HW3 快速傅立叶变换

1. 如果一台通用计算机每完成一次复乘耗时 5μs，每完成一次复加耗时 0.5μs，用它来计算 512 点序列的 DFT，问直接计算需要多少时间，用 FFT 计算需要多少时间？

2. 对一个连续时间信号 $x_a(t)$ 采样 1s 得到一个 4096 个采样点的序列。

(1) 若采样后没有发生频谱混叠， $x_a(t)$ 的最高频率是多少？

(2) 若计算采样信号的 4096 点的 DFT，DFT 系数之间的频率间隔是多少 Hz？

(3) 假定我们仅仅对 $200 \le f \le 300$ Hz 频率范围所对应的 DFT 采样点感兴趣，若直接用 DFT，要计算这些值需要多少次复乘？若使用按时间抽取 FFT 则需多少次？

(4) 为了使 FFT 算法比直接计算 DFT 效率更高，需要多少个频率采样点？

3. 若已知有限长序列 $x(n)=\{2,-1,1,1\}$，试按照 FFT 运算流程计算 $X(k)$ 的值。

4. 试用基 2 的 DIT-FFT 与基 2 的 DIF-FFT 法分别画出 $N=8$ 时的信号流图。

5．令 $v(n)=x(n)+jy(n)$ 为长度为 N 的复值信号，其 DFT 为 $V(k)$ 。$x(n)$ 和 $y(n)$ 为两个实值信号且各自 DFT 分别为 $X(k)$ 和 $Y(k)$ 。

(1) 证明 $\mathrm{DFT}[v^*(n)]=V^*(N-k)$；

(2) 试用 $v(n)$ 表示 $x(n)$ 和 $y(n)$；

(3) 结合前两小题的结果，证明两个实值信号的 N 点 DFT 可以通过计算一个复值信号的 N 点 DFT 一次实现，即证明通过计算 $V(k)$ 可以获得 $X(k)$ 和 $Y(k)$；

(4) 结合上一小题的结果，参考基 2 DIT-FFT 算法的推导过程，证明可以通过 $N/2$ 点 DFT 计算一个实值信号 $q(n)$ 的 N 点 DFT。

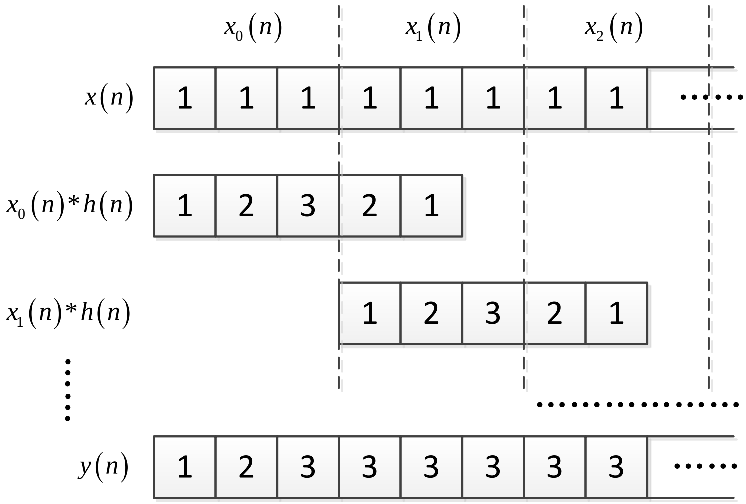
6. 使用如下两种方法计算 $y(n)=x(n)*h(n)$，其中：

$$x(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le 9\\ 0 & others\end{cases},\quad h(n)=\begin{cases}n+1 & 0\le n\le 3\\ 0 & others\end{cases}$$

(1) 重叠相加法；

(2) 重叠保留法。

说明：请采用作图方式回答，例如对 $\{1,1,1,1,\ldots\}*\{1,1,1\}$ 采用重叠相加法。示意图如下：



（注：示意图中选取的 $x(n)$ 的分段长度 L 并不符合 FFT 运算要求。在做(1) (2)小题时，务必给出合理的分段长度，并按此长度作图）

7. 设 $x(n)$ 是一个 M 点 $0\le n\le M-1$ 的有限长序列，其 Z 变换为 $X(z)=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)z^{-n}$ 。今求 $X(z)$ 在单位圆上的 N 个等距离点上的采样值 $X(z_k)$，$z_k=e^{j\frac{2\pi}{N}k},\quad k=0,1,\cdots,N\text{-}1$。问在 $N\le M$ 和 $N>M$ 两种情况下，应如何用一个 N 点 FFT 来算出全部 $X(z_k)$ 值。

8. $X\left(e^{j\omega}\right)$ 表示长度为 10 的有限长序列 $x(n)$ 的 DTFT。我们希望计算 $X\left(e^{j\omega}\right)$ 在频率 $\omega_k=\dfrac{2\pi k^2}{100},k=0,1,\ldots,9$ 时的 10 个抽样。计算时不能采用先算出比要求数更多的抽样然后再舍弃一些的办法。讨论采用下列各方法的可能性：

(1) 直接利用 10 点的 FFT 算法，若可能，给出奇偶分解的最终计算公式和乘法次数；

(2) 利用线性调频 Z 变换算法。

9. 用 $N=50$ 的有限冲激响应滤波器来过滤一段长数据，我们需要使用重叠保留法和 FFT 来实现滤波。为了做到这一点，必须满足两个条件：(1) 输入各段必须重叠 P 个抽样点；(2) 每一段产生的输出中取出 Q 个抽样点。那么，当这些抽样点连接到一起时，得到的序列就是所要求的滤波输出。假设输入的各段长度为 100 个抽样点，而 DFT 的长度为 128 点。进一步假设，圆周卷积的输出序列号是从 $n=0$ 到 $n=127$，则：

(1) 求 P；

(2) 求 Q；

(3) 求取出来的 Q 个点之起点和终点的标号，即确定从圆周卷积的 128 点中要取出哪些点去和前一段的点衔接起来。

10. 当 DFT 的点数是 2 的整数幂时，我们可以使用基 2-FFT 算法。但是，当 $N=4^{v}$ 时，使用基 4-FFT 算法效率更高。请根据所学知识完成下列问题：

(1) 推导 $N=4^{v}$ 时的基 4 DIT-FFT 算法；

(2) 画出基 4-FFT 算法的蝶形图，比较基 4-FFT 算法和基 2-FFT 算法的复乘和复加次数。