Modélisation du Stockage du Dioxyde de Carbone dans différents compartiments

PATEL Lucah, ERRIADI Amine,
EKNOSYAN Gagik

Mai 2025

Dans ce projet, trois variables sont étudiées:

$C_A(t)$ La quantité de carbone stockée dans l'atmosphère.

$C_T(t)$ La quantité de carbone stockée dans les arbres.

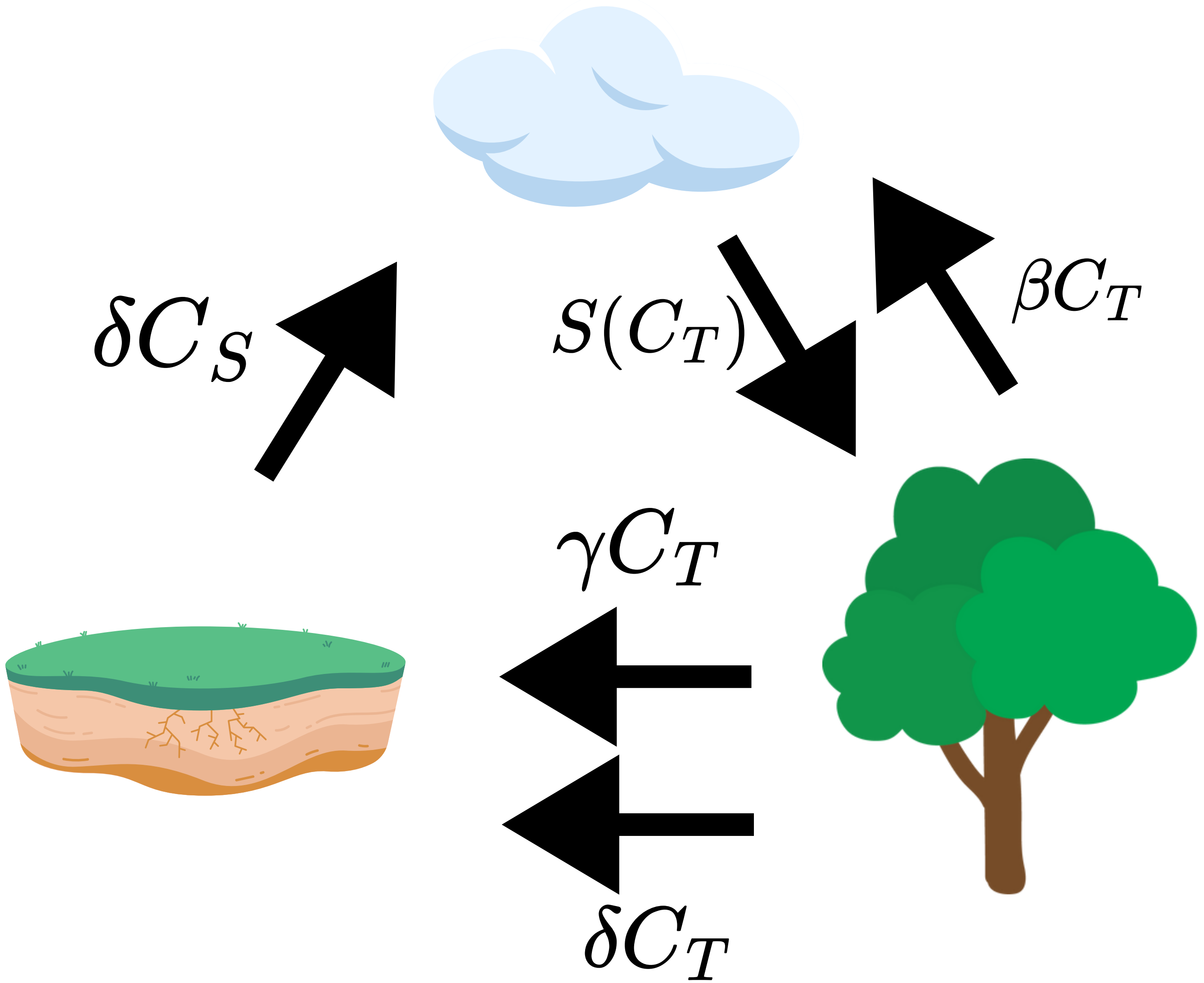
$C_S(t)$ La quantité de carbone stockée dans les sols.

On a
$$\begin{cases} \dfrac{dC_A(t)}{dt} = -S(C_T(t)) + \beta C_T(t) + \delta C_S(t) \\ \dfrac{dC_T(t)}{dt} = S(C_T(t)) - \beta C_T(t) - \delta C_T(t) - \gamma C_T(t) \\ \dfrac{dC_S(t)}{dt} = \gamma C_T(t) - \delta C_S(t) + \delta C_T(t) \end{cases}$$

Où
$$S(C_T) = \alpha C_T \left(1 - \frac{C_T}{K}\right)$$

Représente le taux de séquestration du carbone dans les arbres

Interprétations :



Résolution : Notations

$$\vec{C}(t) = \begin{pmatrix} C_A(t) \\ C_T(t) \\ C_S(t) \end{pmatrix} \qquad f(t,\vec{C}(t)) = \begin{pmatrix} -\alpha C_T(t)(1-\frac{C_T(t)}{K}) + \beta C_T(t) + \delta C_S(t) \\ \alpha C_T(t)(1-\frac{C_T(t)}{K}) - \beta C_T(t) - \delta C_T(t) - \gamma C_T(t) \\ \gamma C_T(t) - \delta C_S(t) + \delta C_T(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\dfrac{d\vec{C}(t)}{dt} = f(t,\vec{C}(t))$

Discrétisation temporelle :

$$t_{n+1} = t_n + h$$

On va noter :

$$\begin{array}{ccc} \vec{C}_n & = & \vec{C}(t_n) \\ C_A(t_n) & = & C_{A,n} \\ C_T(t_n) & = & C_{T,n} \\ C_S(t_n) & = & C_{S,n} \end{array}$$

Résolution : Euler Implicite

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\vec{C(t)}}{dt}\, dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \vec{C}(t))\, dt$$

On obtient par le rectangle à droite :

$\vec{C}_{n+1} - \vec{C}_n \approx (t_{n+1} - t_n) f(t_{n+1}, \vec{C}_{n+1})$

On obtient la suite suivante :

$$\vec{C}_{n+1} = \vec{C}_n + h f(t_{n+1}, \vec{C}_{n+1})$$

Problème : ce n'est pas linéaire, difficile d'isoler $\vec{C}_{n+1}$

Résolution : Euler Explicite

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\vec{C(t)}}{dt}\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,\vec{C}(t))\,dt$$

On obtient par le rectangle à gauche :

$$\vec{C}_{n+1} - \vec{C}_n \approx (t_{n+1} - t_n) f(t_n, \vec{C}_n)$$

On obtient la suite suivante :

$$\vec{C}_{n+1} = \vec{C}_n + hf(t_n, \vec{C}_n)$$

On pourra comparer les méthodes implicites et explicites

Résolution : Point Fixe

En posant : $F(\vec{C}_{n+1}) = \vec{C}_n + h.\, f(t_{n+1}, \vec{C}_{n+1})$

On se ramène à résoudre à chaque étape :

$$F(\vec{C}_{n+1}) = \vec{C}_{n+1}$$

On peut montrer que F est contractante pour h assez petit, donc la suite $(\vec{C}_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} \vec{C}_{n,k+1} = F(\vec{C}_{n,k}) \\ \vec{C}_{n,0} = \vec{C}_{n-1} \end{cases}$

Converge vers l'unique point fixe de F

Résolution : Trapèzes

On peut utiliser la méthode des trapèzes pour mieux approximer l'intégrale :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \vec{C}(t))\, dt \approx \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, \vec{C}_{n+1}) + f(t_n, \vec{C}_n))$$

On a alors :

$$\vec{C}_{n+1} = \vec{C}_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, \vec{C}_{n+1}) + f(t_n, \vec{C}_n))$$

$$F(\vec{C}_{n+1}) = \vec{C}_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, \vec{C}_{n+1}) + f(t_n, \vec{C}_n))$$

On va utiliser la méthode de newton pour résoudre $F(\vec{C}_{n+1}) = \vec{C}_{n+1}$

Résolution : Newton

$$f_{newton}(\vec{C}_{n+1}) = F(\vec{C}_{n+1}) - \vec{C}_{n+1}$$

On résout : $f_{newton}(\vec{C}_{n+1}) = 0$

$$f'_{newton}(\vec{C}_{n+1}) = \frac{d}{d\vec{C}_{n+1}} f_{newton}(\vec{C}_{n+1})$$

$$f'_{newton}(\vec{C}_{n+1}) = \frac{h}{2} \frac{d}{d\vec{C}_{n+1}} f(t_{n+1}, \vec{C}_{n+1}) - I_3$$

$$f'_{newton}(\vec{C}_{n+1}) = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha + \frac{2C_{T,n+1}}{K} + \beta & \delta \\ 0 & \alpha - \frac{2C_{T,n+1}}{K} - \beta - \delta - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma + \delta & -\delta \end{pmatrix} - I_3$$

Résolution : Newton

Ainsi, chaque $\vec{C}_n$ est solution de l'équation $f_{newton}(X) = 0$

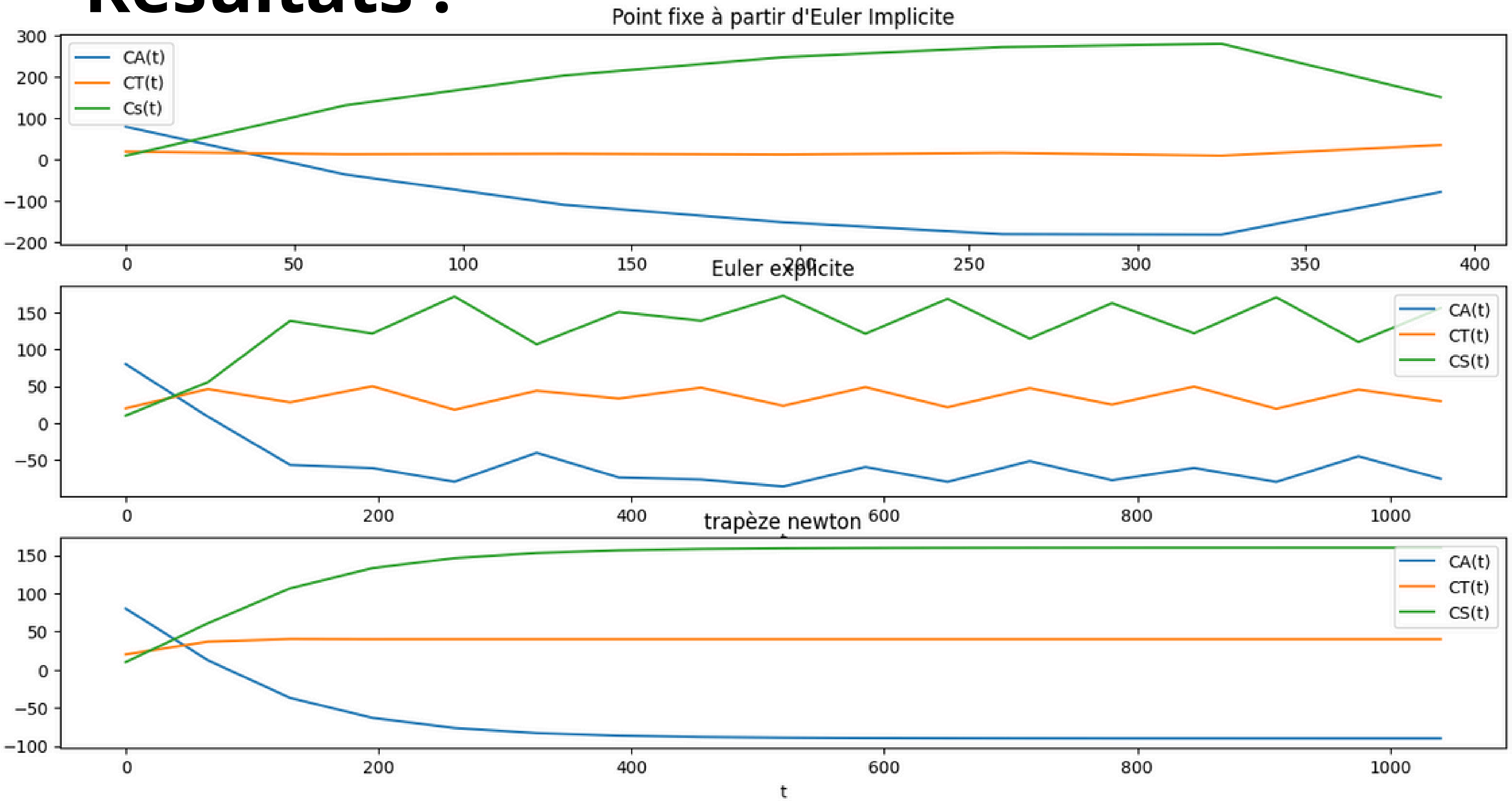
(la fonction de newton n'est pas la même selon n)

Algorithme :

$$\begin{cases} X_{n,0} = C_{n-1} \\ X_{n,k+1} = X_{n,k} - \left(f'_{\text{newton}}(X_{n,k})\right)^{-1} \cdot f_{\text{newton}}(X_{n,k}) \end{cases}$$

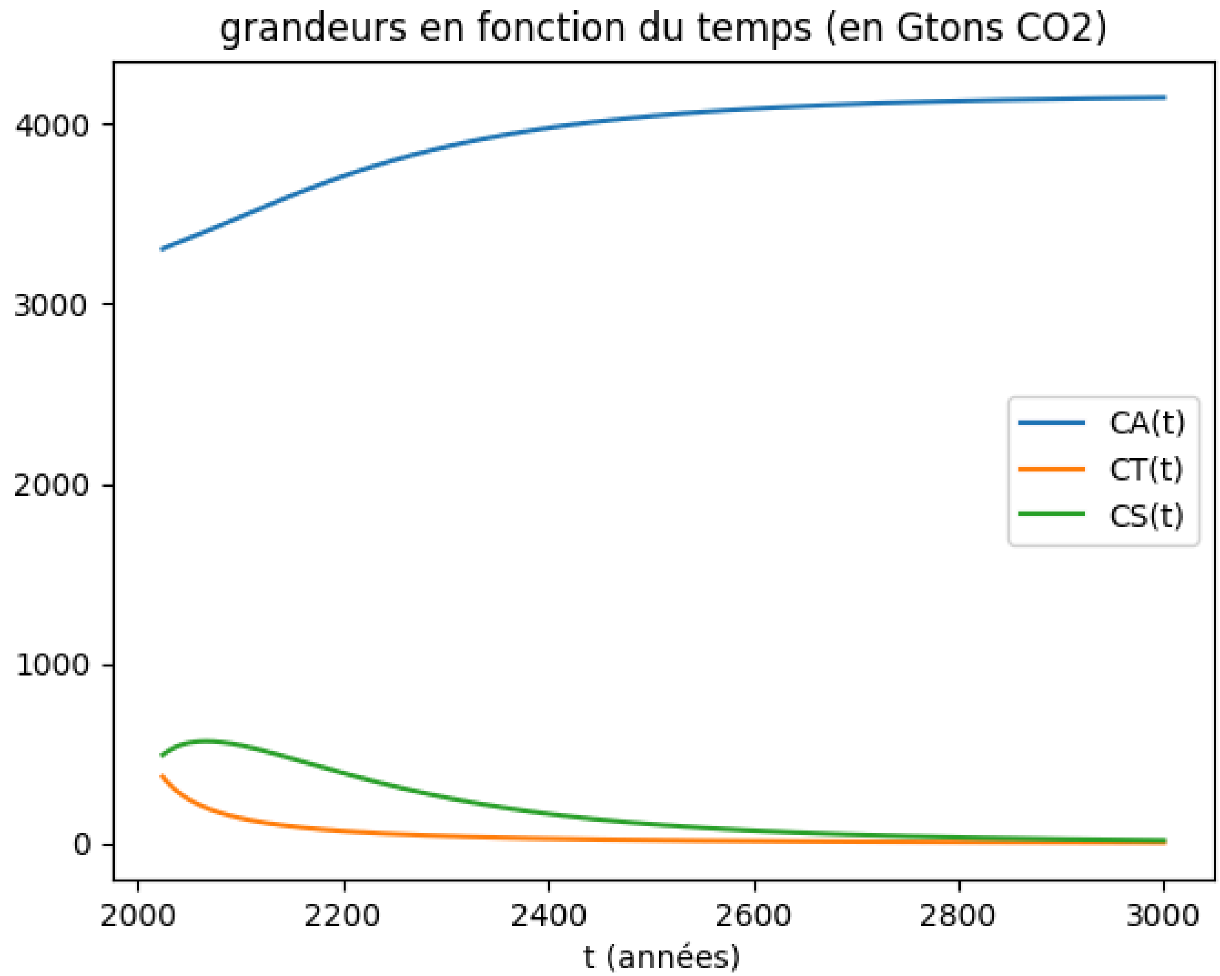
La méthode converge car la fonction de newton est de determinant non nul, et cette méthode converge plus rapidement que la précédente.

Résultats :



On peut observer la stabilité des méthodes implicites par rapport à l'explicite, en particulier celle des trapèzes

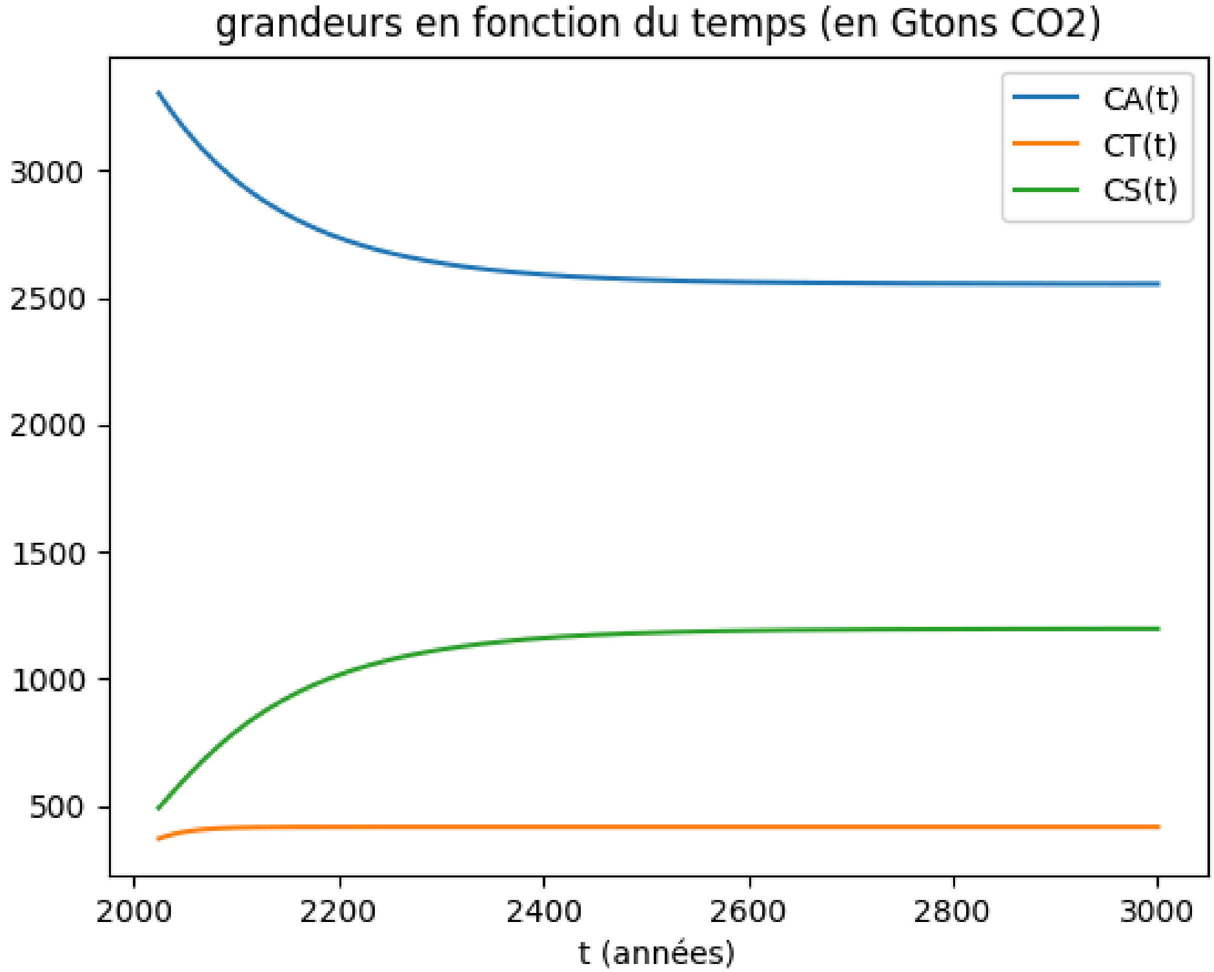
Influence des constantes :



valeurs prédictives de 2024 à 3000

Influence des constantes :

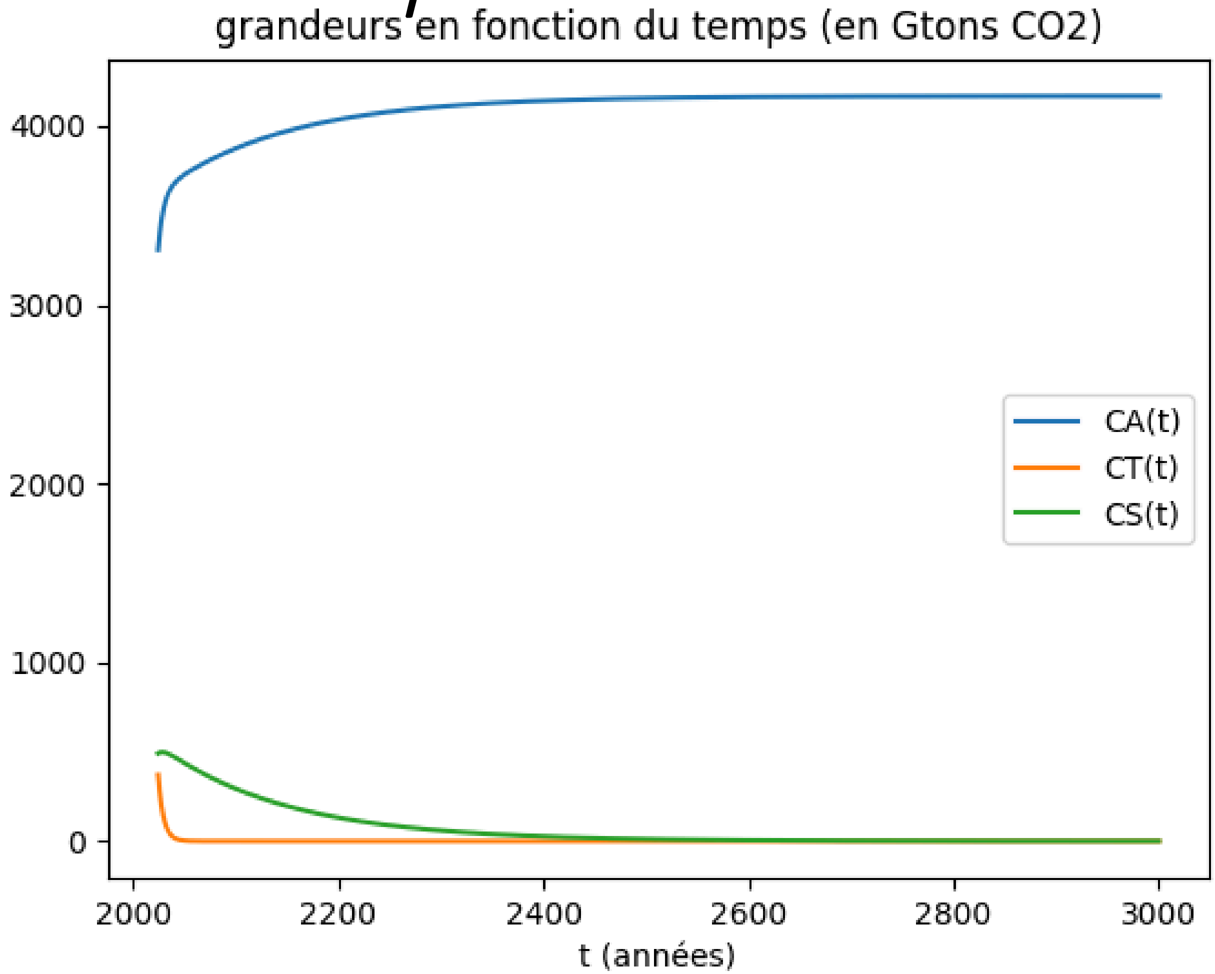
Augmentation de α (x 2)



Plus de transfert vers les arbres depuis l'atmosphère

Influence des constantes :

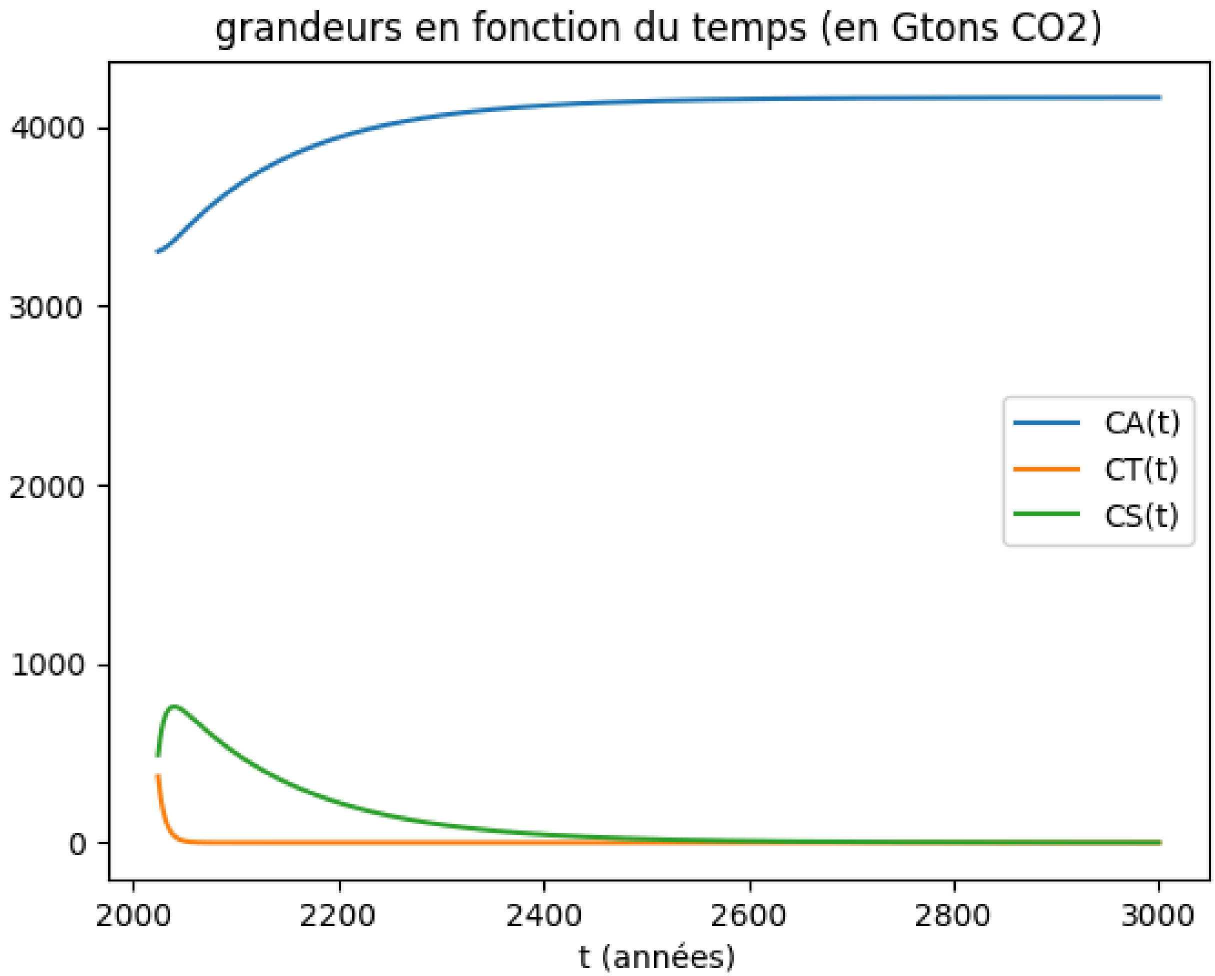
Augmentation de β (x 10)



Plus de transfert vers l'atmosphère depuis les arbres

Influence des constantes :

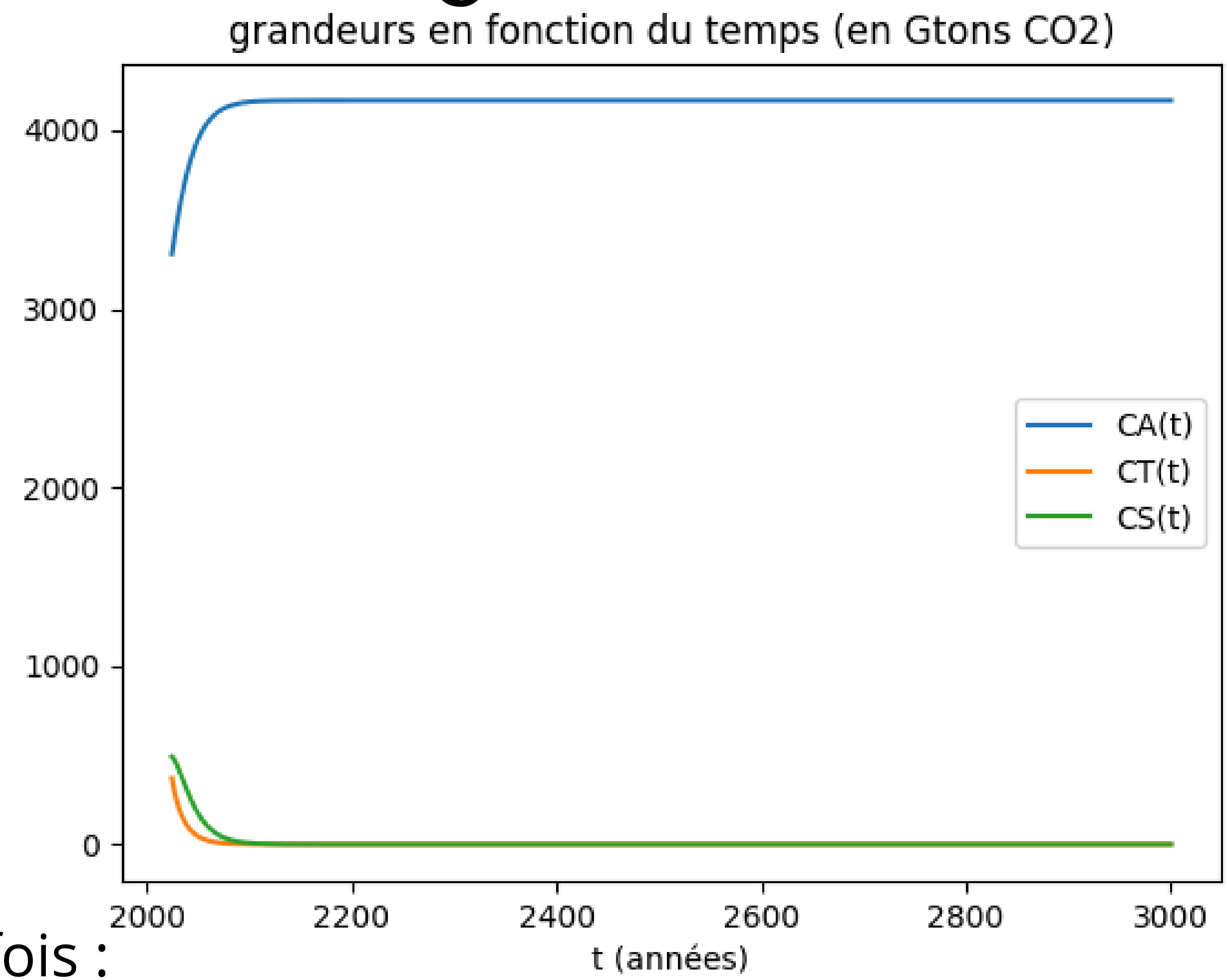
Augmentation de γ (x 10)



Plus de transfert vers les sols depuis les arbres

Influence des constantes :

Augmentation de δ (x 10)



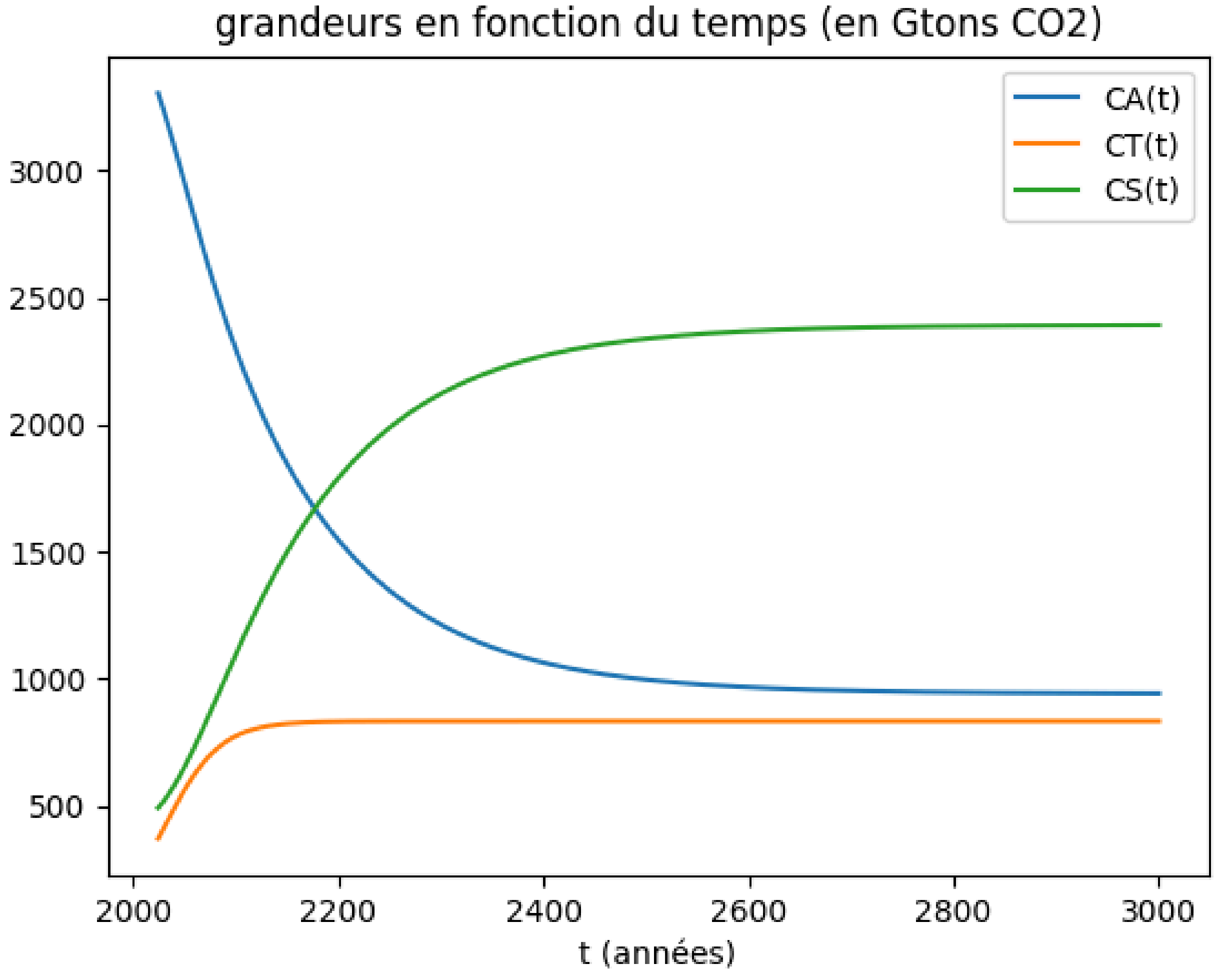
Impacte à la fois :

-Le transfert des arbres vers les sols

-Le transfert des sols vers l’atmosphère

Influence des constantes :

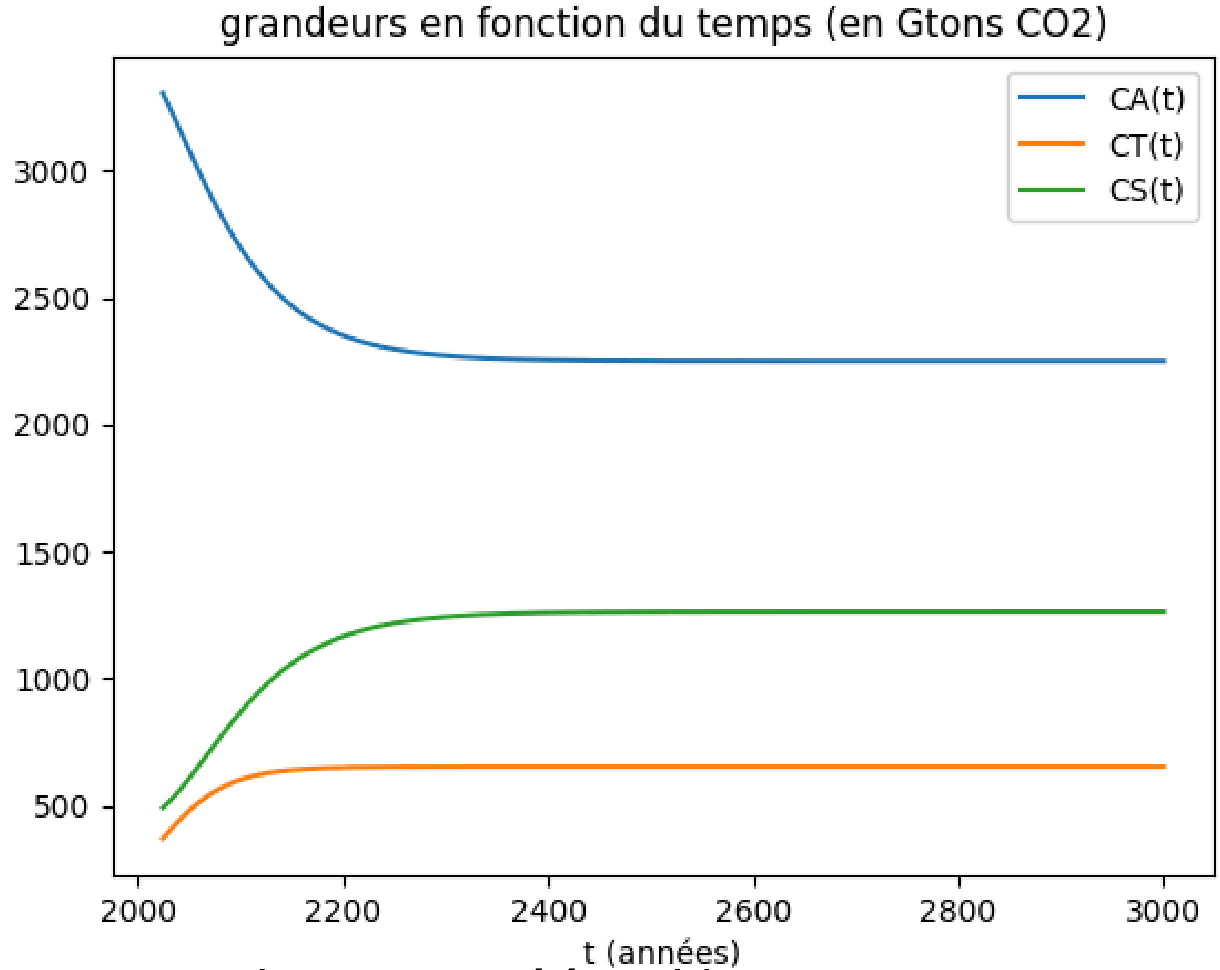
Augmentation de K et α (x 2, 2)



On augmente à la fois la capacité de stockage des arbres, et l'absorbtion

Influence des constantes :

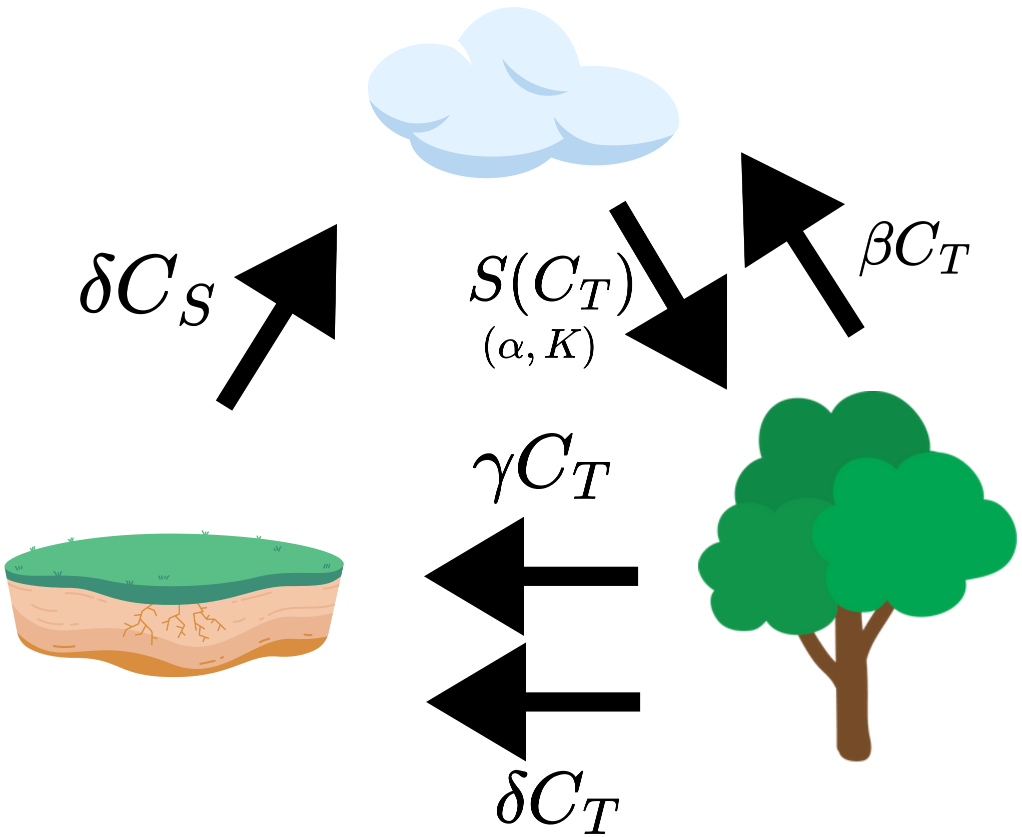
Augmentation de K et α et δ (x 2, 2, 2)



En augmentant beta, on rééquilibre

Influence des constantes :

Conclusions :



Améliorations du modèle :

On peut rajouter une 4eme valeur à étudier qui modélise les océans, ou lacs

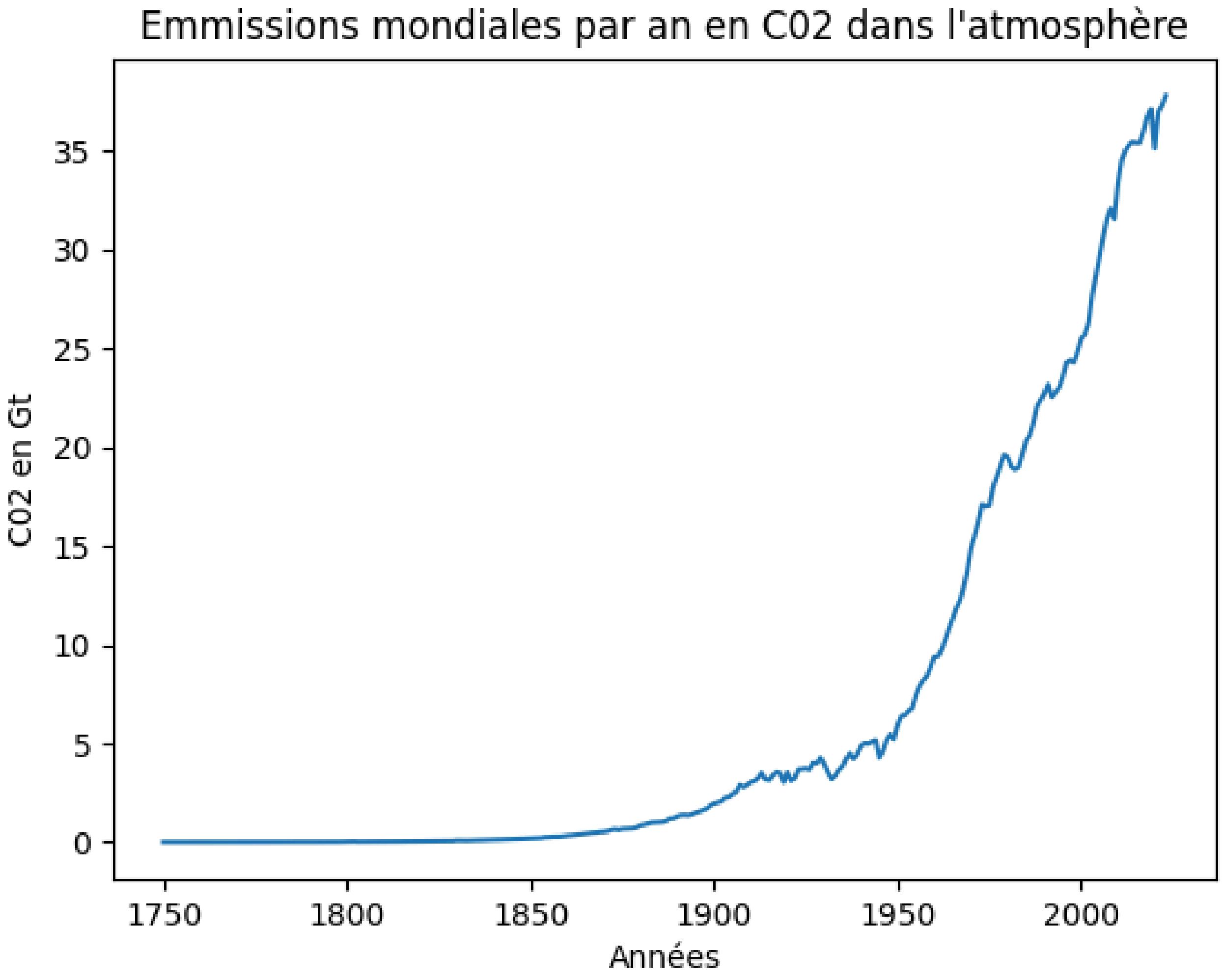
$$\begin{cases} \dfrac{dC_A(t)}{dt} = -S(C_T(t)) + \beta C_T(t) + \delta C_S(t) - S_2(C_O(t)) + \omega C_O(t) \\ \dfrac{dC_T(t)}{dt} = S(C_T(t)) - \beta C_T(t) - \delta C_T(t) - \gamma C_T(t) \\ \dfrac{dC_S(t)}{dt} = \gamma C_T(t) - \delta C_S(t) + \delta C_T(t) \\ \dfrac{dC_O(t)}{dt} = S_2(C_O(t)) - \omega C_O(t) \end{cases}$$

$$S_2(C_O) = \alpha_2 C_O \left(1 - \frac{C_O}{K_2}\right)$$

Améliorations du modèle :

Impact humain :

L'humain a un impact non négligeable sur la quantité de CO_2 dans l'atmosphère. On peut ajouter un terme source dans $\frac{dC_A}{dt}$ pour modéliser cela



Source : Our World In Data

Estimation du terme source :

On cherche le terme source sous la forme :

$\lambda \exp(at)$ Ou encore : $\exp(at+b)$

On introduit l'EQM (Erreur Quadratique Moyenne) :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\exp(at_i+b)-y_i)^2$$

Où les t_i correspondent au temps en année, et les y_i les emissions de CO_2 durant cette année

On cherche à minimiser l'EQM

Estimation du terme source :

On peut voir l'EQM comme une fonction des variables a et b

$$EQM(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\exp(at_i + b) - y_i)^2$$

$$\frac{dEQM}{da}(a,b) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \exp(at_i + b)(\exp(at_i + b) - y_i)$$

$$\frac{dEQM}{db}(a,b) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp(at_i + b)(\exp(at_i + b) - y_i)$$

Estimation du terme source :

Descente de gradient :

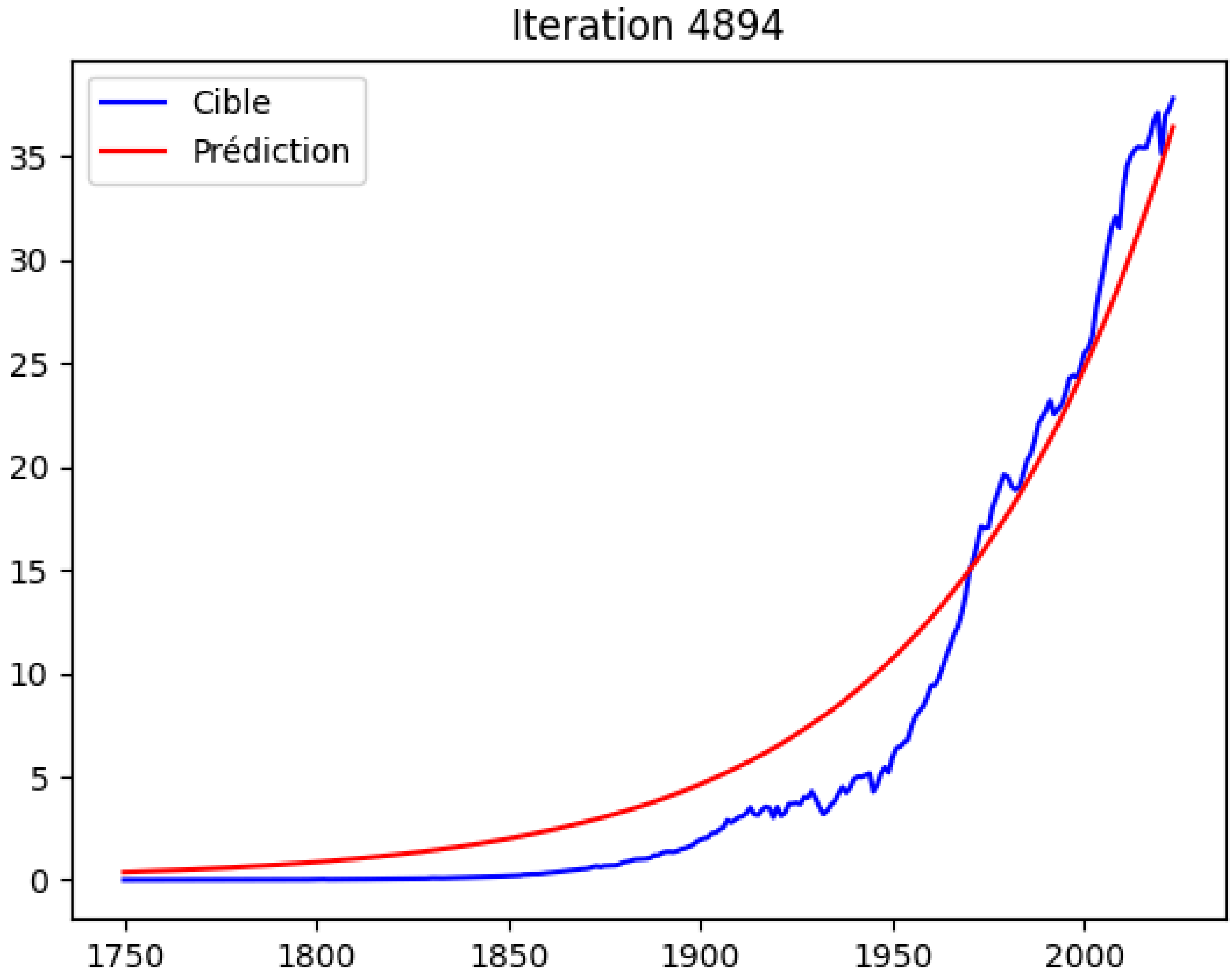
$$a = a - (\frac{dEQM}{da}(a,b)) * l_a$$

$$b = b - (\frac{dEQM}{db}(a,b)) * l_b$$

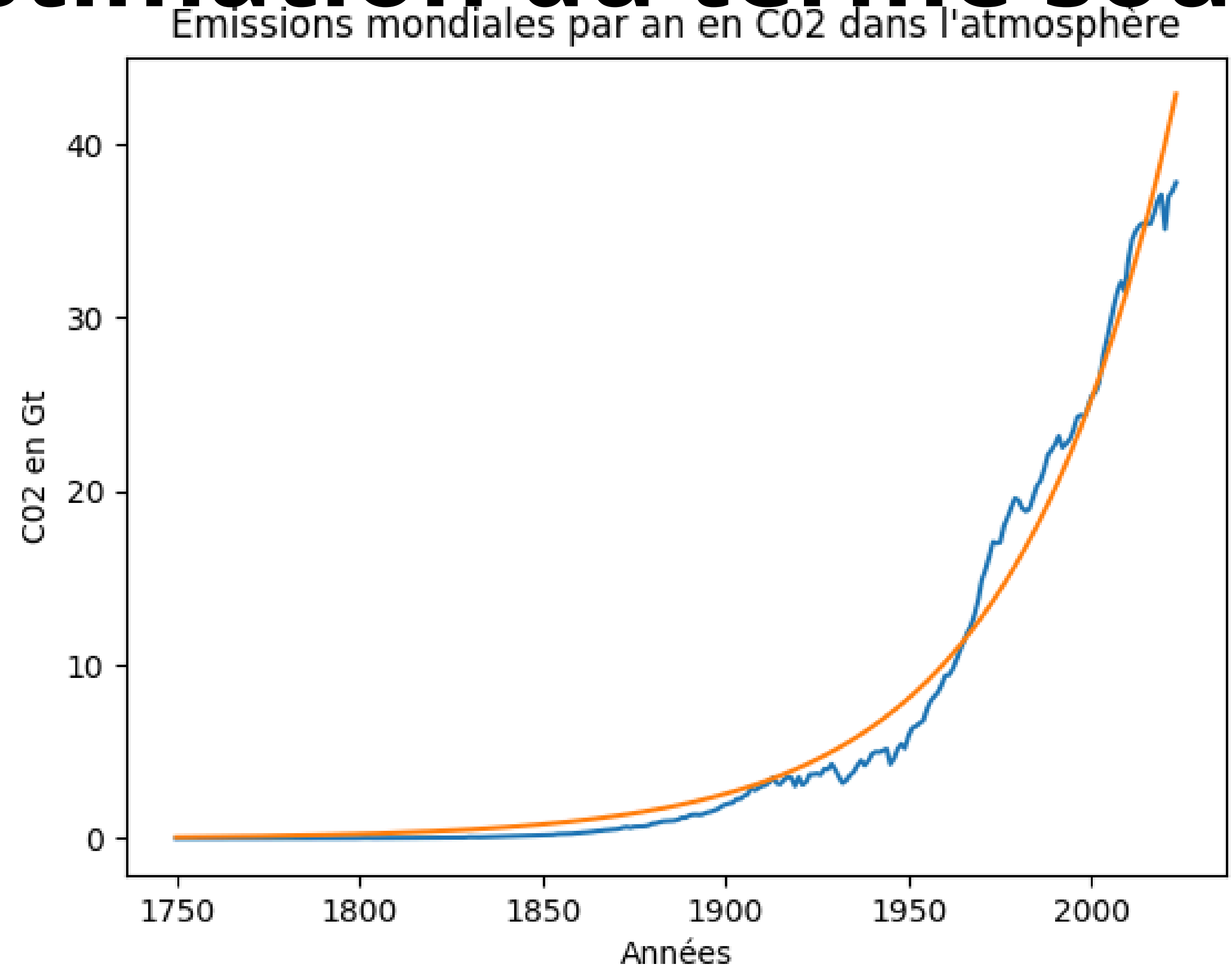
Où : l_a et l_b sont les “learning rate” de a et b

-Permettent d’ajuster le pas

Estimation du terme source :

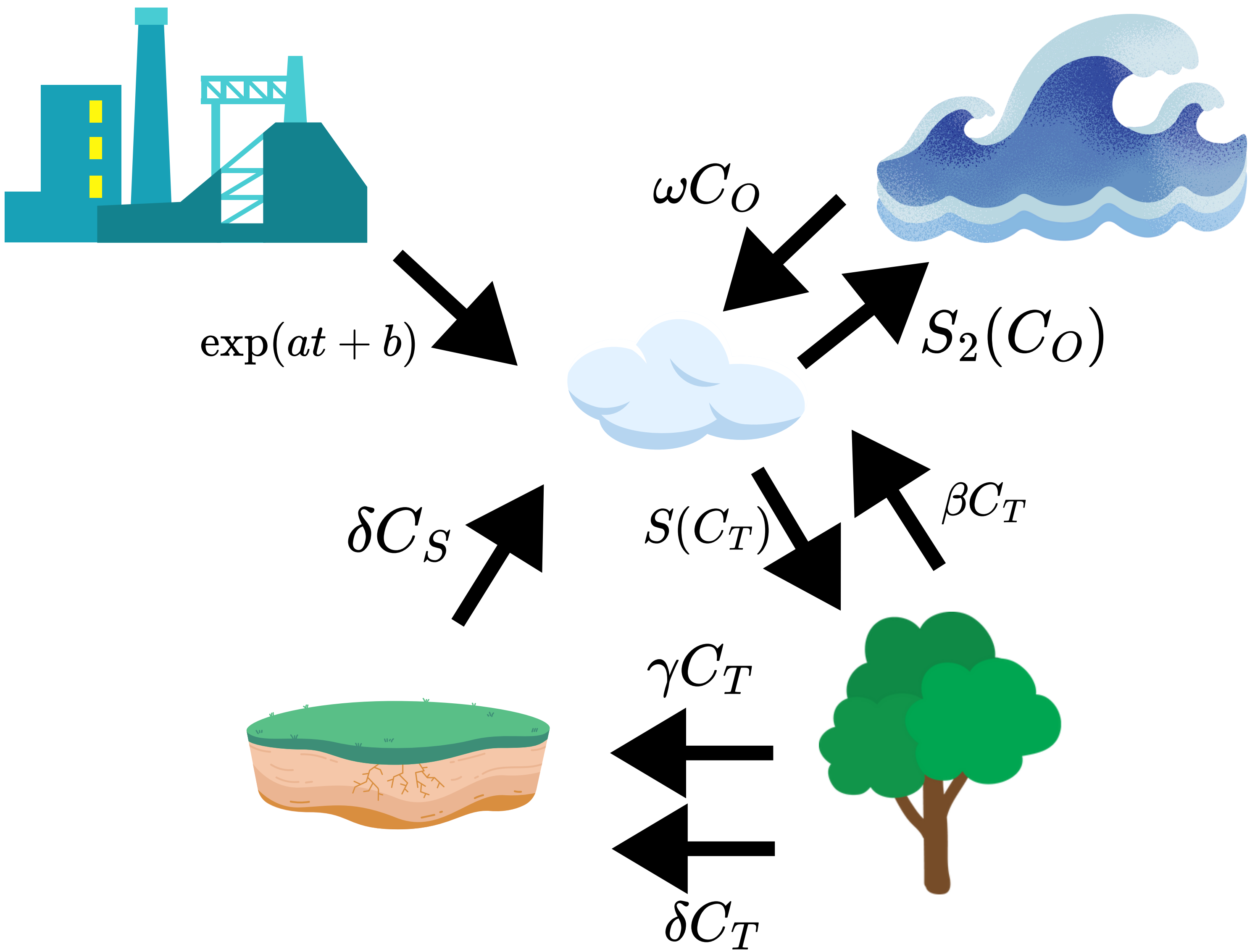


Estimation du terme source :

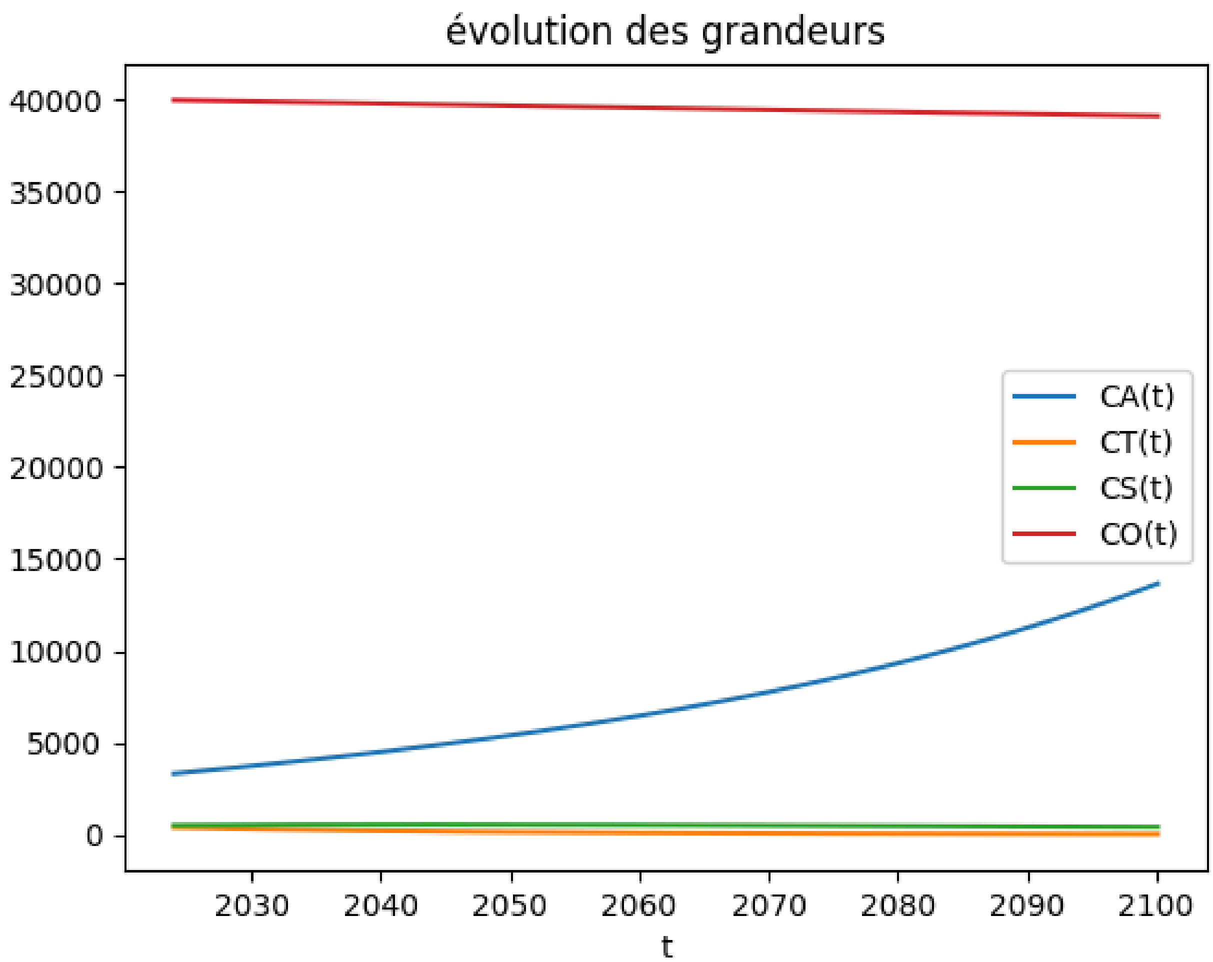


a = 0.022863115449118603
b = -21.769830005922582

Nouveau modèle :



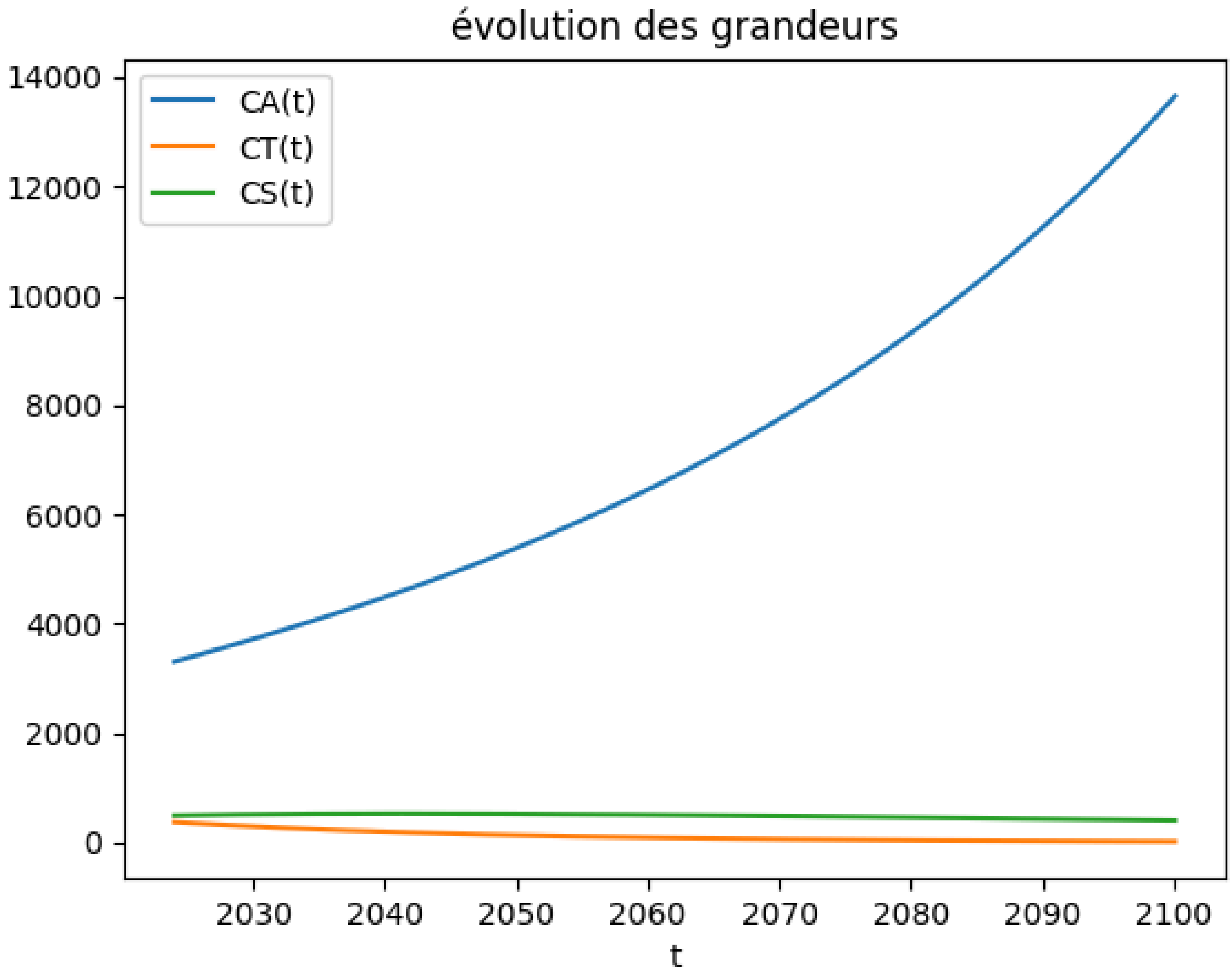
Prédictions à l’aide du nouveau modèle :



Pour des raisons d’échelle, on n’affichera pas l’océan, celui-ci a tout de même un impact sur le modèle

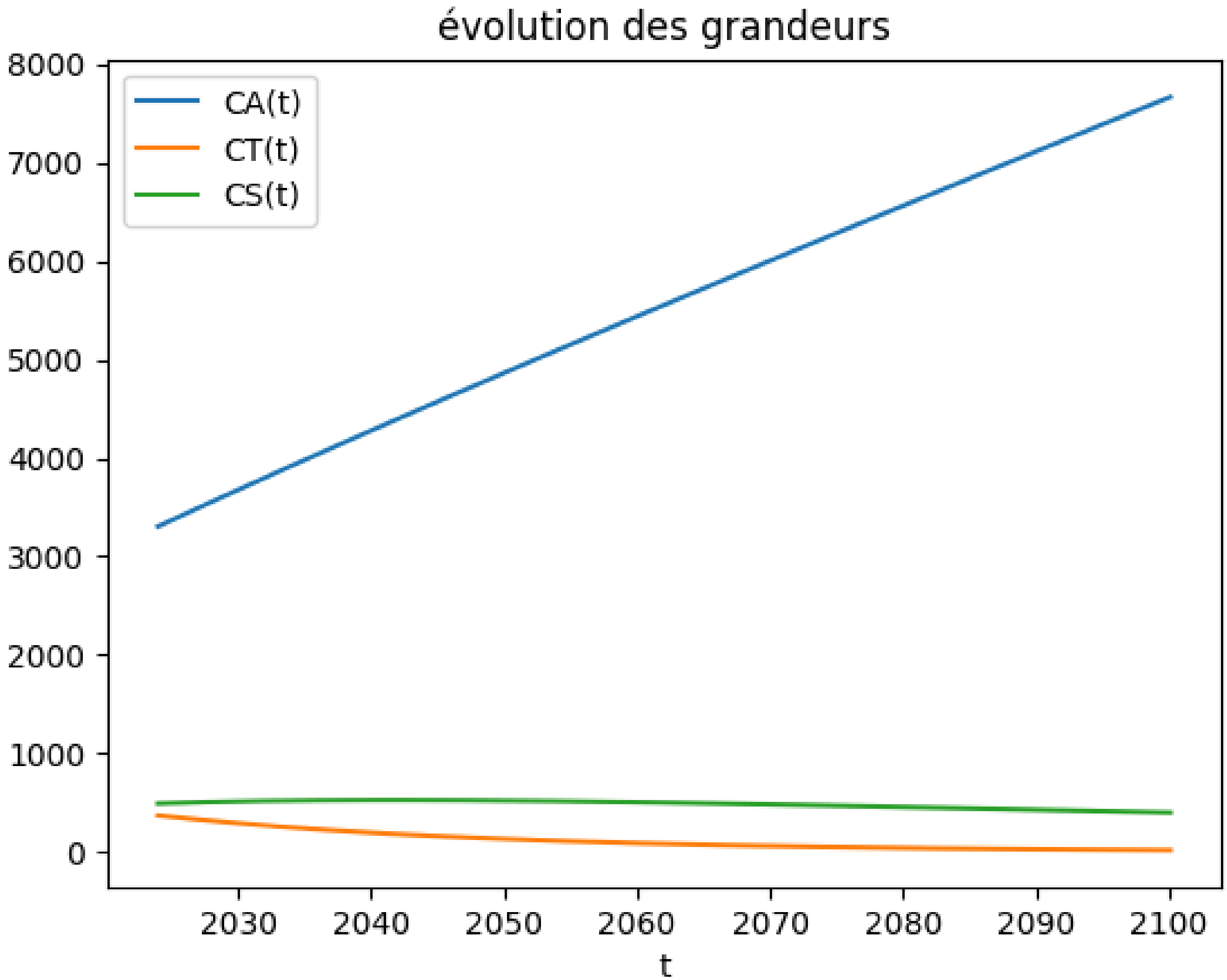
Prédictions à l'aide du nouveau modèle :

Si les émissions de CO2 continuent d'augmenter :



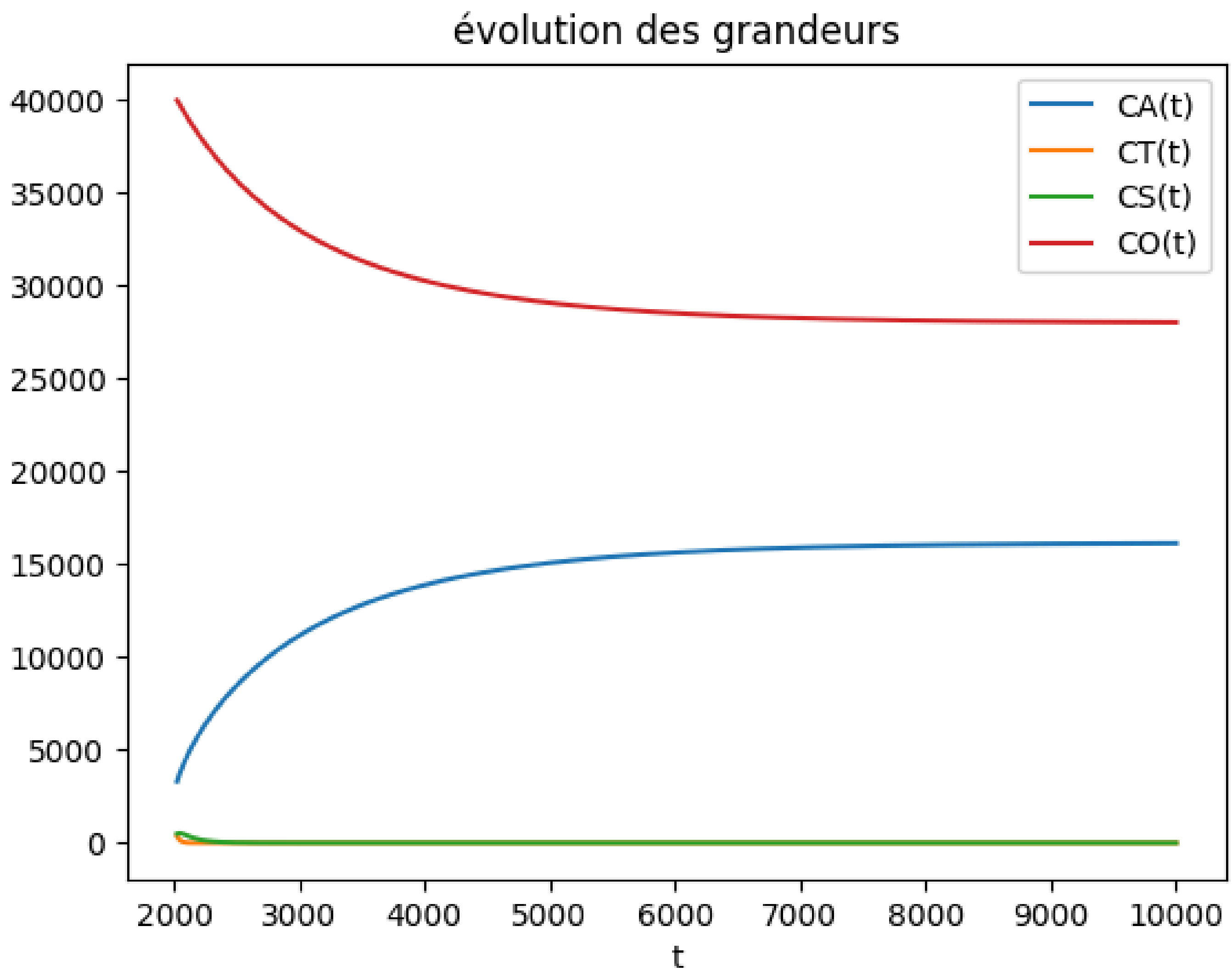
Prédictions à l'aide du nouveau modèle :

Si les émissions de CO2 arrêtent d'augmenter :



Prédictions à l'aide du nouveau modèle :

Scénario si l'humanité arrêtait de produire du CO2 :



Merci de votre attention

Sources :

Woodwell Climate Research Center

Climate.gov

Our World in Data

L'océan, pompe à carbonne

Laurent Bopp, Chris Bowler, Lionel Guidi, Éric Karsenti, Colomban de Vargas