2009-2010 线性代数C

A卷 文科54学时

一. $AA^T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&1&2\\1&1&2&2\\2&2&2&3\end{pmatrix}$

$|AA^T|=\begin{vmatrix}2&1&1&2\\1&2&1&2\\1&1&2&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&4&4&6\\1&2&1&2\\1&1&2&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}=0$

$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$r(B)=5$

二. $(A-2I)X=B$

$(A-2I\,\vdots\,B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&0\\0&-1&2&1&0&2\\0&0&2&2&0&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&1&-1\\0&-1&0&-1&0&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&-1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)$ $X=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

三. (1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明如下：

假设线性相关

则存在不全为0的数 k_1,k_2,k_3

使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

故 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+0\alpha_4=0$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，与已知矛盾

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

(2) 设存在数 k_1,k_2,k_3

使 $k_1(l\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(m\alpha_3+\alpha_1)=0$

即 $(k_1l+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3m)\alpha_3=0$

又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

故 $\begin{cases}k_1l+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3m=0\end{cases}$ ①

若 $l\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ m\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关

则方程组①只有零解

故系数行列式 $D=\begin{vmatrix}l&0&1\\1&1&0\\0&1&m\end{vmatrix}=lm+1\neq0$

四. $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&2&a&-1\\2&3&0&b\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&a-1&-3\\0&0&-a-1&b-1\end{array}\right)$

(1) 当 $r(A)\neq r(\bar{A})$ 时，无解

$\begin{cases}-a-1=0\\b-1\neq0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-1\\b\neq1\end{cases}$

(2) 当 $r(A)=r(\bar{A})=n$ 时，有唯一解

$-a-1\neq0$ 即 $a\neq-1$

(3) 当 $r(A)=r(\bar{A})<n$ 时，有无穷多解

$\begin{cases}-a-1=0\\b-1=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$ 此时 $\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&5\\0&1&-2&-3\\0&0&0&0\end{array}\right)$

对应的齐次方程组的基础解系为 $\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ 原方程组的特解为 $\begin{pmatrix}5\\-3\\0\end{pmatrix}$

原方程组的通解为 $\eta=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$，$c$为任意常数

五. (1) $A^T=E^T-\frac{2}{\alpha^T\alpha}(\alpha\alpha^T)^T=E-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T=A$

$(kE-A)^T=kE^T-A^T=kE-A$ $(kE-A)$为实对称矩阵，故能相似于一个对角阵

(2) $A^2=(E-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T)(E-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T)=E-\frac{4}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T+\frac{4}{(\alpha^T\alpha)^2}(\alpha\alpha^T)^2$

$=E-\frac{4}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T+\frac{4}{(\alpha^T\alpha)^2}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=E$

△ A为实对称矩阵兼正交矩阵 故A的特征值只能为±1

又 $k\neq\pm1$ 故 $|kE-A|\neq0$ 故 $(kE-A)$ 可逆

(3). $(E-2\alpha\alpha^T)^T(E-2\alpha\alpha^T)=(E-2\alpha\alpha^T)(E-2\alpha\alpha^T)=E-4\alpha\alpha^T+4(\alpha\alpha^T)^2$

$$=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=E+4(\alpha^T\alpha-1)\alpha\alpha^T=E$$

因为$\alpha\neq 0$，所以$\alpha\alpha^T\neq 0$，所以$\alpha^T\alpha=1$

六、(1). $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

(2). 特征方程为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$

特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_{2,3}=1$

当$\lambda_1=-1$时，$(-I-A)x=0$，线性无关特征向量为$x_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

单位化，得 $x_1^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

当$\lambda_{2,3}=1$时，$(I-A)x=0$，线性无关特征向量为$x_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$x_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

规范正交化，得 $x_2^*=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$x_3^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

正交矩阵为$T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，正交变换为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

(3). $f=-y_1^2+y_2^2+y_3^2$　f为不定二次型

七、(1). 因为A正定，故A的特征值均大于0

设λ为A的任一特征值

①. 则$\frac{1}{\lambda}$为A^{-1}的特征值，且$\frac{1}{\lambda}>0$

故A^{-1}的特征值均大于0

因为$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$

故A^{-1}为实对称矩阵

故A^{-1}为正定矩阵

②. 则$\frac{|A|}{\lambda}$为A^*的特征值，又$|A|>0$，故$\frac{|A|}{\lambda}>0$

故A^*的特征值均大于0

因为$(A^*)^T=(|A|A^{-1})^T=|A|A^{-1}=A^*$

故A^*为实对称矩阵

故A^*为正定矩阵

③. $(A^{-1}+A^*)^T=(A^{-1})^T+(A^*)^T=A^{-1}+A^*$　故$A^{-1}+A^*$为实对称矩阵

对任一非零列向量x，$x^T(A^{-1}+A^*)x=x^TA^{-1}x+x^TA^*x>0$

故$A^{-1}+A^*$为正定矩阵

(2). $C^T=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&A^*\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}(A^{-1})^T&0^T\\0^T&(A^*)^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&A^*\end{pmatrix}=C$

故C为实对称矩阵

设A^{-1}的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$A^*$的特征值为$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$

因为A^{-1}，A^*均为正定矩阵，故$\lambda_i>0$，$\mu_i>0$　$(i=1,2,\cdots,n)$

$$|\lambda I-C|=\begin{vmatrix}\lambda I_n-A^{-1}&0\\0&\lambda I_n-A^*\end{vmatrix}=|\lambda I_n-A^{-1}||\lambda I_n-A^*|=0$$

故C的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n,\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_n$，且均大于0

故C为正定矩阵