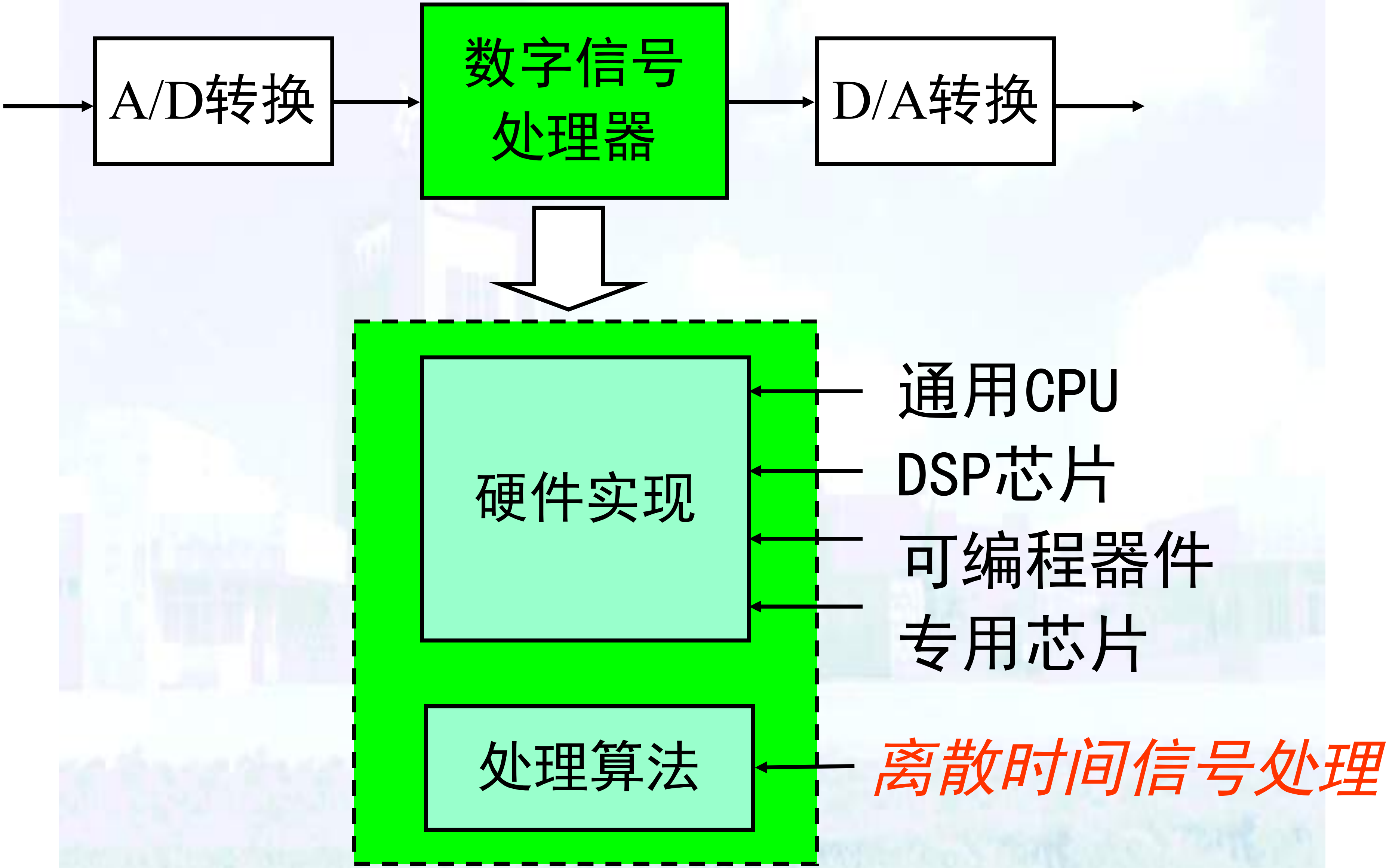
数字信号处理

绪　论


A/D转换
数字信号处理器
D/A转换
硬件实现
通用CPU
DSP芯片
可编程器件
专用芯片
处理算法
离散时间信号处理

常用的硬件实现方法

- 通用CPU

  Intel 80x86系列，ARM系列

- DSP芯片

  AD系列，TI系列

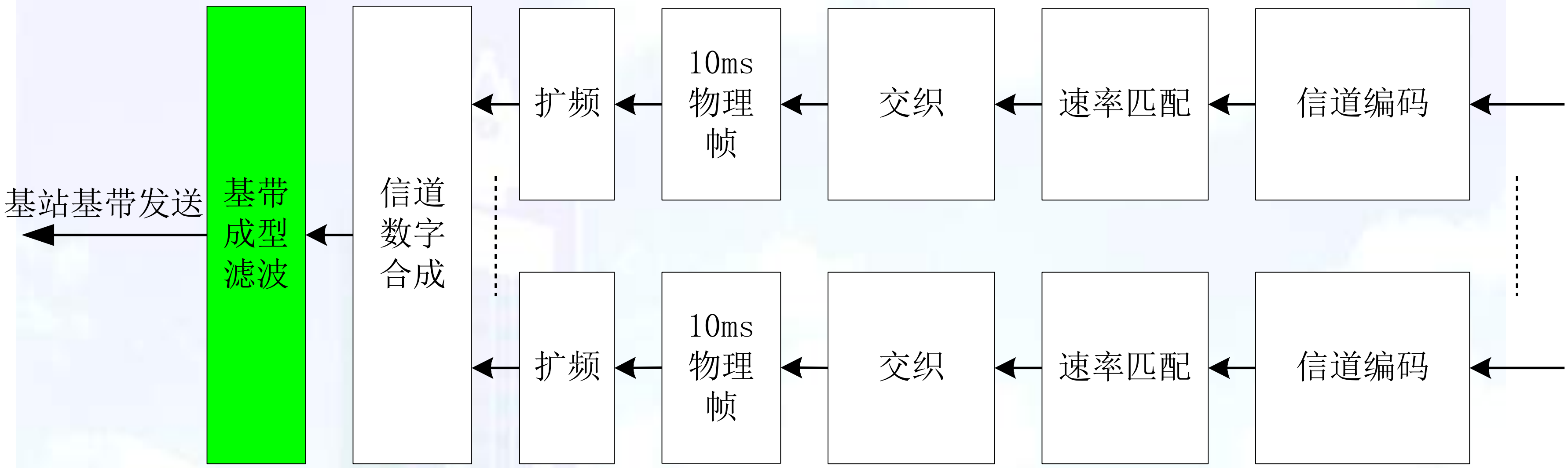
- 可编程器件

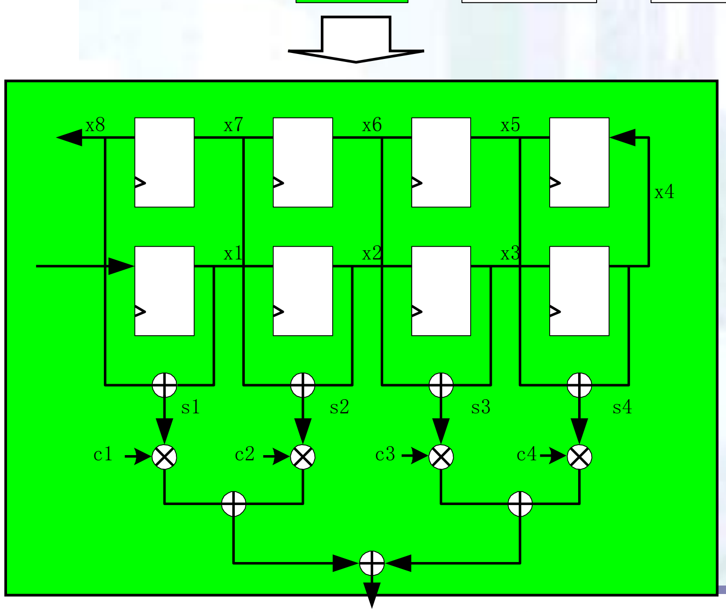
  FPGA（Field Programmable Gate Array）

- 专用芯片

  ASIC（Application Specific Integrated Circuit）

绪论





- **算法设计**

  基本理论，基本方法，协议规范

- **结构设计**

  基本方法，实现技巧

- **硬件设计**

  结构，模块，计算单元

数字信号处理系统的基本设计过程与本课程的关系

特定任务需求

专业理论与方法
（通信、图像、语音…）

算法设计

离散时间信号的
基本理论与方法

算法编程（C，VHDL）

电路设计（逻辑门）

DSP硬件实现（CPU，FPGA，ASIC）

1 离散时间信号与系统

1.1 引言

信号分类：取值形式；变化规律；能量特征

- 取值形式—时间与信号幅度

  模拟信号：时间与幅度均连续

  连续时间信号：时间连续，幅度连续或离散

  离散时间信号：时间离散，幅度连续或离散

  数字信号：时间与幅度均离散

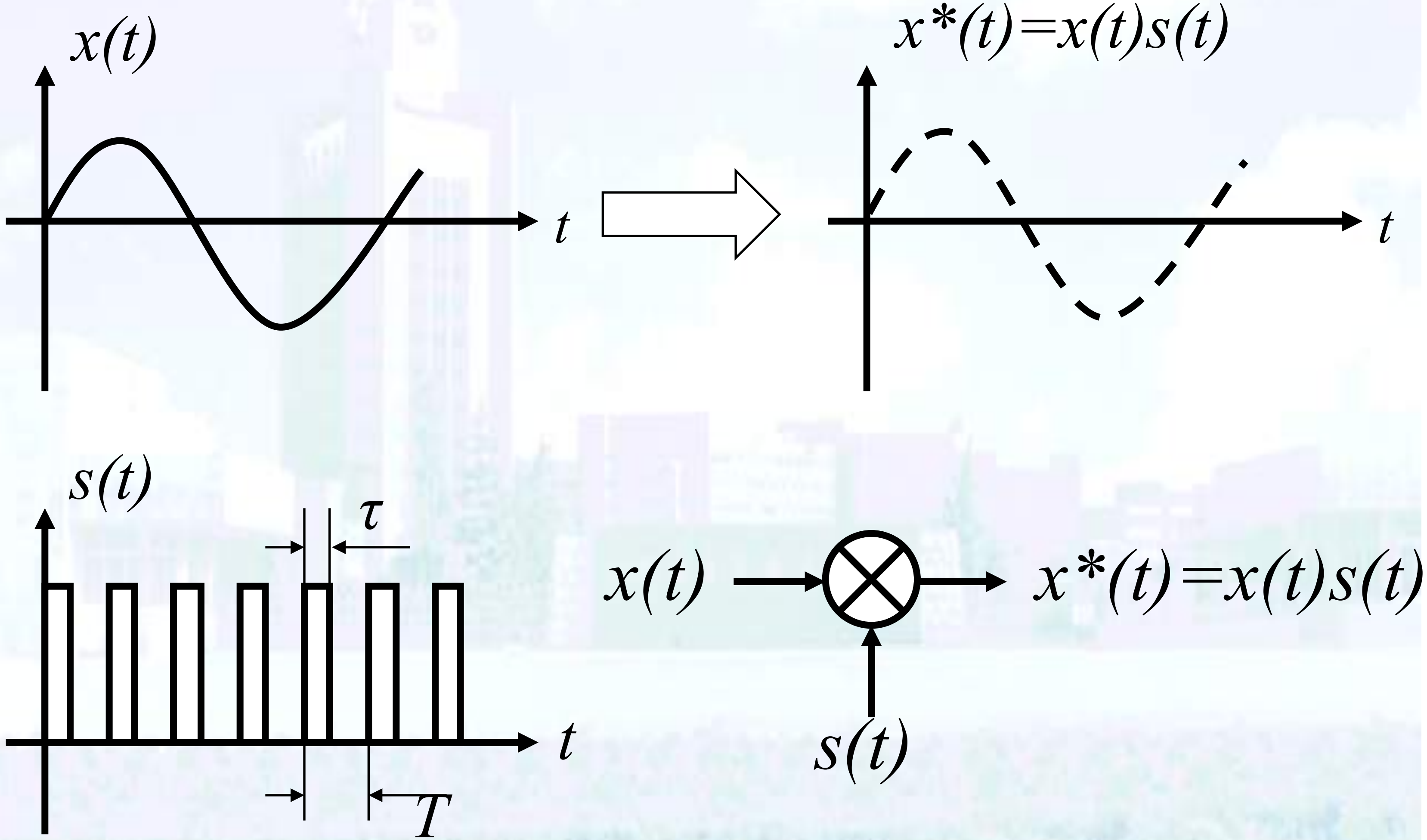
信号分类：

- 变化规律—确定信号
  —随机信号

- 能量特征—能量信号
  能量有限，平均功率为零
  —功率信号
  平均功率有限，能量无限

1.2 连续时间信号的离散化

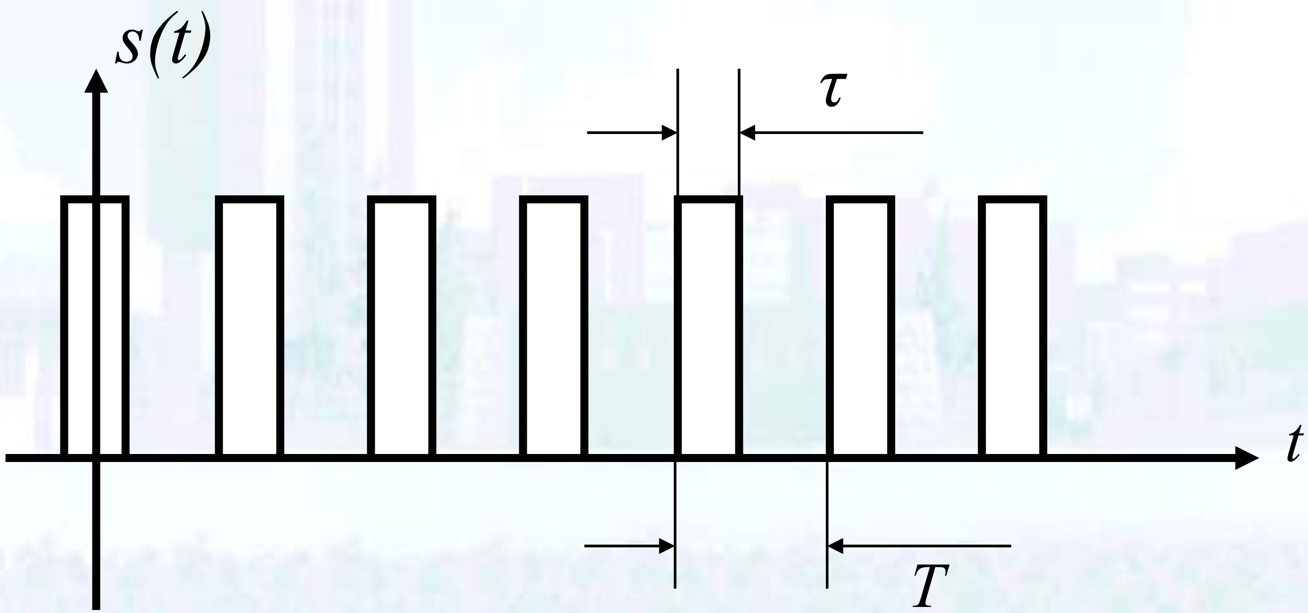
对信号进行均匀取样：



两个重要因素：

1)取样周期T，或取样频率 $fs = \dfrac{1}{T}$

2)取样脉冲宽度τ



❑取样周期 T 对取样信号的影响

设$s(t)$为理想冲激取样脉冲，$\tau << T$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_s t}, \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$x^*(t) = x(t)s(t)$$

$$= x(t) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_s t}$$

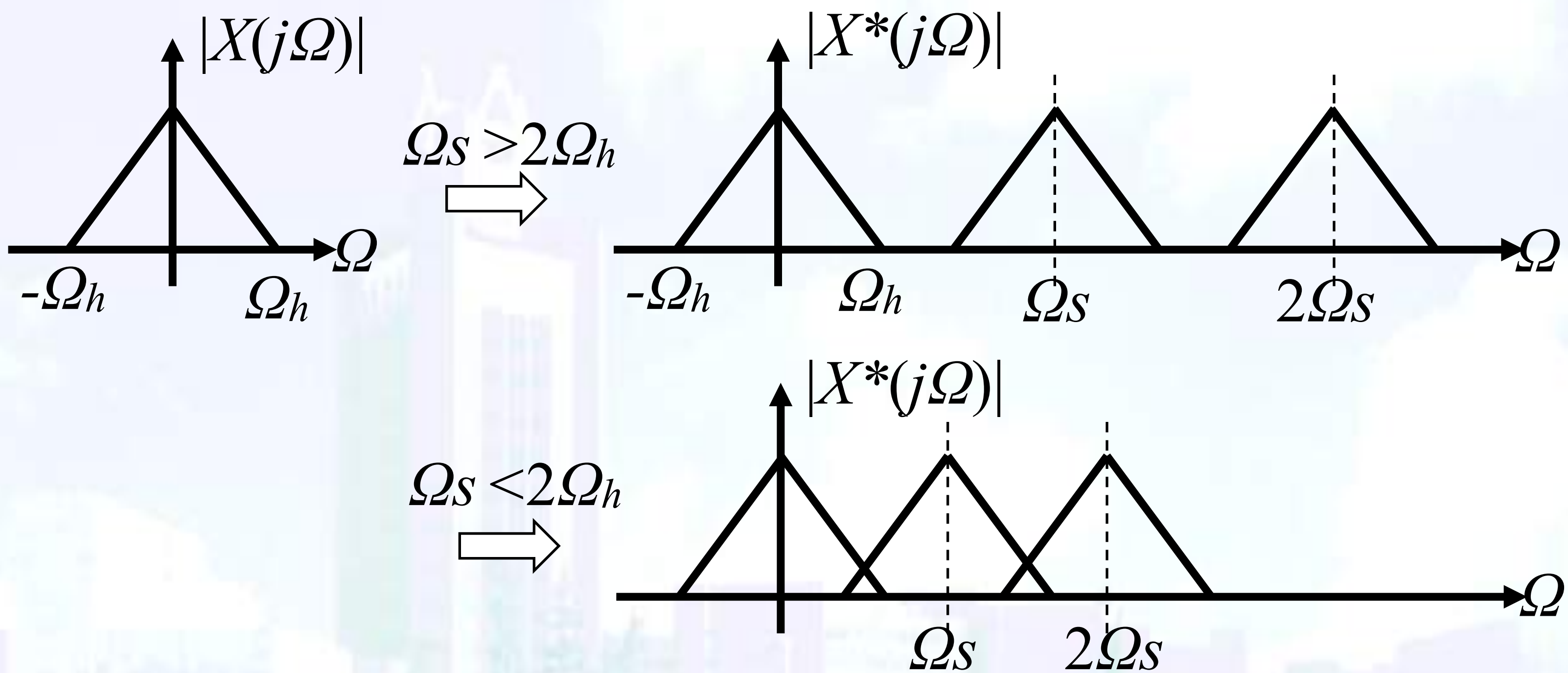
$x^*(t)$ 的频谱：

$$X^*(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - n\Omega s)]$$

这里 $\Omega s = 2\pi fs = \frac{2\pi}{T}$ ，$X(j\Omega)$为$x(t)$的频谱

1.2 连续时间信号的离散化



结论：经过取样，原信号的频谱被周期性地扩展，当$\Omega_s<2\Omega_h$时，发生频谱混迭。

取样定理

设信号$x(t)$的频谱为$X(j\Omega)$，且当$|\Omega|\geq|\Omega_{\mathrm{h}}|$时，$X(j\Omega)=0$；则$x(t)$可由其均匀取样值重建，

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\frac{\sin\Omega_h(t-nT)}{\Omega_h(t-nT)}$$

这里$T=\dfrac{\pi}{\Omega_h}$

Ω_{h}：信号$x(t)$的截止频率（最高频率）

取样定理的证明：

在$|\Omega| < \Omega_h$的范围内，$X(j\Omega)$可用$Fourier$序列表示，

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\Omega\pi/\Omega_h}$$

$$x_n = \frac{1}{2\Omega_h}\int_{-\Omega_h}^{\Omega_h} X(j\Omega) e^{jn\Omega\pi/\Omega_h} d\Omega$$

$$\because \quad X(j\Omega) = 0, \quad 当|\Omega| \geq \Omega_h$$

$$\therefore \quad x_n = \frac{2\pi}{2\Omega_h}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{jn\Omega\pi/\Omega_h} d\Omega$$

$$= Tx(nT), \qquad T = \frac{\pi}{\Omega_h}$$

$$\therefore \quad X(j\Omega)=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tx(nT)e^{-jnT\Omega} & |\Omega|<\Omega_h \\ 0 & |\Omega|\geq\Omega_h\end{cases}$$

$$且有x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

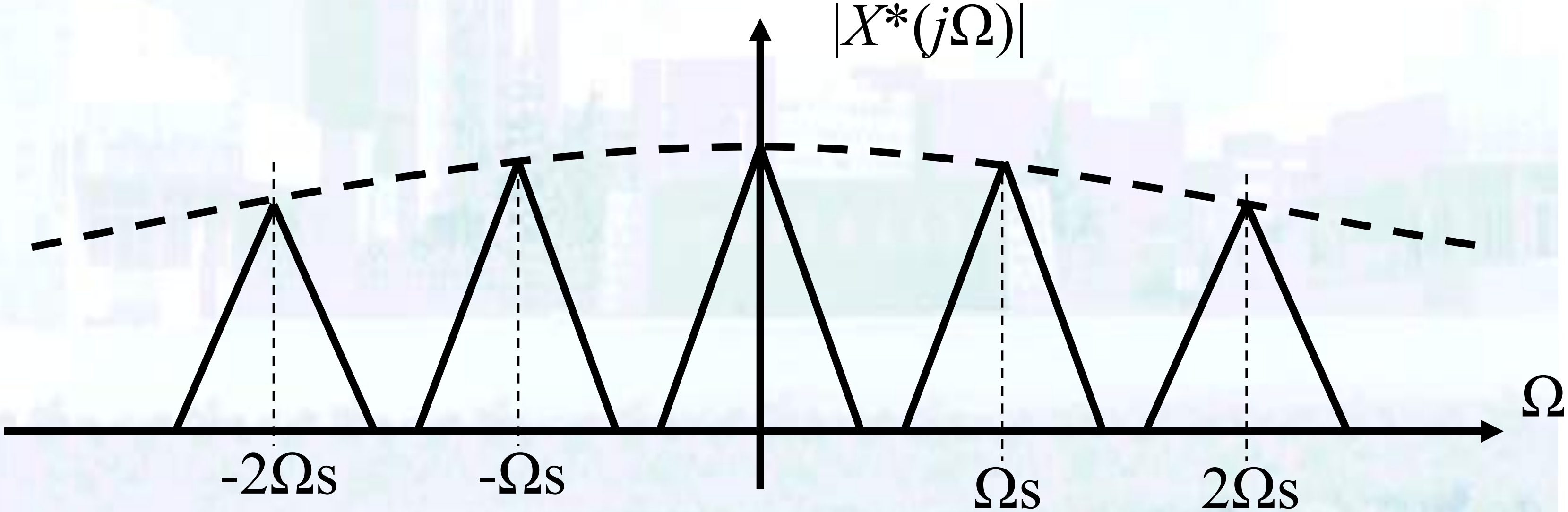
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin\Omega_h(t-nT)}{\Omega_h(t-nT)}$$

结论：只要取样频率$\Omega_s>2\Omega_h$，原信号可以通过取样重建

❑取样脉宽τ对取样信号的影响

若$\tau \neq 0$，则有

$$X^*(j\Omega) = \frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin n\Omega s\tau/2}{n\Omega s\tau/2}X[j(\Omega - n\Omega s)]$$



❑关于取样信号频谱周期延拓的时域理解

考虑一个正弦信号$x_1(t)=e^{j\Omega 1t}$，对其作周期为T的取样，

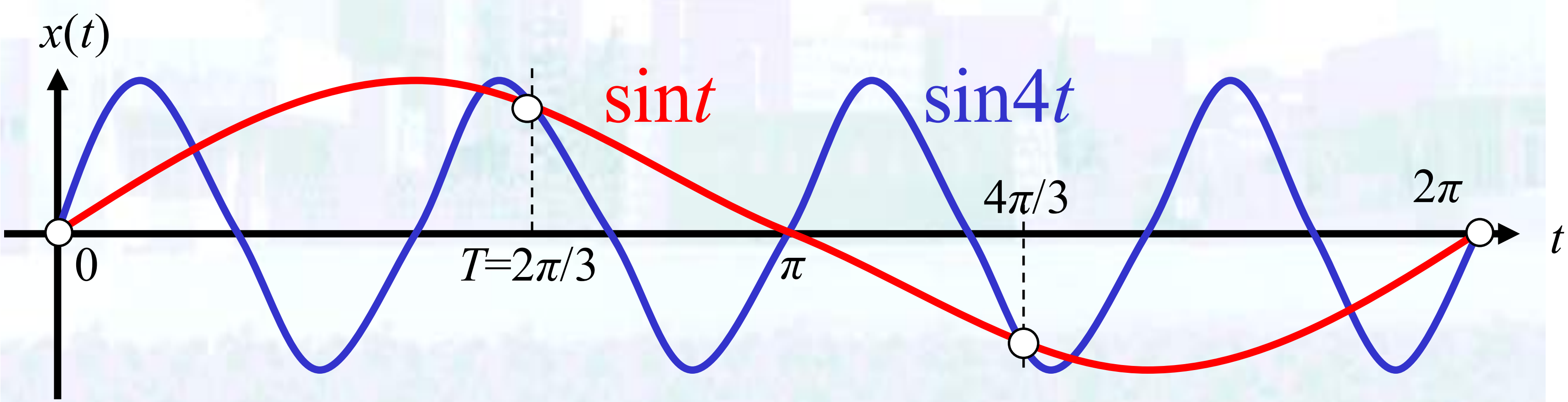
$$x_1(nT)=e^{j\Omega 1nT}$$

$$=e^{j\Omega 1nT}\cdot e^{j2\pi nk}$$

$$=e^{jnT(\Omega 1+\frac{2\pi}{T}k)}$$

$$=e^{jnT(\Omega 1+k\Omega s)}$$

在同样的取样率下，$x_2(t)=e^{j(\Omega 1+k\ \Omega s)t}$与$x_1(t)$有着相同的取样值。取样序列$x_1(nT)$所表示的频率成分为$(\Omega_1+k\ \Omega s)$，$k$为任意整数，对应的连续序列不唯一。



❑利用取样信号恢复原信号

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow x(t)$$

以模拟形式表示一个离散时间信号：

$$x'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

1.2 连续时间信号的离散化

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x'(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\sum_{-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-\tau-nT)d\tau$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}x(nT)h(t-nT)$$

一般表达

❑利用取样信号恢复原信号

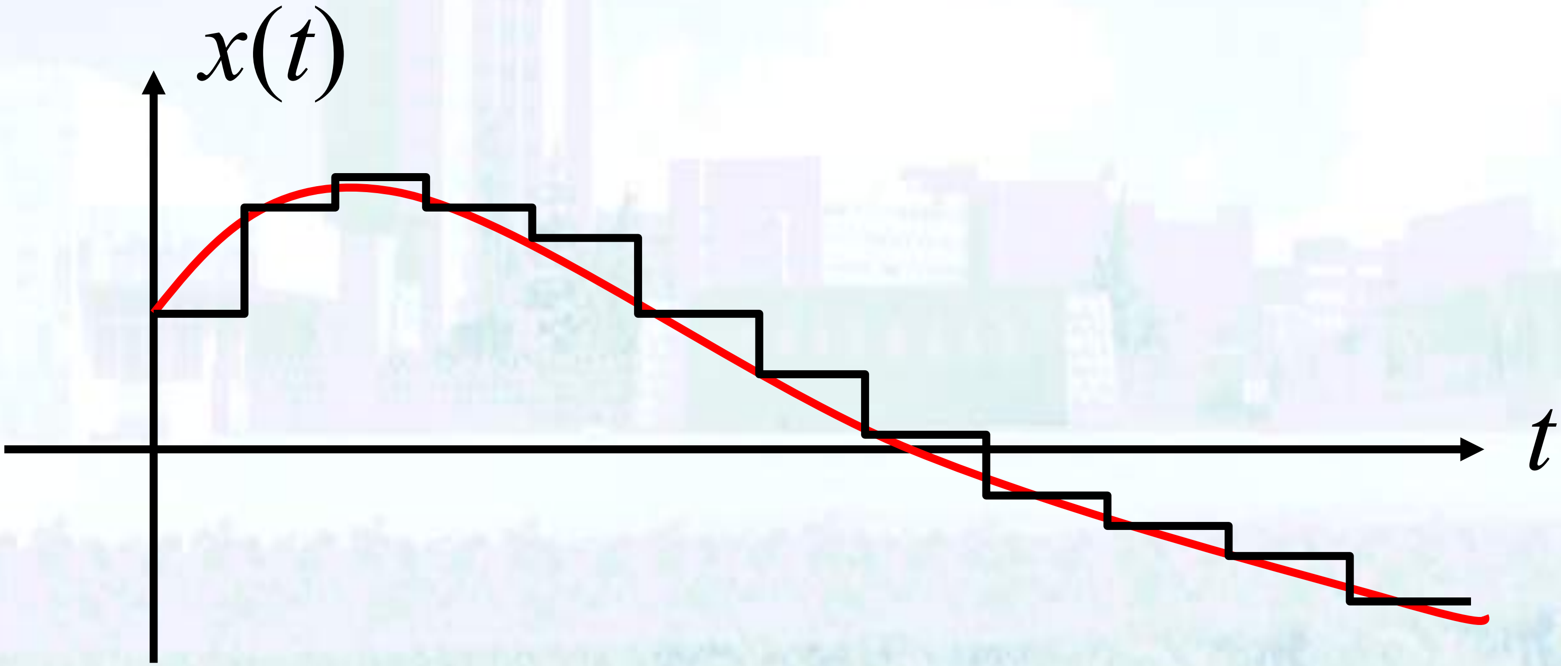
1）理想情况：非因果低通滤波器

$$h(t)=\frac{\sin\Omega_h t}{\Omega_h t}$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\frac{\sin\Omega_h(t-nT)}{\Omega_h(t-nT)}$$

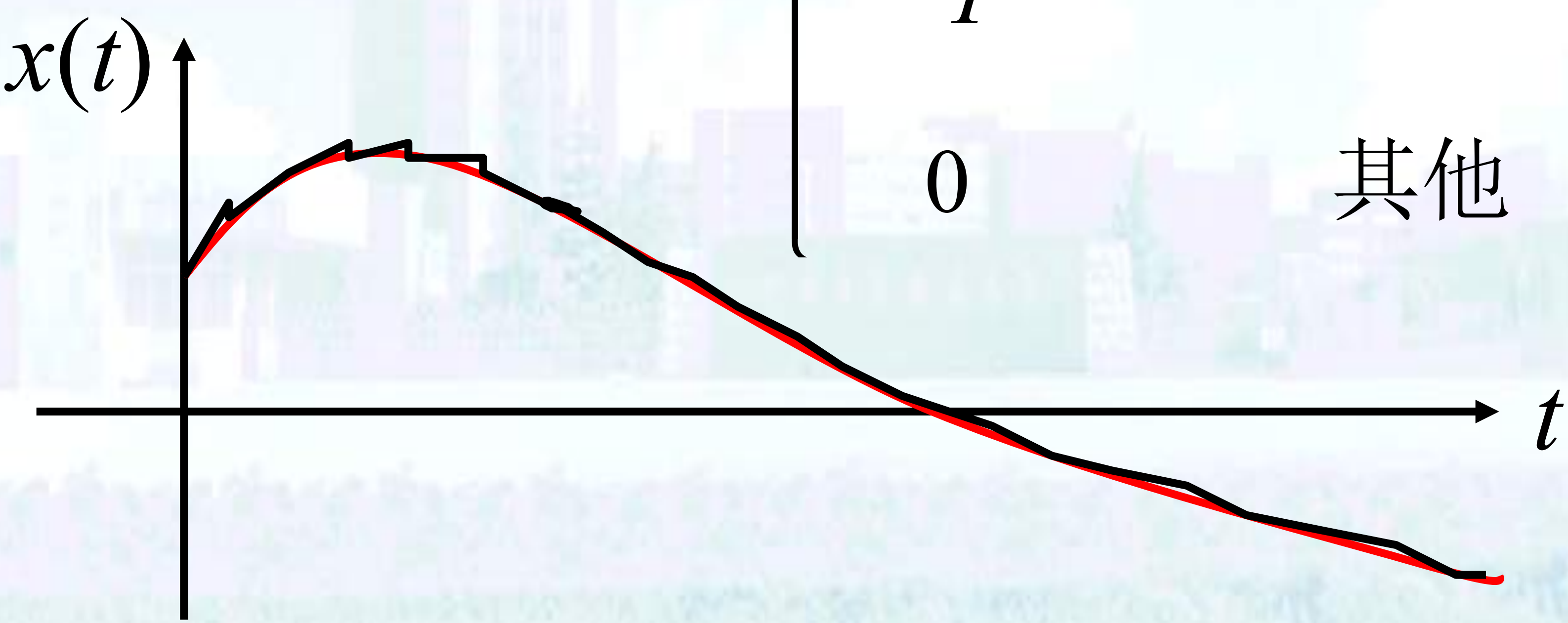
2）零阶保持电路（外推）

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



3）一阶保持电路（外推）

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{t+T}{T} & 0\le t<T\\ -\dfrac{t-T}{T} & T\le t<2T\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



1.3 离散时间信号

- 信号用离散时间序列表示

$$x(n) = x(nT), \quad t = nT$$

- 基本运算

积 $x \cdot y = x(n)y(n)$

加减 $x \pm y = x(n) \pm y(n)$

标乘 $A \cdot x = Ax(n)$

延时（移位） $y(n) = x(n-n_0)$

- 数字域频率 $\omega = \dfrac{\Omega}{f_s} = \Omega T$

$$\sin \Omega t = \sin \Omega n T = \sin n\omega$$

频率的归一化表示

用数字域频率表示的其他频率概念

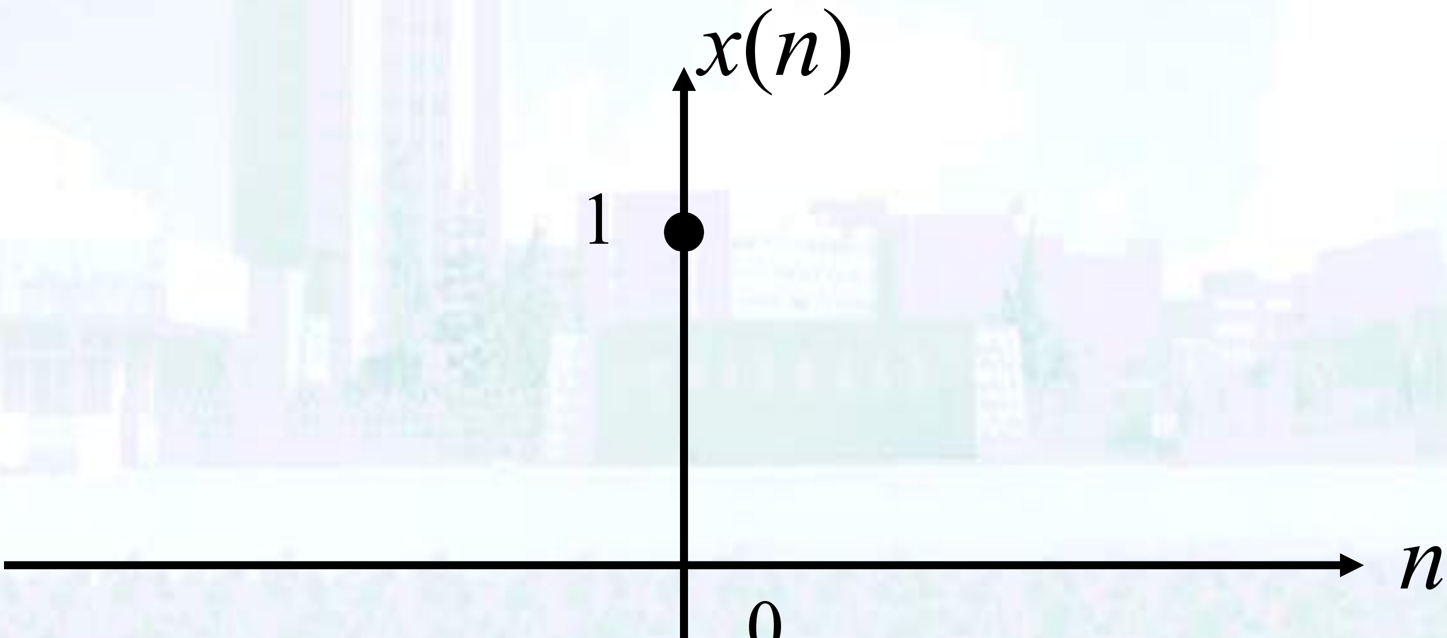
取样频率 $\omega_s = \dfrac{\Omega_s}{f_s} = \dfrac{2\pi f_s}{f_s} = 2\pi$

折叠频率 $\omega_0 = \dfrac{\omega_s}{2} = \pi$

信号最高频率 $\omega_h = \dfrac{\Omega_h}{f_s} = 2\pi \cdot \dfrac{f_h}{f_s}$

❑常用序列

单位取样序列 $\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$

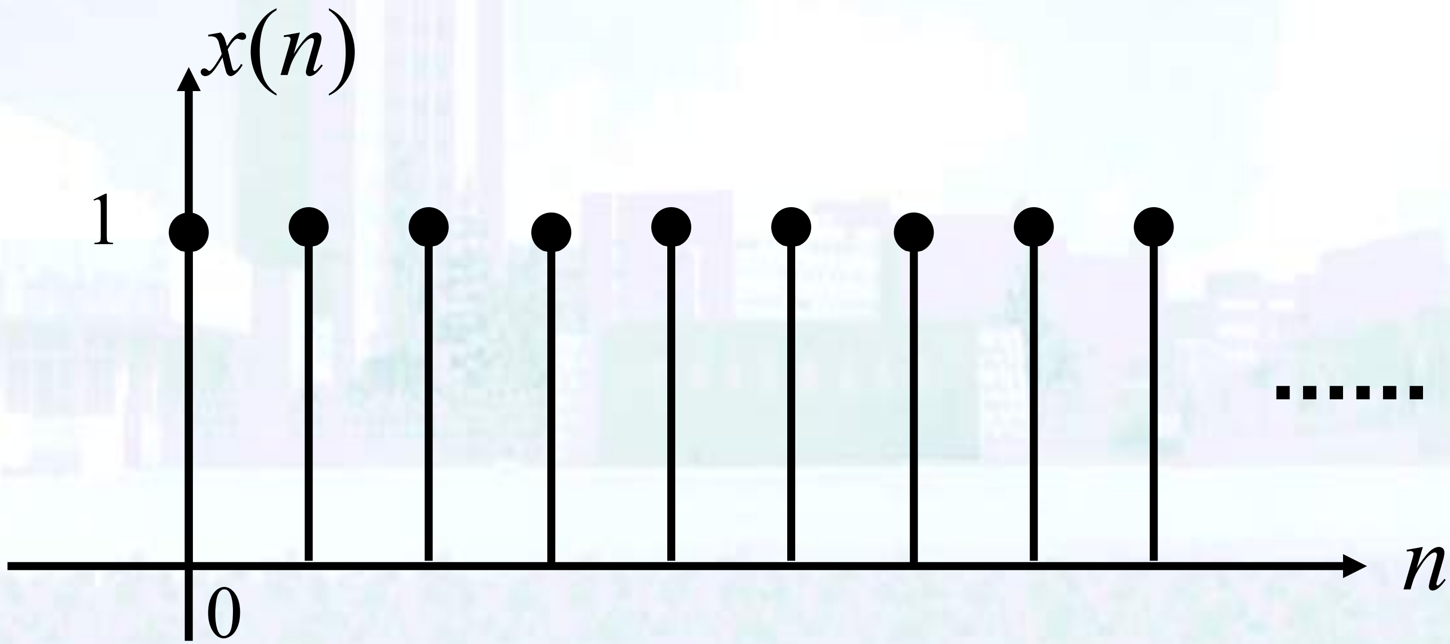


用单位取样序列表达任意信号

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

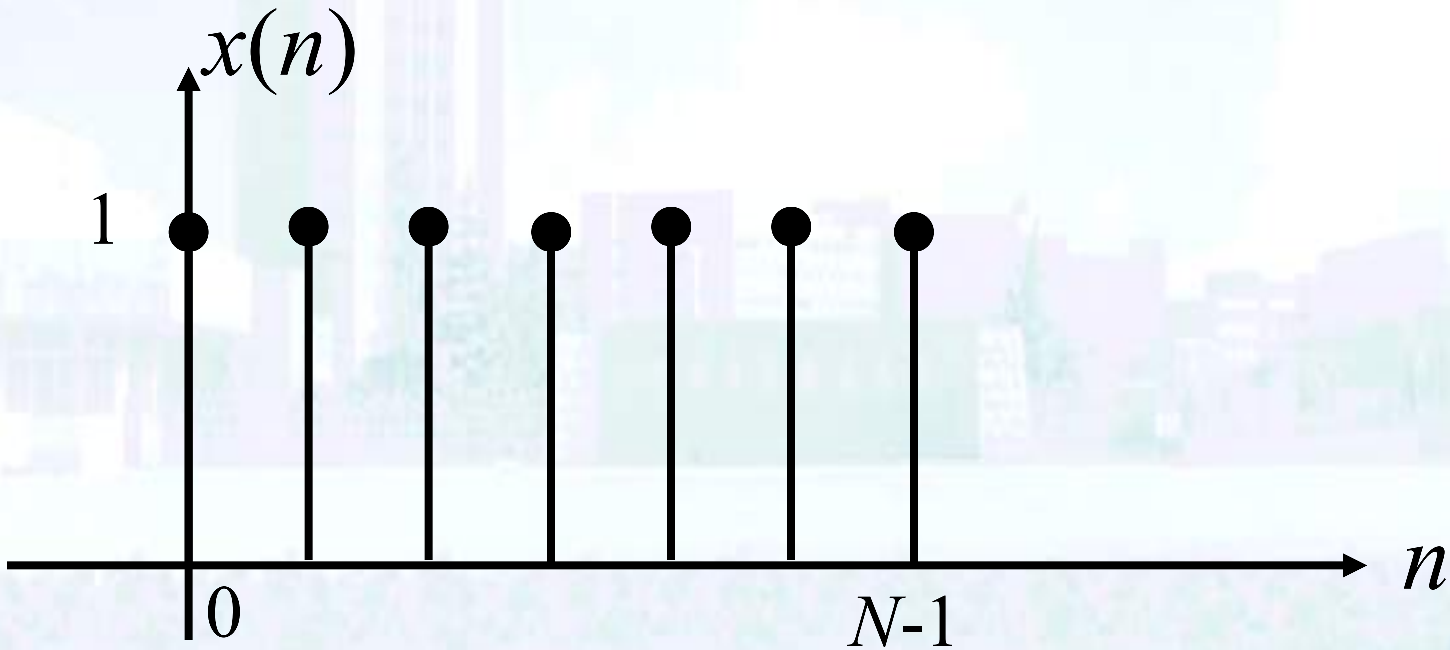
❑常用序列

单位阶跃序列 $u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$



❑常用序列

矩形序列 $$R(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & n<0,\quad n\ge N\end{cases}$$



- ❑序列的周期性 $x(n)=x(n+N)$，周期为N
- ❑序列能量 $$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$$

1.4 离散时间线性非时变系统

❑离散时间系统

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T(\cdot)} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = T[x(n)]$$

离散时间系统：对离散序列的一种运算

1.4 离散时间线性非时变系统

线性

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]$$

$$=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

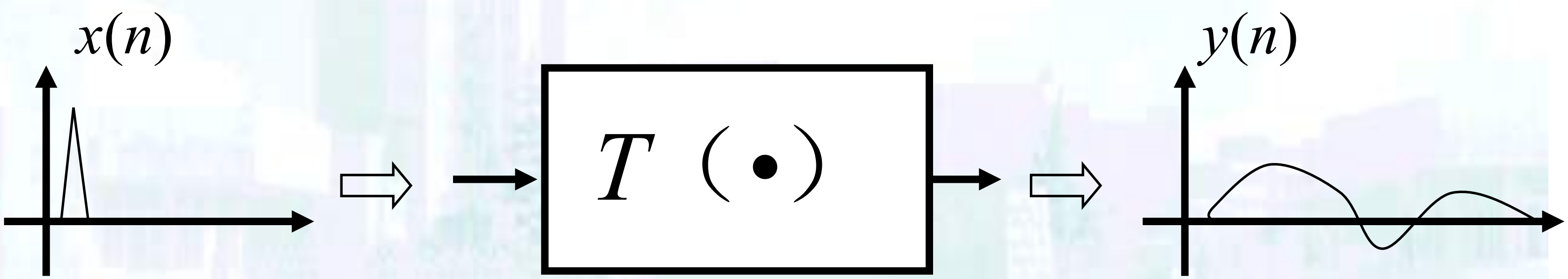
非时变 若 $y(n)=T[x(n)]$

则 $T[x(n-k)]=y(n-k)$

❑单位取样响应

系统对单位取样序列的响应：

$$h(n)=T[\delta(n)]$$



以此刻划系统的时域特性

用单位取样响应表达系统对任意输入信号的响应

$$y(n)=T[x(n)]=T[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

$$=x(n)*h(n) \longleftarrow \text{卷积运算}$$

❑卷积（和）运算

定义：

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k)$$

交换律 $x_1(n)*x_2(n)=x_2(n)*x_1(n)$

结合律
$$[x_1(n)*x_2(n)]*x_3(n)$$
$$=x_1(n)*[x_2(n)*x_3(n)]$$

分配律
$$x_1(n)*[x_2(n)+x_3(n)]$$
$$=x_1(n)*x_2(n)+x_1(n)*x_3(n)$$

- 系统的稳定性：输入有界→输出有界

  充要条件 $$\sum_{-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| < \infty$$

- 系统的因果性：输出结果与未来无关

  充要条件 $$h(n) = 0, \qquad n < 0$$

- 因果序列 $$x(n) = 0, \qquad n < 0$$

❑系统的差分方程表示

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

线性非时变←→常系数线性差分方程

❑系统对正弦信号的响应—频率响应

设 $$x_0(n) = e^{j\omega_0 n}$$

则 $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega_0 (n-k)}$$

$$= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega_0 k}$$

记 $$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{-j\omega_0 k}$$

则 $$y(n) = H(e^{j\omega_0})\, e^{j\omega_0 n}$$

$$= H(e^{j\omega_0}) x_0(n)$$

引入离散时间序列的傅氏变换概念。

1.5 离散时间序列的傅氏变换（DTFT）

1.5 离散时间序列的傅氏变换（DTFT）

❑定义

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega$$

$x(n)$ 离散，$X(e^{j\omega})$ 连续

$x(n)$ 非周期，$X(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期

❑主要性质

时域平移 $x(n-k) \leftrightarrow e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$

频域平移 $e^{j\omega_0 n} x(n) \leftrightarrow X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$

共轭对称 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

时域卷积 $x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega})$

能量守恒 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

1.6 离散时间序列的 Z 变换

- 定义

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

- 收敛域：使级数收敛的所有 z 值的集合

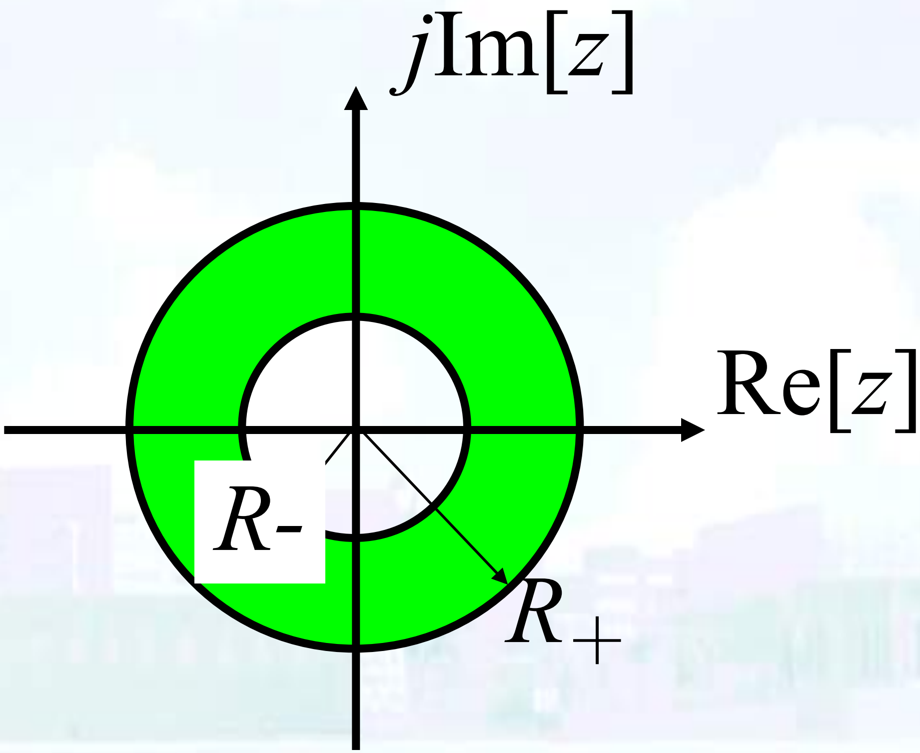
- 收敛条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$$

若 $x(n)$ 绝对可和，则 $X(z)$ 绝对收敛

❑收敛域的一般描述

$$R_{-} < |z| < R_{+}$$



❑有理函数表达

$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

零点z_0： $P(z_0)=0$， $X(z_0)=0$

极点z_p： $Q(z_p)=0$， $X(z_p)\to\infty$

收敛域内不能有极点，以极点来限定收敛域边界

❑序列特性与收敛域（1）

有限长序列 $$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}$$

不同收敛域的4种情况：

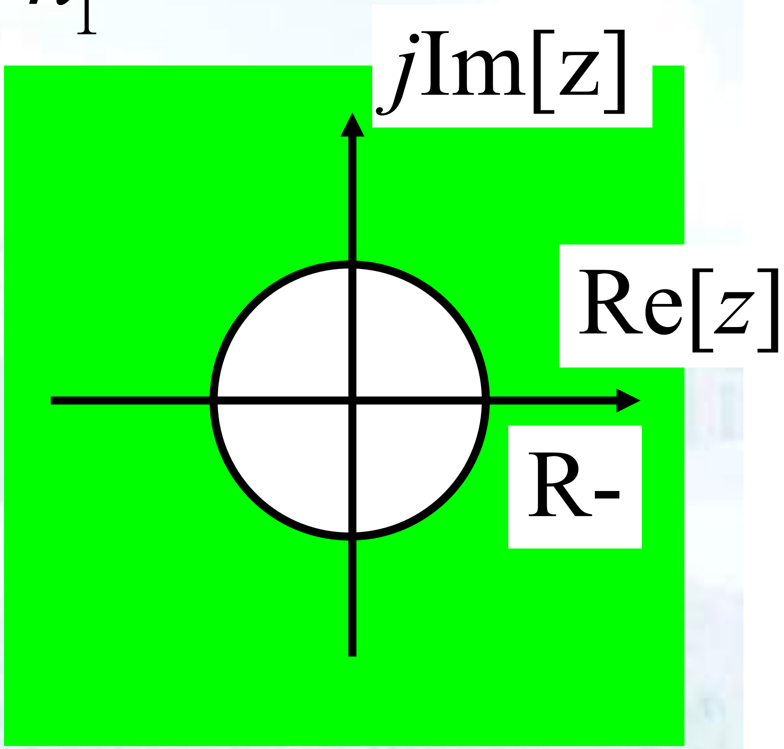
$n_1<0$， $n_2<0$	$0\le\|z\|<\infty$
$n_1<0$， $n_2>0$	$0<\|z\|<\infty$
$n_1>0$， $n_2>0$	$0<\|z\|\le\infty$
$n_1=0$， $n_2=0$	$0\le\|z\|\le\infty$

❑序列特性与收敛域（2）

右边序列 $X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$

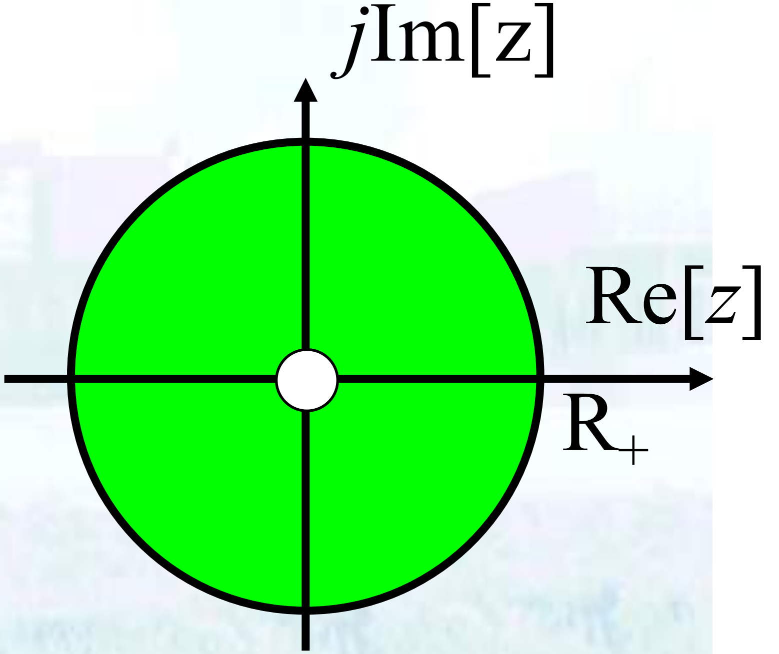
$n_1 \ge 0$，$x(n)$为因果序列，收敛域包括 ∞

$n_1 < 0$，收敛域不含 ∞



❑序列特性与收敛域（3）

左边序列 $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$



$n_2 \leq 0$，收敛域包括圆点

$n_2 > 0$，收敛域不含圆点

❑序列特性与收敛域（4）

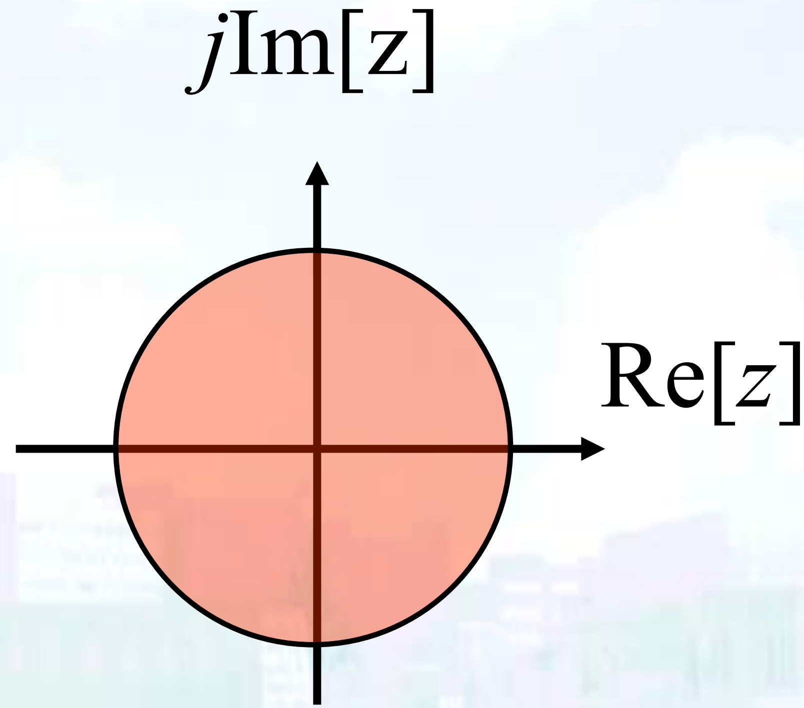
双边序列

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

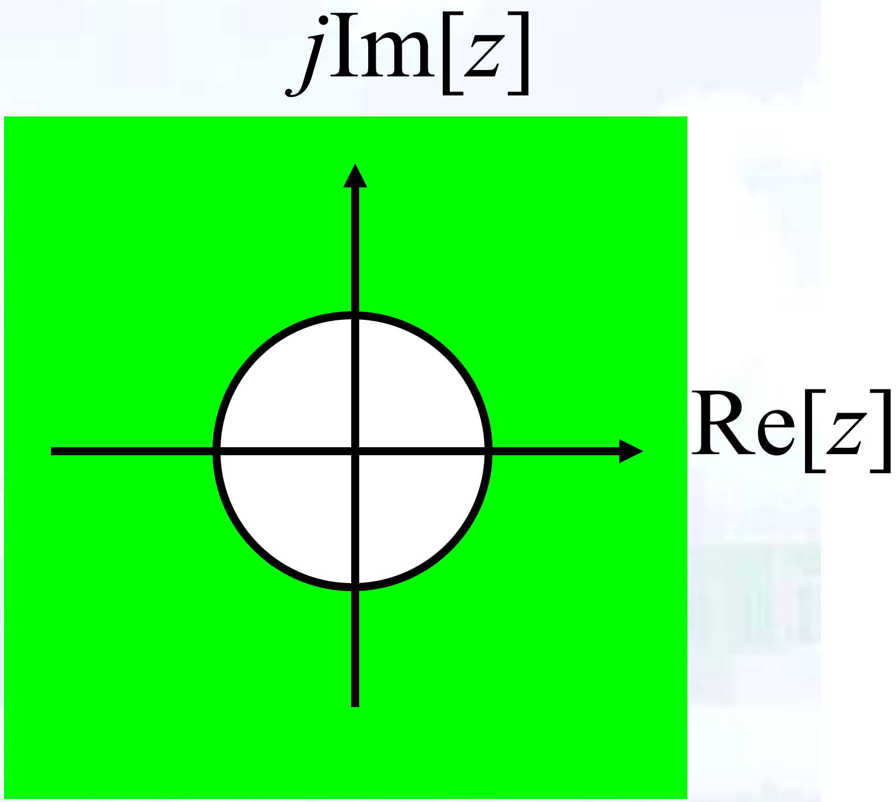
❑序列特性与收敛域（4）

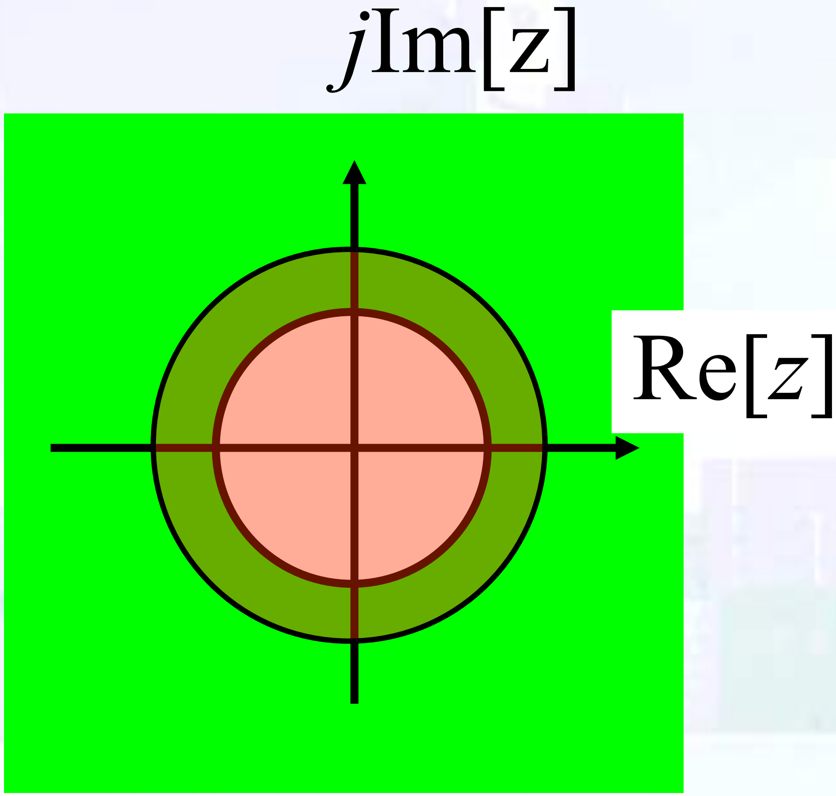
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n}$$



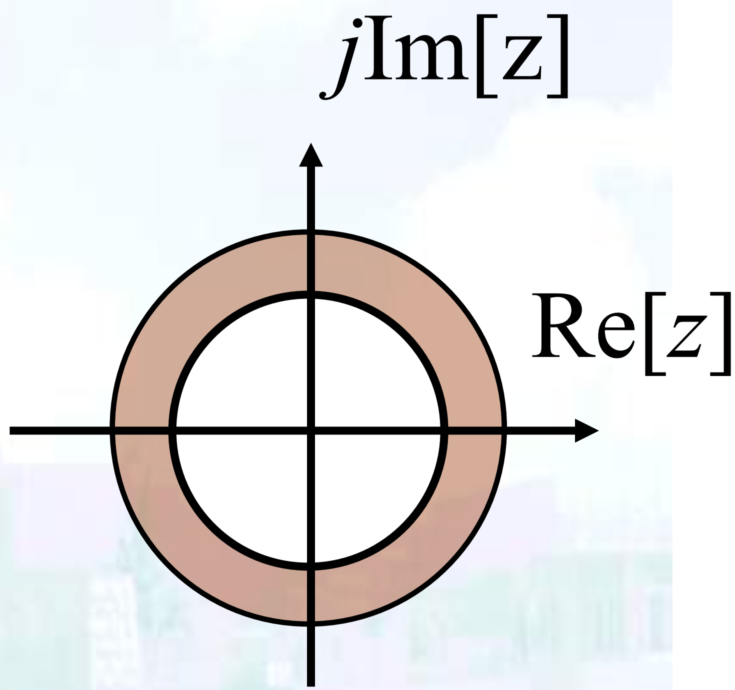
序列特性与收敛域（4）

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$



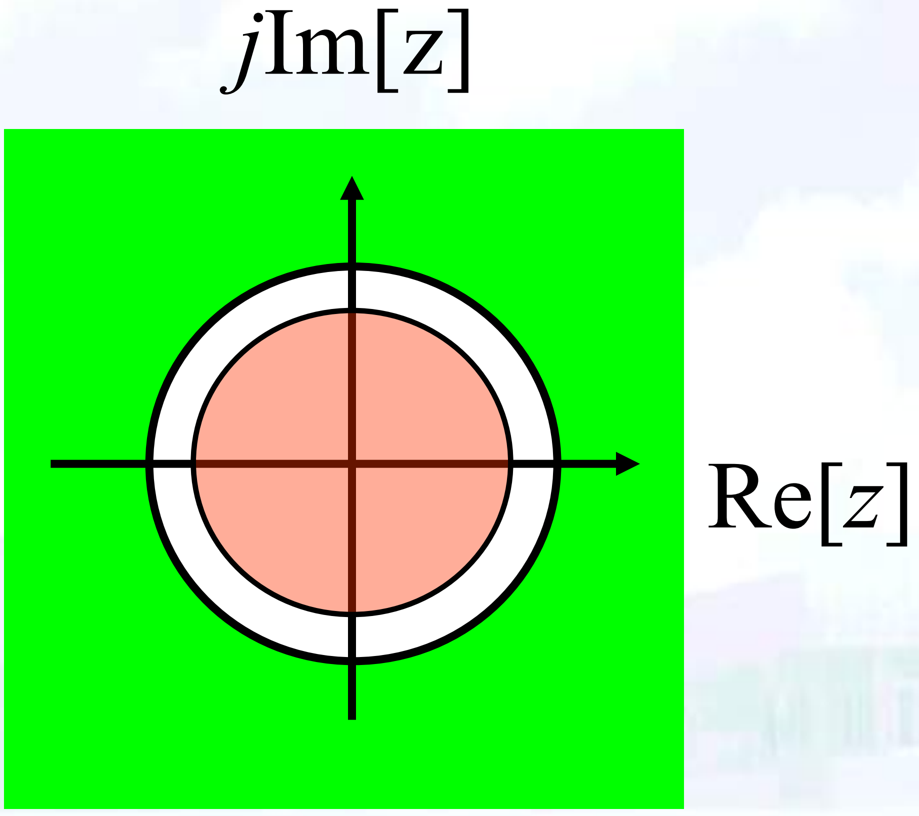


$\Rightarrow$



有确定的收敛域

没有相交的收敛域，
$X(z)$ 不收敛



❑反变换

1) $X(z)$ 部分分式展开，配合查表

2) $X(z)$ 幂级数展开

3) 应用留数定理求解围线积分

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}X(z)z^{n-1}dz$$

围线 C 在 $X(z)$ 的收敛域内

设 z_k 为围线内 s 阶极点

$$x(n)=\sum_k \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k]$$

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k]$$

$$=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}[(z-z_k)^s X(z)z^{n-1}]\Big|_{z=z_k}$$

对右边序列，不考虑 $n<0$ 引入的极点

对左边序列，不考虑 $n>0$ 引入的极点

❑ Z变换的主要性质

1）线性

$$Z[ax(n)+by(n)]=aX(z)+bY(z)$$

a）$X(z)$与$Y(z)$极点无法相互抵消时

收敛域： $R_x \bigcap R_y$

b）$X(z)$与$Y(z)$部分极点可以相互抵消时

收敛域扩大

例： $x(n)=a^n u(n)$， $y(n)=a^n u(n-N)$

收敛域均为 $|z|>|a|$

而 $x(n)-y(n)= a^n u(n)-a^n u(n-N)$

收敛域扩大为 $|z|>0$

2）时域移位

$$x(n+n_0) \leftrightarrow z^{n_0} X(z)$$

收敛域可能发生变化：

a）$n_0>0$，在 $z=\infty$ 引入新极点

b）$n_0<0$，在 $z=0$ 引入新极点

例：求反变换

$$X(z)=\frac{1}{z-\frac{1}{4}}, \quad |z|>\frac{1}{4}$$

利用部分分式展开， $$X(z)=-4+\frac{4}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

则， $$x(n)=-4\delta(n)+4(\frac{1}{4})^{n}u(n)$$

利用时域移位特性

$$X(z)=z^{-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

则

$$x(n)=(\frac{1}{4})^{n-1}u(n-1)=-4\delta(n)+4(\frac{1}{4})^{n}u(n)$$

3）指数序列相乘 $a^n x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z)$

收敛域：$|a|R_x$

$X(z)$ 零极点的尺度与幅角发生改变

若 $a = e^{j\omega_0}$，则实现频率偏移（调制）与DTFT的频移性质类似。

例：利用指数序列相乘性质求Z变换

求 $x(n)=r^{n}\cos(\omega_0 n)u(n)$

$$=\frac{1}{2}(re^{j\omega_0})^{n}u(n)+\frac{1}{2}(re^{-j\omega_0})^{n}u(n)$$

已知 $u(n)\leftrightarrow\dfrac{1}{1-z^{-1}},\qquad |z|>1$

$$\frac{1}{2}(re^{\pm j\omega_0})^{n}u(n)\leftrightarrow\frac{1/2}{1-re^{\pm j\omega_0}z^{-1}},\quad |z|>r$$

$$\therefore \quad X(z)=\frac{1/2}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1/2}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$=\frac{1-r\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}, \qquad |z|>r$$

4）$X(z)$ 微分

$$n\,x(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$ 收敛域不变

例：求反变换

$$X(z)=\log(1+az^{-1})$$ （$|z|>|a|$）

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

利用微分性质

$$-z\cdot\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}\leftrightarrow nx(n)$$

其中，

$$\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}=z^{-1}\cdot\frac{a}{1+az^{-1}}\leftrightarrow a(-a)^{n-1}u(n-1)$$

$$\therefore\quad x(n)=(-1)^{n+1}a^{n}u(n-1)/n$$

5）时域卷积

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) X_2(z)$$

收敛域： $R_{x_1} \bigcap R_{x_2}$

例：已知

$$x_1(n) = a^n u(n)$$

$$x_2(n) = u(n)$$

求 $$y(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$Y(z)=\frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$=\frac{z^2}{(z-a)(z-1)}$$

$$=\frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{a}{1-az^{-1}}\right),\qquad |z|>1$$

$$\therefore\quad y(n)=\frac{1}{1-a}[u(n)-a^{n+1}u(n)]$$

6）时域乘积 $w(n)=x(n)y(n)$

$$W(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{cx}X(v)Y(z/v)v^{-1}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{cy}X(z/v)Y(v)v^{-1}dv$$

Cx：$X(v)$与$Y(z/v)$收敛域重合部分的围线

Cy：$X(z/v)$与$Y(v)$收敛域重合部分的围线

难点：确定极点是否落在围线之内

例：$x_1(n)=a^n u(n)$，$x_2(n)=b^n u(n)$

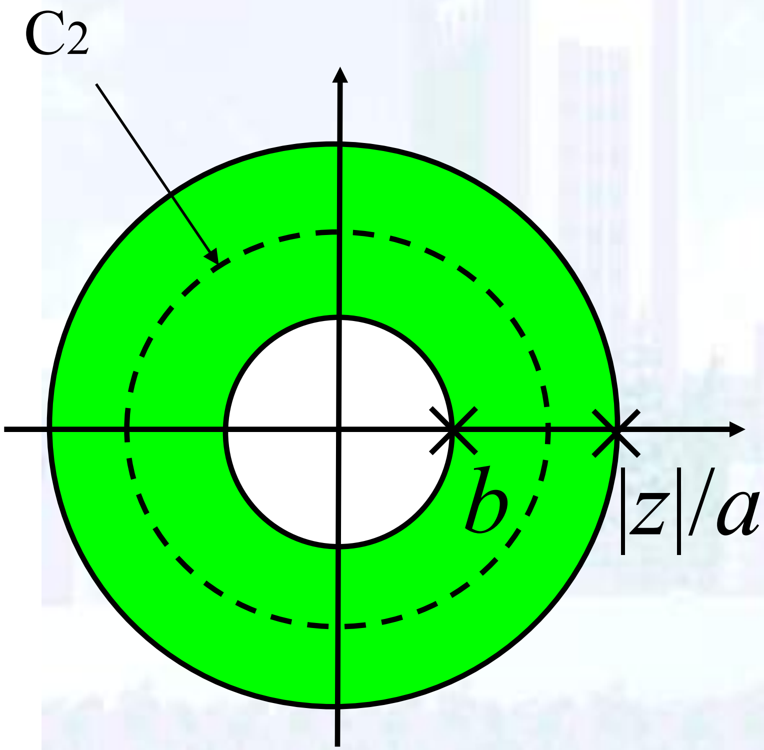
$$w(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$$

求 $W(z)=Z\{w(n)\}$

$$X_1(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

$$X_2(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}, \quad |z|>|b|$$

则 $$W(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c2}\frac{-(z/a)}{v-z/a}\cdot\frac{1}{v-b}dv$$



$X_2(v)$收敛域为$|v|>b$

$X_1(z/v)$的收敛域为$|z/v|>a$

$$|\frac{z}{v}|>a \quad\Rightarrow\quad v<\frac{|z|}{a}$$

所以，C_2仅包含一个极点$v=b$

$$W(z)=\frac{1}{1-abz^{-1}},\quad |z|\geq|ab|$$

7）Parseval定理

$$x(n) \to X(z), \quad y(n) \to Y(z)$$

$$R_{x-}R_{y-} < 1, \quad R_{x+}R_{y+} > 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

$$\max\left\{R_{x-}, \frac{1}{R_{y+}}\right\} < |v| < \min\left\{R_{x+}, \frac{1}{R_{y-}}\right\}$$

$x(n) = y(n)$ 时，推出序列能量关系

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

8）序列终值

因果序列 $x(n)$，在单位圆上可有一阶极点

则 $$x(\infty) = \lim_{z \to 1}(z-1)X(z)$$

$$(z-1)X(z)=(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-1}^{\infty}x(n+1)z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\lim_{N\to\infty}[\sum_{n=-1}^{N}x(n+1)z^{-n}-\sum_{n=0}^{N}x(n)z^{-n}]$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-1}^{N}x(n+1)-\sum_{n=0}^{N}x(n)\right] \\
&= \lim_{N\to\infty}x(N+1) \\
&= x(\infty)
\end{aligned}
$$

9）序列初值

因果序列，$x(0)=\lim_{z\to\infty} X(z)$

10）时间倒置

$x(-n) \leftrightarrow X(1/z)$，收敛域：$1/Rx$

11）共轭

$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*)$，收敛域不变

❑ Z变换与拉氏变换

Z变换：离散信号变换到复频域－Z平面

L变换：连续信号变换到复频域－S平面

$$L[x(t)] = X(s)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\Omega$$

先将连续信号离散化，然后进行拉氏变换

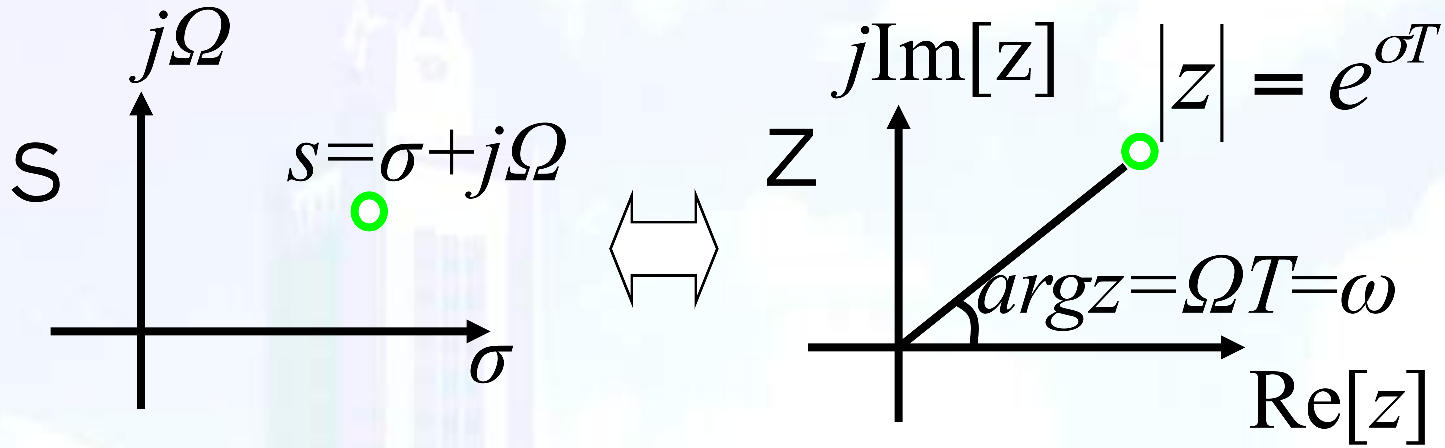
$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\delta(t-nT)$$

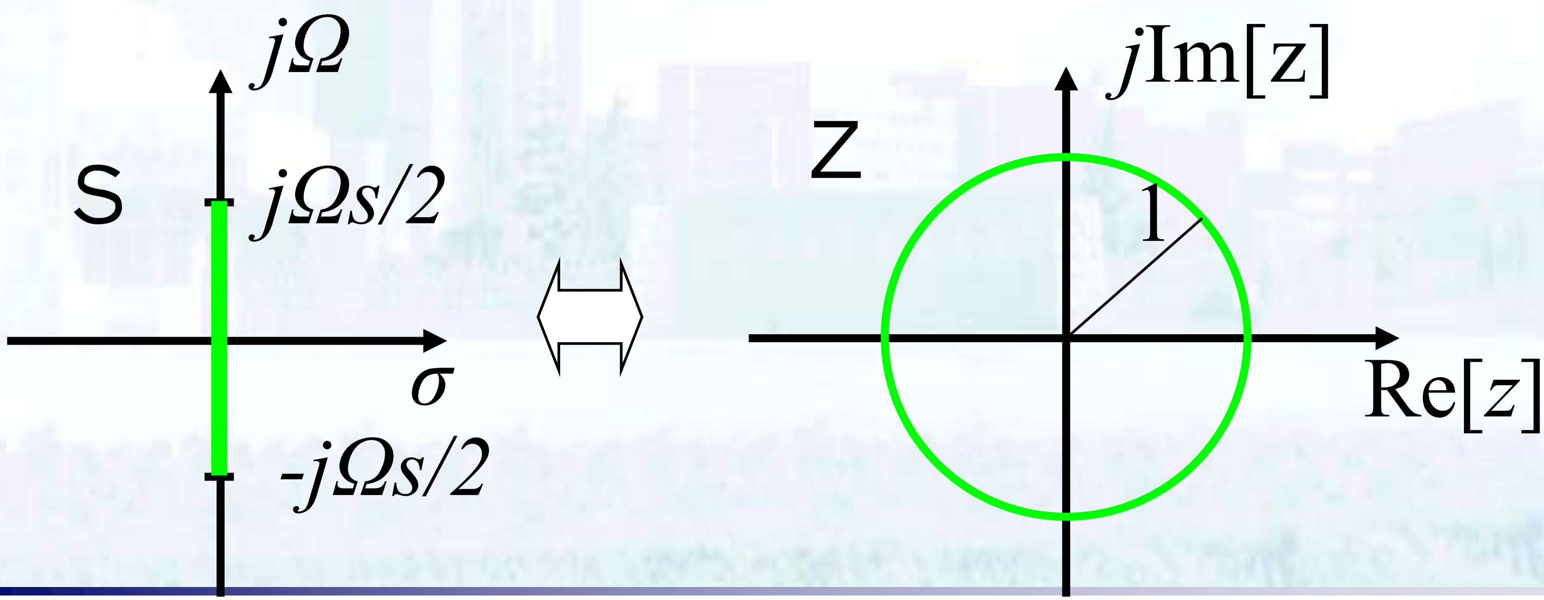
$$X_S(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-nsT}$$

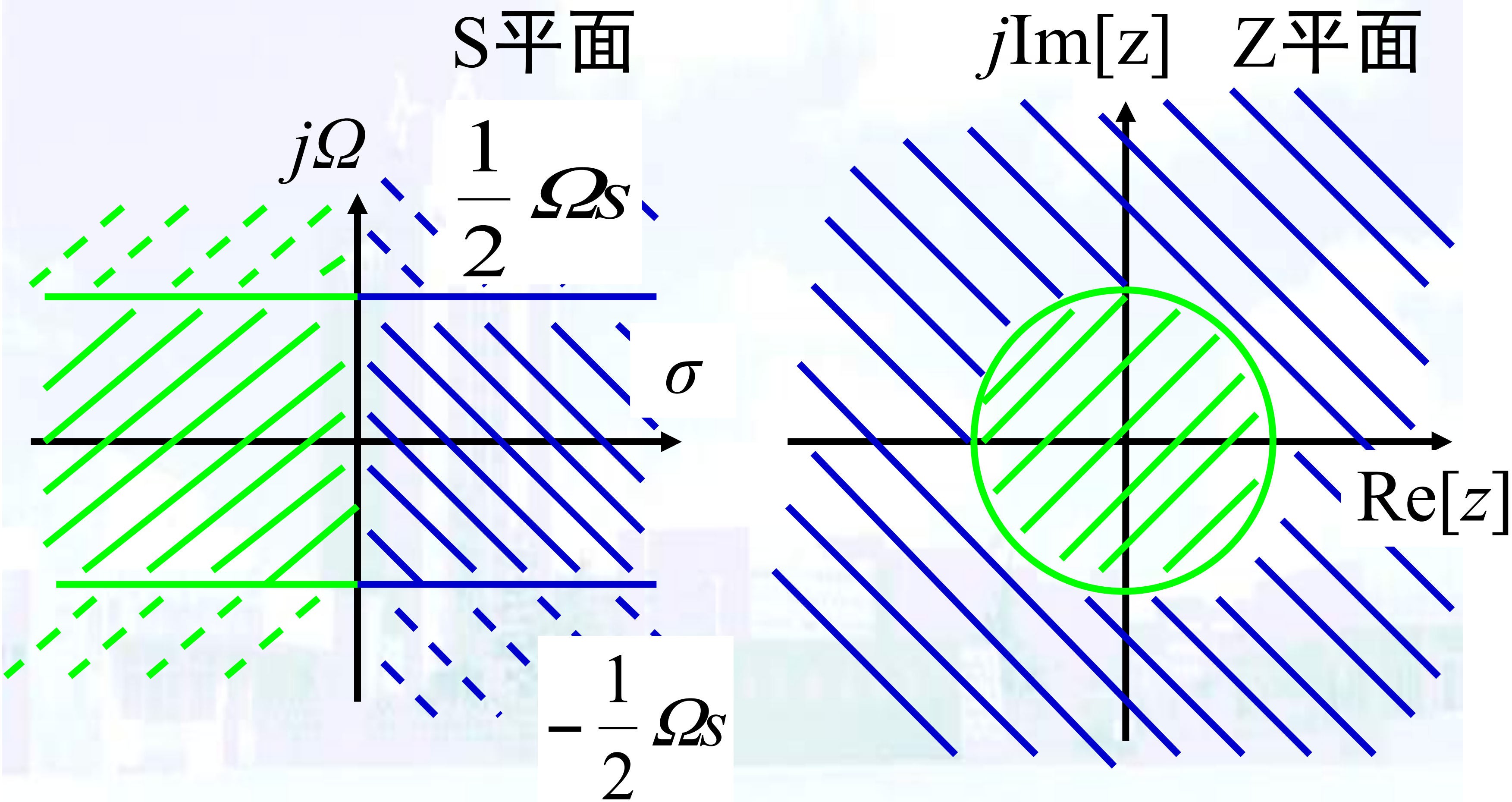
与Z变换比较，

$$z=e^{sT}=e^{\sigma T+j\Omega T},\quad s=\frac{1}{T}\ln z$$

❑ S平面到Z平面的映射变换 $z = e^{sT}$







S平面的点周期性地映射到Z平面，对应点不唯一

❑ Z变换与傅氏变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

若收敛域包括单位圆，取 $z=e^{j\omega}$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$x(n)$序列傅氏变换是Z变换的一个特例：单位圆上的Z变换

1.7 离散时间系统的系统函数

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

对两边取Z变换

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z[h(n)]$$ —系统函数

系统用差分方程表示

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

两边取 Z 变换，得

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

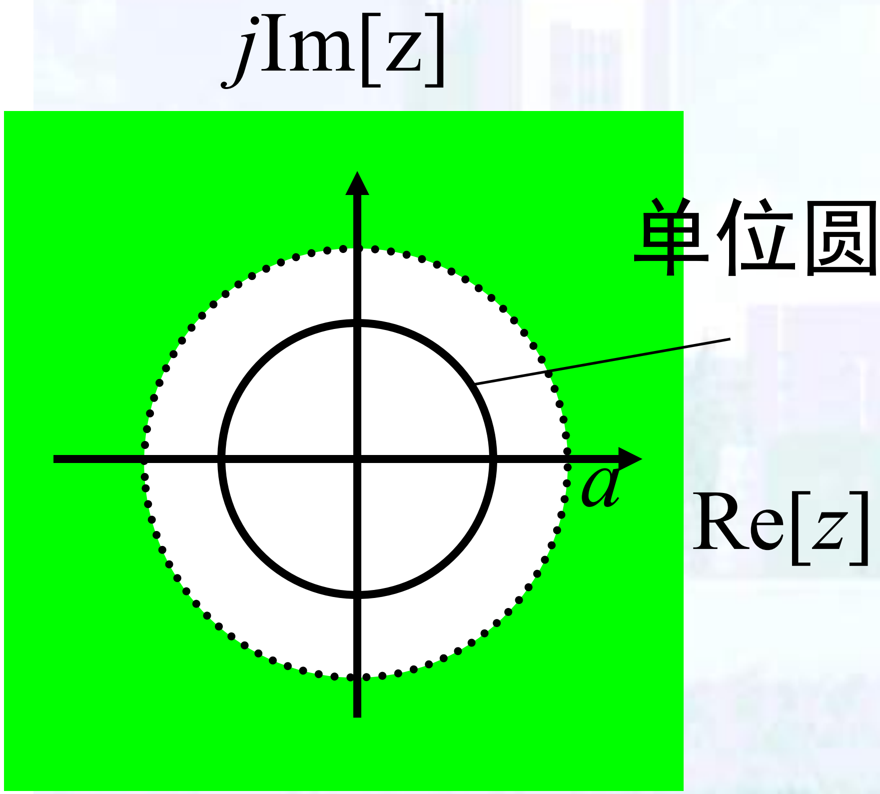
稳定系统的定义：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$

故，稳定系统$H(z)$的收敛域必须包括单位圆。

因果系统的定义：$h(n)=0$，$n<0$

故，因果系统 $H(z)$ 的收敛域必须包括无穷远。

稳定系统：$H(z)$ 在单位圆上必没有极点。反之不充分，单位圆上没有极点不一定稳定：



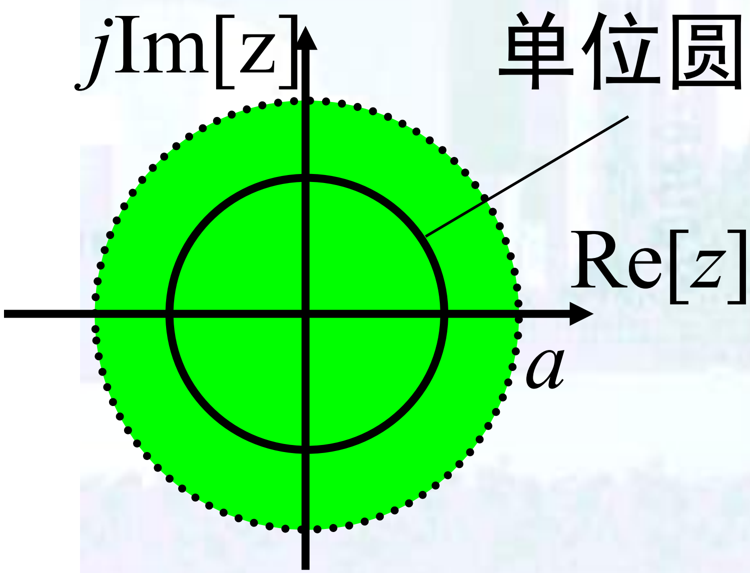
$$H(z)=\sum_{0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

$$\Downarrow$$

$$H(z)=\frac{z}{z-a} \qquad a>1$$

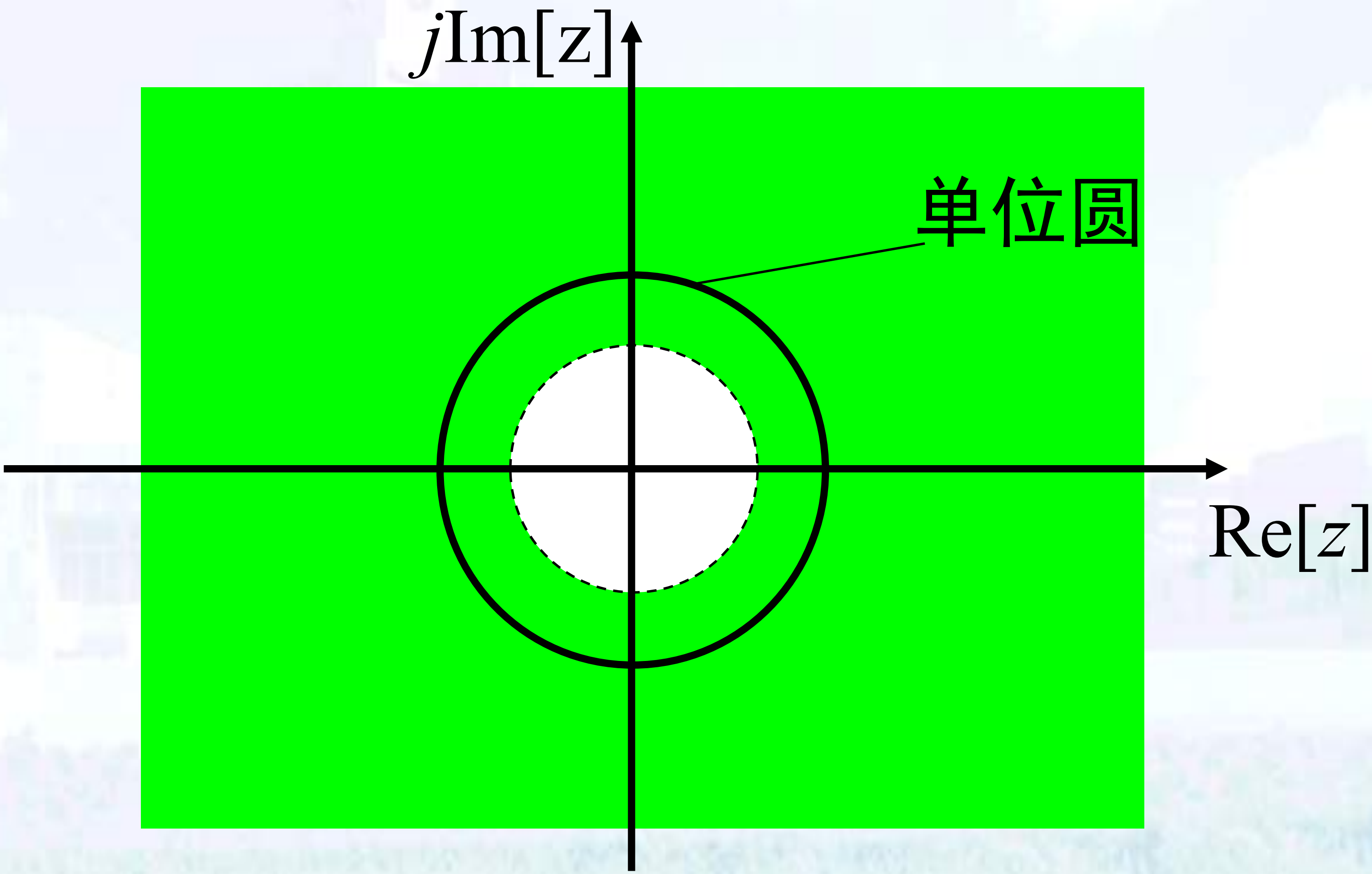
因果系统：$H(z)$ 在无穷远处必没有极点。反之不充分，无穷远处没有极点不一定因果。

$$H(z) = \sum_{-\infty}^{-1} (-a^n) z^{-n}$$



$$H(z) = \frac{z}{z-a} \qquad a > 1$$

稳定因果系统：极点全部位于在单位圆内



系统的频率响应：系统函数 $H(z)$ 在单位圆上

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

与单频输入导出的结果相同。

输入、输出之间的一般频谱关系：

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

对单频输入 $x_0(n) = Ae^{j\omega_0 n}$，在形式上有

$$y(n) = H(e^{j\omega_0})\,e^{j\omega_0 n} = H(e^{j\omega_0})x_0(n)$$

对一般输入 $x(n)$，$y(n) \neq H(e^{j\omega})x(n)$