$f(x,y) = e^{xy}$ constaint $2x^2+y^2=72$ (a) 1

$2x^2+y^2-72=0$

$L = e^{xy} - \lambda(2x^2+y^2-72)$

$\nabla L = \nabla\left(e^{xy} - \lambda(2x^2+y^2-72)\right)$

$\nabla x = ye^{xy} - 4\lambda x \implies$ $ye^{xy}-4\lambda x = 0$ ①

$\nabla y = xe^{xy} - 2\lambda y \implies$ $xe^{xy} - 2\lambda y = 0$ ②

$\nabla \lambda = -2x^2 - y^2 + 72 \implies$ $2x^2+y^2-72=0$ ③

① $ye^{xy} = 4\lambda x \quad /:y$

$e^{xy} = \frac{4\lambda x}{y}$

② $xe^{xy} = 2\lambda y \quad /:x$

$e^{xy} = \frac{2\lambda y}{x}$

$\implies \frac{4\lambda x}{y} = \frac{2\lambda y}{x}$

$\Downarrow$

$4\lambda x^2 = 2\lambda y^2$

$2x^2 = y^2$

③ $2x^2+y^2-72=0$

$2x^2+2x^2-72=0$

$4x^2-72=0$

$x^2 = 18 \implies \boxed{x = \pm\sqrt{18}}$

$2y^2 = 72$

$y^2 = 36 \implies y = \pm\sqrt{36} = \boxed{y \pm 6}$

$\min = e^{-6\sqrt{18}}$, $\max = e^{6\sqrt{18}}$

(b (1

$f(x,y) = x^2 + y^2$ constrein $y - \cos(2x) = 0$

$L = x^2 + y^2 + \lambda(y \cos(2x))$

$\nabla L = \nabla\left(x^2 + y^2 + \lambda(y - \cos(2x))\right) = 0$

$\nabla x = 2x + 2\lambda \sin(2x) \longrightarrow x + \lambda \sin(2x) = 0$ ①

$\nabla y = 2y + \lambda \Longrightarrow 2y + \lambda = 0$ ②

$\nabla \lambda = y - \cos(2x) \longrightarrow y - \cos(2x) = 0$ ③

① $x = -\lambda \sin(2x) \Longrightarrow \lambda = -\frac{x}{\sin(2x)}$

② $2y + x = 0 \Longrightarrow y = \frac{x}{2(\sin(2x))}$

③ $y - \cos(2x) = 0 \Longrightarrow \frac{x}{2\sin(2x)} - \cos(2x) = 0 \Longrightarrow x = 2\sin(2x)\cos(2x)$

$x = \sin(4x)$

$\boxed{x_1 = 0,\ y_1 = 1}$ $\boxed{x_2 = 0.619,\ y_2 = 0.326}$ $\boxed{x_3 = -0.619,\ y_3 = 0.326}$

$\Downarrow$

$f(x_1, y_1) = 1$

מקס' לוקלי

$\underbrace{f(x_2, y_2) = 0.489 \qquad f(x_3, y_3) = 0.489}_{\text{נק' מינימום}}$

2) ב) יהיו 2 kernels, k_1, k_2 המתאימים למיפויים φ_1, φ_2 בהתאמה

הראו ש $k = 7k_1 + 3k_2$ גם kernel ומהו המיפוי φ שלו.

<u>פתרון:</u>

מימד הוקטור של המיפוי φ_1

$$k_1 = \varphi_1(x)\,\varphi_1(y) = \sum_{i=1}^{n} [\varphi_1(x)]_i [\varphi_1(y)]_i$$

מימד של וקטור המיפוי φ_2

$$k_2 = \varphi_2(x)\,\varphi_2(y) = \sum_{j=1}^{m} [\varphi_2(x)]_j [\varphi_2(y)]_j$$

לקסטר:

$k = 7k_1 + 3k_2$:

$$k = 7\sum_{i=1}^{n} [\varphi_1(x)]_i [\varphi_1(y)]_i + 3\sum_{j=1}^{m} [\varphi_2(x)]_j [\varphi_2(y)]_j =$$

$$= 7 \cdot \left[\varphi_1(x)_1 \varphi_1(y)_1 + \dots + \varphi_1(x)_n \varphi_1(y)_n \right] + 3\left[\varphi_2(x)_1 \varphi_2(y)_1 + \dots + \varphi_2(x)_m \varphi_2(y)_m \right]$$

$$= 7\varphi_1(x)_1 \varphi_1(y)_1 + \dots + 7\varphi_1(x)_n \varphi_1(y)_n + 3\varphi_2(x)_1 \varphi_2(y)_1 + \dots + 3\varphi_2(x)_m \varphi_2(y)_m$$

$$= \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

כך ש:

$$\varphi(x) = \left[\sqrt{7}\,\varphi_1(x)_1, \dots, \sqrt{7}\,\varphi_1(x)_n, \sqrt{3}\,\varphi_2(x)_1, \dots, \sqrt{3}\,\varphi_2(x)_m\right]$$

2b) נכון:

נשתמש בא' מסעיף א' ועם ה φ שמצאנו שם בהתאמה.

~~אפשר~~ יהי $w=(w_1,w_2,\dots,w_m)$ רק ש $w\in\mathbb{R}^m$ מהווה וקטור שמתאים למימד m.

כעת נגדיר פונקציית משקל חדשה $w_1=(w_1,w_2,\dots,w_m,0,0,\dots,0)$

מהיות ו φ של א' הינה מהצורה $\varphi(x)=(\varphi_1(x)_1,\dots,\varphi_1(x)_m,\dots,\varphi_2(x)_1,\dots,\varphi_2(x)_n)$

אז הפונקציית משקל תהיה $w_1=(\underbrace{w_1,w_2,\dots,w_m}_{m=|\varphi_1|},\underbrace{0,\dots,0}_{n=|\varphi_2|})$

כעת המכפלה הפנימית של x לפי מיפוי φ עם פונקציית המשקל w_1 שווה למכפלה הפנימית של x לפי מיפוי φ_1 עם פונקציית משקל w:

$$w_1\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n+m}(w_1)_i\varphi(x)_i=\sum_{i=1}^{m}(w_1)_i\varphi_1(x)_i+\sum_{i=m}^{n}(w_1)_i\varphi_2(x)_i=\sum_{i=1}^{m}(w)_i\varphi_1(x)_i+\sum_{i=m}^{n}0\,\varphi_2(x)_i$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(w)_i\varphi_1(x)_i+0=w\varphi_1(x)$$

לכן פונקציית המשקל

$$w_1=(w_1,w_2,\dots,w_m,0,\dots,0)$$

מייצגת את פונקציית המשקל של ה kernel K.

c) ב

$$(\alpha x\cdot y+\beta)^d = (\alpha(x\cdot y)+\beta)^d =$$

$$= (\alpha \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}_{\text{מכפלה פנימית של } (x,y)} + \beta)^d \underset{⊛}{=} (\alpha x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \dots + \alpha x_n y_n + \beta)^d =$$

כעת אנחנו עם $n+1$ מחוברים בתוך הביטוי

כלומר קיבלנו ביטוי עם $n+1$ מחוברים

בחזקת d.

כמות המחוברים של תוצאת המכפלה הפנימית בין $\varphi(x)\varphi(y)$

שווה

היא לכמות המחוברים של הביטוי ב ⊛ היא:

$\boxed{\binom{n+d}{n}}$

כמות המחוברים של הביטוי ב ⊛ היא:

ניתן לנסח את השאלה באופן הבא:

בכמה דרכים ניתן לבחור d איברים מתוך $n+1$ איברים

עם חזרות.

התשובה עפ"י נוסחת הקומבינטוריקה היא: $\boxed{\binom{n+d}{d}} = \binom{d+(n+1)-1}{d}$

ניתן להסיק כי הביטוי ב⊛ הוא נוסחת מולטינום

כך שכמות המחוברים בה הינה (באופן כללי) $\binom{n+k-1}{n}$ ששקול לפתרון הקומבינטורי

שרשמנו.

מהיות וכמות המחוברים היא $\binom{n+d}{n}$ הרי שתוצאת המכפלה הפנימית

בין 2 וקטורים במימד $\binom{n+d}{n}$ אזי $\varphi(x)$ ממפה וקטור

למימד זה.

2b) נגדיר φ באופן הבא:

נגדיר מימד N אזי φ ממפה כך ש:

$$\varphi(x)=(\underbrace{1,1,\dots,1}_{x\text{ פעמים}},\underbrace{0,\dots,0}_{N-x\text{ פעמים}})$$

כך למשל עבור $N\geq 5$ נבחר $N=8$ לבדיקת הדוגמא ונקבל

$$\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(3)\varphi(5)=(1,1,1,0,0,0,0,0)(1,1,1,1,1,0,0,0)$$
$$\cancel{(1,1,1,0,0,0,0,0)}=1+1+1+0+0+0+0+0=3$$

כך עבור כל $N\geq 5$, נניח בה"כ ש $x\leq y$

$$\varphi(x)\varphi(y)=(\underbrace{1,1,\dots,1}_{x},0,\dots,0)(\underbrace{1,1,\dots,1}_{y},0,\dots,0)=$$
$$\cancel{1,1,\dots,1}=\underbrace{1+1+\dots+1}_{x}+0+\dots+0=x$$

(e) 3

נניח בשלילה שקיימת פונקציית מיפוי המקיימת:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \max(x,y)$$

לכן מתקיים שלכל $i \le N$:

$$\varphi(1)\varphi(N) = \varphi(2)\varphi(N) = \dots = \varphi(N)\varphi(N) = N \quad / : \varphi(N)$$

$$\varphi(1) = \varphi(2) = \dots = \varphi(N) = \frac{N}{\varphi(N)}$$

(נגדיר $a = \frac{N}{\varphi(N)}$ ולכן:

$$\varphi(1) = \varphi(2) = \dots = \varphi(N) = a$$

לכן לכל $i,j \le N$:

$$\varphi(i) \cdot \varphi(j) = a^2$$

סתירה לכך ש:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(1)\varphi(1) &= \max(1,1) = 1 = a^2 \\ \varphi(1)\varphi(2) &= \max(1,2) = 2 = a^2 \end{aligned}\right\} \underset{\text{סתירה}}{1 \neq 2}$$

3) a) נתון:

$$\varphi(x) = \left(x_1^3, x_2^3, \sqrt{3}x_1^2x_2, \sqrt{3}x_1x_2^2, 2\sqrt{3}x_1^2, 2\sqrt{3}x_2^2, 2\sqrt{6}x_1x_2, 4\sqrt{3}x_1, 4\sqrt{3}x_2, 8\right)$$

נחשב:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \underbrace{x_1^3y_1^3 + x_2^3y_2^3 + 3x_1^2x_2y_1^2y_2 + 3x_1x_2^2y_1y_2^2}_{(x\cdot y)^3} + \underbrace{12x_1^2y_1^2 + 12x_2^2y_2^2 + 24x_1x_2y_1y_2}_{12(x\cdot y)^2} + \underbrace{48x_1y_1 + 48x_2y_2}_{48(x\cdot y)} + 64 =$$

$$= (x\cdot y)^3 + 12(x\cdot y)^2 + 48(x\cdot y) + 64 =$$

נציב $z = (x\cdot y)$

$$z^3 + 12z^2 + 48z + 64 = (z+4)^3$$

נציב חזרה ונקבל:

$$\boxed{((x\cdot y)+4)^3 = k(x,y)}$$

$$\varphi(x) = \left(\sqrt{10}x_1^2, \sqrt{10}x_2^2, \sqrt{20}x_1x_2, \sqrt{8}x_1, \sqrt{8}x_2, \sqrt{2}\right)$$

נחשב:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \underbrace{10x_1^2y_1^2 + 10x_2^2y_2^2 + 20x_1x_2y_1y_2}_{10(x\cdot y)^2} + \underbrace{8x_1y_1 + 8x_2y_2}_{8(x\cdot y)} + 2 =$$

$$= 10(x\cdot y)^2 + 8(x\cdot y) + 2 = \boxed{10\underbrace{k_1(x,y)^2}_{\alpha} + 8\underbrace{k_2(x,y)}_{\beta} + 2 = k(x,y)}$$

$\varphi(x) = \left(\sqrt{10}x_1^2, \sqrt{10}x_2^2, \sqrt{20}x_1x_2, \sqrt{8}x_1, \sqrt{8}x_2, \sqrt{2}\right)$ נסין: (b (3

נראה:

$\varphi(x)\varphi(y) = 10x_1^2y_1^2 + 10x_2^2y_2^2 + 20x_1x_2y_1y_2 + 8x_1y_1 + 8x_2y_2 + 2$

$= 10(x_1y_1 + x_2y_2)^2 + 8\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{4}\right)$

$= \boxed{10(xy)^2 + 8\left(x\cdot y + \frac{1}{4}\right)}$

$10k_1 + 8k_2$

לכן מתקיים:

$\alpha = 10, \beta = 8$

$k_1 = (xy)^2$

$k_2 = \left(xy + \frac{1}{4}\right)$