

Calcolo Numerico

Luca Bassi, Gaia Clerici, Mirco Dondi

Gennaio 2022

Introduzione

Il nostro obiettivo è ricostruire delle immagini partendo da una loro versione corrotta dal blur e dal rumore Gaussiano.

Per questo abbiamo utilizzato quattro metodi:

- Metodo naive
- Regolarizzazione di Tichonov con gradiente coniugato
- Regolarizzazione di Tichonov con gradiente visto a lezione
- Regolarizzazione con Variazione Totale

1 Generazione immagini corrotte

Per prima cosa abbiamo creato un set di 10 immagini (8 geometriche e 2 astronomiche) di dimensioni 512×512 pixel in scala di grigi.

Abbiamo poi corrotto le immagini usando 3 diversi kernel:

- $\sigma = 0.5$ con dimensione 5×5
- $\sigma = 1.0$ con dimensione 7×7
- $\sigma = 1.3$ con dimensione 9×9

e applicando del rumore Gaussiano con deviazione standard $(0, 0.05]$, step da 0.01.

Calcoliamo di queste immagini il Peak signal-to-noise ratio (PSNR), che rappresenta la fedeltà rispetto all'immagine originale, e l'errore quadratico medio (MSE).

Dalla tabella 1 possiamo osservare che i valori di PSNR diminuiscono all'aumentare del rumore σ poiché le immagini si allontanano sempre più dalle originali, al contrario i valori di MSE aumentano.

A parità di rumore l'immagine peggiora all'aumentare della dimensione del kernel e del σ .

2 Deblur con algoritmo naive

Come prima approssimazione per ricostruire le immagini possiamo ignorare il rumore e quindi ricostruirle come soluzione del sistema lineare $A^{-1}b$ ed equivalentemente del problema di minimo $\arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$ con gradiente della funzione da minimizzare dato da $A^T Ax - A^T b$.

Questa soluzione risente però molto del rumore, infatti in realtà troviamo la soluzione di $A^{-1}b + A^{-1}e$, dove il secondo termine rappresenta il rumore inverso che può sovrastare l'immagine ricostruita. Abbiamo calcolato la soluzione con il metodo del gradiente coniugato implementato nella funzione `minimize` di NumPy.

3 Deblur con regolarizzazione con il metodo di Tichonov

Successivamente, abbiamo limitato gli effetti negativi del rumore inverso utilizzando il termine di regolarizzazione $\frac{\lambda}{2}\|x\|_2^2$ quindi risolvendo il problema di minimo $\arg \min_x \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2}\|x\|_2^2$ con gradiente della funzione da minimizzare dato da $A^T Ax - A^T b + \lambda x$.

Abbiamo ricostruito le immagini utilizzando valori di λ nell'intervallo [0.01, 0.04] con step da 0.01 utilizzando sia il metodo del gradiente coniugato sia il metodo del gradiente visto a lezione.

4 Deblur con regolarizzazione della variazione totale

Un'altra funzione utilizzabile come termine di regolarizzazione è la variazione totale, definita come:

$$TV(image) = \sum_i^n \sum_j^m \sqrt{\|\nabla image(i, j)\|_2^2 + \epsilon^2}.$$

Il problema di minimo da risolvere diventa $\arg \min_x \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda TV(image)$ con gradiente della funzione da minimizzare dato da $(A^T Ax - A^T b) + \lambda \nabla TV(x)$.

Abbiamo usato il metodo del gradiente visto a lezione per minimizzare la funzione.

5 Risultati ottenuti

Abbiamo eseguito i quattro algoritmi di deblur su un'immagine composta da forme geometriche e due immagini astronomiche.

I risultati dell'algoritmo naive sono consultabili alla tabella 2.

Dai valori delle colonne PSNR e MSE si può notare che l'algoritmo naive non è efficace nella ricostruzione delle immagini. In quelle ricostruite, infatti, la presenza del rumore va a volte a sovrastare il segnale. Ciò è particolarmente visibile nelle figure 2, 4 e 6 in alto a sinistra.

Invece, ricostruendo le immagini utilizzando la regolarizzazione con il metodo di Tichonov sfruttando il gradiente coniugato gli effetti del rumore vengono ridotti, come si può osservare dalle figure 2, 4 e 6 in alto a destra (cfr. tabella 3).

Abbiamo provato a ricostruire le stesse immagini utilizzando anche la regolarizzazione con il metodo di Tichonov sfruttando il gradiente visto a lezione.

Questo risulta in un'efficacia dell'algoritmo a volte migliore (cfr. tabella 4). Si può notare nelle figure 2, 4 e 6 in basso a sinistra.

Come ultimo test, abbiamo ricostruito le immagini con il metodo di regolarizzazione sfruttando la variazione totale (cfr. tabella 5), vd. figure 2, 4 e 6 in basso a destra.

6 Medie e deviazione standard

Abbiamo calcolato medie e deviazione standard delle metriche sull'intero set di immagini.

Quando non è presente il termine lambda è stato utilizzato il metodo naive, quando presente invece il metodo di Tichonov con il gradiente coniugato.

Kernel	Sigma	Lambda	Media PSNR	Dev Stand PSNR	Media MSE	Dev Stand MSE
5	0.01	-	22.991	3.516	0.006247	0.002832
5	0.04	-	9.422	1.377	0.118769	0.025733
9	0.04	-	9.606	6.341	0.209314	0.211986
5	0.01	0.01	32.809	1.491	0.000554	0.000175
7	0.01	0.01	32.841	2.026	0.000576	0.000255
7	0.04	0.01	26.637	2.094	0.002444	0.001213
9	0.05	0.04	26.585	2.394	0.002488	0.001050

7 Analisi di due esecuzioni: proprietà dei metodi numerici

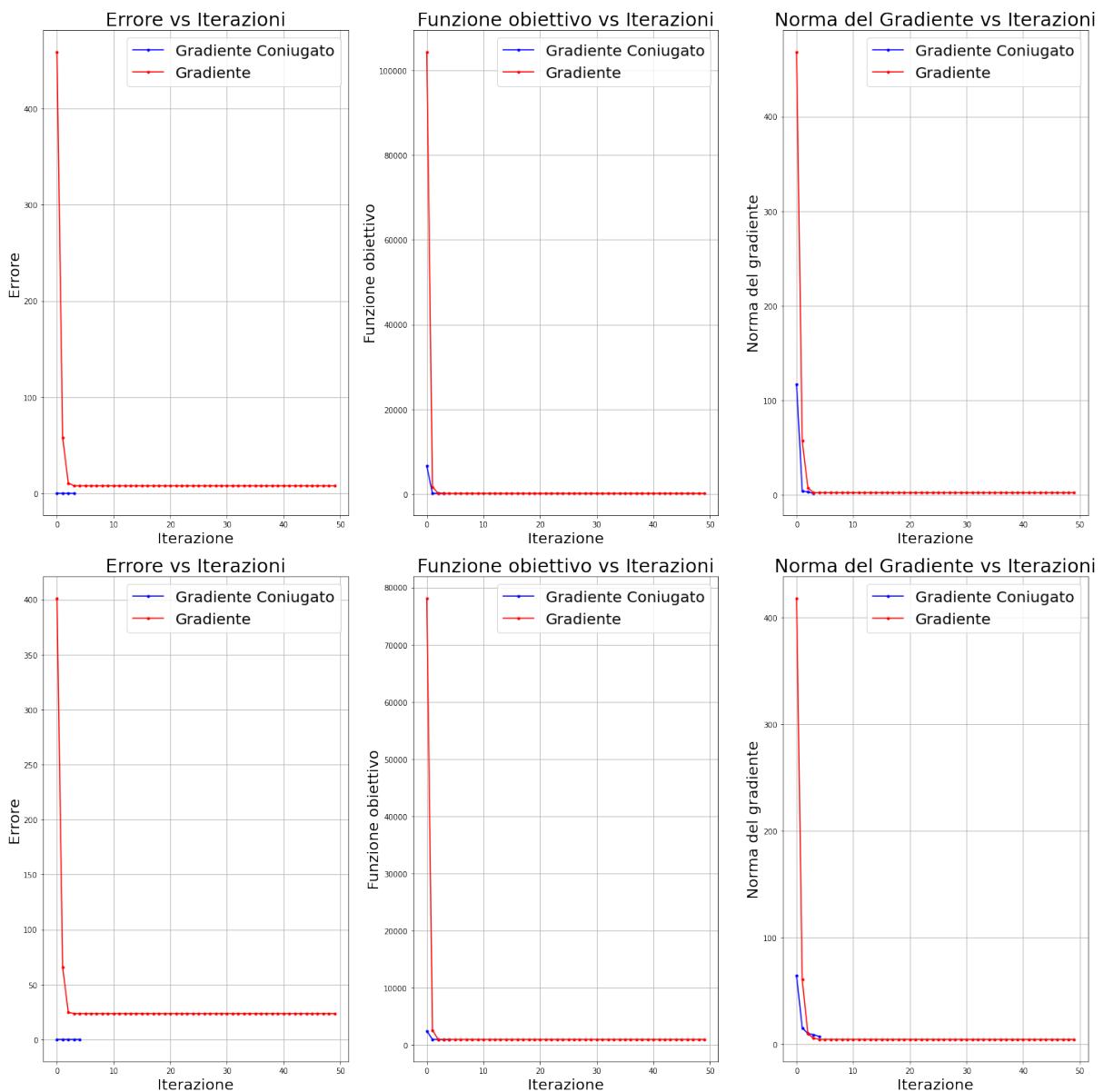
Abbiamo eseguito i metodi di regolarizzazione di Tichonov (gradiente coniugato e gradiente visto a lezione) sull'immagine 0 con sigma 2 e kernel 5, e sull'immagine 9 con sigma 4 e kernel 9.

Si nota che il metodo del gradiente coniugato raggiunge un risultato buono con molte meno esecuzioni rispetto al metodo del gradiente visto a lezione che termina per il raggiungimento del limite di iterazioni.

Inoltre, l'errore è minore nel metodo del gradiente visto a lezione in entrambe le esecuzioni. C'è maggiore differenza di errore nella seconda esecuzione, poiché l'immagine da ricostruire è più complessa (immagine astronomica vs immagine geometrica), e utilizza il kernel 9 che corrompe maggiormente l'immagine rispetto al kernel 5.

Invece la funzione obiettivo e la norma del gradiente raggiungono un valore pressoché identico nei due metodi in entrambe le esecuzioni.

Alla prima iterazione, il valore restituito dal metodo del gradiente visto a lezione è estremamente più alto rispetto al metodo del gradiente coniugato, in tutte le metriche analizzate.



	Numero di Iterazioni
Esecuzione 1 Gradiente Coniugato	4
Esecuzione 1 Gradiente visto a lezione	51
Esecuzione 2 Gradiente Coniugato	5
Esecuzione 2 Gradiente visto a lezione	51

Conclusioni

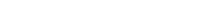
Dai dati ottenuti, il metodo naive risulta essere, come ci aspettavamo, il peggio come si può notare dal valore dei PSNR.

I metodi del gradiente coniugato e del gradiente visto a lezione si comportano in modo migliore, ma il metodo che, nella maggior parte dei casi, produce risultati più accurati è quello della variazione totale. Quindi il termine di regolarizzazione Variazione Totale è in generale migliore nel ricostruire le immagini del termine di regolarizzazione di Tichonov.

Abbiamo eseguito il codice sia sulle 10 immagini 512×512 sia su 10 immagini di test 25×25 .

Le immagini di piccola dimensione vengono corrotte e ricostruite dai vari metodi in un tempo ragionevole, mentre le immagini grandi impiegano molto tempo.

I metodi che richiedono tempo maggiore sono Tichonov con gradiente visto a lezione e regolarizzazione con variazione totale. Quindi il metodo *minimize_custom* che implementa il metodo del gradiente visto a lezione non è ottimizzato quanto il metodo con gradiente coniugato della libreria NumPy.

Figura 1: Immagine geometrica originale e corrotta con i diversi kernel
Immagine Originale  Immagine Corrotta 5 (PSNR: 36.66) 

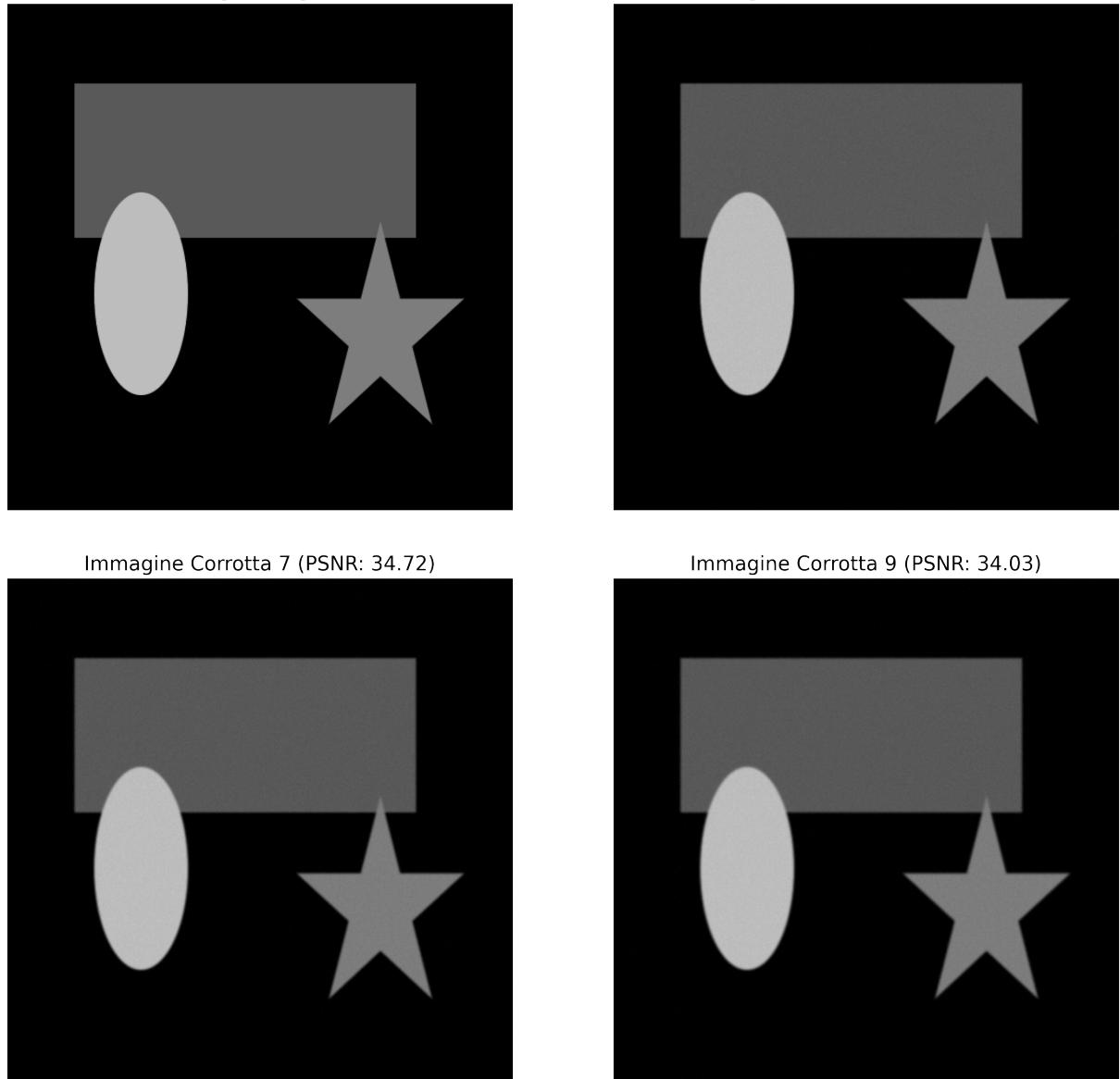


Figura 2: Immagine geometrica ricostruita

Immagine Ricostruita naive 9 (PSNR: 21.47)

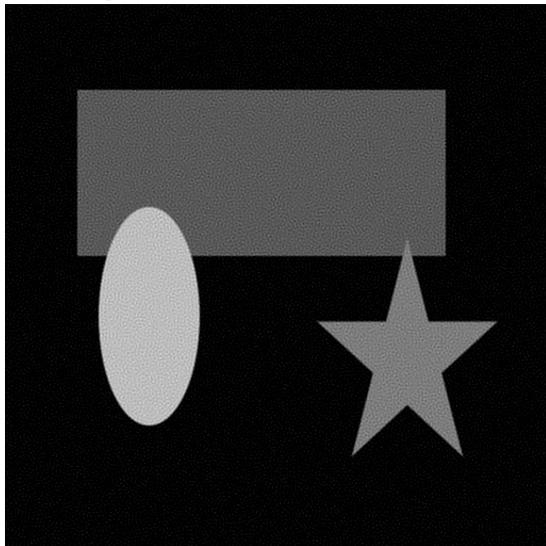


Immagine Ricostruita Tichonov GC 9 (PSNR: 32.64)

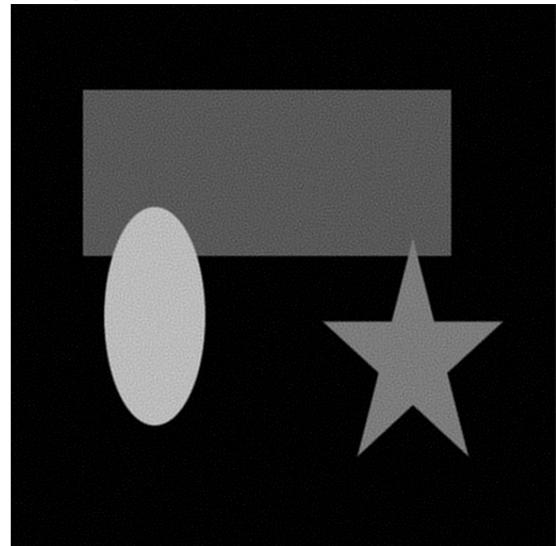


Immagine Ricostruita Tichonov G 9 (PSNR: 35.50)

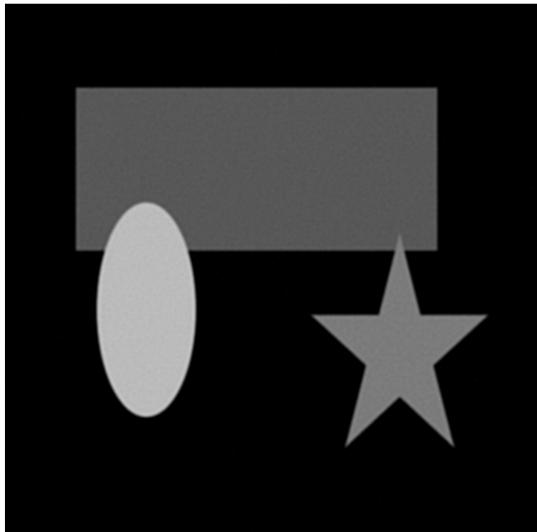


Immagine Ricostruita Variazione Totale 9 (PSNR: 35.94)

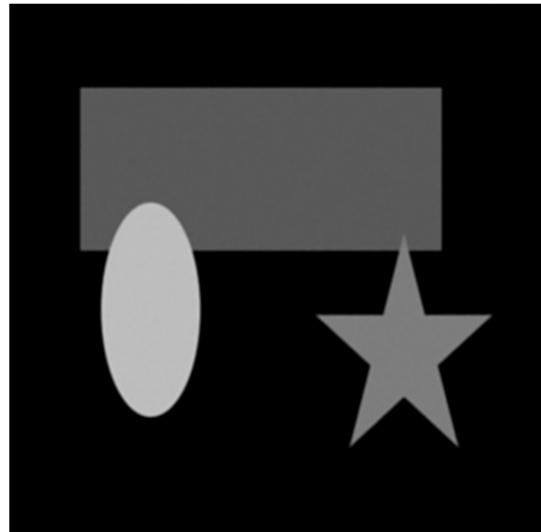
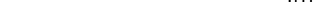
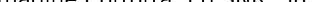


Figura 3: Prima immagine astronomica originale e corrotta con i diversi kernel
 Immagine Originale  Immagine Corrotta 5 (PSNR: 38.01) 

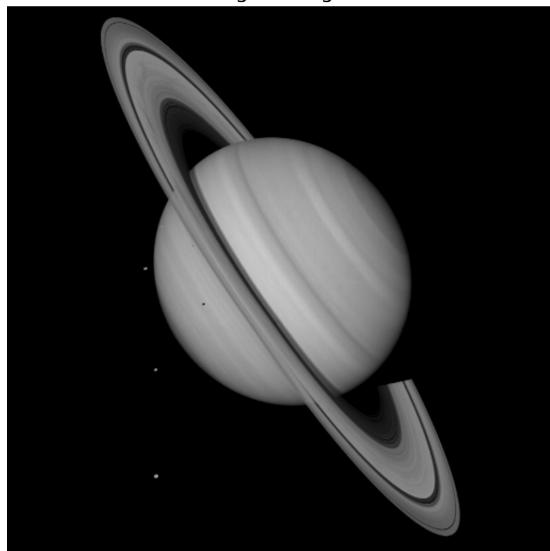


Immagine Corrotta 7 (PSNR: 36.49)

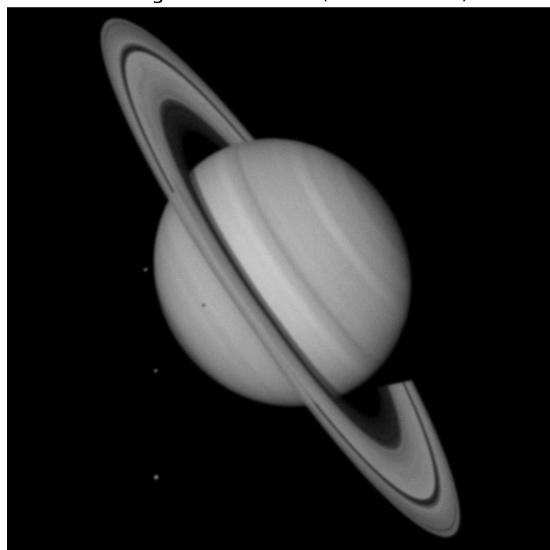


Immagine Corrotta 9 (PSNR: 35.86)

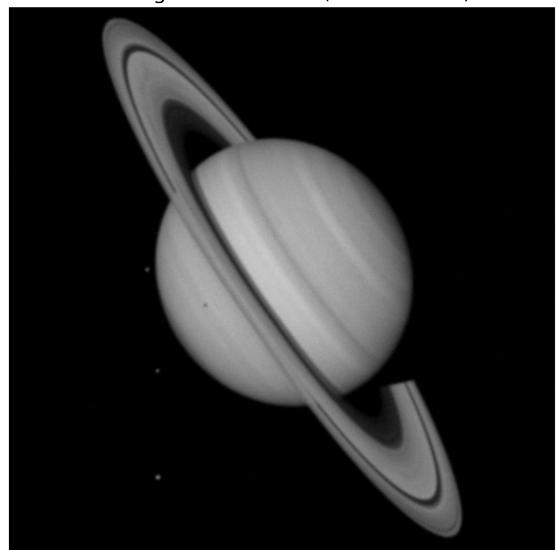


Figura 4: Prima immagine astronomica ricostruita

Immagine Ricostruita naive 9 (PSNR: 7.01)

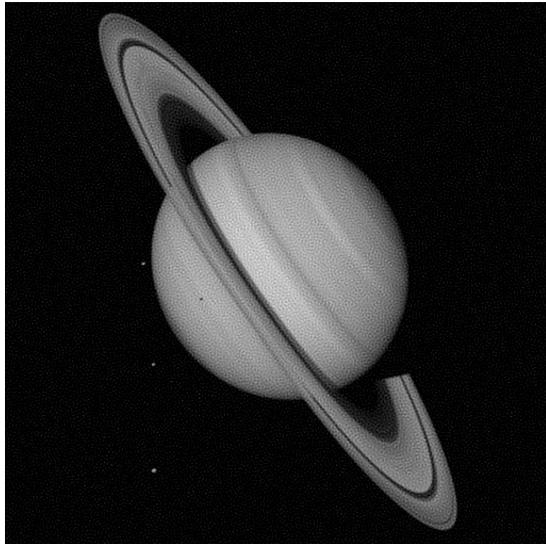


Immagine Ricostruita Tichonov GC 9 (PSNR: 37.70)

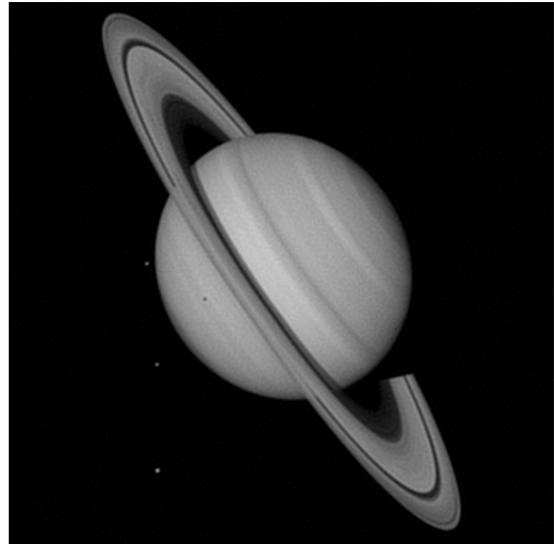


Immagine Ricostruita Tichonov G 9 (PSNR: 37.87)

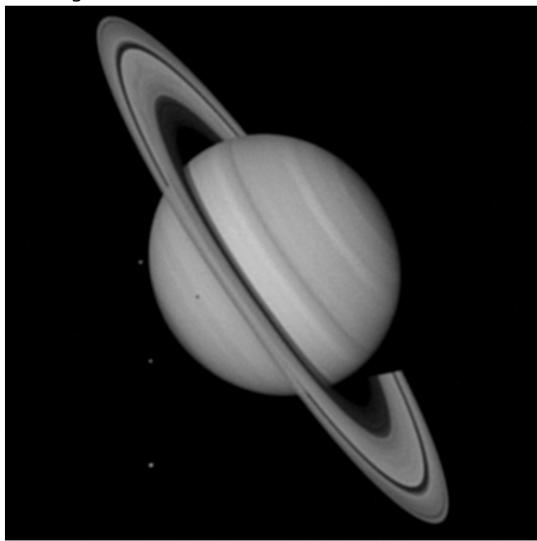


Immagine Ricostruita Variazione Totale 9 (PSNR: 38.03)

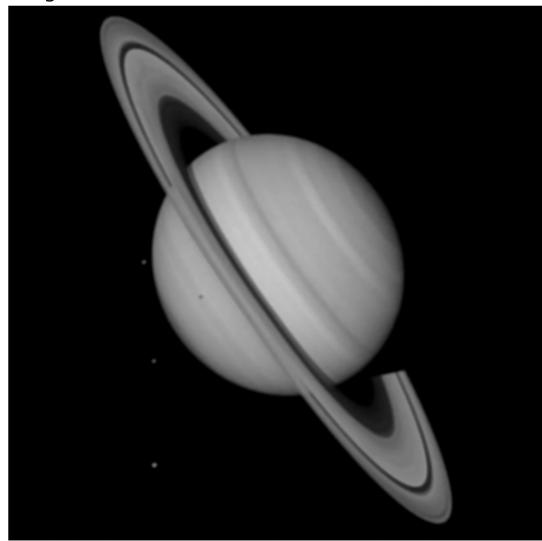


Figura 5: Seconda immagine astronomica originale e corrotta con i diversi kernel

Immagine Originale

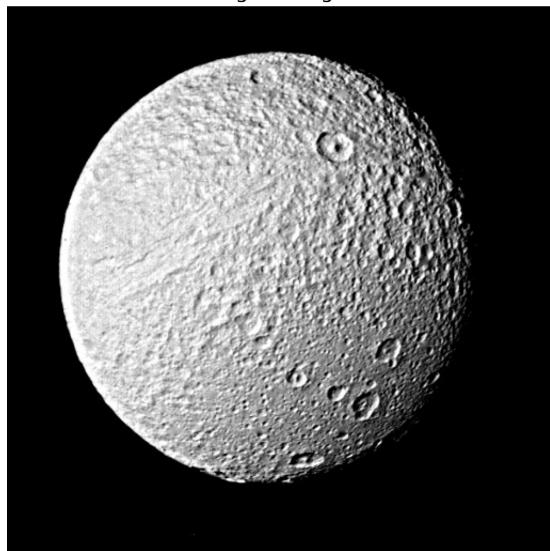


Immagine Corrotta 5 (PSNR: 28.53)

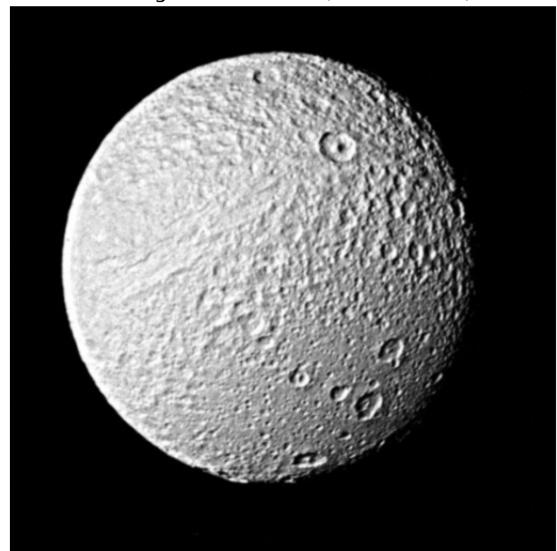


Immagine Corrotta 7 (PSNR: 25.30)

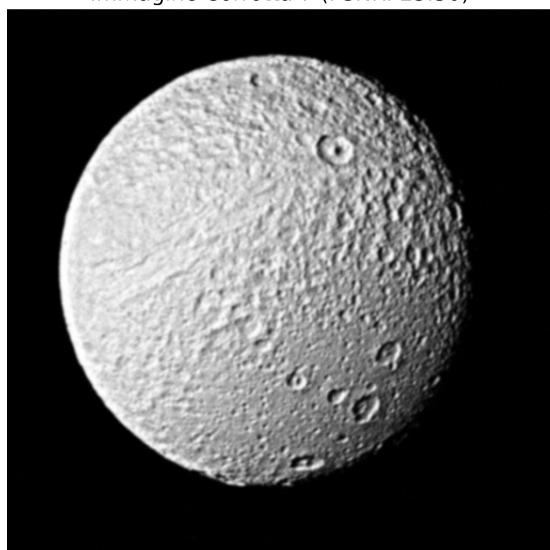


Immagine Corrotta 9 (PSNR: 24.29)

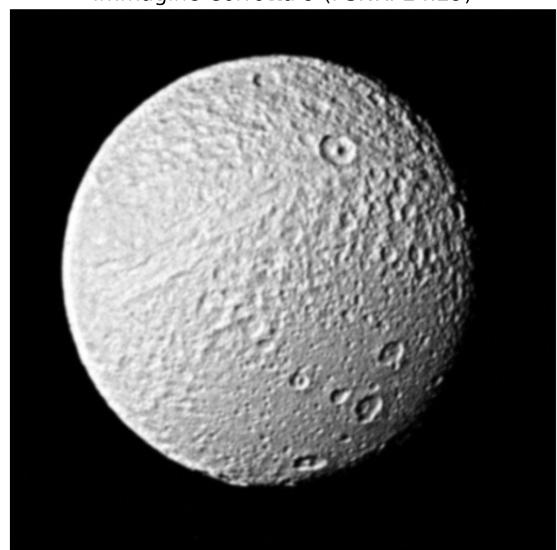


Figura 6: Seconda immagine astronomica ricostruita

Immagine Ricostruita naive 9 (PSNR: -1.10)

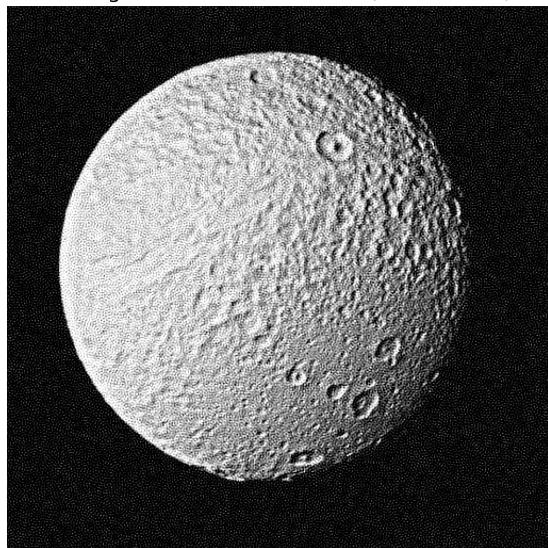


Immagine Ricostruita Tichonov GC 9 (PSNR: 27.85)

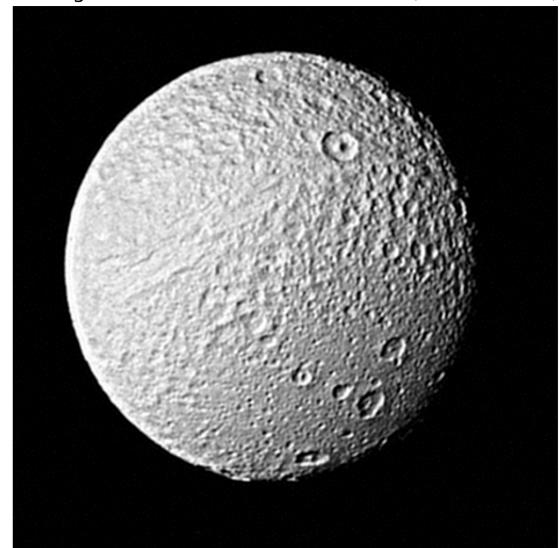


Immagine Ricostruita Tichonov G 9 (PSNR: 24.30)

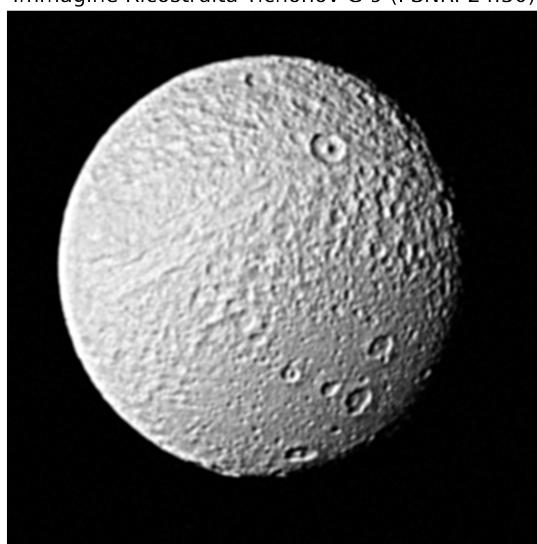


Immagine Ricostruita Variazione Totale 9 (PSNR: 24.32)

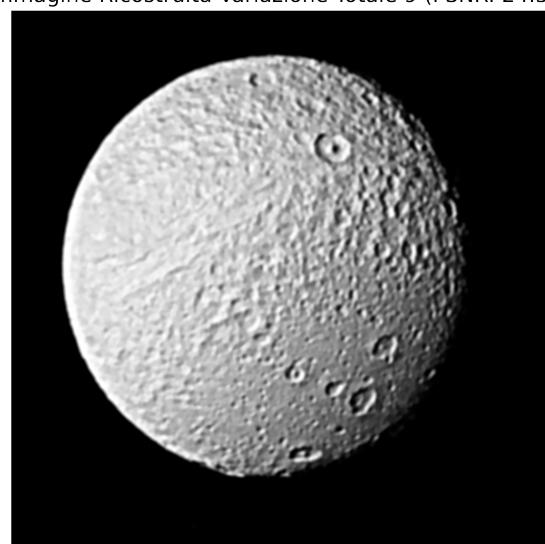


Tabella 1: PSNR e MSE delle immagini corrotte

Image	Sigma	PSNR5	PSNR7	PSNR9	MSE5	MSE7	MSE9
0	0.01	36.68	34.73	34.04	0.00021	0.00034	0.00039
0	0.02	32.86	31.95	31.57	0.00052	0.00064	0.00070
0	0.03	29.95	29.46	29.24	0.00101	0.00113	0.00119
0	0.04	27.66	27.36	27.22	0.00171	0.00184	0.00190
0	0.05	25.85	25.65	25.56	0.00260	0.00272	0.00278
1	0.01	34.26	31.76	30.91	0.00037	0.00067	0.00081
1	0.02	31.70	30.14	29.54	0.00068	0.00097	0.00111
1	0.03	29.32	28.35	27.94	0.00117	0.00146	0.00161
1	0.04	27.26	26.63	26.36	0.00188	0.00217	0.00231
1	0.05	25.57	25.14	24.94	0.00277	0.00307	0.00321
2	0.01	34.96	32.30	31.35	0.00032	0.00059	0.00073
2	0.02	32.10	30.53	29.87	0.00062	0.00089	0.00103
2	0.03	29.55	28.61	28.18	0.00111	0.00138	0.00152
2	0.04	27.39	26.78	26.49	0.00182	0.00210	0.00224
2	0.05	25.66	25.25	25.04	0.00272	0.00299	0.00313
3	0.01	34.35	31.92	31.11	0.00037	0.00064	0.00078
3	0.02	31.77	30.26	29.69	0.00066	0.00094	0.00107
3	0.03	29.35	28.43	28.05	0.00116	0.00144	0.00157
3	0.04	27.31	26.71	26.45	0.00186	0.00213	0.00226
3	0.05	25.58	25.17	24.98	0.00277	0.00304	0.00317
4	0.01	35.18	32.90	32.13	0.00030	0.00051	0.00061
4	0.02	32.18	30.89	30.39	0.00061	0.00082	0.00091
4	0.03	29.58	28.82	28.50	0.00110	0.00131	0.00141
4	0.04	27.43	26.95	26.74	0.00181	0.00202	0.00212
4	0.05	25.68	25.36	25.21	0.00270	0.00291	0.00301
5	0.01	35.30	32.98	32.16	0.00030	0.00050	0.00061
5	0.02	32.23	30.92	30.39	0.00060	0.00081	0.00091
5	0.03	29.59	28.84	28.50	0.00110	0.00131	0.00141
5	0.04	27.45	26.98	26.75	0.00180	0.00201	0.00211
5	0.05	25.66	25.34	25.19	0.00271	0.00292	0.00303
6	0.01	34.91	32.66	31.93	0.00032	0.00054	0.00064
6	0.02	32.04	30.73	30.25	0.00062	0.00084	0.00094
6	0.03	29.47	28.70	28.39	0.00113	0.00135	0.00145
6	0.04	27.39	26.89	26.68	0.00183	0.00205	0.00215
6	0.05	25.65	25.32	25.18	0.00272	0.00294	0.00304
7	0.01	34.61	32.07	31.18	0.00035	0.00062	0.00076
7	0.02	31.91	30.37	29.75	0.00064	0.00092	0.00106
7	0.03	29.42	28.48	28.07	0.00114	0.00142	0.00156
7	0.04	27.34	26.74	26.46	0.00184	0.00212	0.00226
7	0.05	25.63	25.21	25.01	0.00274	0.00301	0.00315
8	0.01	38.00	36.48	35.85	0.00016	0.00022	0.00026
8	0.02	33.40	32.81	32.53	0.00046	0.00052	0.00056
8	0.03	30.18	29.89	29.75	0.00096	0.00102	0.00106
8	0.04	27.79	27.62	27.53	0.00166	0.00173	0.00177
8	0.05	25.93	25.82	25.76	0.00255	0.00262	0.00265
9	0.01	28.53	25.30	24.29	0.00140	0.00295	0.00372
9	0.02	27.68	24.87	23.95	0.00171	0.00325	0.00403
9	0.03	26.57	24.26	23.44	0.00220	0.00375	0.00452
9	0.04	25.37	23.51	22.82	0.00291	0.00445	0.00523

9	0.05	24.19	22.71	22.12	0.00381	0.00536	0.00613
---	------	-------	-------	-------	---------	---------	---------

Tabella 2: PSNR e MSE delle immagini ricostruite con l'algoritmo naive

Image	Sigma	PSNR5	PSNR7	PSNR9	MSE5	MSE7	MSE9
0	0.01	33.34	10.42	33.39	0.00046	0.09085	0.00046
0	0.02	18.55	28.47	15.30	0.01397	0.00142	0.02953
0	0.03	11.39	-11.57	15.46	0.07269	14.35839	0.02844
0	0.04	8.87	-11.22	6.53	0.12985	13.23093	0.22220
0	0.05	6.99	2.50	6.77	0.19993	0.56268	0.21018
8	0.01	20.96	-0.37	20.35	0.00802	1.08833	0.00923
8	0.02	14.94	-4.32	11.48	0.03204	2.70400	0.07114
8	0.03	11.37	-6.10	6.15	0.07289	4.07022	0.24259
8	0.04	8.85	-7.45	5.24	0.13025	5.56375	0.29893
8	0.05	6.94	-9.62	5.23	0.20218	9.16491	0.30024
9	0.01	20.92	5.84	16.18	0.00809	0.26088	0.02411
9	0.02	14.90	-1.78	14.12	0.03239	1.50532	0.03869
9	0.03	11.39	-0.15	7.19	0.07269	1.03616	0.19100
9	0.04	8.88	-9.52	7.93	0.12950	8.95543	0.16109
9	0.05	6.91	-12.72	9.34	0.20348	18.72549	0.11643

Tabella 3: PSNR e MSE delle immagini ricostruite con l'algoritmo di regolarizzazione di Tichonov con Gradiente Coniugato

Image	Sigma	Lambda	PSNR5	PSNR7	PSNR9	MSE5	MSE7	MSE9
0	0.01	0.01	33.06	31.70	32.64	0.00049	0.00068	0.00054
0	0.01	0.02	31.37	32.94	35.49	0.00073	0.00051	0.00028
0	0.01	0.03	32.44	35.41	34.12	0.00057	0.00029	0.00039
0	0.01	0.04	33.75	32.60	34.48	0.00042	0.00055	0.00036
0	0.02	0.01	31.50	28.87	31.90	0.00071	0.00130	0.00065
0	0.02	0.02	29.12	32.18	29.08	0.00122	0.00061	0.00123
0	0.02	0.03	29.48	33.80	30.14	0.00113	0.00042	0.00097
0	0.02	0.04	32.93	32.28	33.45	0.00051	0.00059	0.00045
0	0.03	0.01	28.23	29.66	29.13	0.00150	0.00108	0.00122
0	0.03	0.02	28.85	29.46	31.10	0.00130	0.00113	0.00078
0	0.03	0.03	24.18	28.43	30.40	0.00382	0.00143	0.00091
0	0.03	0.04	31.78	31.77	31.52	0.00066	0.00067	0.00070
0	0.04	0.01	27.62	28.55	28.61	0.00173	0.00140	0.00138
0	0.04	0.02	26.76	26.57	26.04	0.00211	0.00220	0.00249
0	0.04	0.03	26.92	28.80	29.40	0.00203	0.00132	0.00115
0	0.04	0.04	30.63	31.20	31.11	0.00086	0.00076	0.00077
0	0.05	0.01	20.14	28.29	28.96	0.00968	0.00148	0.00127
0	0.05	0.02	20.71	20.61	25.75	0.00849	0.00870	0.00266
0	0.05	0.03	20.78	27.50	27.43	0.00836	0.00178	0.00181
0	0.05	0.04	29.43	30.48	30.55	0.00114	0.00090	0.00088
8	0.01	0.01	33.99	36.97	37.70	0.00040	0.00020	0.00017
8	0.01	0.02	37.76	37.54	37.58	0.00017	0.00018	0.00017
8	0.01	0.03	36.16	35.08	34.55	0.00024	0.00031	0.00035
8	0.01	0.04	34.61	33.82	33.42	0.00035	0.00042	0.00046

8	0.02	0.01	31.72	31.48	34.40	0.00067	0.00071	0.00036
8	0.02	0.02	32.19	33.61	33.19	0.00060	0.00044	0.00048
8	0.02	0.03	34.75	34.49	34.15	0.00033	0.00036	0.00038
8	0.02	0.04	33.59	33.38	33.10	0.00044	0.00046	0.00049
8	0.03	0.01	25.39	27.52	29.01	0.00289	0.00177	0.00126
8	0.03	0.02	24.07	29.94	30.08	0.00392	0.00101	0.00098
8	0.03	0.03	33.16	33.71	33.58	0.00048	0.00043	0.00044
8	0.03	0.04	32.35	32.78	32.67	0.00058	0.00053	0.00054
8	0.04	0.01	22.33	27.05	27.79	0.00584	0.00197	0.00166
8	0.04	0.02	20.94	29.49	24.08	0.00805	0.00112	0.00391
8	0.04	0.03	31.55	32.76	32.85	0.00070	0.00053	0.00052
8	0.04	0.04	30.99	32.00	32.07	0.00080	0.00063	0.00062
8	0.05	0.01	22.47	25.57	26.57	0.00566	0.00277	0.00220
8	0.05	0.02	21.33	24.67	21.81	0.00736	0.00341	0.00659
8	0.05	0.03	20.73	31.78	32.06	0.00846	0.00066	0.00062
8	0.05	0.04	29.72	31.17	31.41	0.00107	0.00076	0.00072
9	0.01	0.01	31.83	29.53	27.85	0.00066	0.00111	0.00164
9	0.01	0.02	30.90	29.16	27.97	0.00081	0.00121	0.00159
9	0.01	0.03	30.70	27.76	26.48	0.00085	0.00167	0.00225
9	0.01	0.04	30.40	27.72	26.71	0.00091	0.00169	0.00213
9	0.02	0.01	29.35	26.30	26.68	0.00116	0.00235	0.00215
9	0.02	0.02	27.79	27.38	26.30	0.00166	0.00183	0.00234
9	0.02	0.03	29.00	27.15	26.00	0.00126	0.00193	0.00251
9	0.02	0.04	28.53	26.34	25.99	0.00140	0.00233	0.00252
9	0.03	0.01	28.20	26.01	25.61	0.00151	0.00251	0.00275
9	0.03	0.02	24.33	26.26	25.56	0.00369	0.00237	0.00278
9	0.03	0.03	27.19	26.10	25.35	0.00191	0.00245	0.00291
9	0.03	0.04	27.34	25.69	24.64	0.00184	0.00270	0.00343
9	0.04	0.01	20.07	24.14	23.54	0.00985	0.00385	0.00443
9	0.04	0.02	21.57	22.58	24.21	0.00697	0.00552	0.00379
9	0.04	0.03	23.50	25.07	24.60	0.00447	0.00311	0.00347
9	0.04	0.04	25.34	24.96	24.48	0.00293	0.00319	0.00356
9	0.05	0.01	22.53	23.71	23.30	0.00558	0.00426	0.00468
9	0.05	0.02	21.45	23.80	23.33	0.00717	0.00416	0.00465
9	0.05	0.03	20.02	23.55	23.72	0.00995	0.00442	0.00425
9	0.05	0.04	24.03	24.30	23.83	0.00396	0.00372	0.00414

Tabella 4: PSNR e MSE delle immagini ricostruite con l'algoritmo di regolarizzazione di Tichonov con Gradiente visto a lezione

Image	Sigma	Lambda	PSNR5	PSNR7	PSNR9	MSE5	MSE7	MSE9
0	0.01	0.01	37.67	36.22	35.50	0.00017	0.00024	0.00028
0	0.01	0.02	37.19	35.98	35.34	0.00019	0.00025	0.00029
0	0.01	0.03	36.55	35.47	34.89	0.00022	0.00028	0.00032
0	0.01	0.04	35.83	34.87	34.35	0.00026	0.00033	0.00037
0	0.02	0.01	34.23	34.61	34.33	0.00038	0.00035	0.00037
0	0.02	0.02	34.03	34.30	34.09	0.00040	0.00037	0.00039
0	0.02	0.03	33.45	33.95	33.75	0.00045	0.00040	0.00042
0	0.02	0.04	33.10	33.51	33.37	0.00049	0.00045	0.00046
0	0.03	0.01	31.39	32.93	33.07	0.00073	0.00051	0.00049
0	0.03	0.02	31.33	32.78	32.86	0.00074	0.00053	0.00052

0	0.03	0.03	31.19	32.44	32.52	0.00076	0.00057	0.00056
0	0.03	0.04	30.81	32.07	32.22	0.00083	0.00062	0.00060
0	0.04	0.01	29.20	31.34	31.76	0.00120	0.00073	0.00067
0	0.04	0.02	29.20	31.27	31.66	0.00120	0.00075	0.00068
0	0.04	0.03	29.16	31.12	31.42	0.00121	0.00077	0.00072
0	0.04	0.04	29.06	30.78	31.05	0.00124	0.00084	0.00078
0	0.05	0.01	27.38	29.88	30.49	0.00183	0.00103	0.00089
0	0.05	0.02	27.42	29.85	30.44	0.00181	0.00103	0.00090
0	0.05	0.03	27.42	29.77	30.32	0.00181	0.00105	0.00093
0	0.05	0.04	27.39	29.59	30.02	0.00182	0.00110	0.00100
8	0.01	0.01	39.14	38.55	37.87	0.00012	0.00014	0.00016
8	0.01	0.02	38.40	37.93	37.32	0.00014	0.00016	0.00019
8	0.01	0.03	37.45	37.24	36.76	0.00018	0.00019	0.00021
8	0.01	0.04	36.56	36.35	35.94	0.00022	0.00023	0.00025
8	0.02	0.01	34.84	36.14	36.08	0.00033	0.00024	0.00025
8	0.02	0.02	34.61	35.71	35.66	0.00035	0.00027	0.00027
8	0.02	0.03	33.89	35.16	35.17	0.00041	0.00031	0.00030
8	0.02	0.04	33.49	34.52	34.59	0.00045	0.00035	0.00035
8	0.03	0.01	31.72	33.92	34.32	0.00067	0.00041	0.00037
8	0.03	0.02	31.66	33.74	34.07	0.00068	0.00042	0.00039
8	0.03	0.03	31.51	33.30	33.57	0.00071	0.00047	0.00044
8	0.03	0.04	31.09	32.83	33.18	0.00078	0.00052	0.00048
8	0.04	0.01	29.34	31.95	32.60	0.00116	0.00064	0.00055
8	0.04	0.02	29.35	31.86	32.48	0.00116	0.00065	0.00056
8	0.04	0.03	29.30	31.69	32.19	0.00117	0.00068	0.00060
8	0.04	0.04	29.20	31.29	31.72	0.00120	0.00074	0.00067
8	0.05	0.01	28.32	30.29	31.08	0.00147	0.00094	0.00078
8	0.05	0.02	27.53	30.26	31.03	0.00177	0.00094	0.00079
8	0.05	0.03	27.53	30.17	30.90	0.00176	0.00096	0.00081
8	0.05	0.04	27.50	29.93	30.54	0.00178	0.00102	0.00088
9	0.01	0.01	29.40	25.47	24.30	0.00115	0.00284	0.00372
9	0.01	0.02	29.11	25.10	23.98	0.00123	0.00309	0.00400
9	0.01	0.03	29.21	25.34	24.16	0.00120	0.00292	0.00384
9	0.01	0.04	28.66	25.27	24.18	0.00136	0.00297	0.00382
9	0.02	0.01	28.80	25.34	24.23	0.00132	0.00292	0.00378
9	0.02	0.02	28.45	24.97	23.92	0.00143	0.00318	0.00406
9	0.02	0.03	28.40	25.14	24.07	0.00145	0.00306	0.00392
9	0.02	0.04	28.10	25.14	24.10	0.00155	0.00306	0.00389
9	0.03	0.01	27.97	25.16	24.12	0.00160	0.00305	0.00387
9	0.03	0.02	27.59	24.82	23.83	0.00174	0.00329	0.00414
9	0.03	0.03	27.54	24.92	23.93	0.00176	0.00322	0.00404
9	0.03	0.04	27.30	24.94	23.98	0.00186	0.00320	0.00400
9	0.04	0.01	27.01	24.90	23.96	0.00199	0.00323	0.00402
9	0.04	0.02	26.81	24.61	23.70	0.00209	0.00346	0.00426
9	0.04	0.03	26.66	24.65	23.75	0.00216	0.00343	0.00421
9	0.04	0.04	26.41	24.58	23.72	0.00229	0.00349	0.00424
9	0.05	0.01	26.06	24.44	23.62	0.00248	0.00360	0.00434
9	0.05	0.02	25.95	24.26	23.44	0.00254	0.00375	0.00453
9	0.05	0.03	25.79	24.34	23.56	0.00264	0.00368	0.00440
9	0.05	0.04	25.58	24.26	23.51	0.00277	0.00375	0.00446

Tabella 5: PSNR e MSE delle immagini ricostruite con l'algoritmo di regolarizzazione con Variazione Totale

Image	Sigma	Lambda	PSNR5	PSNR7	PSNR9	MSE5	MSE7	MSE9
0	0.01	0.01	39.99	36.91	35.94	0.00010	0.00020	0.00025
0	0.01	0.02	41.44	36.71	35.93	0.00007	0.00021	0.00026
0	0.01	0.03	36.50	36.10	35.11	0.00022	0.00025	0.00031
0	0.01	0.04	35.61	34.73	35.70	0.00027	0.00034	0.00027
0	0.02	0.01	38.11	36.37	35.55	0.00015	0.00023	0.00028
0	0.02	0.02	40.15	36.03	35.52	0.00010	0.00025	0.00028
0	0.02	0.03	35.88	34.66	35.91	0.00026	0.00034	0.00026
0	0.02	0.04	34.36	34.18	33.83	0.00037	0.00038	0.00041
0	0.03	0.01	35.42	35.48	34.95	0.00029	0.00028	0.00032
0	0.03	0.02	38.01	35.56	35.14	0.00016	0.00028	0.00031
0	0.03	0.03	35.66	34.52	34.96	0.00027	0.00035	0.00032
0	0.03	0.04	34.17	33.89	33.62	0.00038	0.00041	0.00043
0	0.04	0.01	32.78	34.24	34.06	0.00053	0.00038	0.00039
0	0.04	0.02	35.05	35.06	34.69	0.00031	0.00031	0.00034
0	0.04	0.03	34.96	34.18	33.68	0.00032	0.00038	0.00043
0	0.04	0.04	34.03	33.61	33.35	0.00040	0.00044	0.00046
0	0.05	0.01	30.47	32.81	32.97	0.00090	0.00052	0.00050
0	0.05	0.02	33.28	34.34	34.09	0.00047	0.00037	0.00039
0	0.05	0.03	33.96	33.84	33.41	0.00040	0.00041	0.00046
0	0.05	0.04	33.78	33.46	33.18	0.00042	0.00045	0.00048
8	0.01	0.01	41.74	39.11	38.03	0.00007	0.00012	0.00016
8	0.01	0.02	38.71	38.21	37.43	0.00013	0.00015	0.00018
8	0.01	0.03	37.01	37.22	36.06	0.00020	0.00019	0.00025
8	0.01	0.04	35.78	35.41	36.11	0.00026	0.00029	0.00024
8	0.02	0.01	38.92	38.18	37.40	0.00013	0.00015	0.00018
8	0.02	0.02	40.10	37.31	36.90	0.00010	0.00019	0.00020
8	0.02	0.03	36.39	35.70	36.75	0.00023	0.00027	0.00021
8	0.02	0.04	34.65	34.90	34.68	0.00034	0.00032	0.00034
8	0.03	0.01	35.76	36.79	36.42	0.00027	0.00021	0.00023
8	0.03	0.02	37.83	36.60	36.31	0.00016	0.00022	0.00023
8	0.03	0.03	35.93	35.38	35.59	0.00026	0.00029	0.00028
8	0.03	0.04	34.32	34.47	34.34	0.00037	0.00036	0.00037
8	0.04	0.01	32.86	35.07	35.13	0.00052	0.00031	0.00031
8	0.04	0.02	35.07	35.86	35.65	0.00031	0.00026	0.00027
8	0.04	0.03	35.19	35.02	35.03	0.00030	0.00031	0.00031
8	0.04	0.04	34.18	34.22	34.10	0.00038	0.00038	0.00039
8	0.05	0.01	30.50	33.34	33.72	0.00089	0.00046	0.00042
8	0.05	0.02	33.20	34.88	34.82	0.00048	0.00032	0.00033
8	0.05	0.03	34.00	34.47	34.62	0.00040	0.00036	0.00034
8	0.05	0.04	33.77	33.93	33.80	0.00042	0.00040	0.00042
9	0.01	0.01	29.41	25.48	24.32	0.00115	0.00283	0.00370
9	0.01	0.02	28.14	24.87	23.85	0.00153	0.00326	0.00412
9	0.01	0.03	26.72	24.16	23.42	0.00213	0.00384	0.00455
9	0.01	0.04	25.97	23.53	23.06	0.00253	0.00443	0.00495
9	0.02	0.01	29.06	25.41	24.28	0.00124	0.00288	0.00373
9	0.02	0.02	28.31	24.82	23.82	0.00147	0.00330	0.00415
9	0.02	0.03	26.63	24.34	23.25	0.00217	0.00368	0.00473
9	0.02	0.04	25.86	23.50	22.73	0.00259	0.00446	0.00533
9	0.03	0.01	28.45	25.30	24.21	0.00143	0.00295	0.00379

9	0.03	0.02	27.69	24.76	23.78	0.00170	0.00334	0.00418
9	0.03	0.03	26.53	23.88	23.43	0.00222	0.00409	0.00454
9	0.03	0.04	25.80	23.48	22.72	0.00263	0.00448	0.00534
9	0.04	0.01	27.65	25.13	24.11	0.00172	0.00307	0.00388
9	0.04	0.02	27.35	24.68	23.73	0.00184	0.00340	0.00424
9	0.04	0.03	26.38	23.84	23.24	0.00230	0.00413	0.00475
9	0.04	0.04	25.73	23.46	22.70	0.00267	0.00451	0.00537
9	0.05	0.01	26.69	24.86	23.69	0.00214	0.00326	0.00428
9	0.05	0.02	26.80	24.54	23.64	0.00209	0.00352	0.00433
9	0.05	0.03	26.11	23.78	23.18	0.00245	0.00419	0.00481
9	0.05	0.04	25.60	23.42	22.67	0.00276	0.00455	0.00540