

HW2 离散傅立叶变换

1. 如果 $\tilde{x}(n)$ 是一个周期为 N 的序列, 那么它必然也是周期为 $2N$ 的序列。令 $\tilde{X}_1(k)$ 表示当把 $\tilde{x}(n)$ 看作周期为 N 的周期性序列的 *DFS* 系数, 而 $\tilde{X}_2(k)$ 是把 $\tilde{x}(n)$ 看作周期为 $2N$ 的周期性序列的 *DFS* 系数。不难发现, $\tilde{X}_1(k)$ 是周期为 N 的周期性序列, $\tilde{X}_2(k)$ 是周期为 $2N$ 的周期性序列。试根据 $\tilde{X}_1(k)$ 确定 $\tilde{X}_2(k)$ 。

2. 令 $X(k)$ 表示 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点 *DFT*, 故 $X(k)$ 本身也可看作一个 N 点序列。如果计算 $X(k)$ 的 *DFT* 得到一个序列 $x_1(n)$, 试用 $x(n)$ 表示 $x_1(n)$ 。

3. 设 $X(k)$ 表示长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 的 *DFT*。

(1) 证明如果 $x(n)$ 满足关系式 $x(n) = -x(N-1-n)$, 则 $X(0) = 0$ 。

(2) 证明当 N 为偶数时, 如果 $x(n) = x(N-1-n)$, 则 $X\left(\frac{N}{2}\right) = 0$ 。

4. 证明: 若 $x(n)$ 是实偶对称, 即 $x(n) = x(N-n)$, 则 $X(k)$ 也是实偶对称; 若 $x(n)$ 是实奇对称, 即 $x(n) = -x(N-n)$, 则 $X(k)$ 是纯虚函数并奇对称。其中 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 。

5. 对一个序列作谱分析, 要求谱分辨率 $\Delta f \leq 50\text{Hz}$, 信号最高频率为 1KHz , 试确定以下各参数:

(1) 最小记录时间 $T_{p\min}$ 。

(2) 最大取样间隔 T_{\max} 。

(3) 最少取样点数 N_{\min} 。

(4) 将频谱分辨率提高一倍时, 最少取样点数 N_{\min} 的值应该变为多少?

6. 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $X(k) = DFT[x(n)]$, 现采用两种补零方法:

(1) 在 $x(n)$ 的每 2 点之间补进 $r-1$ 个 0 值, 得到一个长度为 rN 的有限长序列 $y_1(n)$:

$$y_1(n) = \begin{cases} x(n/r) & n = ir, i = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{others} \end{cases}, \text{ 求证 } DFT[y_1(n)] \text{ 与 } X(k) \text{ 的关系。}$$

(2) 将长度扩大 r 倍 (补 0 增长), 得到一个长度为 rN 的有限长序列 $y_2(n)$:

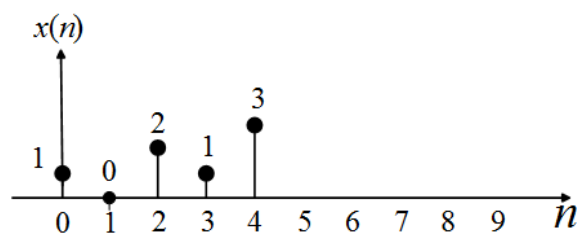
$$y_2(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}, \text{ 求证 } DFT[y_2(n)] \text{ 与 } X(k) \text{ 的关系。}$$

7. 下图表示一个 5 点的序列 $x(n)$ 。

(1) 计算并画出 $x(n) * x(n)$ 。

(2) 计算并画出 $N=5$ 时的圆周卷积 $x(n) \otimes_N x(n)$ 。

(3) 计算并画出 $N=10$ 圆周卷积 $x(n) \otimes_N x(n)$ 。



8. 已知序列 $x(n) = 4\delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$, $X(k)$ 是 $x(n)$ 的 6 点 DFT。

(1) 若有限长序列 $y(n)$ 的 6 点 DFT 是 $Y(k) = W_6^{4k} X(k)$, 求 $y(n)$ 。

(2) 若有限长序列 $w(n)$ 的 6 点 DFT 等于 $X(k)$ 的实部, 求 $w(n)$ 。

(3) 若有限长序列 $q(n)$ 的 3 点 DFT 满足 $Q(k) = X(2k)$, $k = 0, 1, 2$, 求 $q(n)$ 。

9. 考虑以下两个长度为 $N=16$ 的序列：

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)[u(n) - u(n-16)] \text{ 和 } h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-16)], \text{ 其中 } u(n) \text{ 为单位}$$

阶跃序列。设 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 $N=16$ 点 DFT 分别为 $X_{16}(k)$ 和 $H_{16}(k)$ 。

(1) 求 $X_{16}(k)$ 和 $H_{16}(k)$ 的闭式表达式。（最后结果中不得有求和式）

(2) 设 $y_{16}(n)$ 为 $Y_{16}(k) = X_{16}(k)H_{16}(k)$ 的 $N=16$ 点 IDFT，求 $y_{16}(n)$ 的闭式表达式。（最后

结果中不得有求和式；请尽可能简化；最后的结果对于任何 n 均为实值； $1 - \frac{1}{2^{16}} \approx 1$ ）

(3) 令 $y(n) = x(n) * h(n)$ ，问是否存在 n ，令 $y_{16}(n) = y(n)$ ？如果存在，求出 n 的值。

10. 数学计算软件的函数库中一般不会单独完整编写 IDFT 函数，IDFT 可通过对数据进行相关预处理和后处理之后，使用已有的 DFT 算法实现。流程如下：首先对 $X(k)$ 进行预处理得到序列 $y(k)$ ，之后使用已有的 DFT 算法计算出 $y(k)$ 的 DFT 结果 $Y(n)$ ，最后对 $Y(n)$ 进行后处理即可得到 $X(k)$ 的 IDFT 结果 $x(n)$ 。



试求所需的预处理和后处理过程。（两个处理过程均无记忆）