & -2 \end{vmatrix}.$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_2} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ x-2 & -2 & 0 & 0 \\ x-3 & -3 & -1 & -1 \\ x-4 & -4 & x-1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ x-2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x-1 & -2 \end{vmatrix}$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_2} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ x-2 & -2 & 0 & 0 \\ x-3 & -3 & -1 & -1 \\ x-4 & -4 & x-1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ x-2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x-1 & -2 \end{vmatrix} = [-2(x-1)+(x-2)] \cdot [2+(x-1)]$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_2} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ x-2 & -2 & 0 & 0 \\ x-3 & -3 & -1 & -1 \\ x-4 & -4 & x-1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ x-2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x-1 & -2 \end{vmatrix} = [-2(x-1)+(x-2)] \cdot [2+(x-1)]$$

$$= -x(x+1) = 0$$

行列式的计算

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4+c_2} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ x-2 & -2 & 0 & 0 \\ x-3 & -3 & -1 & -1 \\ x-4 & -4 & x-1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ x-2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x-1 & -2 \end{vmatrix} = [-2(x-1)+(x-2)] \cdot [2+(x-1)]$$

$$= -x(x+1) = 0$$

所以所求根为

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1.$$

例16. 计算三对角线行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

解: 将行列式按第一行展开得：

解: 将行列式按第一行展开得:

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta\begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & & & & \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

解: 将行列式按第一行展开得:

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & & & & \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

n 阶行列式的计算－－递推公式法

解: 将行列式按第一行展开得：

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & & & & \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$\Rightarrow$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$\Rightarrow$ $$D_n - \alpha D_{n-1} =$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

其中

$$D_1 = \alpha + \beta,$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$\Rightarrow$
$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

其中

$$D_1 = \alpha+\beta,\ D_2 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$\Rightarrow$
$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

其中

$$D_1 = \alpha+\beta,\ D_2 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta$$

$$D_2 - \alpha D_1 =$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

其中

$$D_1 = \alpha+\beta,\ D_2 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta$$

$$D_2 - \alpha D_1 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$\Rightarrow$
$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

其中

$$D_1 = \alpha+\beta,\ D_2 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta$$

$$D_2 - \alpha D_1 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta - \alpha(\alpha+\beta)$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$\Rightarrow \qquad D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$= \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

其中

$$D_1 = \alpha+\beta,\ D_2 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta$$

$$D_2 - \alpha D_1 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta - \alpha(\alpha+\beta) = \beta^2$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$$

由

$$\begin{cases} D_n - \alpha D_{n-1} & = \beta^n \\ D_{n-1} - \alpha D_{n-2} & = \beta^{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ D_3 - \alpha D_2 & = \beta^3 \\ D_2 - \alpha D_1 & = \beta^2 \end{cases}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$$

由

$$\begin{cases} D_n - \alpha D_{n-1} & = \beta^n \\ D_{n-1} - \alpha D_{n-2} & = \beta^{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ D_3 - \alpha D_2 & = \beta^3 \\ D_2 - \alpha D_1 & = \beta^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$$

由

$$\begin{cases} D_n - \alpha D_{n-1} & = \beta^n \\ D_{n-1} - \alpha D_{n-2} & = \beta^{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ D_3 - \alpha D_2 & = \beta^3 \\ D_2 - \alpha D_1 & = \beta^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$D_n - \alpha^{n-1} D_1 = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n - \alpha^{n-1} D_1 = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2$$

n 阶行列式的计算－－递推公式法

$$D_n - \alpha^{n-1} D_1 = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2$$

再将 $D_1 = \alpha + \beta$ 代入得到：

$$D_n - \alpha^{n-1}D_1 = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2$$

再将 $D_1 = \alpha + \beta$ 代入得到:

当 $\beta = \alpha$ 时,

n 阶行列式的计算－－递推公式法

$$D_n - \alpha^{n-1} D_1 = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2$$

再将 $D_1 = \alpha + \beta$ 代入得到：

当 $\beta = \alpha$ 时，

$$D_n = (n+1)\alpha^n$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n - \alpha^{n-1}D_1 = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2$$

再将 $D_1 = \alpha + \beta$ 代入得到：

当 $\beta = \alpha$ 时，

$$D_n = (n+1)\alpha^n$$

当 $\beta \neq \alpha$ 时，

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_n - \alpha^{n-1}D_1 = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2$$

再将 $D_1 = \alpha + \beta$ 代入得到：

当 $\beta = \alpha$ 时，

$$D_n = (n+1)\alpha^n$$

当 $\beta \neq \alpha$ 时，

$$D_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}.$$

n 阶行列式的计算——拆分法

例17. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式的计算——拆分法

例17. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

解: 将 D_n 按第一列拆分

例17. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

解: 将 D_n 按第一列拆分

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——拆分法

其中

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——拆分法

其中

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_1\times i}$$

n 阶行列式的计算——拆分法

其中

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_1\times i} \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ 1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}$$

其中

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_1\times i} \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ 1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$= y_2y_3\cdots y_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——拆分法

其中

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ 1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_1\times i} \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ 1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$= y_2y_3\cdots y_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{当}n\geq 3\text{时}, \\ y_2(x_2-x_1) & \text{当}n=2\text{时}. \end{cases}$$

n 阶行列式的计算——拆分法

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——拆分法

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix} = y_1 \begin{vmatrix} x_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——拆分法

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix} = y_1 \begin{vmatrix} x_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i - c_1 \times y_i}$$

n 阶行列式的计算——拆分法

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix} = y_1 \begin{vmatrix} x_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_i - c_1 \times y_i}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=\!=\!=\!=}} y_1 \begin{vmatrix} x_1 & 2 & \cdots & n \\ x_2 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——拆分法

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2y_1 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix} = y_1 \begin{vmatrix} x_1 & 2+x_1y_2 & \cdots & n+x_1y_n \\ x_2 & 2+x_2y_2 & \cdots & n+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 2+x_ny_2 & \cdots & n+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i - c_1 \times y_i} y_1 \begin{vmatrix} x_1 & 2 & \cdots & n \\ x_2 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{当} n \geq 3 \text{时}, \\ 2y_1(x_1 - x_2) & \text{当} n = 2 \text{时}. \end{cases}$$

因此, 当 $n = 2$ 时,

因此, 当 $n=2$ 时,

$$D_2 = (x_2 - x_1)(y_2 - 2y_1).$$

因此, 当 $n = 2$ 时,

$$D_2 = (x_2 - x_1)(y_2 - 2y_1).$$

当 $n \geq 3$ 时,

因此, 当 $n = 2$ 时,

$$D_2 = (x_2 - x_1)(y_2 - 2y_1).$$

当 $n \geq 3$ 时,

$$D_n = 0.$$

例18. 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}.$$

例18. 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}.$$

解: 将 D_{2n} 的 r_{2n} 依次与前面的 $2n-2$ 行对换，换至第二行;

例18. 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}.$$

解: 将 D_{2n} 的 r_{2n} 依次与前面的 $2n-2$ 行对换，换至第二行; 再将 D_{2n} 的 c_{2n} 依次与前面的 $2n-2$ 列对换，换至第二列:

例18. 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}.$$

解: 将 D_{2n} 的 r_{2n} 依次与前面的 $2n-2$ 行对换，换至第二行; 再将 D_{2n} 的 c_{2n} 依次与前面的 $2n-2$ 列对换，换至第二列:

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\begin{vmatrix} a & b & & & & & & \\ c & d & & & & & & \\ & & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\begin{vmatrix} a & b & & & & & & \\ c & d & & & & & & \\ & & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

$$= (ad-bc)D_{2(n-1)}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\begin{vmatrix} a & b & & & & & & \\ c & d & & & & & & \\ & & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

$$= (ad-bc)D_{2(n-1)} = (ad-bc)^2 D_{2(n-2)}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\begin{vmatrix} a & b & & & & & & \\ c & d & & & & & & \\ & & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

$$= (ad - bc)D_{2(n-1)} = (ad-bc)^2 D_{2(n-2)}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\begin{vmatrix} a & b & & & & & & \\ c & d & & & & & & \\ & & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

$$= (ad-bc)D_{2(n-1)} = (ad-bc)^2 D_{2(n-2)}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\begin{vmatrix} a & b & & & & & & \\ c & d & & & & & & \\ & & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

$$= (ad-bc)D_{2(n-1)} = (ad-bc)^2 D_{2(n-2)}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$
\begin{aligned}
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= (ad-bc)^{n-1} D_2
\end{aligned}
$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= (ad - bc)^{n-1} D_2$$

因为 $D_2 = (ad - bc)$ ，所以

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= (ad - bc)^{n-1} D_2$$

因为 $D_2 = (ad - bc)$，所以

$$D_{2n} = (ad - bc)^n.$$

另解: 将 D_{2n} 按第一行展开:

n 阶行列式的计算——递推公式法

另解: 将 D_{2n} 按第一行展开:

$$D_{2n} = a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \vdots \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & 0 \\ 0 & & \cdots & \cdots & & 0 & d \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算－－递推公式法

$$
+(-1)^{1+2n}b\begin{vmatrix}
0 & a & & & & & b \\
 & & \ddots & & & \iddots & \\
 & & & a & b & & \\
\vdots & & & c & d & & \\
 & & \iddots & & & \ddots & \\
0 & c & & & & & d \\
c & 0 & & \cdots & \cdots & & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
+(-1)^{1+2n}b\begin{vmatrix}
0 & a & & & & b \\
 & & \ddots & & \iddots & \\
 & & & a & b & \\
\vdots & & & c & d & \\
 & & \iddots & & \ddots & \\
0 & c & & & & d \\
c & 0 & \cdots & & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
= a(-1)^{2n-1+2n-1}dD_{2(n-2)}
$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$+(-1)^{1+2n}b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & b \\ & & \ddots & & \iddots & \\ & & & a & b & \\ \vdots & & & c & d & \\ & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & c & & & & d \\ c & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a(-1)^{2n-1+2n-1}dD_{2(n-2)} + (-1)^{2n+1}b(-1)^{2n-1+1}cD_{2(n-2)}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$+(-1)^{1+2n}b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ \vdots & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d \\ c & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a(-1)^{2n-1+2n-1}dD_{2(n-2)} + (-1)^{2n+1}b(-1)^{2n-1+1}cD_{2(n-2)}$$

$$= (ad - bc)D_{2(n-2)}$$

n 阶行列式的计算——递推公式法

$$
+(-1)^{1+2n}b\begin{vmatrix}
0 & a & & & & b \\
 & & \ddots & & \iddots & \\
 & & & a & b & \\
\vdots & & & c & d & \\
 & & \iddots & & & \ddots \\
0 & c & & & & d \\
c & 0 & & \cdots & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
= a(-1)^{2n-1+2n-1}dD_{2(n-2)} + (-1)^{2n+1}b(-1)^{2n-1+1}cD_{2(n-2)}
$$

$= (ad-bc)D_{2(n-2)}$ 以下与解法一相同.

§ 1.3 克拉默(Cramer)法则

赵 燕 芬

Email: wangzhaoyanfen@gmail.com

武汉大学 数学与统计学院

2007 年 11 月 28 日

齐次线性方程组和非齐次线性方程组

对于 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

齐次线性方程组和非齐次线性方程组

对于 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为 0 时,

齐次线性方程组和非齐次线性方程组

对于 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为 0 时,称之为非齐次线性方程组;

齐次线性方程组和非齐次线性方程组

对于 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为 0 时,称之为非齐次线性方程组;

当常数项 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时,

齐次线性方程组和非齐次线性方程组

对于 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为 0 时,称之为非齐次线性方程组;
当常数项 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时,称之为齐次线性方程组.

克拉默(Cramer)法则

关于线性方程组的解, 有下面的结论:

定理(Cramer法则)

对于线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

克拉默(Cramer)法则

关于线性方程组的解, 有下面的结论:

定理(Cramer法则)

对于线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

(或简记为 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$),

克拉默(Cramer)法则

关于线性方程组的解, 有下面的结论:

定理(Cramer法则)

对于线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

(或简记为 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$), 当其系数行列式 $D \neq 0$ 时, 方程组有唯一解

克拉默(Cramer)法则

关于线性方程组的解, 有下面的结论:

定理(Cramer法则)

对于线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & =b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n & =b_n \end{cases}$$
(或简记为 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1,2,\cdots,n$), 当其系数行列式 $D\neq 0$ 时, 方程组有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

克拉默(Cramer)法则

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

克拉默(Cramer)法则

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

克拉默(Cramer)法则的证明

证: 第一步验证 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是方程组的解,

克拉默(Cramer)法则的证明

证: 第一步验证 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是方程组的解，即证明

克拉默(Cramer)法则的证明

证: 第一步验证 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是方程组的解，即证明

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{D_j}{D} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

克拉默(Cramer)法则的证明

证: 第一步验证 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是方程组的解，即证明

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

为此考虑 $n+1$ 阶行列式:

克拉默(Cramer)法则的证明

证: 第一步验证 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是方程组的解，即证明

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{D_j}{D} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

为此考虑 $n+1$ 阶行列式:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

克拉默(Cramer)法则的证明

证: 第一步验证 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是方程组的解，即证明

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D} = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

为此考虑 $n+1$ 阶行列式:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

一方面，显然有 $D_{n+1} = 0$.

克拉默(Cramer)法则的证明

另一方面，将D_{n+1}按第一行展开，

克拉默(Cramer)法则的证明

另一方面，将D_{n+1}按第一行展开，其中 b_i 的代数余子式为

克拉默(Cramer)法则的证明

另一方面，将D_{n+1}按第一行展开，其中 b_i 的代数余子式为 D ,

克拉默(Cramer)法则的证明

另一方面，将D_{n+1}按第一行展开，其中 b_i 的代数余子式为 D ，a_{ij} 的代数余子式为

克拉默(Cramer)法则的证明

另一方面，将D_{n+1}按第一行展开，其中 b_i 的代数余子式为 D ，a_{ij} 的代数余子式为

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

克拉默(Cramer)法则的证明

另一方面，将D_{n+1}按第一行展开，其中 b_i 的代数余子式为 D ，a_{ij} 的代数余子式为

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j+2}$$

克拉默(Cramer)法则的证明

另一方面，将D_{n+1}按第一行展开，其中 b_i 的代数余子式为 D，a_{ij} 的代数余子式为

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j+2}(-1)^{j-1}$$

克拉默(Cramer)法则的证明

另一方面，将D_{n+1}按第一行展开，其中 b_i 的代数余子式为 D，a_{ij} 的代数余子式为

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j+2}(-1)^{j-1}D_j$$

克拉默(Cramer)法则的证明

另一方面，将D_{n+1}按第一行展开，其中 b_i 的代数余子式为 D ，a_{ij} 的代数余子式为

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j+2}(-1)^{j-1}D_j = -D_j.$$

克拉默(Cramer)法则

即有

$$0 = b_i D - a_{i1} D_1 - a_{i2} D_2 - \cdots - a_{in} D_n.$$

克拉默(Cramer)法则

即有

$$0 = b_i D - a_{i1}D_1 - a_{i2}D_2 - \cdots - a_{in}D_n.$$

因为 $D \neq 0$, 所以

$$a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

即

克拉默(Cramer)法则

即有

$$0 = b_i D - a_{i1} D_1 - a_{i2} D_2 - \cdots - a_{in} D_n.$$

因为 $D \neq 0$, 所以

$$a_{i1} \frac{D_1}{D} + a_{i2} \frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in} \frac{D_n}{D} = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

即

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

是原方程组的解.

克拉默(Cramer)法则

第二步：证明解$x_j = \dfrac{D_j}{D}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$的唯一性.

克拉默(Cramer)法则

第二步：证明解$x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$的唯一性. 为此设$x_j = c_j$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是原方程组的一组解, 即有

克拉默(Cramer)法则

第二步：证明解$x_j = \dfrac{D_j}{D}$,　$(j = 1, 2, \cdots, n)$的唯一性. 为此设$x_j = c_j$,　$(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是原方程组的一组解, 即有

$$
\begin{cases}
a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 & (1) \\
a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 & (2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = b_n & (n)
\end{cases}
$$

克拉默(Cramer)法则

第二步：证明解$x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$的唯一性. 为此设$x_j = c_j$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是原方程组的一组解, 即有

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 & (1) \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 & (2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = b_n & (n) \end{cases}$$

$(1) \times A_{1j} + (2) \times A_{2j} + \cdots + (n) \times A_{nj}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 得：

克拉默(Cramer)法则

第二步：证明解$x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$的唯一性. 为此设$x_j = c_j$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是原方程组的一组解, 即有

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 & (1) \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 & (2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = b_n & (n) \end{cases}$$

$(1) \times A_{1j} + (2) \times A_{2j} + \cdots + (n) \times A_{nj}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 得：

克拉默(Cramer)法则

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj})c_1$$

克拉默(Cramer)法则

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj})c_1 + (\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{kj})c_2$$

克拉默(Cramer)法则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj}\right)c_1 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{kj}\right)c_2 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)c_j + \cdots +$$

克拉默(Cramer)法则

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj})c_1 + (\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{kj})c_2 + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj})c_j + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj})c_n$$

克拉默(Cramer)法则

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj})c_1 + (\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{kj})c_2 + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj})c_j + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj})c_n = (\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}).$$

注意到行列式按行（列）展开的结论, 得

克拉默(Cramer)法则

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj})c_1 + (\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{kj})c_2 + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj})c_j + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj})c_n = (\sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj}).$$

注意到行列式按行（列）展开的结论, 得

$$Dc_j$$

克拉默(Cramer)法则

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj})c_1 + (\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{kj})c_2 + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj})c_j + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj})c_n = (\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}).$$

注意到行列式按行（列）展开的结论, 得

$$Dc_j = D_j$$

克拉默(Cramer)法则

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj})c_1 + (\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{kj})c_2 + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj})c_j + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj})c_n = (\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}).$$

注意到行列式按行（列）展开的结论, 得

$$Dc_j = D_j$$

因为 $D \neq 0$,所以

克拉默(Cramer)法则

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj})c_1 + (\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{kj})c_2 + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj})c_j + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj})c_n = (\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}).$$

注意到行列式按行（列）展开的结论, 得

$$Dc_j = D_j$$

因为 $D \neq 0$,所以

$$c_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

克拉默(Cramer)法则

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj})c_1 + (\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{kj})c_2 + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj})c_j + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj})c_n = (\sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj}).$$

注意到行列式按行（列）展开的结论, 得

$$Dc_j = D_j$$

因为 $D \neq 0$,所以

$$c_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

即

$$c_j = x_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

克拉默(Cramer)法则的推论

若线性方程组为齐次线性方程组，即 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ ，那么

克拉默(Cramer)法则的推论

若线性方程组为齐次线性方程组，即 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ ，那么

$$x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

显然是方程组的解.

克拉默(Cramer)法则的推论

若线性方程组为齐次线性方程组，即 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ ，那么

$$x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

显然是方程组的解. 又由克拉默(Cramer)法则知道当 $D \neq 0$ 时, 其解是唯一的, 所以有

克拉默(Cramer)法则的推论

若线性方程组为齐次线性方程组，即 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ ，那么

$$x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

显然是方程组的解. 又由克拉默(Cramer)法则知道当 $D \neq 0$ 时, 其解是唯一的, 所以有

克拉默(Cramer)法则的推论

推论 1

若齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

的系数行列式 $D = |a_{ij}|_1^n \neq 0$, 则方程组只有零解

$$x_j = 0 \ \ (j = 1, 2, \cdots, n).$$

克拉默(Cramer)法则的推论

推论 1

若齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

的系数行列式 $D = |a_{ij}|_1^n \neq 0$, 则方程组只有零解

$$x_j = 0 \ \ (j = 1, 2, \cdots, n).$$

事实上此时 $D_j = 0$,所以

克拉默(Cramer)法则的推论

推论 1

若齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

的系数行列式 $D = |a_{ij}|_1^n \neq 0$, 则方程组只有零解

$$x_j = 0 \ \ (j = 1, 2, \cdots, n).$$

事实上此时 $D_j = 0$,所以

$$x_j = 0 \ \ (j = 1, 2, \cdots, n).$$

克拉默(Cramer)法则的推论

上述推论的逆否命题是

克拉默(Cramer)法则的推论

上述推论的逆否命题是

推论 2

若齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

有非零解，则系数行列式 $D = |a_{ij}|_1^n = 0$.

克拉默(Cramer)法则的推论

上述推论的逆否命题是

推论 2

若齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

有非零解，则系数行列式 $D = |a_{ij}|_1^n = 0$.

非零解是指$x_j \ \ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 不全为零.

克拉默(Cramer)法则的推论

上述推论的逆否命题是

推论 2

若齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

有非零解，则系数行列式 $D = |a_{ij}|_1^n = 0$.

非零解是指$x_j \ \ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 不全为零.

后面我们会进一步证明：

克拉默(Cramer)法则的推论

上述推论的逆否命题是

推论 2

若齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

有非零解，则系数行列式 $D = |a_{ij}|_1^n = 0.$

非零解是指x_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 不全为零.

后面我们会进一步证明：

齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是

克拉默(Cramer)法则的推论

上述推论的逆否命题是

推论 2

若齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

有非零解，则系数行列式 $D = |a_{ij}|_1^n = 0$.

非零解是指$x_j \ \ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 不全为零.

后面我们会进一步证明：

齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是 D=0

说明

用克拉默(Cramer)法则求解 n 元线性方程组, 一共要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 其计算工作量是很大的,

说明

用克拉默(Cramer)法则求解 n 元线性方程组, 一共要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 其计算工作量是很大的, 而且当方程的个数和未知数的个数不相等时，不能用克拉默(Cramer)法则求解.

说明

用克拉默(Cramer)法则求解 n 元线性方程组, 一共要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 其计算工作量是很大的, 而且当方程的个数和未知数的个数不相等时，不能用克拉默(Cramer)法则求解. 所以对于解线性方程组, 一般采用高斯消元法.

说明

用克拉默(Cramer)法则求解 n 元线性方程组, 一共要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 其计算工作量是很大的, 而且当方程的个数和未知数的个数不相等时，不能用克拉默(Cramer)法则求解. 所以对于解线性方程组, 一般采用高斯消元法. 但是克拉默(Cramer)法则明确地揭示了线性方程组的解和系数之间的关系, 在理论上有重要意义.

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例1. k 取什么值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} kx+y-z=0 \\ x+ky-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ 有非零解?

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例1. k 取什么值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} kx+y-z=0 \\ x+ky-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ 有非零解?

解: 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例1. k 取什么值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} kx+y-z=0 \\ x+ky-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ 有非零解？

解: 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+r_3]{r_1+r_3}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例1. k 取什么值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} kx + y - z = 0 \\ x + ky - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ 有非零解?

解: 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+r_3]{r_1+r_3} \begin{vmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ 3 & k-1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例1. k 取什么值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} kx + y - z = 0 \\ x + ky - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ 有非零解？

解: 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{\underset{r_2+r_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ 3 & k-1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-1).$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例1. k 取什么值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} kx+y-z=0 \\ x+ky-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ 有非零解?

解: 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+r_3]{r_1+r_3} \begin{vmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ 3 & k-1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-1).$$

当 $D=0$,即当 $k=-2$ 或 $k=1$ 时, 齐次方程组有非零解.

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例2. 写出通过 3 点 $(1,1,1)$, $(2,3,-1)$, $(3,-1,-1)$ 的平面方程.

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例2. 写出通过 3 点 $(1,1,1)$, $(2,3,-1)$, $(3,-1,-1)$ 的平面方程.

解: 设通过这三点的平面方程为: $ax+by+cz=d$,其中 a,b,c,d 不同时为0,

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例2. 写出通过 3 点 $(1,1,1)$, $(2,3,-1)$, $(3,-1,-1)$ 的平面方程.

解: 设通过这三点的平面方程为: $ax+by+cz=d$,其中 a,b,c,d 不同时为0,由条件可得:

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例2. 写出通过 3 点 $(1,1,1)$, $(2,3,-1)$, $(3,-1,-1)$ 的平面方程.

解: 设通过这三点的平面方程为: $ax+by+cz=d$,其中 a,b,c,d 不同时为0,由条件可得:

$$\begin{cases} a+b+c &= d \\ 2a+3b-c &= d \\ 3a-b-c &= d \end{cases}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例2. 写出通过 3 点 $(1,1,1)$, $(2,3,-1)$, $(3,-1,-1)$ 的平面方程.

解: 设通过这三点的平面方程为: $ax+by+cz=d$,其中 a,b,c,d 不同时为0,由条件可得:

$$\begin{cases} a+b+c & = d \\ 2a+3b-c & = d \\ 3a-b-c & = d \end{cases}$$

因为$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例2. 写出通过 3 点 $(1,1,1)$, $(2,3,-1)$, $(3,-1,-1)$ 的平面方程.

解: 设通过这三点的平面方程为: $ax+by+cz=d$,其中 a,b,c,d 不同时为0,由条件可得:

$$\begin{cases} a+b+c &= d \\ 2a+3b-c &= d \\ 3a-b-c &= d \end{cases}$$

因为$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例2. 写出通过 3 点 $(1,1,1)$, $(2,3,-1)$, $(3,-1,-1)$ 的平面方程.

解: 设通过这三点的平面方程为: $ax+by+cz=d$,其中 a,b,c,d 不同时为0,由条件可得:

$$\begin{cases} a+b+c &= d \\ 2a+3b-c &= d \\ 3a-b-c &= d \end{cases}$$

因为$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{r_3+r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例2. 写出通过 3 点 $(1,1,1)$, $(2,3,-1)$, $(3,-1,-1)$ 的平面方程.

解: 设通过这三点的平面方程为: $ax+by+cz=d$,其中 a,b,c,d 不同时为0,由条件可得:

$$\begin{cases} a+b+c &= d \\ 2a+3b-c &= d \\ 3a-b-c &= d \end{cases}$$

因为 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -16$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ 2d & 4 & 0 \\ 2d & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ 2d & 4 & 0 \\ 2d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8d$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ 2d & 4 & 0 \\ 2d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8d$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 2 & d & -1 \\ 3 & d & -1 \end{vmatrix}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ 2d & 4 & 0 \\ 2d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8d$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 2 & d & -1 \\ 3 & d & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ 2d & 4 & 0 \\ 2d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8d$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 2 & d & -1 \\ 3 & d & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 3 & 2d & 0 \\ 4 & 2d & 0 \end{vmatrix}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ 2d & 4 & 0 \\ 2d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8d$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 2 & d & -1 \\ 3 & d & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 3 & 2d & 0 \\ 4 & 2d & 0 \end{vmatrix} = -2d$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ 2d & 4 & 0 \\ 2d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8d$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 2 & d & -1 \\ 3 & d & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 3 & 2d & 0 \\ 4 & 2d & 0 \end{vmatrix} = -2d$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & d \\ 2 & 3 & d \\ 3 & -1 & d \end{vmatrix}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ 2d & 4 & 0 \\ 2d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8d$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 2 & d & -1 \\ 3 & d & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 3 & 2d & 0 \\ 4 & 2d & 0 \end{vmatrix} = -2d$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & d \\ 2 & 3 & d \\ 3 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ 2d & 4 & 0 \\ 2d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8d$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 2 & d & -1 \\ 3 & d & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 3 & 2d & 0 \\ 4 & 2d & 0 \end{vmatrix} = -2d$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & d \\ 2 & 3 & d \\ 3 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & d \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

$$D_1 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d & 3 & -1 \\ d & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ 2d & 4 & 0 \\ 2d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8d$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 2 & d & -1 \\ 3 & d & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 3 & 2d & 0 \\ 4 & 2d & 0 \end{vmatrix} = -2d$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & d \\ 2 & 3 & d \\ 3 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & d \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6d$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

于是

$$a = \frac{D_1}{D} = \frac{-8d}{-16},$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

于是

$$a = \frac{D_1}{D} = \frac{-8d}{-16}, \quad b = \frac{D_2}{D} = \frac{-2d}{-16}, \quad c = \frac{D_3}{D} = \frac{-6d}{-16}$$

代入方程 $ax + by + cz = d$ 化简得所求方程为：

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

于是

$$a = \frac{D_1}{D} = \frac{-8d}{-16}, \quad b = \frac{D_2}{D} = \frac{-2d}{-16}, \quad c = \frac{D_3}{D} = \frac{-6d}{-16}$$

代入方程 $ax + by + cz = d$ 化简得所求方程为：

$$4x + y + 3z = 8.$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例3. 求使 3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 位于一直线上得充分必要条件.

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例3. 求使 3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 位于一直线上得充分必要条件.

解: 设这 3 点位于直线 $ax + by + c = 0$ 上, 其中 a, b, c 不同时为 0 ,即有

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例3. 求使 3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 位于一直线上得充分必要条件.

解: 设这 3 点位于直线 $ax + by + c = 0$ 上, 其中 a, b, c 不同时为 0 , 即有

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例3. 求使 3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 位于一直线上得充分必要条件.

解: 设这 3 点位于直线 $ax + by + c = 0$ 上, 其中 a, b, c 不同时为 0，即有

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

3 点位于直线等价于上述关于 a, b, c 的齐次线性方程组有非零解.

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例3. 求使 3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 位于一直线上得充分必要条件.

解: 设这 3 点位于直线 $ax + by + c = 0$ 上, 其中 a, b, c 不同时为 0，即有

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

3 点位于直线等价于上述关于 a, b, c 的齐次线性方程组有非零解.由推论 2 知，其充要条件是

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例3. 求使 3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 位于一直线上得充分必要条件.

解: 设这 3 点位于直线 $ax + by + c = 0$ 上, 其中 a, b, c 不同时为 0，即有

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

3 点位于直线等价于上述关于 a, b, c 的齐次线性方程组有非零解.由推论 2 知，其充要条件是

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例3. 求使 3 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 位于一直线上得充分必要条件.

解: 设这 3 点位于直线 $ax + by + c = 0$ 上, 其中 a, b, c 不同时为 0，即有

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

3 点位于直线等价于上述关于 a, b, c 的齐次线性方程组有非零解.由推论 2 知，其充要条件是

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例4. 证明 n 次多项式至多有 n 个互异的根.

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例4. 证明 n 次多项式至多有 n 个互异的根.

证: 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$ 有 $n+1$ 个互异的根 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$,即

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

例4. 证明 n 次多项式至多有 n 个互异的根.

证: 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$ 有 $n+1$ 个互异的根 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$,即

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = 0 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n+1}^2 + \cdots + a_n x_{n+1}^n = 0 \end{cases}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

因为行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

因为行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j)$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

因为行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j) = 0$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

因为行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j) = 0$$

所以

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

因为行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (x_i - x_j) = 0$$

所以

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$$

用克拉默(Cramer)法则解方程组举例

因为行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<i\leq n+1}(x_i-x_j)=0$$

所以

$$a_0=a_1=\cdots=a_n=0$$

矛盾! 故 $f(x)$ 至多有 n 个互异的根.

§ 4.1 $\mathbb{R}^n$中的基和向量关于基的坐标

赵 燕 芬

Email: wangzhaoyanfen@gmail.com

武汉大学 数学与统计学院

2007 年 11 月 28 日

引例

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 n 维单位坐标向量,

引例

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 n 维单位坐标向量, $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意一个 n 维向量.

引例

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 n 维单位坐标向量, $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意一个 n 维向量. 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关,

引例

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 n 维单位坐标向量, $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意一个 n 维向量. 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,

引例

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n\ \ (i=1,2,\cdots,n)$ 为 n 维单位坐标向量, $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意一个 n 维向量. 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关, $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示, 且表示法唯一.

引例

设 $\varepsilon_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 n 维单位坐标向量, $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意一个 n 维向量. 因为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 线性无关, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n, \boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 线性表示, 且表示法唯一. 事实上, 若 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2 \cdots, a_n)$, 那么

引例

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 n 维单位坐标向量, $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意一个 n 维向量. 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示, 且表示法唯一. 事实上, 若 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2 \cdots, a_n)$, 那么

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

定义

定义 4.1

设有序向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}\subset\mathbb{R}^n$，如果 B 线性无关,

定义

定义 4.1

设有序向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}\subset\mathbb{R}^n$，如果 B 线性无关, 且 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示, 即

定义

定义 4.1

设有序向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}\subset\mathbb{R}^n$，如果 B 线性无关, 且 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n$$

定义

定义 4.1

设有序向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}\subset\mathbb{R}^n$, 如果 B 线性无关, 且 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n$$

则称 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基(或基底), 有序数组 $(a_1,a_2\cdots,a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B (在基 B 下)的坐标, 记作

定义

定义 4.1

设有序向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}\subset\mathbb{R}^n$, 如果 B 线性无关, 且 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n$$

则称 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基(或基底), 有序数组 $(a_1,a_2\cdots,a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B (在基 B 下)的坐标, 记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad\text{或}\quad\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,$$

定义 4.1

设有序向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}\subset\mathbb{R}^n$，如果 B 线性无关, 且 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n$$

则称 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基(或基底), 有序数组 $(a_1,a_2\cdots,a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B (在基 B 下)的坐标, 记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad\text{或}\quad\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,$$

并称 $(a_1,a_2\cdots,a_n)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标向量.

关于定义的几点说明

- $\mathbb{R}^n$ 的一个基就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大无关组，所以 $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的.

关于定义的几点说明

- $\mathbb{R}^n$ 的一个基就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大无关组，所以 $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的.
- 基是有序的向量组.

关于定义的几点说明

- $\mathbb{R}^n$ 的一个基就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大无关组，所以 $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的.
- 基是有序的向量组. 即若 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，那么 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的另一个基.

关于定义的几点说明

- $\mathbb{R}^n$ 的一个基就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大无关组，所以 $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的.
- 基是有序的向量组. 即若 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，那么 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的另一个基.
- 基中的向量及某一向量的坐标(向量)均采用列向量的形式表示, 即定义中的线性表示式

关于定义的几点说明

- $\mathbb{R}^n$ 的一个基就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大无关组，所以 $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的.
- 基是有序的向量组. 即若 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，那么 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的另一个基.
- 基中的向量及某一向量的坐标(向量)均采用列向量的形式表示, 即定义中的线性表示式

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\beta}_1 + a_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\beta}_n$$

关于定义的几点说明

- $\mathbb{R}^n$ 的一个基就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大无关组，所以 $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的.
- 基是有序的向量组. 即若 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，那么 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的另一个基.
- 基中的向量及某一向量的坐标(向量)均采用列向量的形式表示, 即定义中的线性表示式

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\beta}_1 + a_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\beta}_n = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$$

关于定义的几点说明

- $\mathbb{R}^n$ 的一个基就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大无关组，所以 $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的.
- 基是有序的向量组. 即若 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，那么 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的另一个基.
- 基中的向量及某一向量的坐标(向量)均采用列向量的形式表示, 即定义中的线性表示式

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\beta}_1 + a_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\beta}_n = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

关于定义的几点说明

- 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 任意 n 维向量在此基下的坐标是唯一确定的.

关于定义的几点说明

- 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 任意 n 维向量在此基下的坐标是唯一确定的. 要求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标,

关于定义的几点说明

- 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基，任意 n 维向量在此基下的坐标是唯一确定的. 要求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标，就是解非齐次线性方程组

关于定义的几点说明

- 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 任意 n 维向量在此基下的坐标是唯一确定的. 要求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标, 就是解非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n.$$

关于定义的几点说明

- 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 任意 n 维向量在此基下的坐标是唯一确定的. 要求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标, 就是解非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n.$$

- 引例中的向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的自然基或标准基, 任意 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基下的坐标向量就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 本身.

关于定义的几点说明

- 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 任意 n 维向量在此基下的坐标是唯一确定的. 要求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标, 就是解非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n.$$

- 引例中的向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的自然基或标准基, 任意 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基下的坐标向量就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 本身. 事实上, 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2 \cdots, a_n)$,

关于定义的几点说明

- 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 任意 n 维向量在此基下的坐标是唯一确定的. 要求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标, 就是解非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n.$$

- 引例中的向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的自然基或标准基, 任意 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基下的坐标向量就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 本身. 事实上, 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2 \cdots, a_n)$,因为

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

关于定义的几点说明

- 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, 任意 n 维向量在此基下的坐标是唯一确定的. 要求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标, 就是解非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n.$$

- 引例中的向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的自然基或标准基, 任意 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在自然基下的坐标向量就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 本身. 事实上, 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2 \cdots, a_n)$,因为

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}_B = (a_1, a_2 \cdots, a_n).$$

例 1

例1. 设自然基 B_1 和基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0,0\cdots,0,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,0,\cdots,0,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_{n-1}=(0,0,0,\cdots,1,-1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_n=(0,0,0,0,\cdots,0,1)^T$, 分别求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 在两个基下的坐标.

例 1

例1. 设自然基 B_1 和基 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, -1, 0, 0 \cdots, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (0, 1, -1, 0, \cdots, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_{n-1} = (0, 0, 0, \cdots, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_n = (0, 0, 0, 0, \cdots, 0, 1)^T$, 分别求向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 在两个基下的坐标.

解: 因为 B_1 为自然基, 所以

$$\boldsymbol{\alpha}_{B_1}$$

例 1

例1. 设自然基 B_1 和基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0,0\cdots,0,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,0,\cdots,0,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_{n-1}=(0,0,0,\cdots,1,-1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_n=(0,0,0,0,\cdots,0,1)^T$, 分别求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 在两个基下的坐标.

解: 因为 B_1 为自然基, 所以

$$\boldsymbol{\alpha}_{B_1}=\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

例 1

例1. 设自然基 B_1 和基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0,0\cdots,0,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,0,\cdots,0,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_{n-1}=(0,0,0,\cdots,1,-1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_n=(0,0,0,0,\cdots,0,1)^T$, 分别求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 在两个基下的坐标.

解: 因为 B_1 为自然基, 所以

$$\boldsymbol{\alpha}_{B_1}=\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_{B_2}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

例 1

例1. 设自然基 B_1 和基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0,0\cdots,0,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,0,\cdots,0,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_{n-1}=(0,0,0,\cdots,1,-1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_n=(0,0,0,0,\cdots,0,1)^T$, 分别求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 在两个基下的坐标.

解: 因为 B_1 为自然基, 所以

$$\boldsymbol{\alpha}_{B_1}=\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_{B_2}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n$$

例 1

例1. 设自然基 B_1 和基 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, -1, 0, 0 \cdots, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (0, 1, -1, 0, \cdots, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_{n-1} = (0, 0, 0, \cdots, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_n = (0, 0, 0, 0, \cdots, 0, 1)^T$, 分别求向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 在两个基下的坐标.

解: 因为 B_1 为自然基, 所以

$$\boldsymbol{\alpha}_{B_1} = \boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_{B_2} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 即

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n$$

亦即

例 1

$$
\begin{cases}
x_1 = a_1 \\
-x_1 + x_2 = a_2 \\
-x_2 + x_3 = a_3 \\
\vdots \\
-x_{n-1} + x_n = a_n
\end{cases}
$$

例 1

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ -x_1 + x_2 = a_2 \\ -x_2 + x_3 = a_3 \\ \vdots \\ -x_{n-1} + x_n = a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_1 + a_2 \\ x_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{cases}$$

例 1

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ -x_1 + x_2 = a_2 \\ -x_2 + x_3 = a_3 \\ \vdots \\ -x_{n-1} + x_n = a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_1 + a_2 \\ x_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_{B_2} = (a_1, a_1 + a_2, \cdots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^T.$$

例 2

例2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基和基 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下有相同的坐标，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)^T$.

例 2

例2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 γ, 使它在自然基和基 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下有相同的坐标，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)^T$.

解: 设所求向量 γ 在两组基下的坐标均为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$,

例2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基和基 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下有相同的坐标，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)^T$.

解: 设所求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，则有

$$\boldsymbol{\gamma}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$$

例2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基和基 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下有相同的坐标，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)^T$.

解: 设所求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，则有

$$\boldsymbol{\gamma}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3+x_4\boldsymbol{\beta}_4$$

例 2

例2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基和基 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下有相同的坐标，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)^T$.

解: 设所求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，则有

$$\boldsymbol{\gamma}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3+x_4\boldsymbol{\beta}_4$$

即

$$\begin{cases} 2x_1+5x_3+6x_4=x_1 \\ x_1+3x_2+3x_3+6x_4=x_2 \\ -x_1+x_2+2x_3+x_4=x_3 \\ x_1+x_3+3x_4=x_4 \end{cases}$$

例 2

例2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基和基 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下有相同的坐标，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)^T$.

解: 设所求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，则有

$$\boldsymbol{\gamma}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3+x_4\boldsymbol{\beta}_4$$

即

$$\begin{cases} 2x_1+5x_3+6x_4=x_1 \\ x_1+3x_2+3x_3+6x_4=x_2 \\ -x_1+x_2+2x_3+x_4=x_3 \\ x_1+x_3+3x_4=x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+5x_3+6x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+6x_4=0 \\ -x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

例 2

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 2

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_4 = k$, 得方程组得通解为:

例 2

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_4 = k$, 得方程组得通解为:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T =$$

例 2

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_4=k$, 得方程组得通解为:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(-k,-k,-k,k)^T \quad (k\text{为任意实数.})$$

例 2

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x_4 = k$, 得方程组得通解为:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-k, -k, -k, k)^T \quad (k\text{为任意实数.})$$

即所求向量为:

$$\gamma = (-k, -k, -k, k)^T \quad (k\text{为任意实数.})$$

说明

从上面的例子可以看到：

说明

从上面的例子可以看到：$\mathbb{R}^n$ 中同一向量关于两个不同基的坐标一般是不同的.

说明

从上面的例子可以看到：$\mathbb{R}^n$ 中同一向量关于两个不同基的坐标一般是不同的. 那么这两个坐标之间有什么关系呢？

说明

从上面的例子可以看到：$\mathbb{R}^n$ 中同一向量关于两个不同基的坐标一般是不同的. 那么这两个坐标之间有什么关系呢？注意到坐标是决定于基的，

说明

从上面的例子可以看到：$\mathbb{R}^n$ 中同一向量关于两个不同基的坐标一般是不同的. 那么这两个坐标之间有什么关系呢？注意到坐标是决定于基的, 所以两个坐标间的关系决定于两个基之间的关系.

说明

从上面的例子可以看到：$\mathbb{R}^n$ 中同一向量关于两个不同基的坐标一般是不同的. 那么这两个坐标之间有什么关系呢？注意到坐标是决定于基的, 所以两个坐标间的关系决定于两个基之间的关系.下面我们先讨论两个基之间的关系, 再进一步得到两个坐标间的关系.

定理 4.1

设 $B = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 且

定理 4.1

设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\eta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ \boldsymbol{\eta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关的充要条件是

定理 4.1

设 $B = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\eta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关的充要条件是

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

定理 4.1 的证明

证: 定理的条件中的关系式可用矩阵表示为:

定理 4.1 的证明

证: 定理的条件中的关系式可用矩阵表示为:

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) =$$

定理 4.1 的证明

证: 定理的条件中的关系式可用矩阵表示为:

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

定理 4.1 的证明

证: 定理的条件中的关系式可用矩阵表示为:

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 4.1 的证明

证: 定理的条件中的关系式可用矩阵表示为:

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

定理 4.1 的证明

证: 定理的条件中的关系式可用矩阵表示为:

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) A$$

定理 4.1 的证明

证: 定理的条件中的关系式可用矩阵表示为:

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) A$$

定理 4.1 的证明

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关

定理 4.1 的证明

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关

$\Leftrightarrow\ r(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = n$

定理 4.1 的证明

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow \ r(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = n$$

$$\Leftrightarrow \ r(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

定理 4.1 的证明

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow \; r(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = n$$

$$\Leftrightarrow \; r(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

$$\Leftrightarrow \; r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$$

定理 4.1 的证明

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow \ r(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = n$$

$$\Leftrightarrow \ r(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

$$\Leftrightarrow \ r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

定理 4.1 的证明

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow\ r(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = n$$

$$\Leftrightarrow\ r(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

$$\Leftrightarrow\ r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

$$\Leftrightarrow\ |A| \neq 0.$$

关于定理 4.1 的说明

- 由定理可以得到:

关于定理 4.1 的说明

- 由定理可以得到: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 且 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$,

关于定理 4.1 的说明

- 由定理可以得到: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 且 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$, 那么 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$线性无关

关于定理 4.1 的说明

- 由定理可以得到: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 且 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$, 那么 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$线性无关 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$;

关于定理 4.1 的说明

- 由定理可以得到: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 且 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$, 那么 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$线性无关 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$; $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$线性相关

关于定理 4.1 的说明

- 由定理可以得到: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 且 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$, 那么 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$线性无关 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$; $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$线性相关 $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$.

关于定理 4.1 的说明

- 由定理可以得到: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 且 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$, 那么 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$线性无关 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$; $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$线性相关 $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$.
- 记住定理中的关系可用矩阵表示的形式.

过渡矩阵的定义

定义 4.2

设 $\mathbb{R}^n$ 的两个基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足

过渡矩阵的定义

定义 4.2

设 $\mathbb{R}^n$ 的两个基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$$

过渡矩阵的定义

定义 4.2

设 $\mathbb{R}^n$ 的两个基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)A$$

则称矩阵 A 为从旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵;

过渡矩阵的定义

定义 4.2

设 $\mathbb{R}^n$ 的两个基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$$

则称矩阵 A 为从旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵; 或基 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵.

关于过渡矩阵的几点说明

- 过渡矩阵 A 一定是可逆矩阵;

关于过渡矩阵的几点说明

- 过渡矩阵 A 一定是可逆矩阵;
- 过渡矩阵 A 中的第 j 列 $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T$ 是 $\boldsymbol{\eta}_j$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.

例题

例3. 已知 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$, 求从自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵.

例题

例3. 已知 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$, 求从自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵.

解: 将 $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,3)$ 用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示得:

例题

例3. 已知 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$, 求从自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵.

解: 将 $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,3)$ 用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示得:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \quad\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \quad\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{cases}$$

例题

例3. 已知 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$, 求从自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵.

解: 将 $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,3)$ 用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示得:

$$\left\{\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3\end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=$$

例题

例3. 已知 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$, 求从自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵.

解: 将 $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,3)$ 用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示得:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \quad \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{cases} \Rightarrow (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)$$

例题

例3. 已知 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$, 求从自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵.

解: 将 $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,3)$ 用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示得:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{cases} \Rightarrow (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

例题

例3. 已知 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$, 求从自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵.

解: 将 $\boldsymbol{\beta}_i\ (i=1,2,3)$ 用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示得:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{cases} \Rightarrow (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

于是所求过渡矩阵为

例题

例3. 已知 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$, 求从自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵.

解: 将 $\boldsymbol{\beta}_i\ \ (i=1,2,3)$ 用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示得:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3\end{cases}\Rightarrow(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

于是所求过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$

例题

例3. 已知 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$, 求从自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵.

解: 将 $\boldsymbol{\beta}_i\ \ (i=1,2,3)$ 用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示得:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3\end{cases}\Rightarrow(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

于是所求过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3).$

关于过渡矩阵的一个结论

或者设过渡矩阵为 A, 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$$

关于过渡矩阵的一个结论

或者设过渡矩阵为 A, 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)A$$

因为 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)$

关于过渡矩阵的一个结论

或者设过渡矩阵为 A, 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)A$$

因为 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3) = I$, 所以

关于过渡矩阵的一个结论

或者设过渡矩阵为 A, 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)A$$

因为 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3) = I$, 所以

$$A = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3).$$

关于过渡矩阵的一个结论

或者设过渡矩阵为 A, 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)A$$

因为 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3) = I$, 所以

$$A = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3).$$

从自然基到任一基 $B = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵就是 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$.

同一向量在不同的基下的坐标间的关系

定理 4.2

设在两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标向量分别为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,

同一向量在不同的基下的坐标间的关系

定理 4.2

设在两组基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标向量分别为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$,从基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵为 A, 则

同一向量在不同的基下的坐标间的关系

定理 4.2

设在两组基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标向量分别为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$,从基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵为 A, 则

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{y} = A^{-1}\boldsymbol{x}.$$

定理 4.2 的证明

证: 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任一 n 维向量, 由条件有

定理 4.2 的证明

证: 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任一 n 维向量, 由条件有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

定理 4.2 的证明

证: 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任一 n 维向量, 由条件有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = y_1\boldsymbol{\eta}_1 + y_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\eta}_n$$

定理 4.2 的证明

证: 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任一 n 维向量, 由条件有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = y_1\boldsymbol{\eta}_1 + y_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\eta}_n$$

且

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)$$

定理 4.2 的证明

证: 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任一 n 维向量, 由条件有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = y_1\boldsymbol{\eta}_1 + y_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\eta}_n$$

且

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$$

定理 4.2 的证明

证: 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任一 n 维向量, 由条件有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = y_1\boldsymbol{\eta}_1 + y_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\eta}_n$$

且

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$$

于是

定理 4.2 的证明

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

定理 4.2 的证明

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

定理 4.2 的证明

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)$$

定理 4.2 的证明

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

定理 4.2 的证明

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= [(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) A]$$

定理 4.2 的证明

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= [(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

定理 4.2 的证明

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= [(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A]\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\left[A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right]$$

定理 4.2 的证明

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= [(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A]\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\left[A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right]$$

因为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1 下的坐标是唯一的, 所以

定理 4.2 的证明

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= [(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) A] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \left[A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right]$$

因为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1 下的坐标是唯一的, 所以

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

定理 4.2 的证明

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

$$=[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)A]\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\left[A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right]$$

因为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1 下的坐标是唯一的, 所以

$$A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x} \quad 或 \quad \boldsymbol{y}=A^{-1}\boldsymbol{x}.$$

记忆基变换与坐标变换公式

- 新基(矩阵)＝旧基(矩阵) $\times$ 过渡矩阵;

记忆基变换与坐标变换公式

- 新基(矩阵)＝旧基(矩阵) $\times$ 过渡矩阵;
- 旧坐标＝过渡矩阵 $\times$ 新坐标,

记忆基变换与坐标变换公式

- 新基(矩阵)＝旧基(矩阵) $\times$ 过渡矩阵;
- 旧坐标＝过渡矩阵 $\times$ 新坐标，新坐标＝过渡矩阵的逆矩阵 $\times$ 旧坐标.

例 4

例4. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 及 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,3)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,7,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_1 = (3,1,4)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (5,2,1)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (1,1,-6)^T$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{\gamma} = (3,6,2)^T$ 在基 B_1 下的坐标.

(2) 求从 B_1 到 B_2 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 B_2 下的坐标.

例 4

例4. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 及 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)^T$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^T$ 在基 B_1 下的坐标.

(2) 求从 B_1 到 B_2 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 B_2 下的坐标.

解: (1) 设所求坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$, 即有

例 4

例4. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 及 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)^T$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^T$ 在基 B_1 下的坐标.

(2) 求从 B_1 到 B_2 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 B_2 下的坐标.

解: (1) 设所求坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$, 即有

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

例 4

例4. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 及 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)^T$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^T$ 在基 B_1 下的坐标.

(2) 求从 B_1 到 B_2 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 B_2 下的坐标.

解: (1) 设所求坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$, 即有

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

方程组整理得:

例 4

例4. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 及 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)^T$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^T$ 在基 B_1 下的坐标.

(2) 求从 B_1 到 B_2 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 B_2 下的坐标.

解: (1) 设所求坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$, 即有

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

方程组整理得:

例 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

例 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

对其增广矩阵进行初等行变换

例 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

对其增广矩阵进行初等行变换

$$(A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 \\ 2 & 3 & 7 & | & 6 \\ 1 & 3 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

例 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

对其增广矩阵进行初等行变换

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

例 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

对其增广矩阵进行初等行变换

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

对其增广矩阵进行初等行变换

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

即方程组的解为

例 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

对其增广矩阵进行初等行变换

$$(A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 \\ 2 & 3 & 7 & | & 6 \\ 1 & 3 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

即方程组的解为 $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 1.$

例 4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

对其增广矩阵进行初等行变换

$$(A, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

即方程组的解为 $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 1$. 即 $\boldsymbol{\gamma}_{B_1} = (-2, 1, 1)^T$

例 4

(2) 设所求过渡矩阵为 A,

例 4

(2) 设所求过渡矩阵为 A, 即有

例 4

(2) 设所求过渡矩阵为 A, 即有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A$$

例 4

(2) 设所求过渡矩阵为 A, 即有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A$$

于是

$$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$$

例 4

(2) 设所求过渡矩阵为 A, 即有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A$$

于是

$$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 4

(2) 设所求过渡矩阵为 A, 即有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)A$$

于是

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

例 4

(2) 设所求过渡矩阵为 A, 即有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A$$

于是

$$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 4

(2) 设所求过渡矩阵为 A, 即有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A$$

于是

$$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

例 4

(2) 设所求过渡矩阵为 A, 即有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)A$$

于是

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$$

例 4

(3) 设向量 $\boldsymbol{\gamma}_{B_2} = \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, 则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

例 4

(3) 设向量 $\boldsymbol{\gamma}_{B_2} = \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, 则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

例 4

(3) 设向量 $\boldsymbol{\gamma}_{B_2} = \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, 则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 4

(3) 设向量 $\boldsymbol{\gamma}_{B_2} = \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, 则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(153, -106, 83).$$

说明

本题如果直接利用公式 $\boldsymbol{y} = A^{-1}\boldsymbol{x}$ 来求 $\boldsymbol{y}$,

说明

本题如果直接利用公式 $\boldsymbol{y} = A^{-1}\boldsymbol{x}$ 来求 $\boldsymbol{y}$, 计算 A^{-1} 时计算量很大,

说明

本题如果直接利用公式 $\boldsymbol{y}=A^{-1}\boldsymbol{x}$ 来求 $\boldsymbol{y}$, 计算 A^{-1} 时计算量很大,为避免繁琐的运算, 可采用如下方法之一求解.

说明

本题如果直接利用公式 $\boldsymbol{y}=A^{-1}\boldsymbol{x}$ 来求 $\boldsymbol{y}$, 计算 A^{-1} 时计算量很大,为避免繁琐的运算, 可采用如下方法之一求解.

(1) 因为$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,

说明

本题如果直接利用公式 $\boldsymbol{y}=A^{-1}\boldsymbol{x}$ 来求 $\boldsymbol{y}$, 计算 A^{-1} 时计算量很大,为避免繁琐的运算, 可采用如下方法之一求解.

(1) 因为$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,所以

$$A^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$$

说明

本题如果直接利用公式 $\boldsymbol{y} = A^{-1}\boldsymbol{x}$ 来求 $\boldsymbol{y}$, 计算 A^{-1} 时计算量很大,为避免繁琐的运算, 可采用如下方法之一求解.

(1) 因为 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$,所以

$$A^{-1} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$$

(2)设 $\boldsymbol{\gamma}_{B_2} = \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$,

说明

本题如果直接利用公式 $\boldsymbol{y}=A^{-1}\boldsymbol{x}$ 来求 $\boldsymbol{y}$, 计算 A^{-1} 时计算量很大,为避免繁琐的运算, 可采用如下方法之一求解.

(1) 因为$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,所以

$$A^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$$

(2)设 $\boldsymbol{\gamma}_{B_2}=\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$, 解方程组 $y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+y_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\gamma}$ 即可.

例 5

例5. 求平面直角坐标系的旋转坐标变换公式, 旋转变换为逆时针方向旋转 θ 角度.

例 5

例5. 求平面直角坐标系的旋转坐标变换公式, 旋转变换为逆时针方向旋转 θ 角度.

解: 设在直角坐标系 xOy 中, $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{i},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{j}$, 在直角坐标系 $x'Oy'$ 中, $\boldsymbol{\varepsilon}_1'=\boldsymbol{i}',\boldsymbol{\varepsilon}_2'=\boldsymbol{j}'$, 有

例 5

例5. 求平面直角坐标系的旋转坐标变换公式, 旋转变换为逆时针方向旋转 θ 角度.

解: 设在直角坐标系 xOy 中, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{j}$, 在直角坐标系 $x'Oy'$ 中, $\boldsymbol{\varepsilon}_1' = \boldsymbol{i}', \boldsymbol{\varepsilon}_2' = \boldsymbol{j}'$, 有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1' = \cos\theta \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \sin\theta \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2' = -\sin\theta \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cos\theta \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{cases}$$

例 5

例5. 求平面直角坐标系的旋转坐标变换公式, 旋转变换为逆时针方向旋转 θ 角度.

解: 设在直角坐标系 xOy 中, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{j}$, 在直角坐标系 $x'Oy'$ 中, $\boldsymbol{\varepsilon}_1' = \boldsymbol{i}', \boldsymbol{\varepsilon}_2' = \boldsymbol{j}'$, 有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1' = \cos\theta\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \sin\theta\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2' = -\sin\theta\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cos\theta\boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{cases}$$

即

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2')$$

例 5

例5. 求平面直角坐标系的旋转坐标变换公式, 旋转变换为逆时针方向旋转 θ 角度.

解: 设在直角坐标系 xOy 中, $\varepsilon_1=\boldsymbol{i}, \varepsilon_2=\boldsymbol{j}$, 在直角坐标系 $x'Oy'$ 中, $\varepsilon_1'=\boldsymbol{i}', \varepsilon_2'=\boldsymbol{j}'$, 有

$$\begin{cases} \varepsilon_1'=\cos\theta\varepsilon_1+\sin\theta\varepsilon_2 \\ \varepsilon_2'=-\sin\theta\varepsilon_1+\cos\theta\varepsilon_2 \end{cases}$$

即

$$(\varepsilon_1', \varepsilon_2')=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

例 5

例5. 求平面直角坐标系的旋转坐标变换公式, 旋转变换为逆时针方向旋转 θ 角度.

解: 设在直角坐标系 xOy 中, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{j}$, 在直角坐标系 $x'Oy'$ 中, $\boldsymbol{\varepsilon}_1' = \boldsymbol{i}', \boldsymbol{\varepsilon}_2' = \boldsymbol{j}'$, 有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1' = \cos\theta\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \sin\theta\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2' = -\sin\theta\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cos\theta\boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{cases}$$

即

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1', \boldsymbol{\varepsilon}_2') = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

例 5

设任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下的坐标分别为 $(x,y)^T$ 和 $(x',y')^T$, 则有

例 5

设任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下的坐标分别为 $(x, y)^T$ 和 $(x', y')^T$, 则有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

例 5

设任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下的坐标分别为 $(x,y)^T$ 和 $(x',y')^T$, 则有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

例 5

设任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下的坐标分别为 $(x,y)^T$ 和 $(x',y')^T$, 则有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

例 5

设任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下的坐标分别为 $(x,y)^T$ 和 $(x',y')^T$, 则有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

例 5

设任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下的坐标分别为 $(x, y)^T$ 和 $(x', y')^T$, 则有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

例 5

设任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下的坐标分别为 $(x,y)^T$ 和 $(x',y')^T$, 则有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

例 5

设任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基下的坐标分别为 $(x,y)^T$ 和 $(x',y')^T$, 则有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

这就是所求的坐标变换公式.