



# 6 FIR数字滤波器设计



## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

线性相位条件： $\alpha = (N-1)/2$ ,  $h(n) = \pm h(N-1-n)$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$H(\omega) = \pm |H(e^{j\omega})|$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega \quad \text{或} \quad \theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega - \frac{\pi}{2}$$

(偶对称)

(奇对称)

群延迟均为  $\tau = \frac{N-1}{2}$

## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

### 滤波器幅度响应

4种情况：

$$h(n) \text{ 镜像对称 } \begin{cases} N \text{ 奇数} \\ N \text{ 偶数} \end{cases}$$

$$h(n) \text{ 镜像反对称 } \begin{cases} N \text{ 奇数} \\ N \text{ 偶数} \end{cases}$$

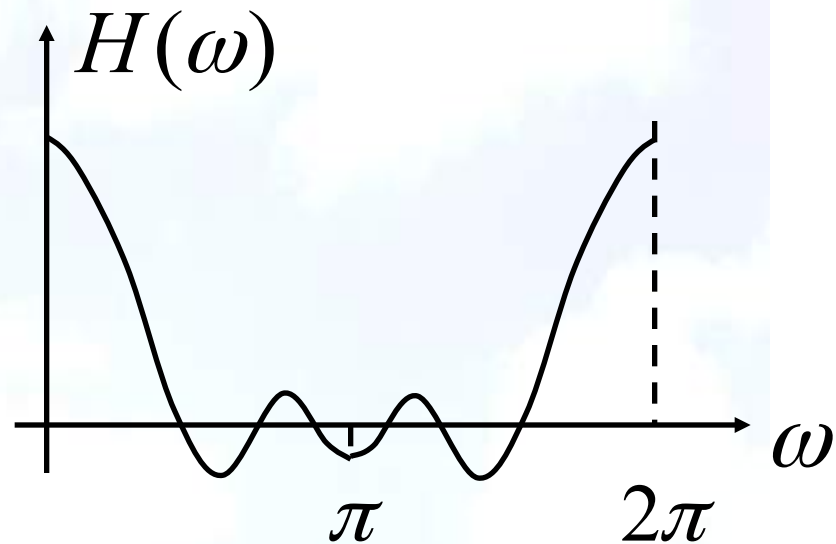
## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

(1)  $h(n)$  偶对称,  $N$  奇数

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos \omega n$$

$$a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

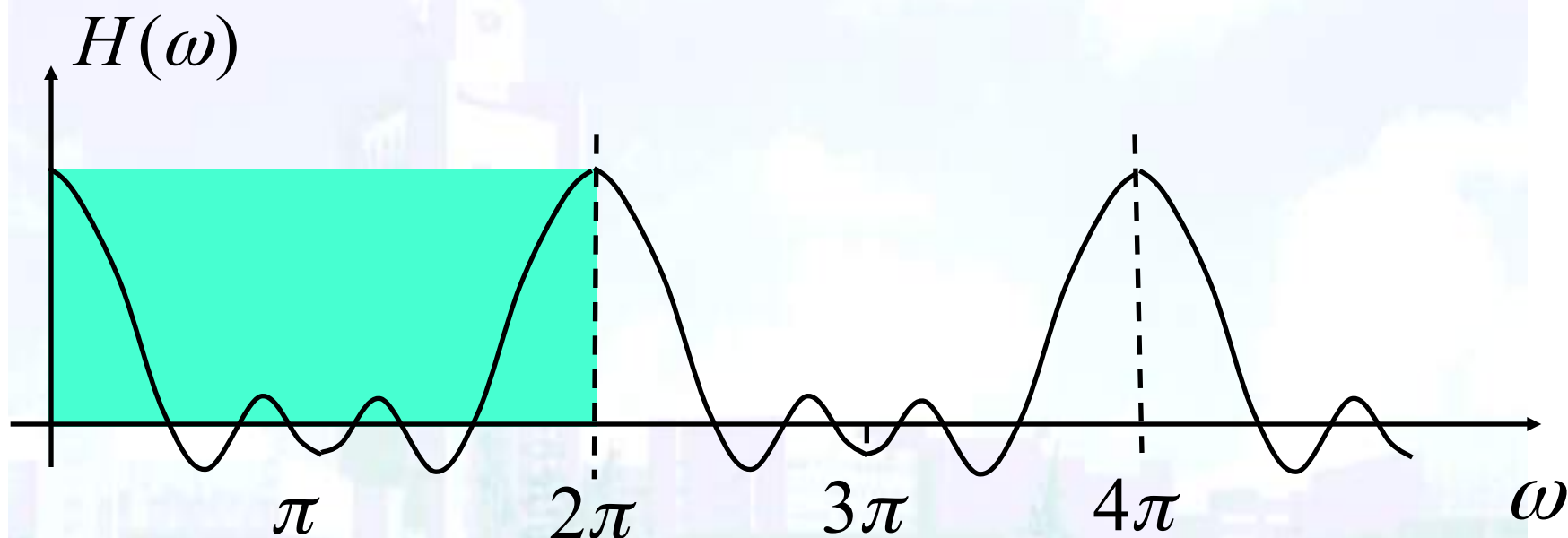
$$a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$



$H(\omega)$  以  $2k\pi$  为周期, 关于  $k\pi$  偶对称

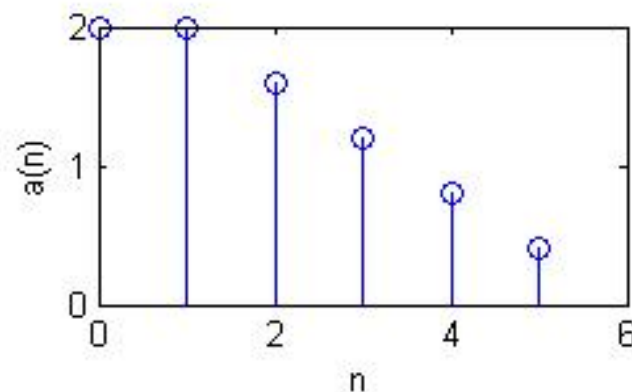
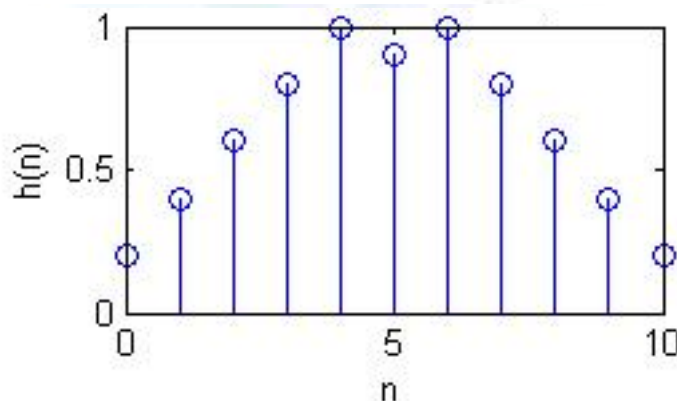
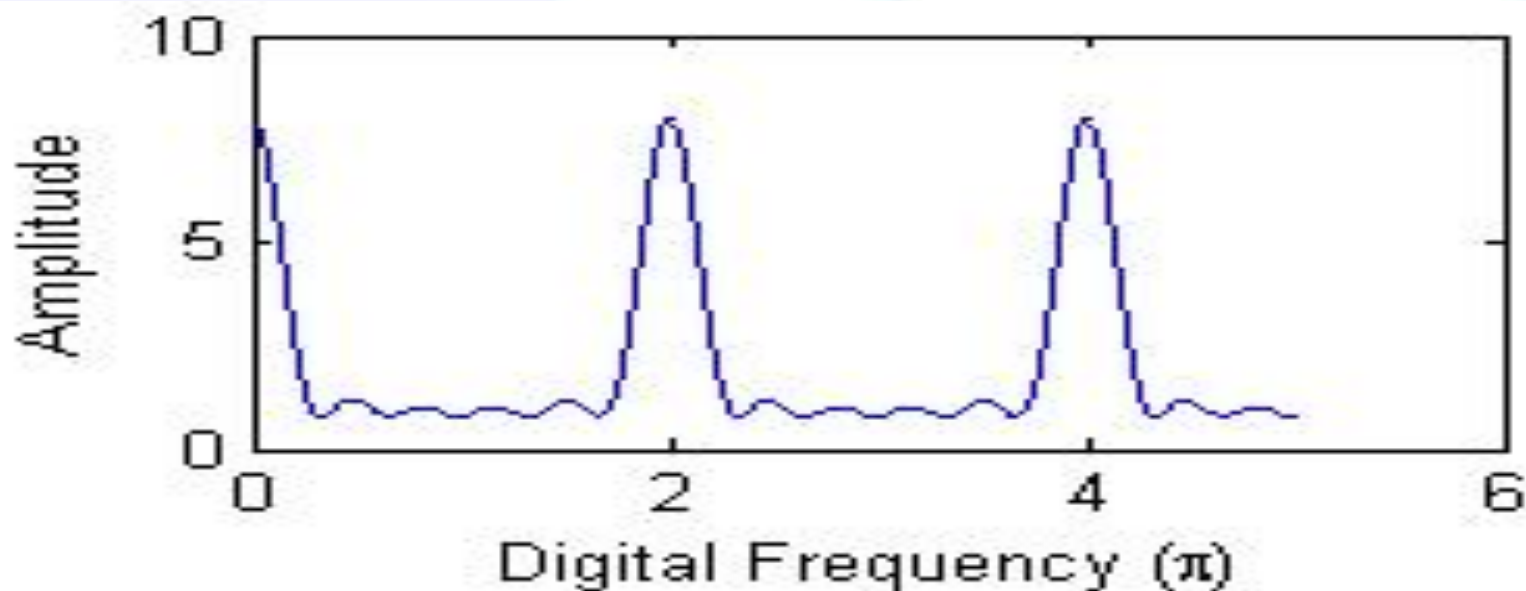
## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

(1)  $h(n)$  偶对称,  $N$  奇数



$H(\omega)$  以  $2k\pi$  为周期, 关于  $k\pi$  偶对称

## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性



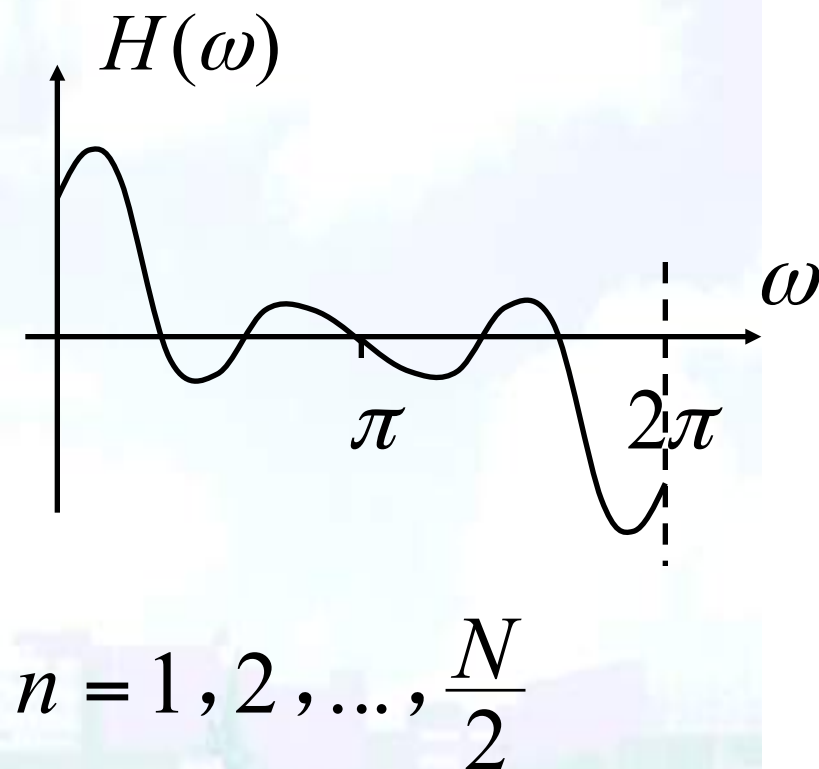
(1)  $h(n)$  偶对称,  $N=11$

## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

(2)  $h(n)$  偶对称,  $N$  偶数

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \omega(n - \frac{1}{2})$$

$$b(n) = 2h(\frac{N}{2} - n)$$



$$n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$H(\omega)$  以  $4k\pi$  为周期

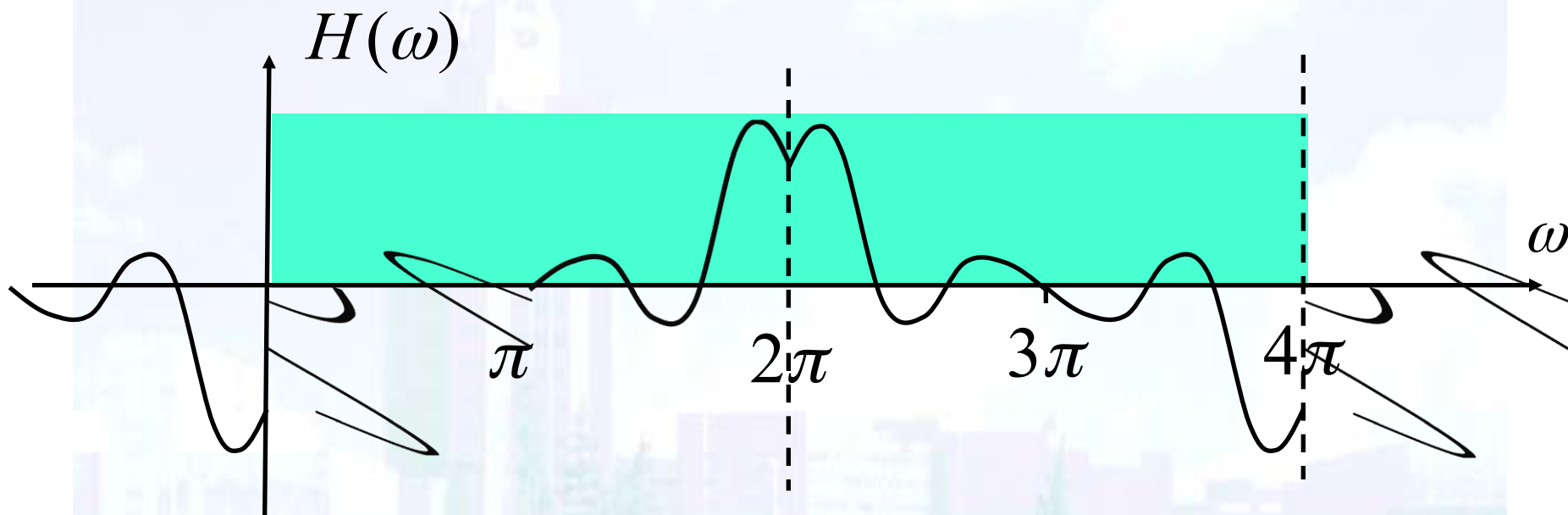
关于  $2k\pi$  偶对称, 关于  $(2k+1)\pi$  奇对称

$H[(2k+1)\pi] = 0$ , 不能用来逼近高通



## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

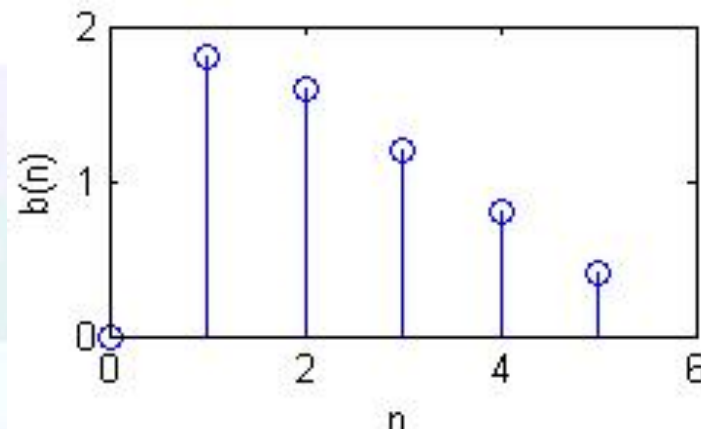
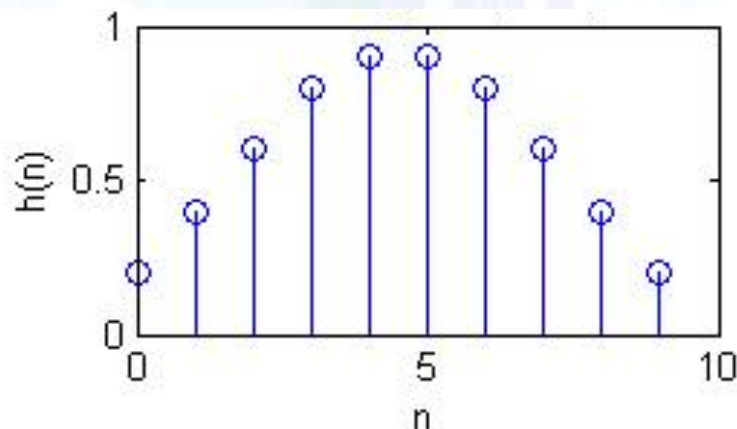
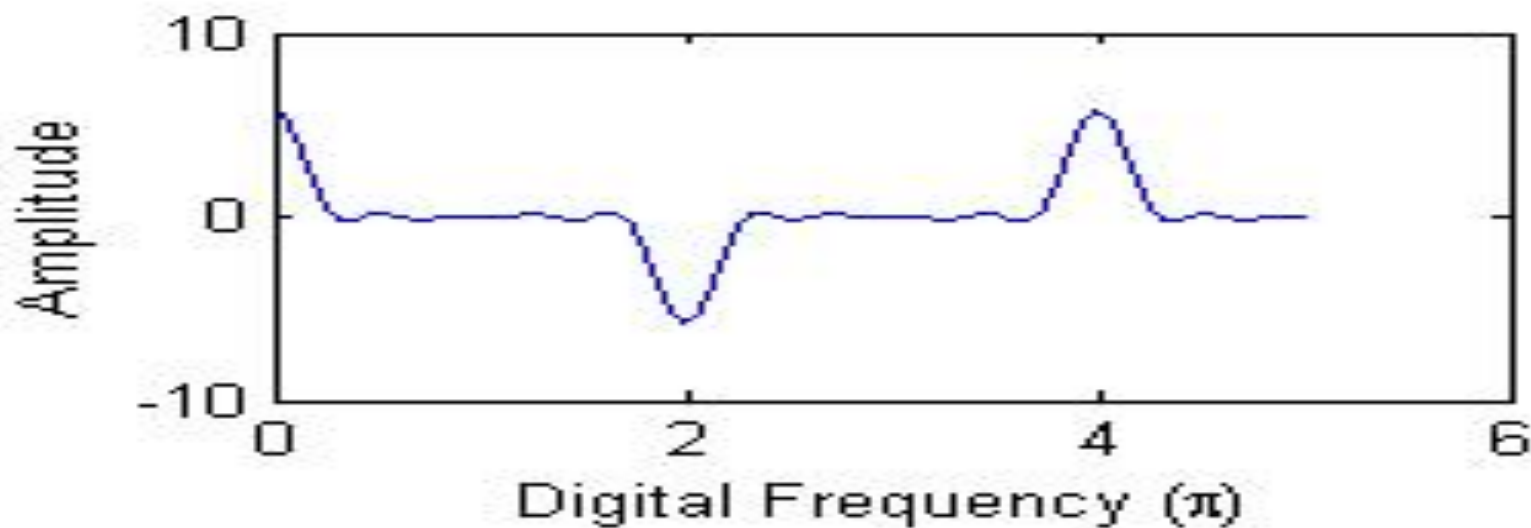
(2)  $h(n)$  偶对称,  $N$  偶数



$H(\omega)$  以  $4k\pi$  为周期

关于  $2k\pi$  偶对称, 关于  $(2k+1)\pi$  奇对称

## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

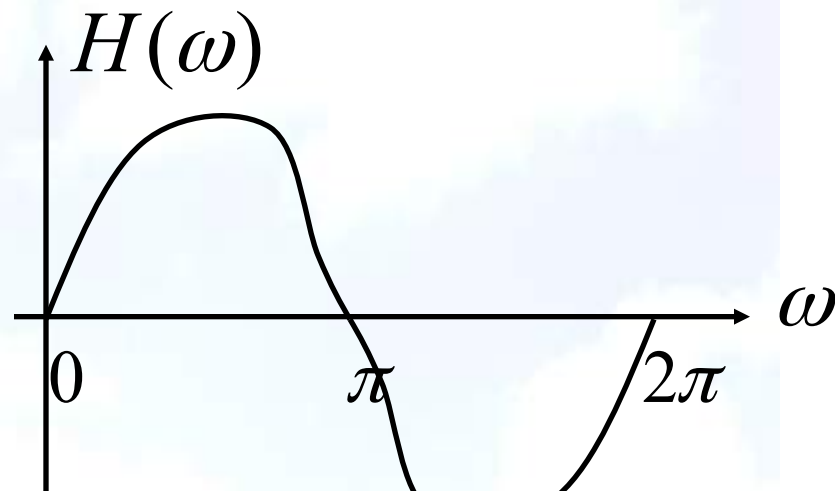


(2)  $h(n)$  偶对称,  $N=10$

## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

(3)  $h(n)$  奇对称,  $N$  奇数

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega n$$



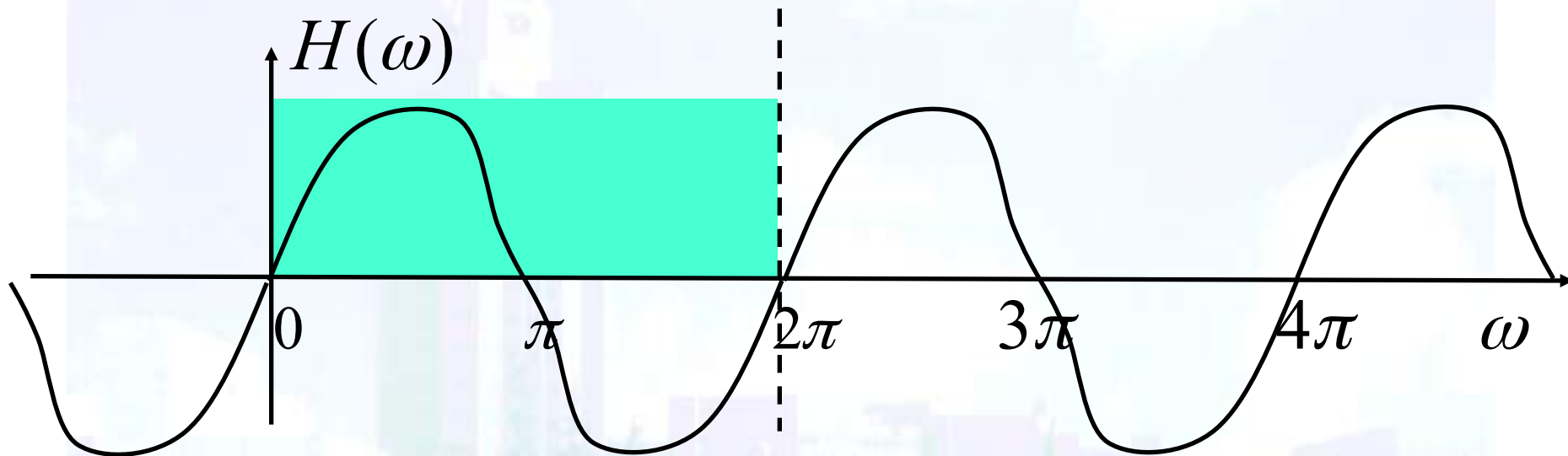
$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$H(\omega)$  以  $2k\pi$  为周期, 关于  $k\pi$  奇对称

必有  $H(k\pi)=0$ , 可逼近带通

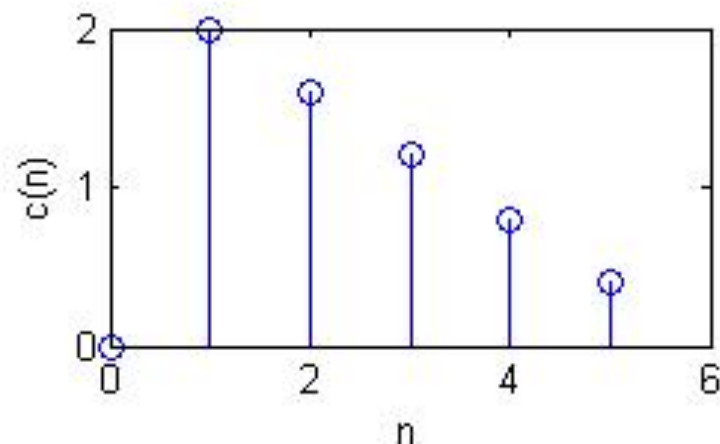
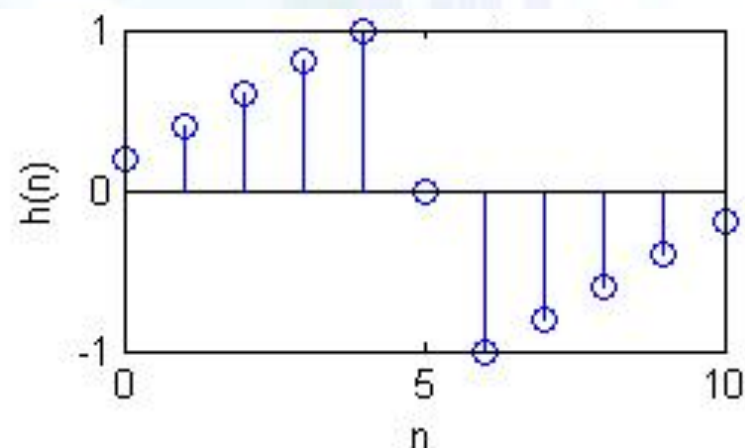
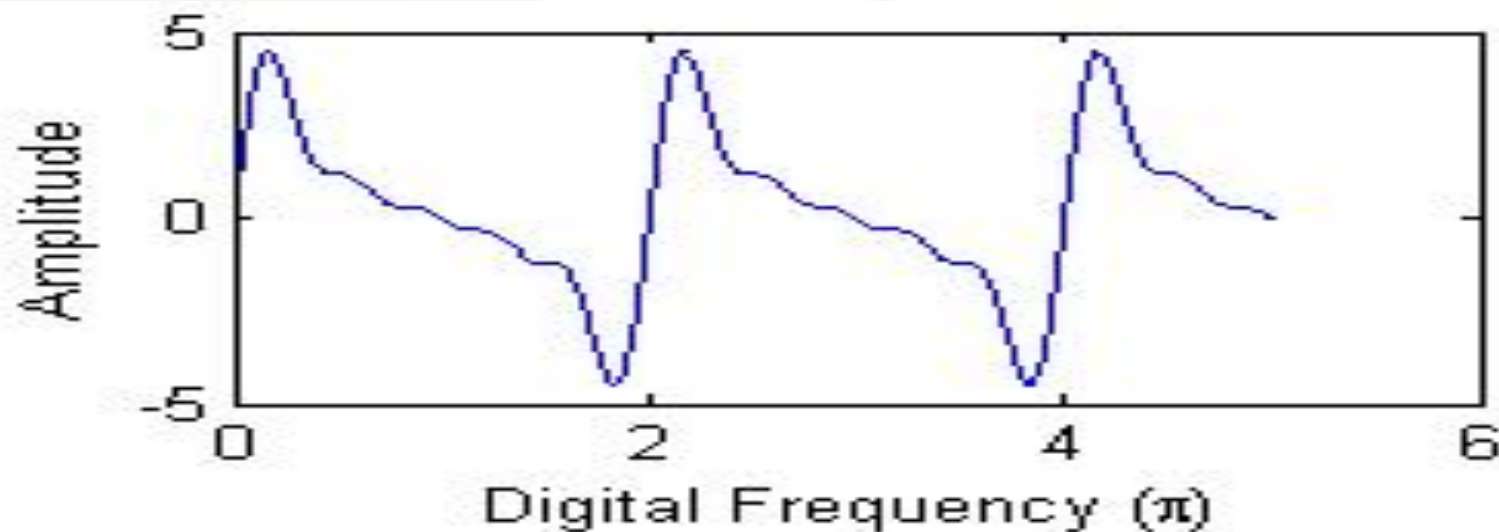
## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

(3)  $h(n)$  奇对称,  $N$  奇数



$H(\omega)$  以  $2\pi$  为周期, 关于  $k\pi$  奇对称

## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

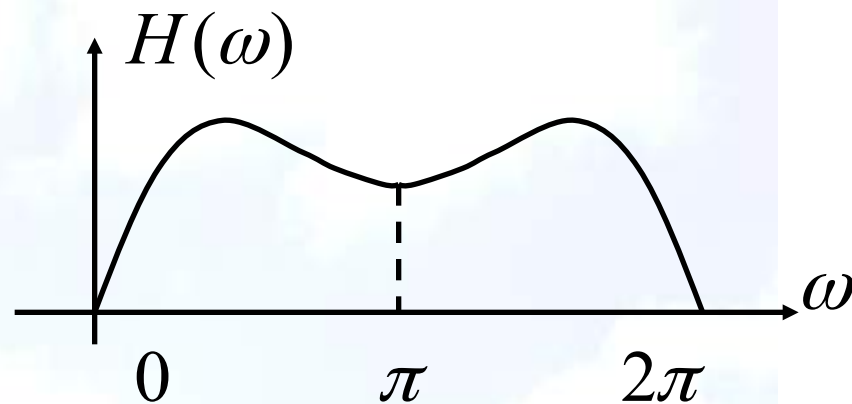


(3)  $h(n)$  奇对称,  $N=11$

## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

(4)  $h(n)$  奇对称,  $N$  偶数

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin \omega(n - \frac{1}{2})$$



$$d(n) = 2h(\frac{N}{2} - n) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

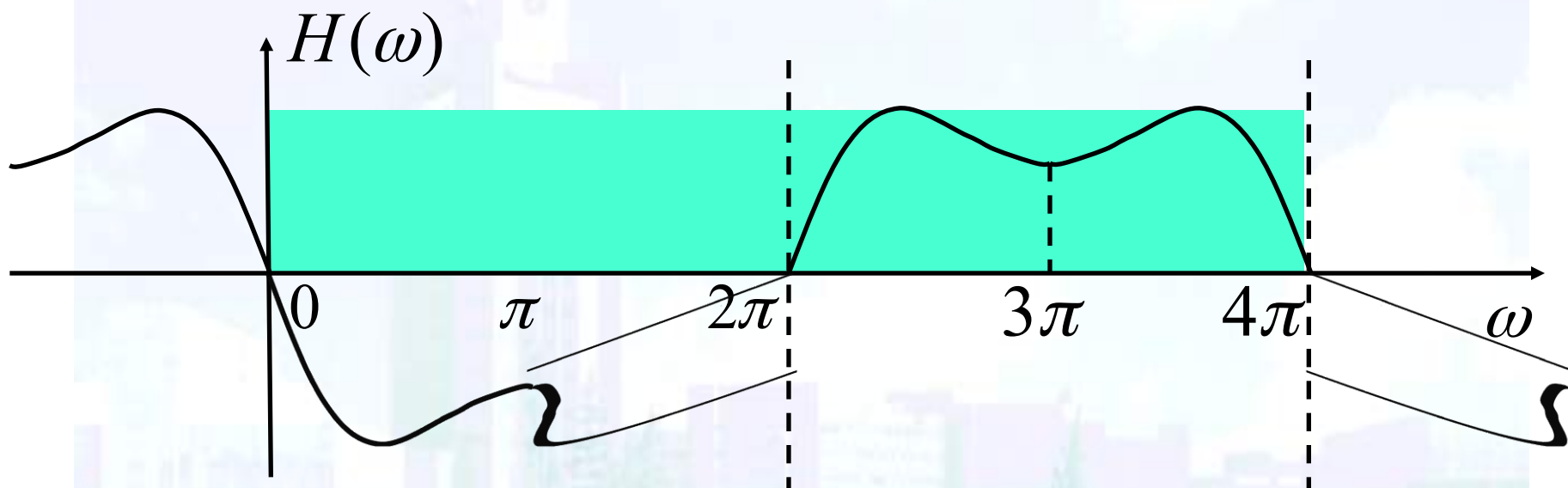
$H(\omega)$  以  $4k\pi$  为周期

关于  $2k\pi$  奇对称, 关于  $(2k+1)\pi$  偶对称

$H(2k\pi) = 0$ , 不能用来逼近低通

## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性

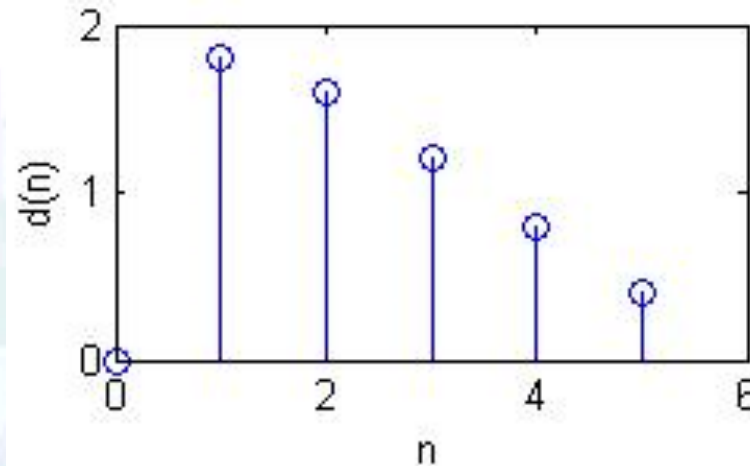
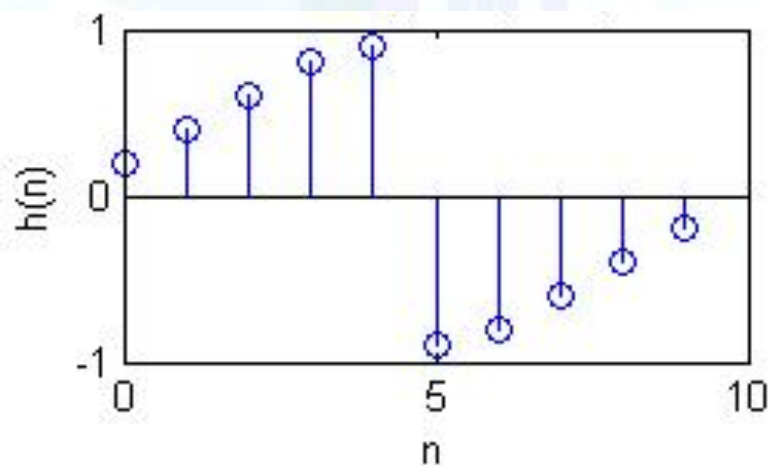
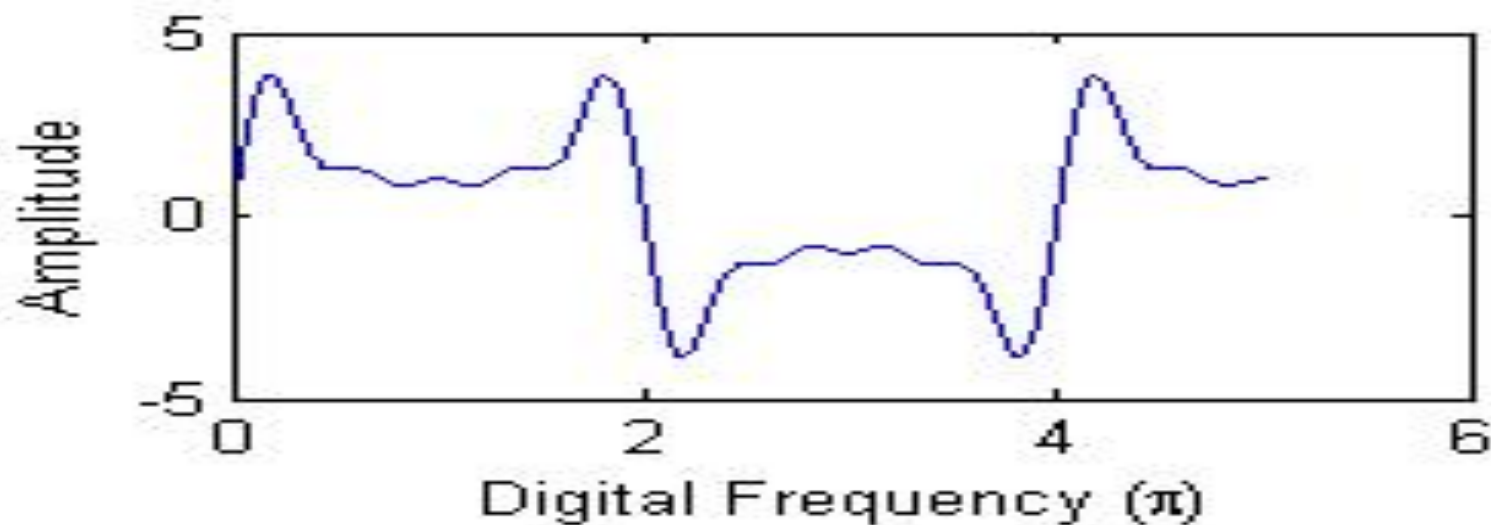
(4)  $h(n)$  奇对称,  $N$  偶数



$H(\omega)$  以  $4\pi$  为周期

关于  $2k\pi$  奇对称, 关于  $(2k+1)\pi$  偶对称

## 6.1 线性相位下FIR滤波器的频率特性



(4)  $h(n)$  奇对称,  $N=10$





## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

### 一、基本设计方法

基于频域特性的解析表达与窗函数

给定 $H_d(e^{j\omega})$ 导出 $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad -\infty < n < \infty$$

对  $h_d(n)$  截取有限个值形成 $h(n)$

$$\text{因 } H(e^{j\omega}) = \sum h(n) e^{-j\omega n}$$

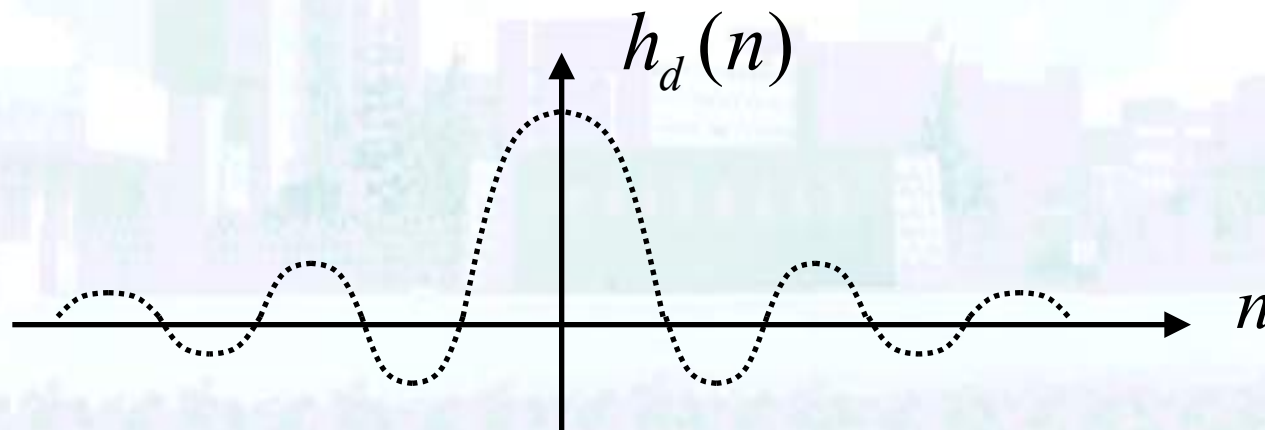
故,  $H(e^{j\omega})$ 对 $H_d(e^{j\omega})$ 的逼近程度随截取长度而增加

## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

理想低通的逼近

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{n\pi} \quad -\infty < n < \infty$$



## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

为构造一个物理可实现的，长度为  $N$  的 FIR，

① 把  $h_d(n)$  移动  $\alpha = \frac{N-1}{2}$  个采样点（设  $N$  为奇数）

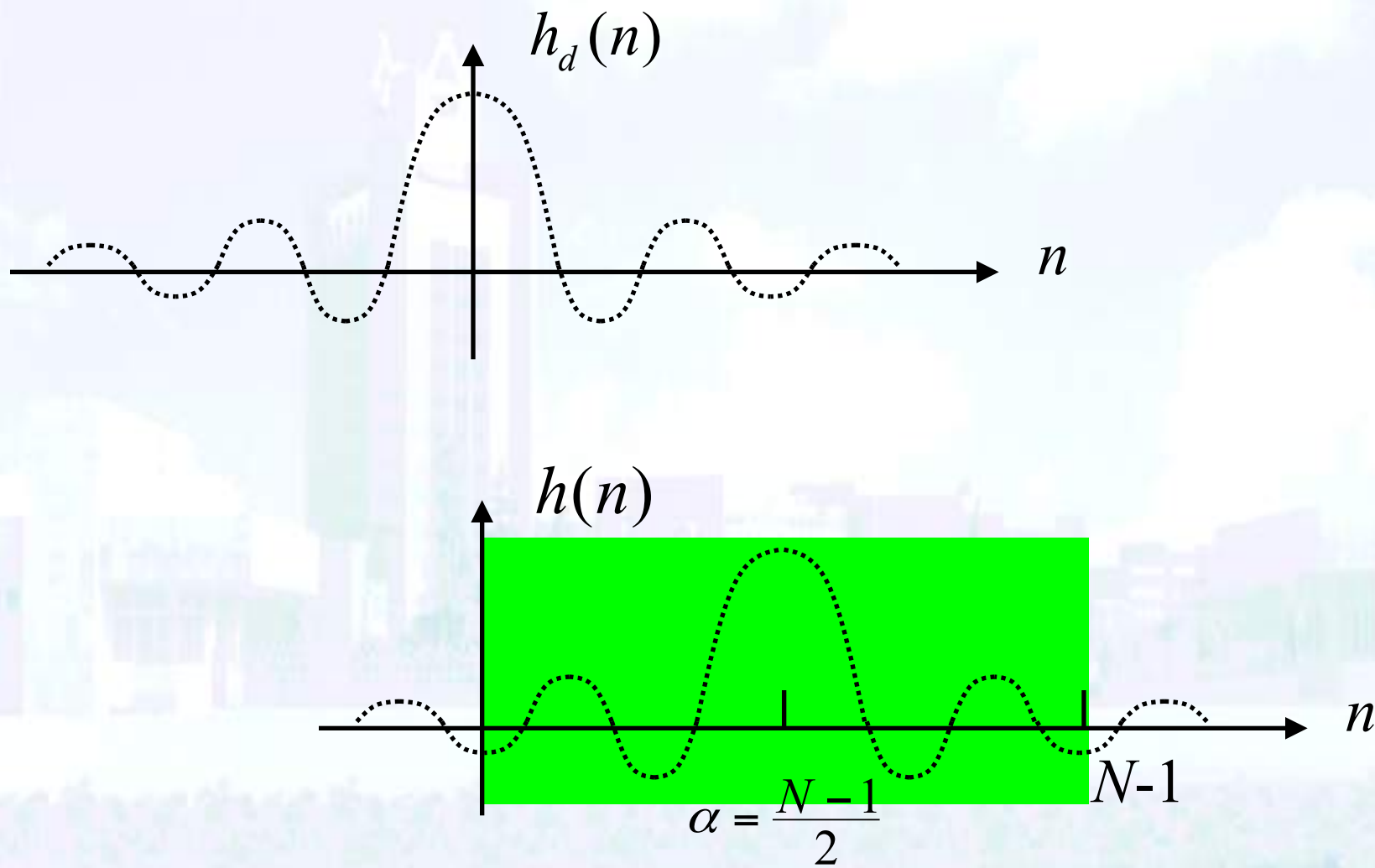
$$\hat{h}_d(n) = h_d(n - \alpha) = \frac{\sin \omega_c (n - \alpha)}{\pi (n - \alpha)}$$

② 截取  $N$  个点，得到  $h(n) = \hat{h}_d(n) \cdot W_R(n)$

$$\text{矩形窗 } W_R(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\text{即 } h(n) = \frac{\sin \omega_c (n - \alpha)}{\pi (n - \alpha)}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



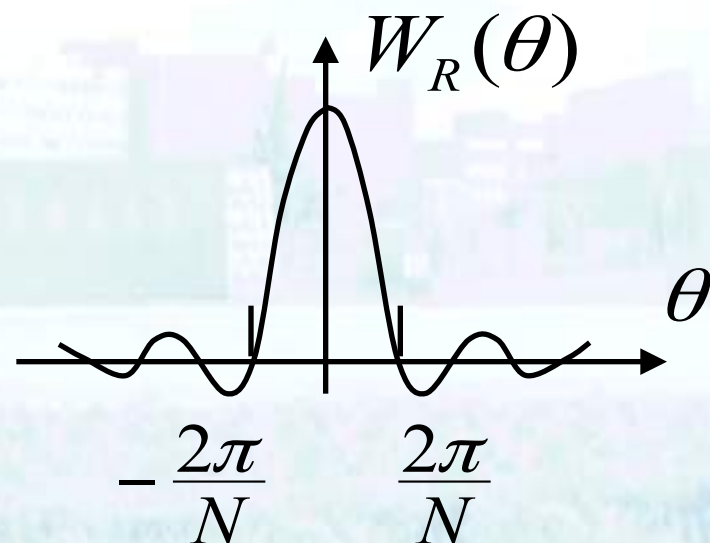
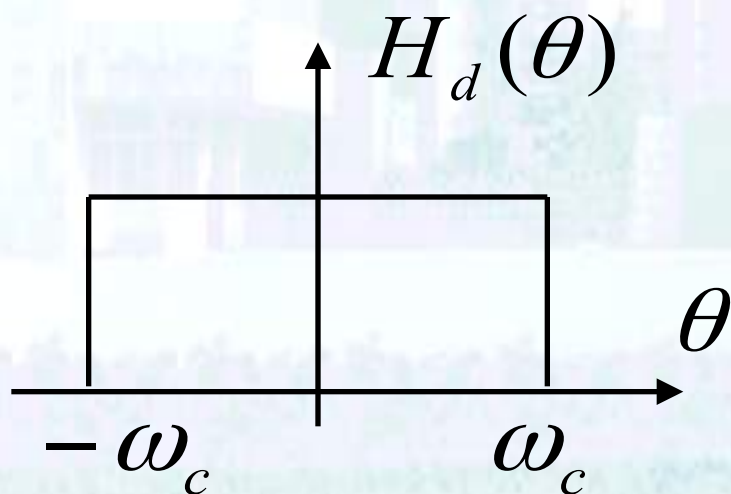
## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

$h(n)$ 的频率响应，频域卷积

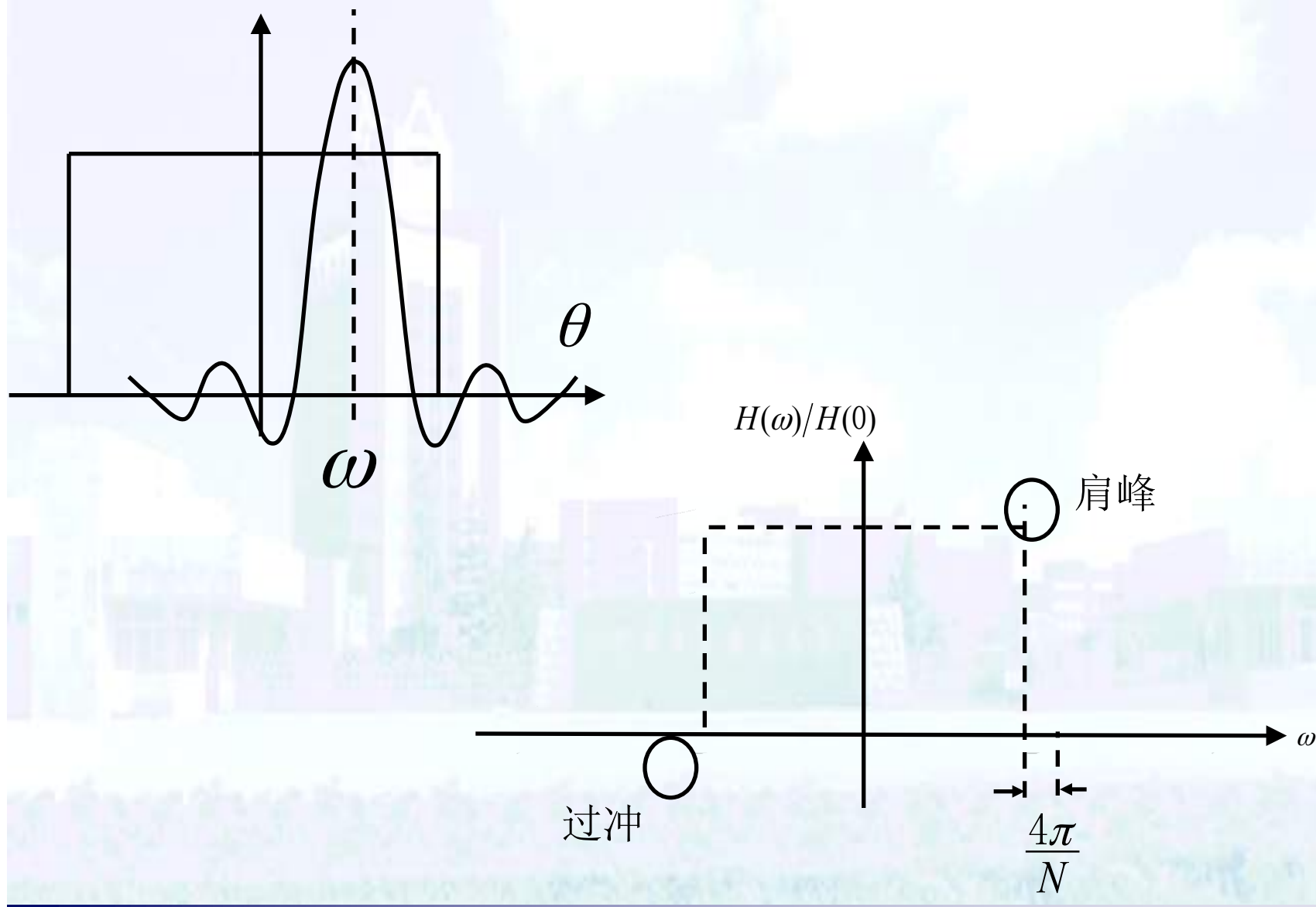
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta$$

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)$$

$$W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega)$$



## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

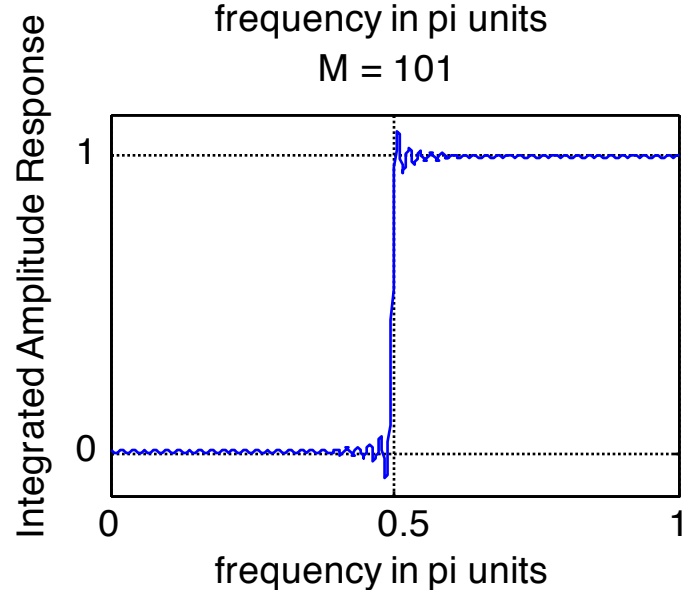
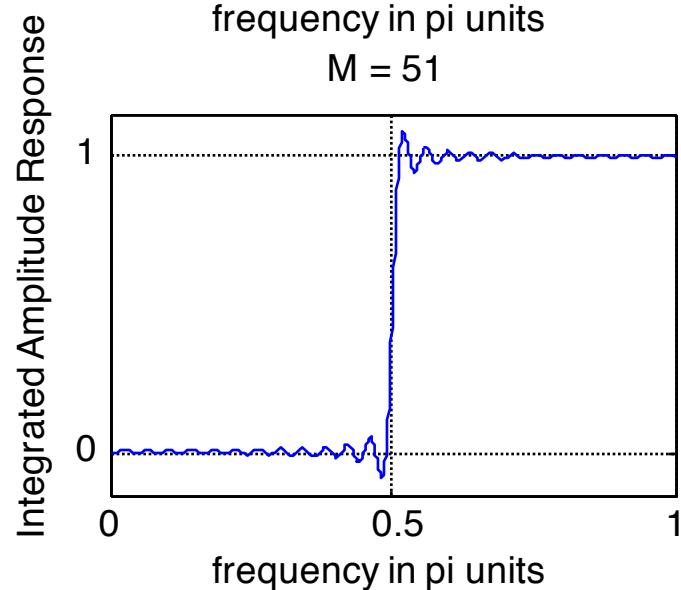
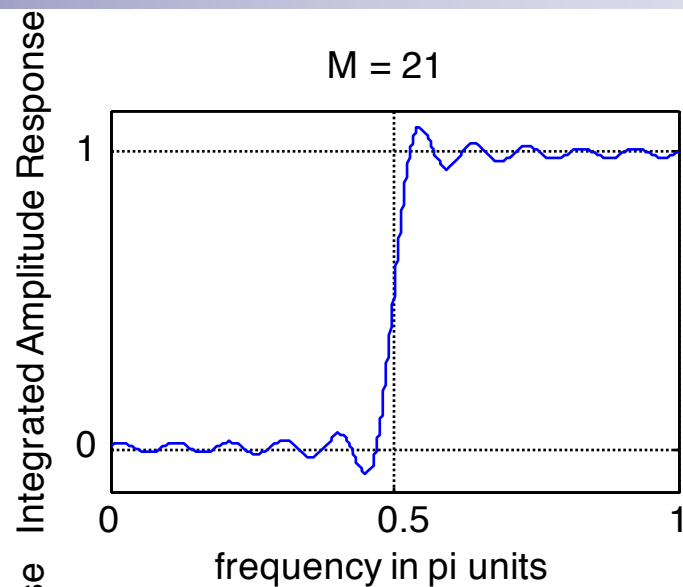
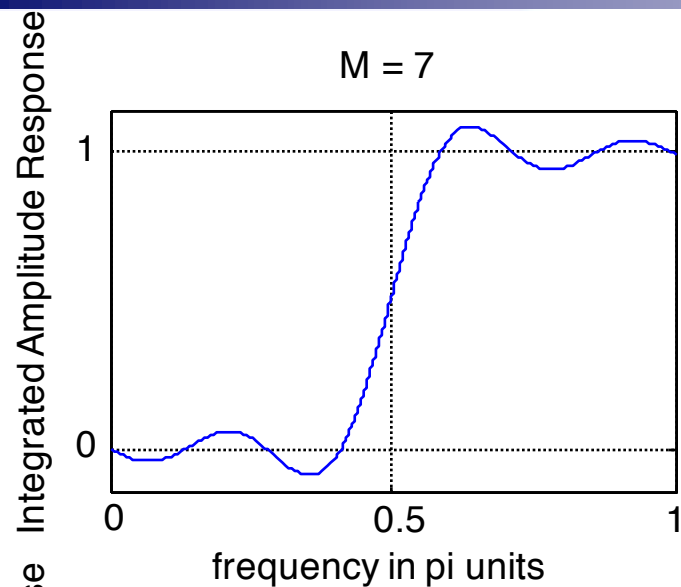


## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

- ① 因为截短，产生过渡带，宽度为窗函数的主瓣宽度。对矩形窗， $\Delta\omega = \frac{4\pi}{N}$
- ② 增加 $N$ ，可使过渡带变得陡峭，但对一个固定的窗函数不能改变肩峰值大小。  
Gibbs效应。



## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



### 二、窗函数的选择

过渡带的宽度：与窗函数的主瓣宽度有关

肩峰值大小：与窗函数的旁瓣大小有关

选择窗函数的原则：

- ① 主瓣窄，使过渡带陡峭
- ② 旁瓣低，减小肩峰和余振

## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

- 过渡带与肩峰值的折中处理
- 或增加系统复杂度，两者同时改善

- ① 选择低旁瓣窗函数， $\Rightarrow$ 大的止带衰减。
- ② 选择大的  $N$ ， $\Rightarrow$ 控制过渡区宽度
- ③ 选择对称的窗函数，可设计线性相位 FIR

## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

### 常用窗函数

	主瓣	旁瓣	最小阻带衰减
矩形	$4\pi/N$	-13dB	-21dB
三角	$8\pi/N$	-25	-25
Hanning	$8\pi/N$	-32	-44
Hamming	$8\pi/N$	-42	-53
Blackman	$12\pi/N$	-57	-74

## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

### 三、基本步骤（以低通、高通滤波器为例）

- 滤波器指标

1) 通带截止频率； 2) 最小阻带衰减； 3) 过度带宽

- 基本步骤

1) 根据最小阻带衰减指标，选择窗函数  $W_R(n)$

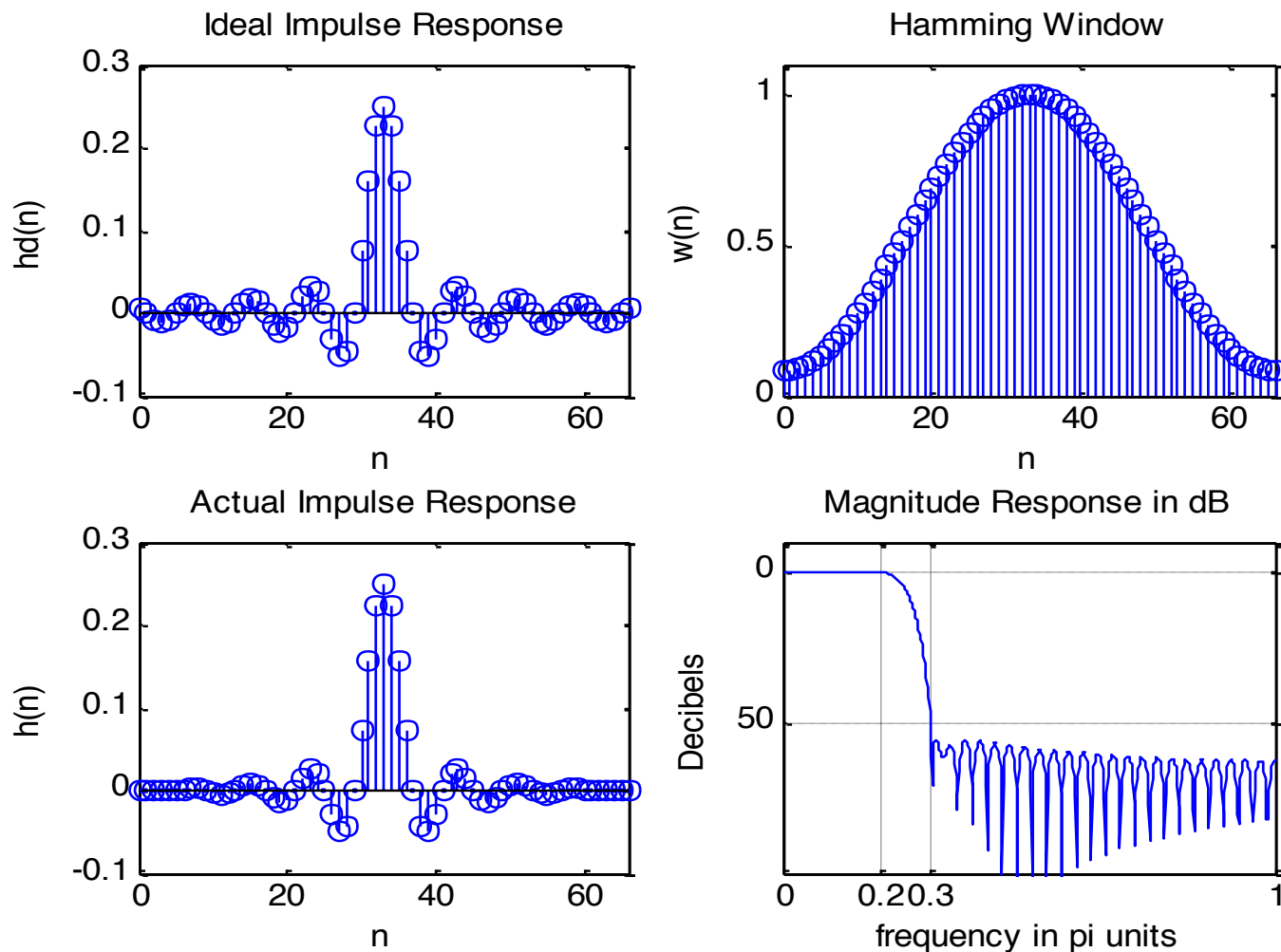
2) 根据过度带宽，确定系统阶数  $N = \frac{k\pi}{\Delta\omega}$

3) 根据通带截止频率和窗函数，计算  $h(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad -\infty < n < \infty$$

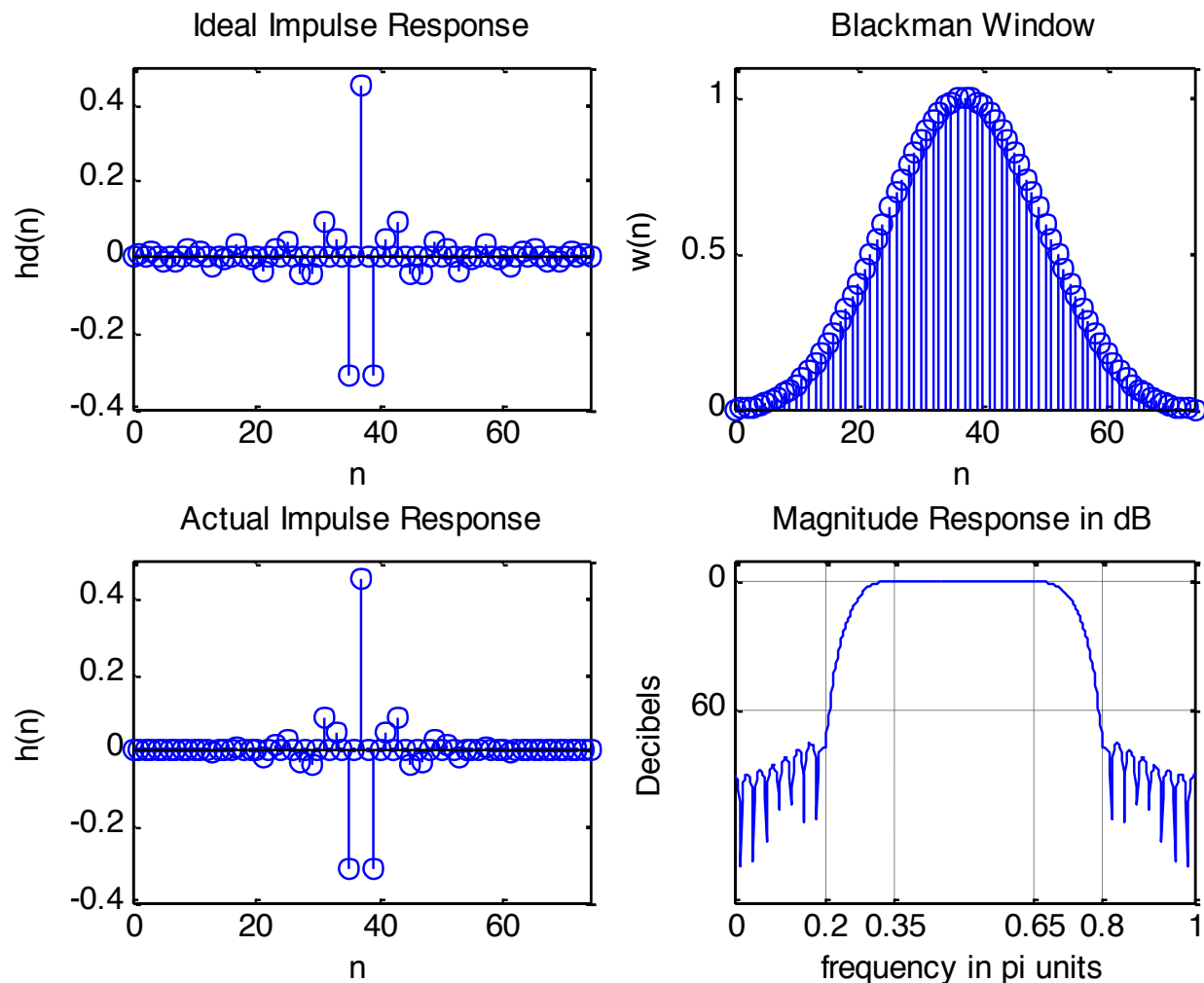
$$h(n) = h_d\left(n - \frac{N-1}{2}\right) W_R\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



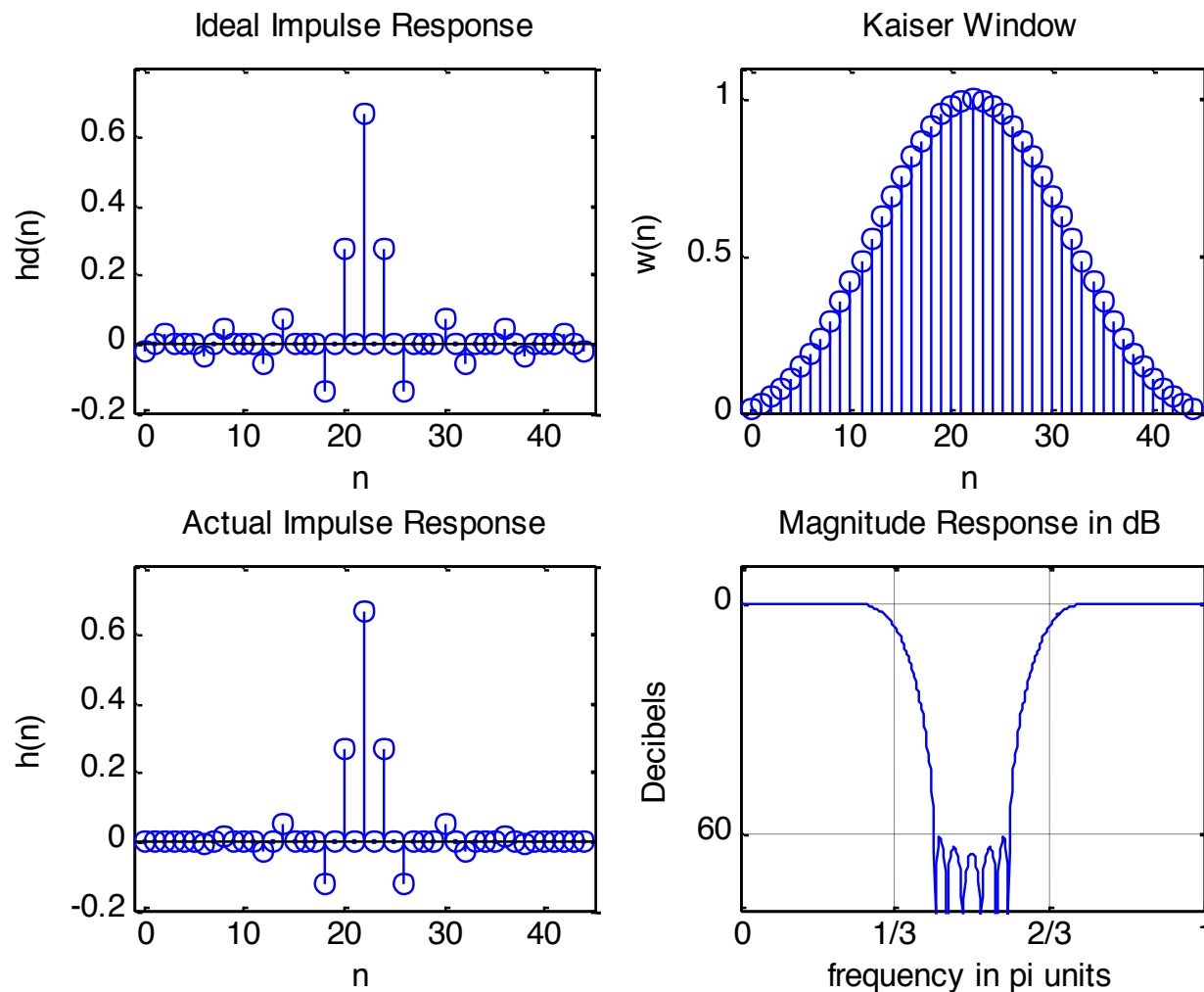
Hamming窗，低通

## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



Blackman窗，带通

## 6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



Kaiser窗，带阻





## 6.3 频率抽样设计方法

## 6.3 频率抽样设计方法

### 一、基本方法——DFT法

#### 基于频域取样定理

给定频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ ，进行等间距取样，

$$H(k) = H_d(e^{j\omega}) \bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

则 
$$h(n) = \text{IDFT}[H(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$
  
$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

或 
$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

## 6.3 频率抽样设计方法

### 二、频率响应的逼近

#### 频率响应的解析表达

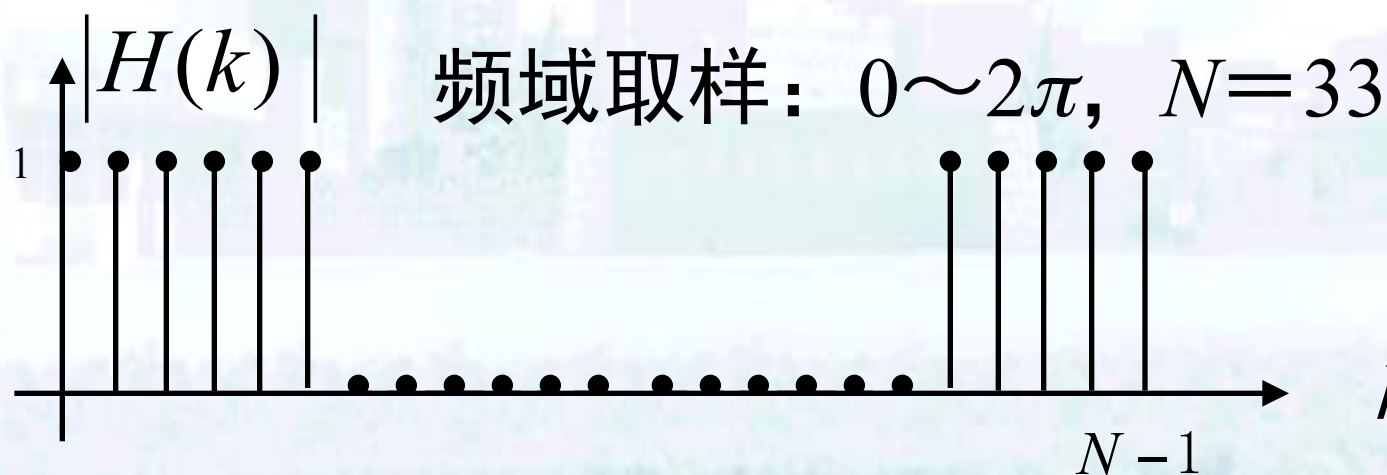
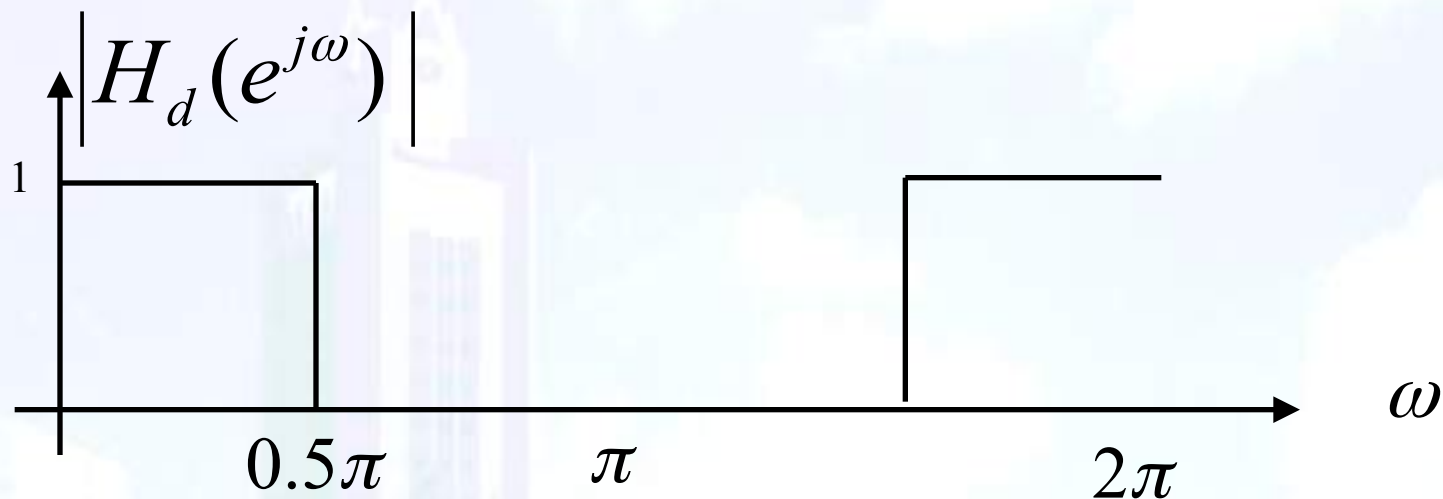
$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{N} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot \frac{e^{-j\frac{k\pi}{N}}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})}$$

频率取样与内插函数的组合

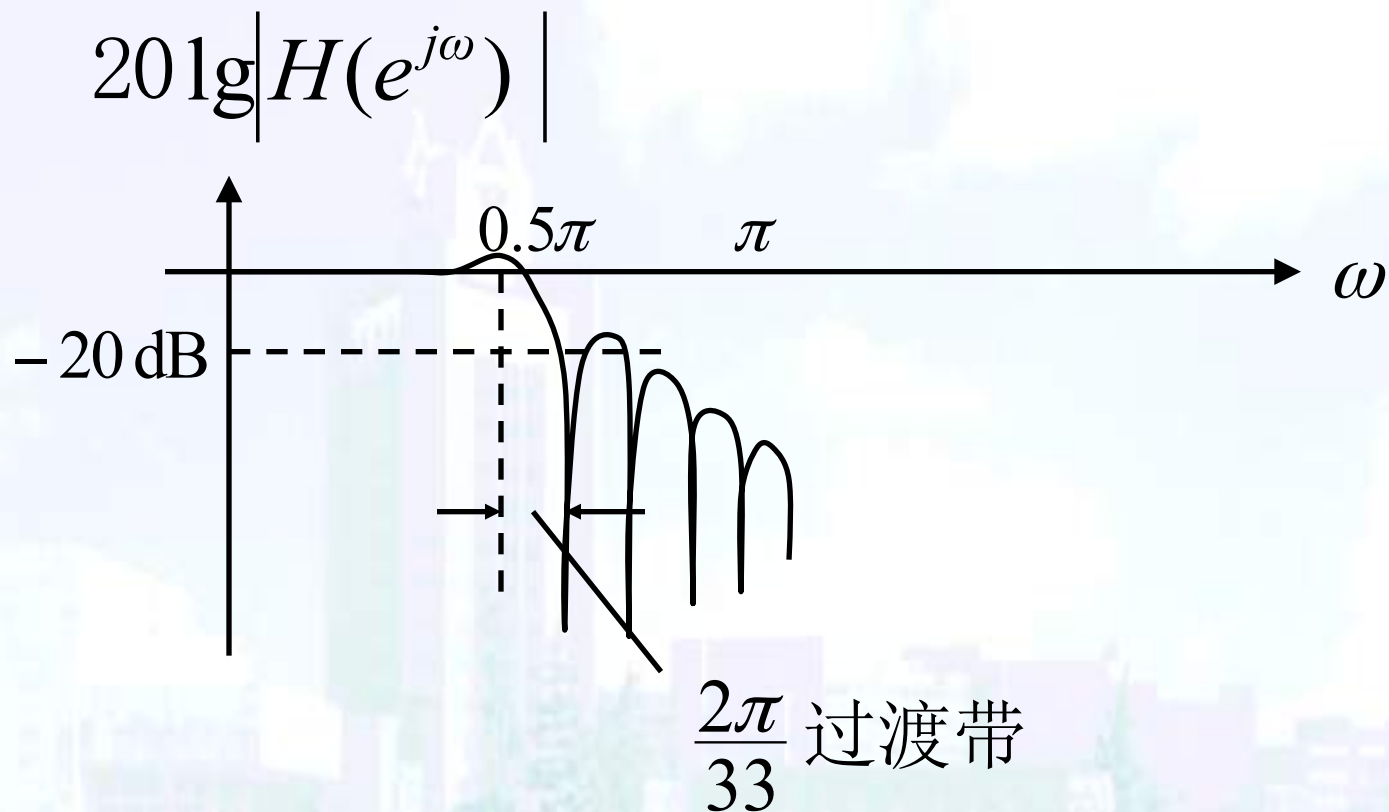
—— $H(K)$ 对内插函数加权

## 6.3 频率抽样设计方法

### 理想低通滤波器



## 6.3 频率抽样设计方法



问题：对应于取样点的频率，衰减无穷大  
取样点外，最小衰减不足20 dB

## 6.3 频率抽样设计方法

形式上：

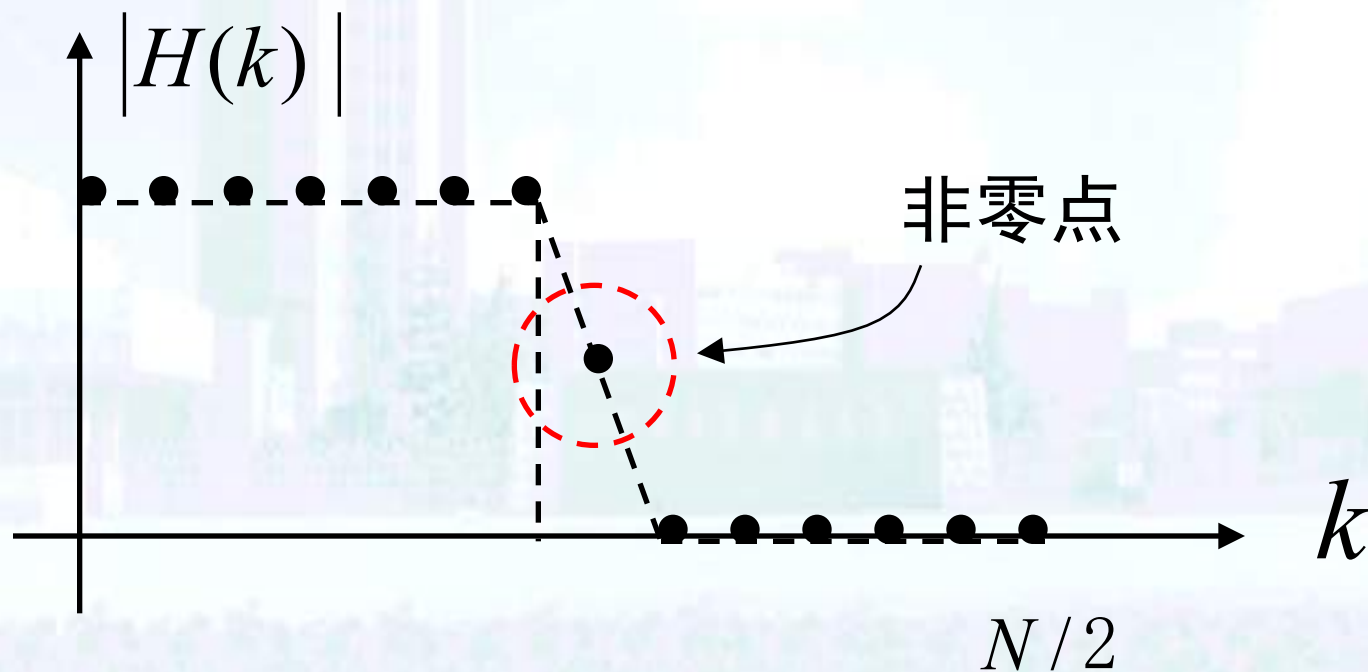
取样点之间的频率响应通过内插函数得到

原理上：

理想低通的冲激响应序列在时域上无限长  
无论  $N$  多大，也不能满足频域取样定理

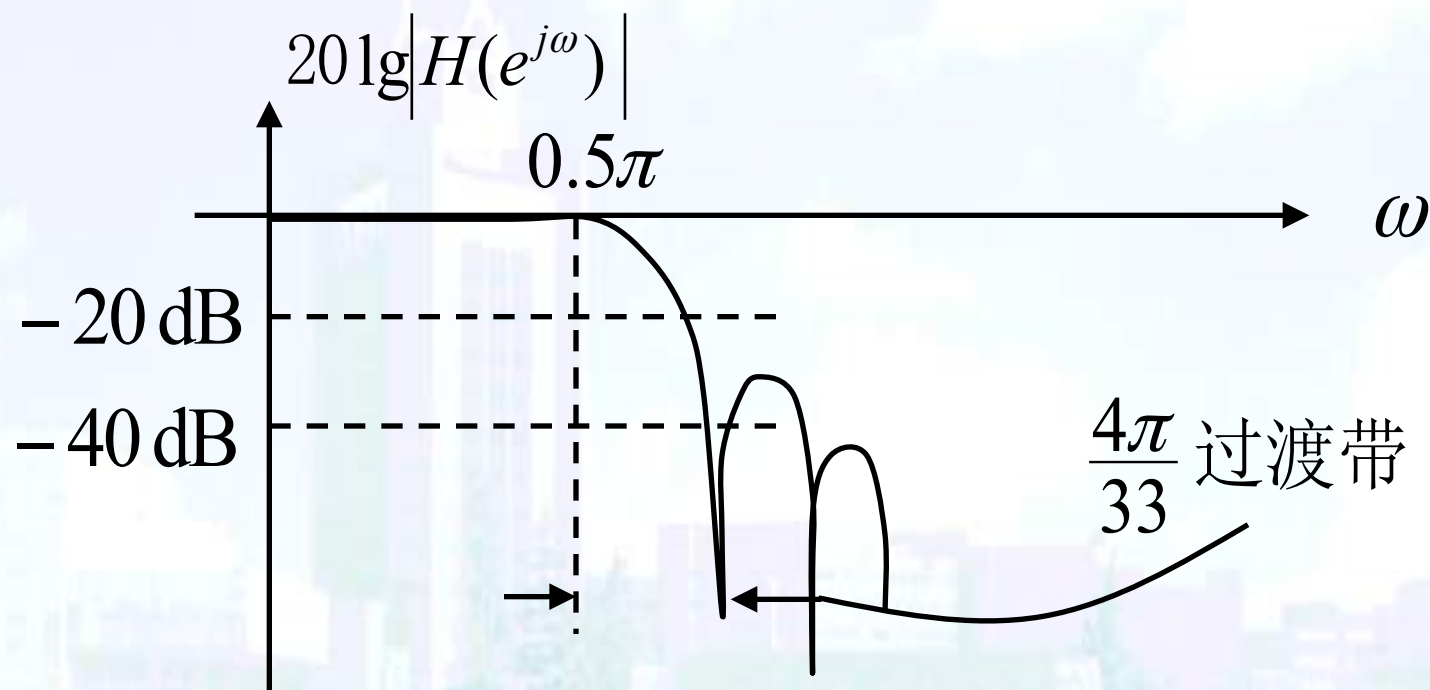
## 6.3 频率抽样设计方法

改进思路：修改 $|H_d(e^{j\omega})|$ ，展宽过渡带，



## 6.3 频率抽样设计方法

### 改进后的频率响应



止带最小衰减  $> 20\text{ dB}$

过渡带展宽1倍, 至  $\frac{4\pi}{33}$



## 6.3 频率抽样设计方法

- 形式上

增加了非零点取样，抵消通带内的内插函数。

- 原理上

修改后的 $|H_d(e^{j\omega})|$ ，频率变化减弱，时域序列能量随时间减少。

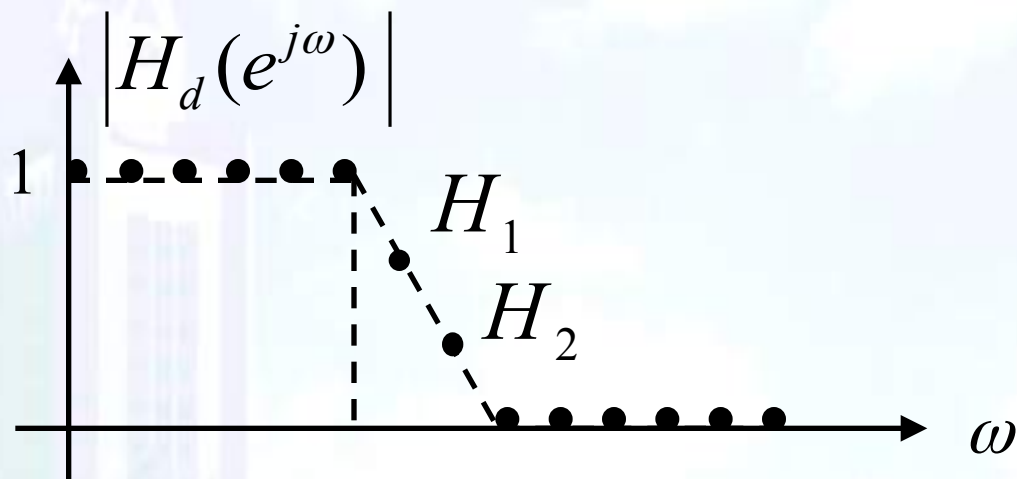
以降低逼近要求，来换取降低逼近误差。

### 三、优化考虑

- 1) 增加过渡带非零点取样点, 改善止带衰减特性。
- 2) 提高取样点数 (增加  $N$ ), 压缩过渡带。

## 6.3 频率抽样设计方法

### 3) 优化非零点取值



选择 $H_1$ ,  $H_2$ , 使

$$|H(\omega) - H_d(\omega)| \leq \delta \quad \text{通带}$$

$$\max |H(\omega) - H_d(\omega)| = \min \quad \text{止带}$$

## 6.3 频率抽样设计方法

$H_1$ 与 $H_2$ 分别是对应频率点内插函数的系数  
 $H(e^{j\omega})$ 是 $H_1$ ,  $H_2$ 的线性函数。

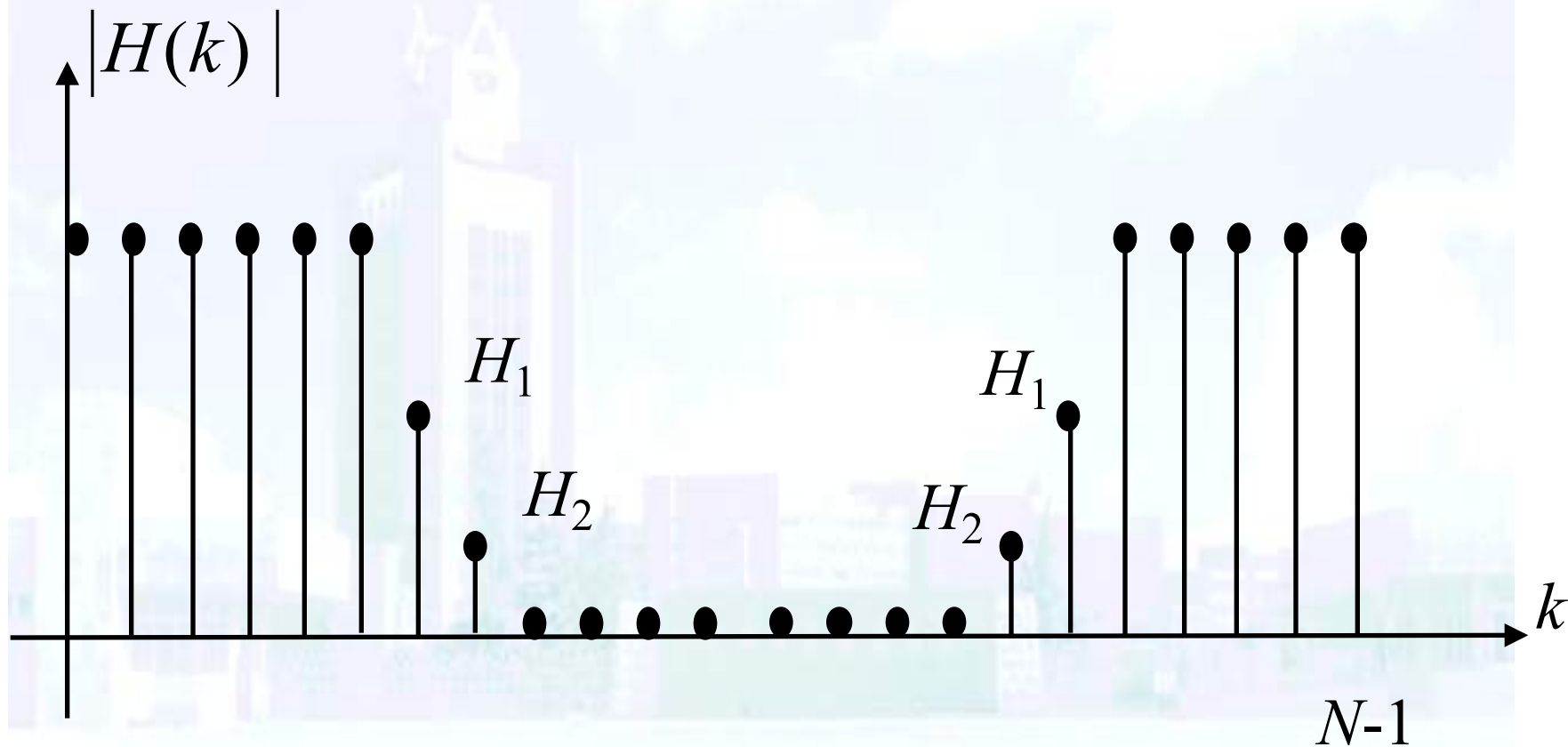
设 $H_d(e^{j\omega})$ 是低通, 通带至第 $M-1$ 个采样点截止, 则

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{N} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} f(\omega, H_1, H_2)$$

## 6.3 频率抽样设计方法

$$\begin{aligned} f(\bullet) = & \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k)e^{-j\frac{k\pi}{N}}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})} \\ & + \frac{H_1 e^{-j(\frac{M\pi}{N} + \alpha)}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{M\pi}{N})} + \frac{H_2 e^{-j(\frac{M+1}{N}\pi + \beta)}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{M+1}{N}\pi)} \\ & + \frac{H_2 e^{-j(\frac{N-M-2}{N}\pi + \beta')}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{N-M-2}{N}\pi)} + \frac{H_1 e^{-j(\frac{N-M-1}{N}\pi + \alpha')}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{N-M-1}{N}\pi)} \\ & + \sum_{k=N-M}^{N-1} \frac{H(k)e^{-j\frac{k\pi}{N}}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})} \end{aligned}$$

## 6.3 频率抽样设计方法

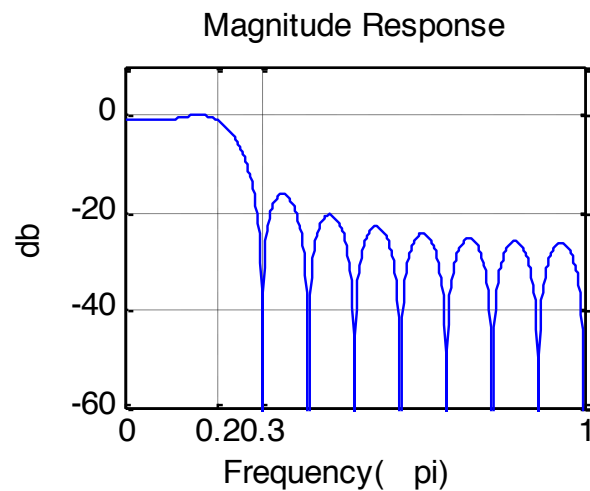
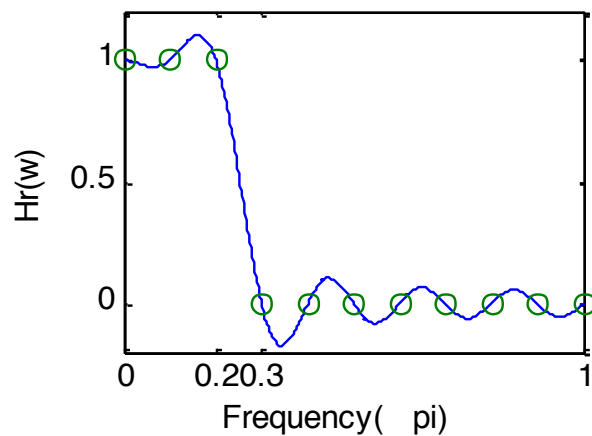
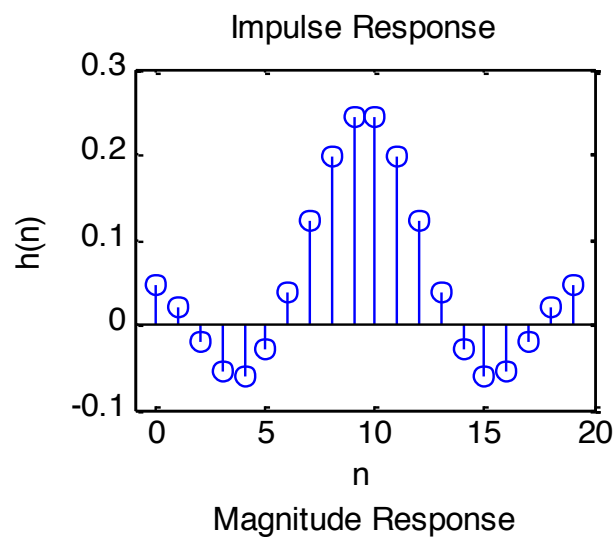
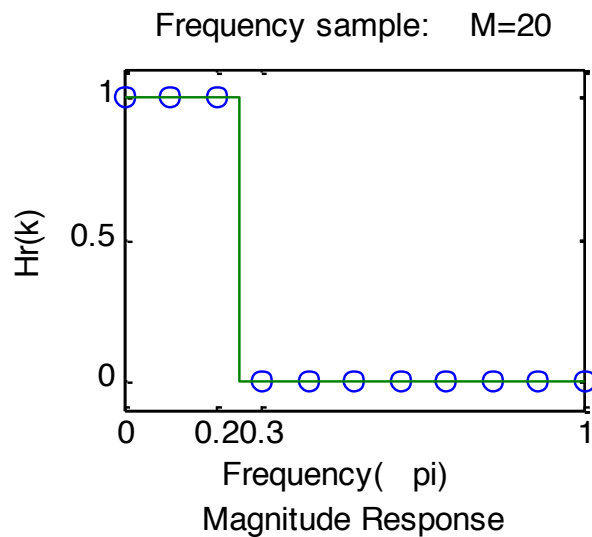


## 6.3 频率抽样设计方法

过渡带非零点	过渡带宽	止带衰减
无	$\frac{2\pi}{N}$	-16 dB
1	$\frac{4\pi}{N}$	-43 dB
2	$\frac{6\pi}{N}$	-65 dB

## 6.3 频率抽样设计方法

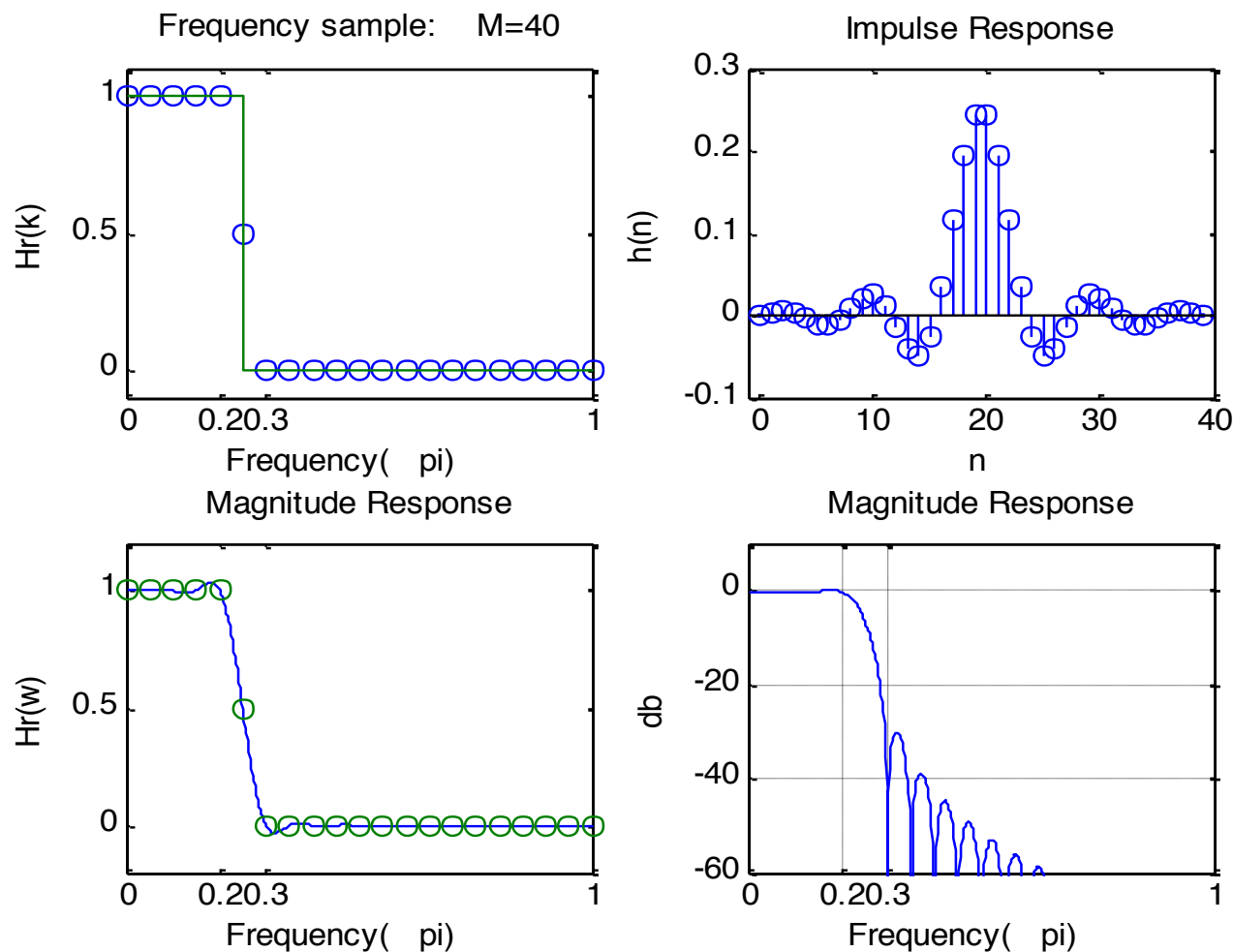
低通滤波器:  $\omega_p=0.2\pi$ ,  $\omega_s=0.3\pi$





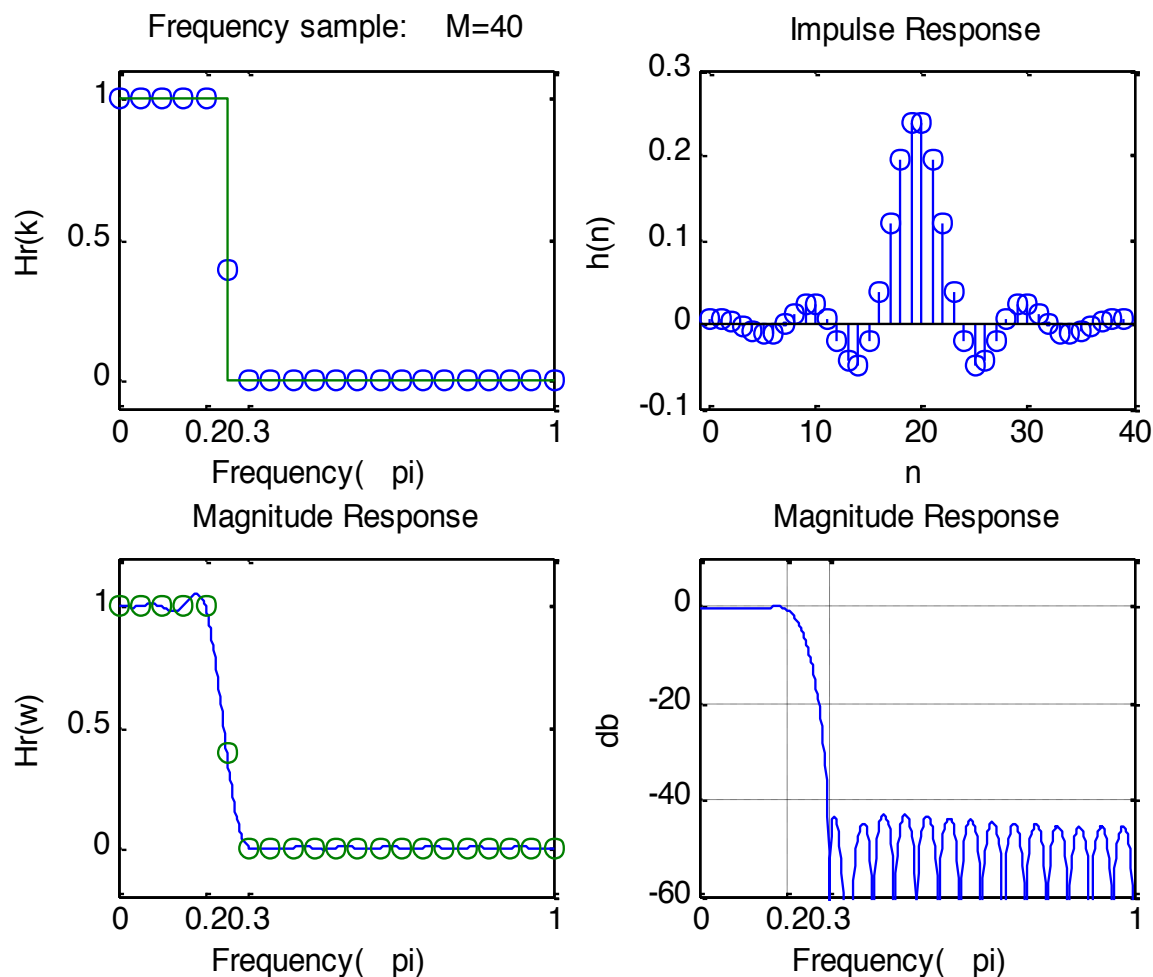
## 6.3 频率抽样设计方法

### 过渡带1点展宽，未优化



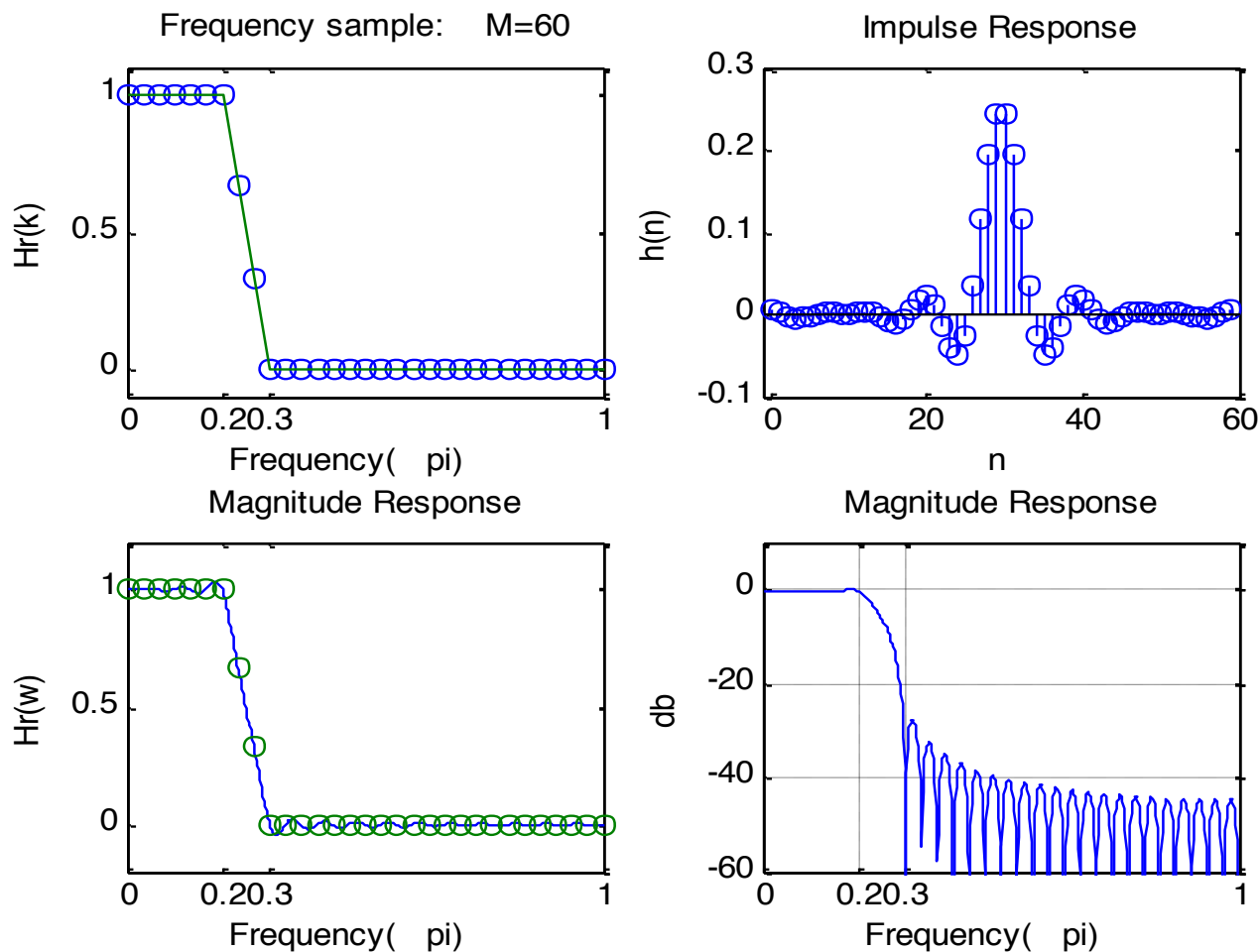
## 6.3 频率抽样设计方法

### 过渡带1点展宽，优化



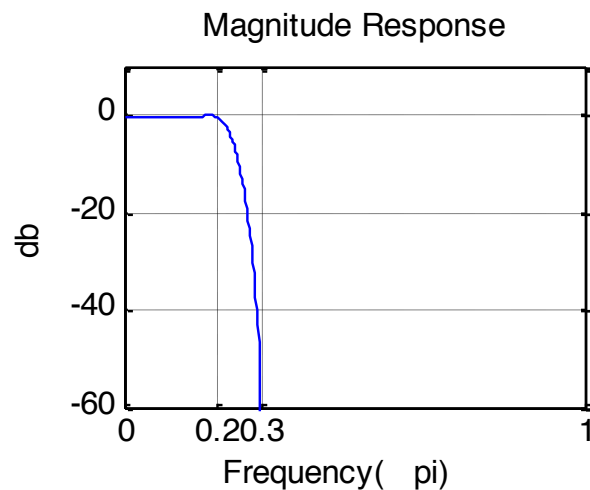
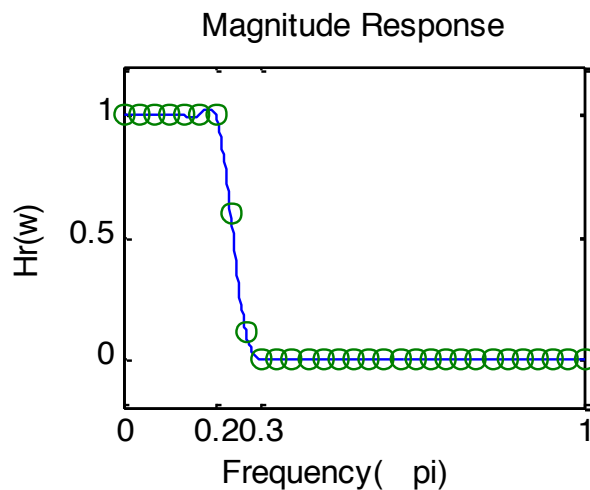
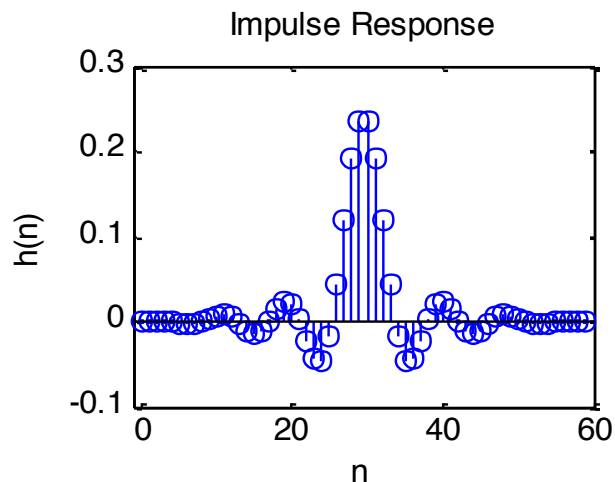
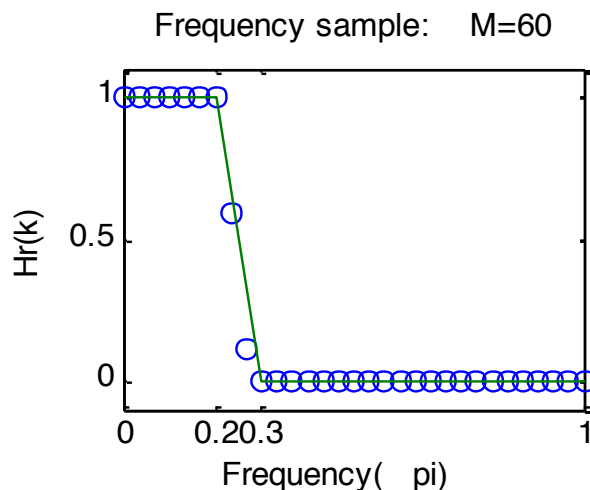
## 6.3 频率抽样设计方法

### 过渡带2点展宽，未优化



## 6.3 频率抽样设计方法

### 过渡带2点展宽，优化





## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

### 一、基本原理

幅度响应优化设计：

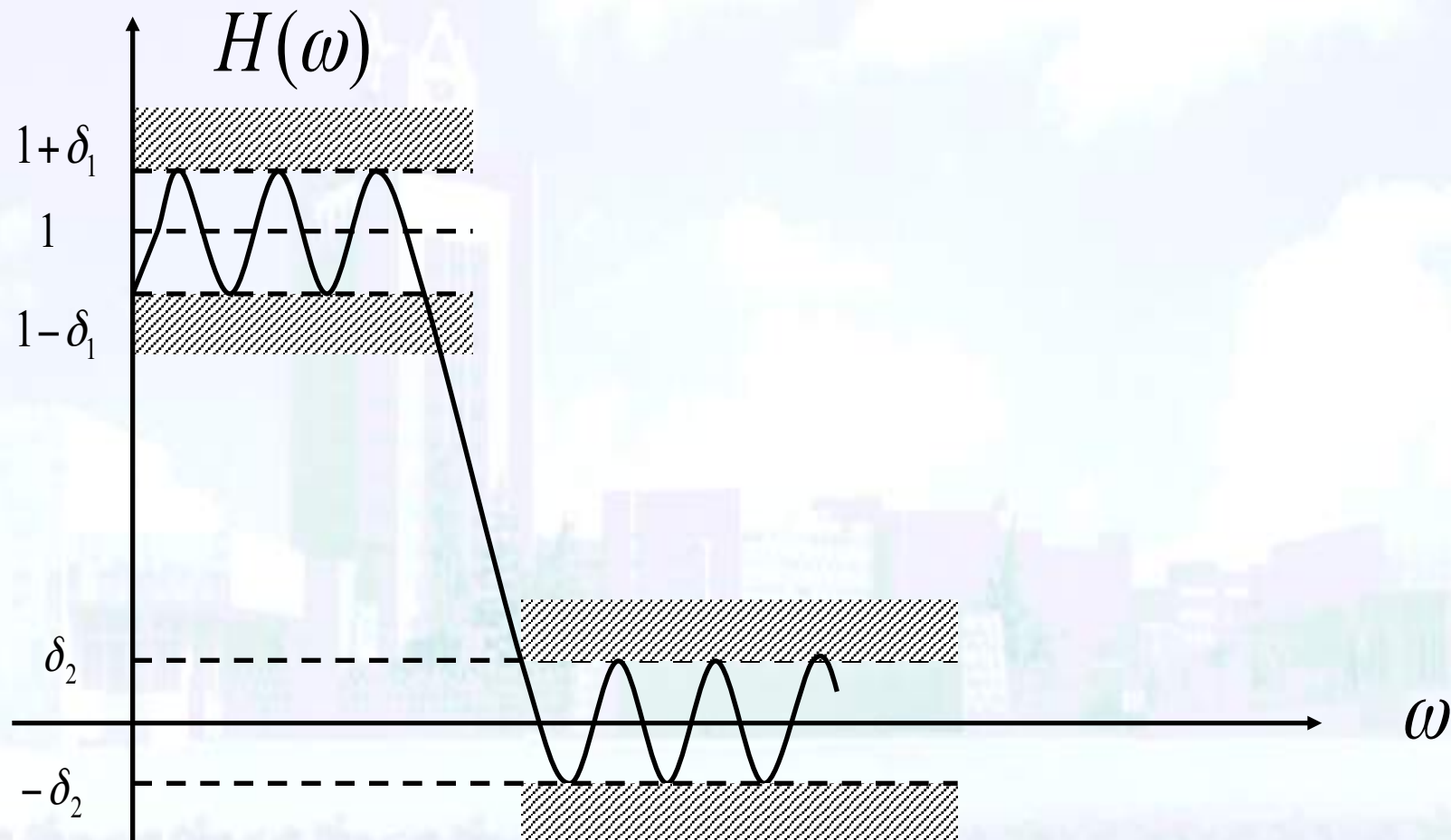
- 带内误差最少
- 过渡带最窄
- 系统阶数最低

在通带和止带内分别进行等波纹逼近，

$$E(\omega) = [H(\omega) - H_d(\omega)]$$

最大误差极小化  $\|E(\omega)\| = \min_{\omega \in A} \{ \max |E(\omega)| \}$

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近



## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

线性相位FIR滤波器幅度特性的一般表达：

$$H(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$$

$P(\omega)$ 表达为 $r$ 个余弦谐波函数之和，

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \tilde{a}(n) \cos n\omega$$



# 线性相位4种情况下 $Q(\omega)$ 与 $P(\omega)$ 的定义

$h(n)$ 对称性	$N$ 奇偶性	$Q(\omega)$	$P(\omega)$
偶对称	奇数	1	$\sum_{n=0}^{(N-1)/2} \tilde{a}(n) \cos n\omega$
偶对称	偶数	$\cos(\frac{\omega}{2})$	$\sum_{n=0}^{N/2-1} \tilde{b}(n) \cos n\omega$
奇对称	奇数	$\sin(\omega)$	$\sum_{n=0}^{(N-3)/2} \tilde{c}(n) \cos n\omega$
奇对称	偶数	$\sin(\frac{\omega}{2})$	$\sum_{n=0}^{N/2-1} \tilde{d}(n) \cos n\omega$

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

### 设计目标

使加权逼近误差函数为等波纹，Chebyshev逼近

$$\begin{aligned} E(\omega) &= W(\omega)[H_d(\omega) - H(\omega)] \\ &= \hat{W}(\omega)[\hat{H}_d(\omega) - P(\omega)] \end{aligned}$$

这里，  $\hat{W}(\omega) = W(\omega) \cdot Q(\omega)$  ,  $\hat{H}_d(\omega) = H_d(\omega)/Q(\omega)$

选择一组系数  $\{\tilde{a}(n)\}$  使

$$\|E(\omega)\| = \min_{\omega \in A} \left\{ \max |E(\omega)| \right\}$$

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

### 解的存在性：交替定理

$P(\omega)$  是  $\hat{H}_d(\omega)$  的 Chebyshev 逼近的充要条件：  
 $E(\omega)$  在  $\omega \in A$  中，至少有  $r+1$  的极值点  
 $\{\omega_i, i=1, 2, \dots, r+1\}$ ，使

$$E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

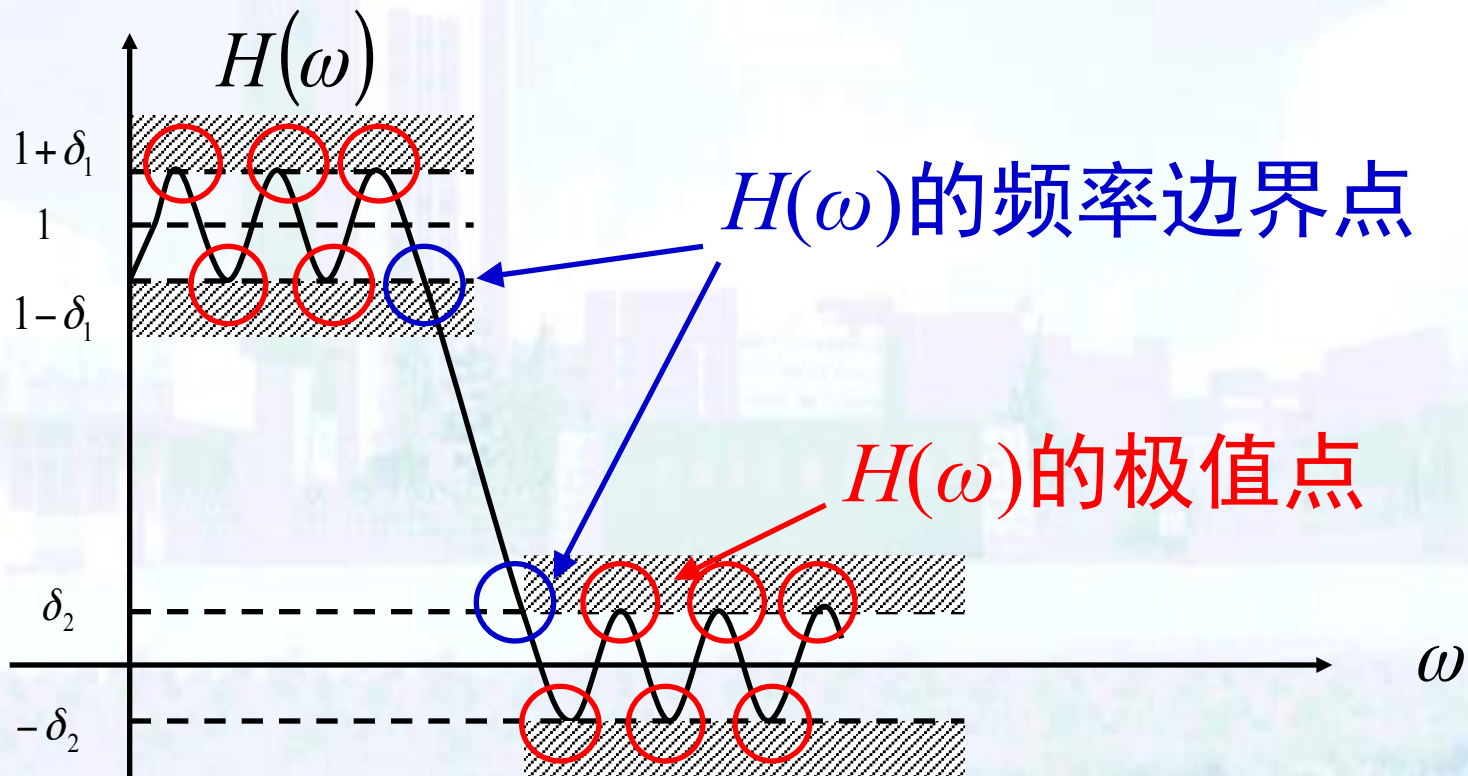
$$|E(\omega_i)| = \max_{\omega \in A} |E(\omega)|$$

$r$  是用于逼近的余弦谐波函数的个数

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

$E(\omega)$ 的极值由两部分组成：

- $H(\omega)$ 的极值点
- $E(\omega)$ 独有的极值点， $H(\omega)$ 的频率边界点



## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

### 极值点分析：4 种线性相位 FIR 滤波器

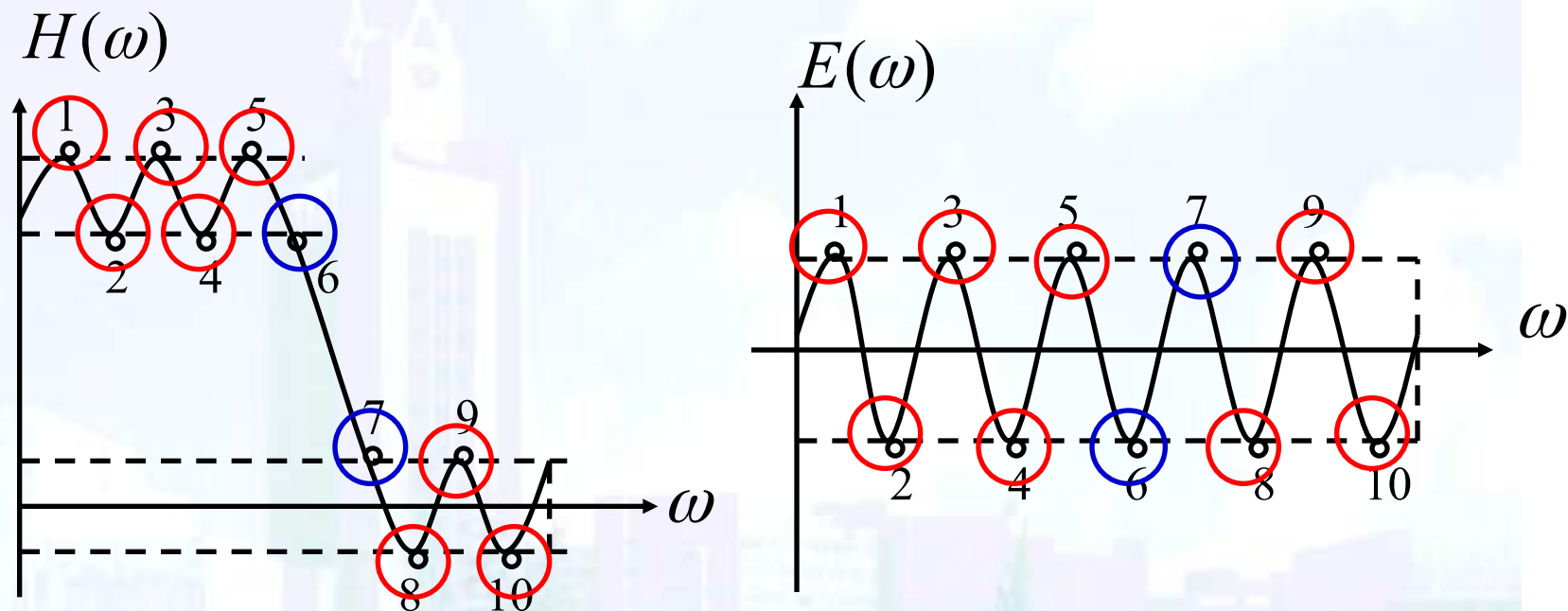
$h(n)$ 对称性	$N$ 奇偶性	$H(\omega)$ 的余弦个数	极点数 $N_e$
偶对称	奇数	$\frac{N+1}{2}$	$\leq \frac{N+1}{2}$
偶对称	偶数	$\frac{N}{2}$	$\leq \frac{N}{2}$
奇对称	奇数	$\frac{N-1}{2}$	$\leq \frac{N-1}{2}$
奇对称	偶数	$\frac{N}{2}$	$\leq \frac{N}{2}$

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

结论：

- 若  $H(\omega)$  是由  $r$  个余弦函数组成，则最多提供  $r$  个极点
- 交替定理要求  $r$  个余弦函数和至少有  $r+1$  个极点
- $r$  个可能极点由  $H(\omega)$  提供，其余极点由  $E(\omega)$  提供
- 幅度值每变换一次，在边界上能提供 2 个极值点
- 特别地， $E(\omega)$  取满它所有可能有的极点数目时：最多波纹滤波器（超波纹滤波器）设计

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近



带通误差函数  $E(\omega)$  提供 4 个边界极点

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

### 二、最多波纹滤波器设计

以低通滤波器为例

- 系统阶数  $N$
- 通带起伏  $\delta_1$
- 止带起伏  $\delta_2$
- 通带截止频率  $\omega_c$
- 止带起始频率  $\omega_s$

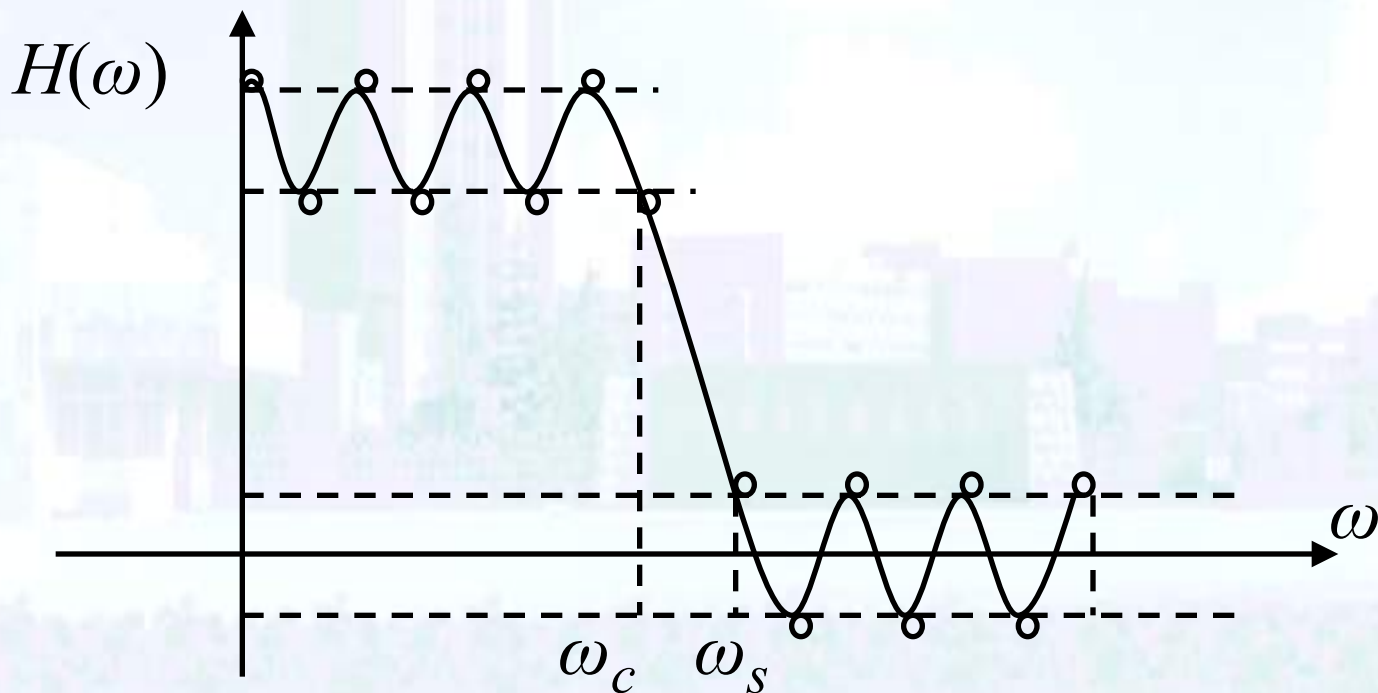
截止频率  $\omega_c$ ，止带起始频率  $\omega_s$   
不易精确实现



## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

$h(n)$  偶对称,  $N$  奇数

最多波纹设计, 误差函数  $E(\omega)$  有  $\frac{N+1}{2} + 2$  个极值  
其中  $H(\omega)$  取满  $\frac{N+1}{2}$  个极值



## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

### 极值点分配

通带  $\omega_1 = 0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_l = \omega_c$

止带  $\omega_{l+1} = \omega_s, \omega_{l+2}, \dots, \omega_{\frac{N+5}{2}} = \pi$

截止频率 $\omega_c$ 的与止带频率 $\omega_s$ 的顺序位置：

$$l = \left\lceil \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{N+5}{2} \right\rceil$$

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

逼近方程  $\left( \frac{N+1}{2} + 2 \right) \uparrow$

通带

$$\begin{cases} \sum \tilde{a}(n) = 1 + \delta_1 \\ \sum \tilde{a}(n) \cos \omega_2 n = 1 - \delta_1 \\ \vdots \\ \sum \tilde{a}(n) \cos \omega_l n = 1 - \delta_1 \end{cases}$$

止带

$$\begin{cases} \sum \tilde{a}(n) \cos \omega_{l+1} n = \delta_2 \\ \sum \tilde{a}(n) \cos \omega_{l+2} n = -\delta_2 \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^n \tilde{a}(n) = \delta_2 \end{cases}$$

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

(1)  $\omega_1 = 0$  ,  $\omega_{\frac{N+5}{2}} = \pi$

(2)  $\omega_c$ ,  $\omega_s$ 不是 $H(\omega)$ 的极值点;

(3) 其余  $\frac{N+1}{2}-2$ 个极值点方程:

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

通带

$$\begin{cases} \left. \frac{d}{d\omega} \sum \tilde{a}(n) \cos \omega n \right|_{\omega_2} = 0 \\ \vdots \\ \left. \frac{d}{d\omega} \sum \tilde{a}(n) \cos \omega n \right|_{\omega_{l-1}} = 0 \end{cases}$$

止带

$$\begin{cases} \left. \frac{d}{d\omega} \sum \tilde{a}(n) \cos \omega n \right|_{\omega_{l+2}} = 0 \\ \vdots \\ \left. \frac{d}{d\omega} \sum \tilde{a}(n) \cos \omega n \right|_{\omega_{\frac{N+3}{2}}} = 0 \end{cases}$$

$N+1$ 个未知数,  $\hat{a}(0), \dots, \hat{a}(\frac{N-1}{2}), \omega_2, \dots, \omega_{\frac{N+3}{2}}$

$N+1$ 个非线性方程

解法1, 用数值迭代法, 求解非线性方程组, 解出  $\{\tilde{a}(n)\}$ , 得到最优逼近的滤波器

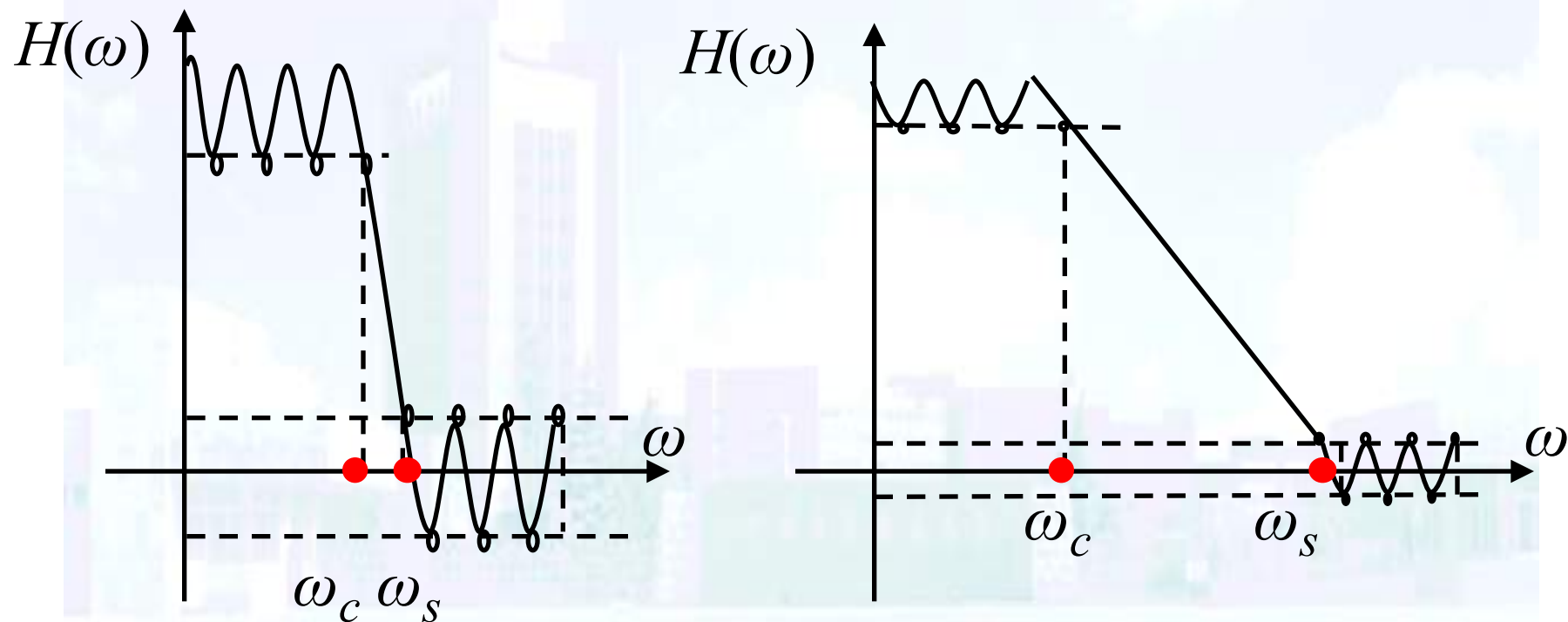
解法2, Lagrange 多项式内插, 避免非线性方程求解, 用 Lagrange 多项式逼近  $H(\omega)$ , 求各极值点, 解出  $\{\tilde{a}(n)\}$

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

最多波纹法优化的意义：

- 指标  $N$ ,  $\delta_1$  和  $\delta_2$  按要求实现
- 调整  $\omega_c$  与  $\omega_s$  的位置，过渡带宽优化，最窄 ——  $\omega_c$  与  $\omega_s$  不要求精确实现

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近





## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

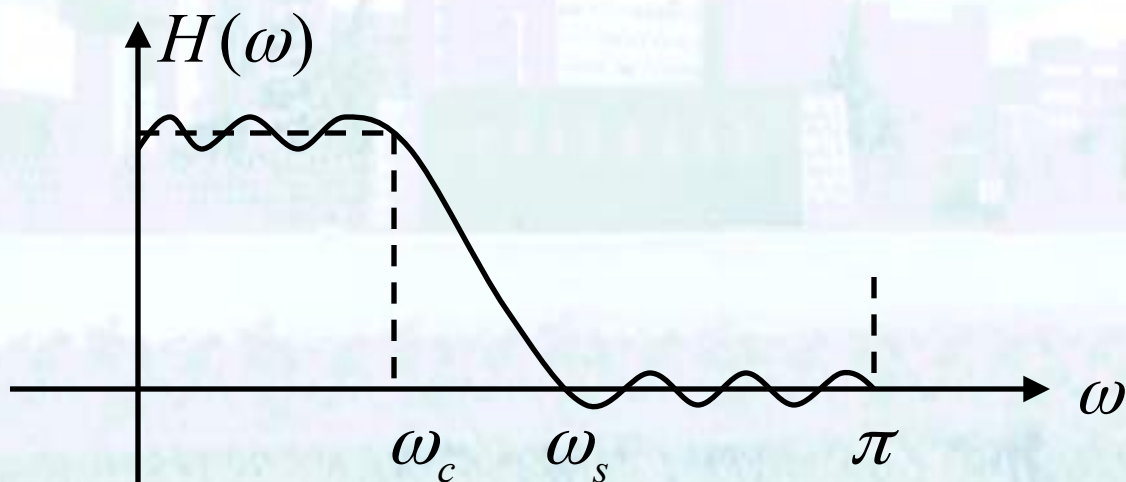
### 三、Remez交换算法

设计条件：滤波器阶数 $N$ ，边界频率 $\omega_c$ ， $\omega_s$ ，  
频带权重 $W(\omega)$

原理：通带、止带等波纹逼近

目标：以多项式近似

确定极值频率点 $\Rightarrow$ 系统函数



## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

### 误差方程

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(\omega) - H(\omega)]$$

$$= \hat{W}(\omega)[\hat{H}_d(\omega) - P(\omega)]$$

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{K} & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 1 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

在极值点上的误差

$$E(\omega_k) = \hat{W}(\omega_k)[\hat{H}_d(\omega_k) - P(\omega_k)] = (-1)^k \delta$$

$$k=0, 1, \dots, r$$

极值点数  $r$  由滤波器阶数  $N$  决定

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

算法过程：

① 极值频率点初值：均匀分布

$$\text{通带 } \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_l\} \quad \omega_l = \omega_c$$

$$\text{止带 } \{\omega_{l+1}, \omega_{l+2}, \dots, \omega_r\} \quad \omega_{l+1} = \omega_s$$

$$l = \left[ \frac{\omega_c}{\pi - \omega_s + \omega_c} (r + 1) \right]$$

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

②形成关于 $P(\omega)$ 的多项式内插公式和逼近误差 $\delta$

$$P(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^r \left( \frac{d_k}{\cos \omega - \cos \omega_k} \right) P_k}{\sum_{k=0}^r \frac{d_k}{\cos \omega - \cos \omega_k}}$$

$$d_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^r \frac{1}{\cos \omega_k - \cos \omega_i}$$

$$P_k = \hat{H}_d(\omega_k) - \frac{(-1)^k \delta}{\hat{W}(\omega_k)}$$

$$\delta = \frac{\sum_{n=0}^{r-1} d_k \hat{H}_d(\omega_k)}{\sum_{n=0}^{r-1} \frac{(-1)^k d_k}{\hat{W}(\omega_k)}}$$

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

③在密集的频率点上计算误差公式

$$E = \hat{W}(\omega) [\hat{H}_d(\omega) - P(\omega)]$$

其中 $P(\omega)$ 为多项式内插公式

若有频率点 $\omega_j$ 使得  $|E(\omega_j)| > \delta$

则选取 $\omega_j$ 作为新的极值频率点，返回①

直至极值频率收敛，迭代完成

迭代过程中， $\omega_l = \omega_c$  与  $\omega_{l+1} = \omega_s$  保持不变

④ 根据多项式内插公式 $P(\omega)$ 求出 $\{a(n)\}$

a) IDFT; b) 求解线性方程

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

### 四、算法讨论

- 1) Remez算法处理不要求 $\omega=0, \pi$ 为极值点  
不是最多波纹滤波器
- 2) 对给定的 $N$ ,  $\omega_c$ ,  $\omega_s$ 及 $W(\omega)$ , 将有一个最小的、不可事先设置的等波纹逼近误差 $\delta$   
过渡带  $\omega_s - \omega_c$ , 事先确定, 可设置
- 3) 通带与止带间的误差分配由权重 $W(\omega)$ 调节

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{K} & 0 \leq \omega \leq \omega_c \quad \text{通带波纹 } K\delta \\ 1 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \quad \text{止带波纹 } \delta \end{cases}$$

## 6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

### 4) 限定条件下的优化

滤波器阶数 $N$ ，带内误差，过渡带

- 最多波纹算法

带内误差与  $N$  给定，算法选择过渡带，使之最窄

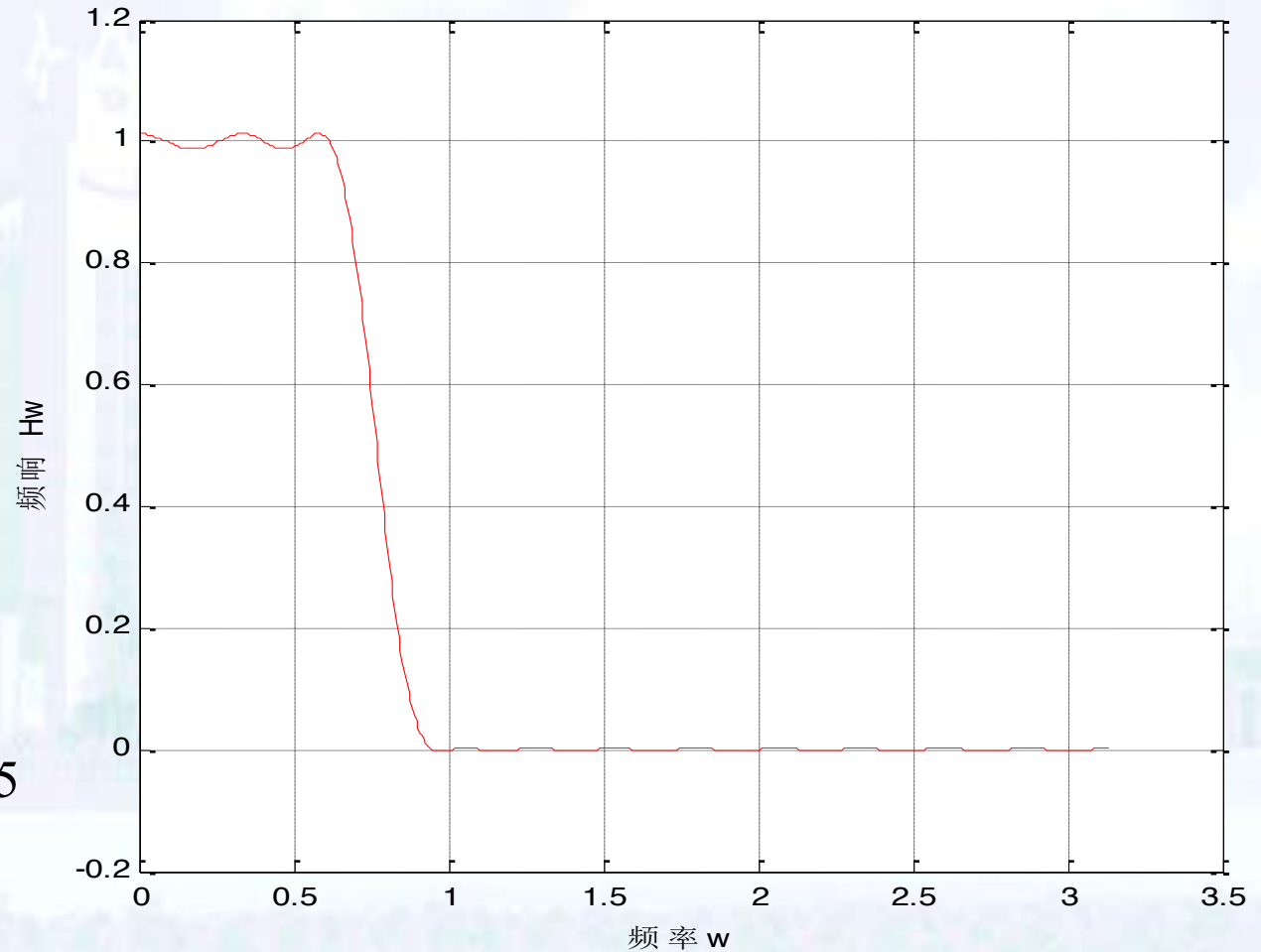
- Remez算法

过渡带与  $N$  给定，算法选择带内误差，使之最小

- 其他算法

误差与过渡带同时给定， $N$  最小

傅立叶频谱特性曲线



通带截止频率:

$$\omega_p = 0.2\pi$$

阻带截止频率:

$$\omega_s = 0.3\pi$$

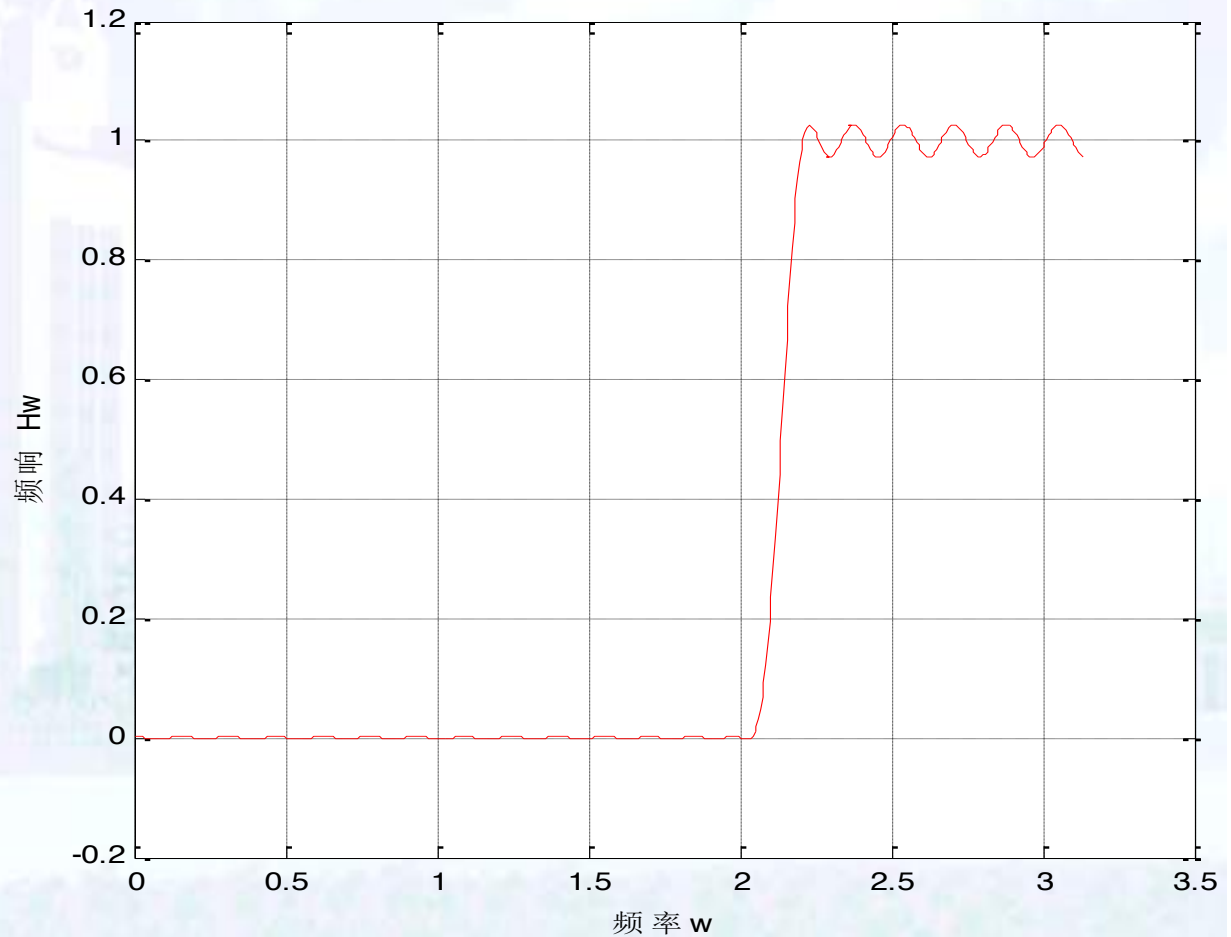
通带衰减:  $R_p = 0.25$

阻带衰减:  $A_s = 50$

$N = 47$



傅立叶频谱特性曲线



阻带截止频率:

$$\omega_s = 0.65\pi$$

通带截止频率:

$$\omega_p = 0.70\pi$$

阻带衰减:  $A_s = 50$

通带衰减:  $R_p = 0.50$

$N = 81$

阻带截止频率:

$$\omega_{s1}=0.3\pi$$

$$\omega_{s2}=0.7\pi$$

通带截止频率:

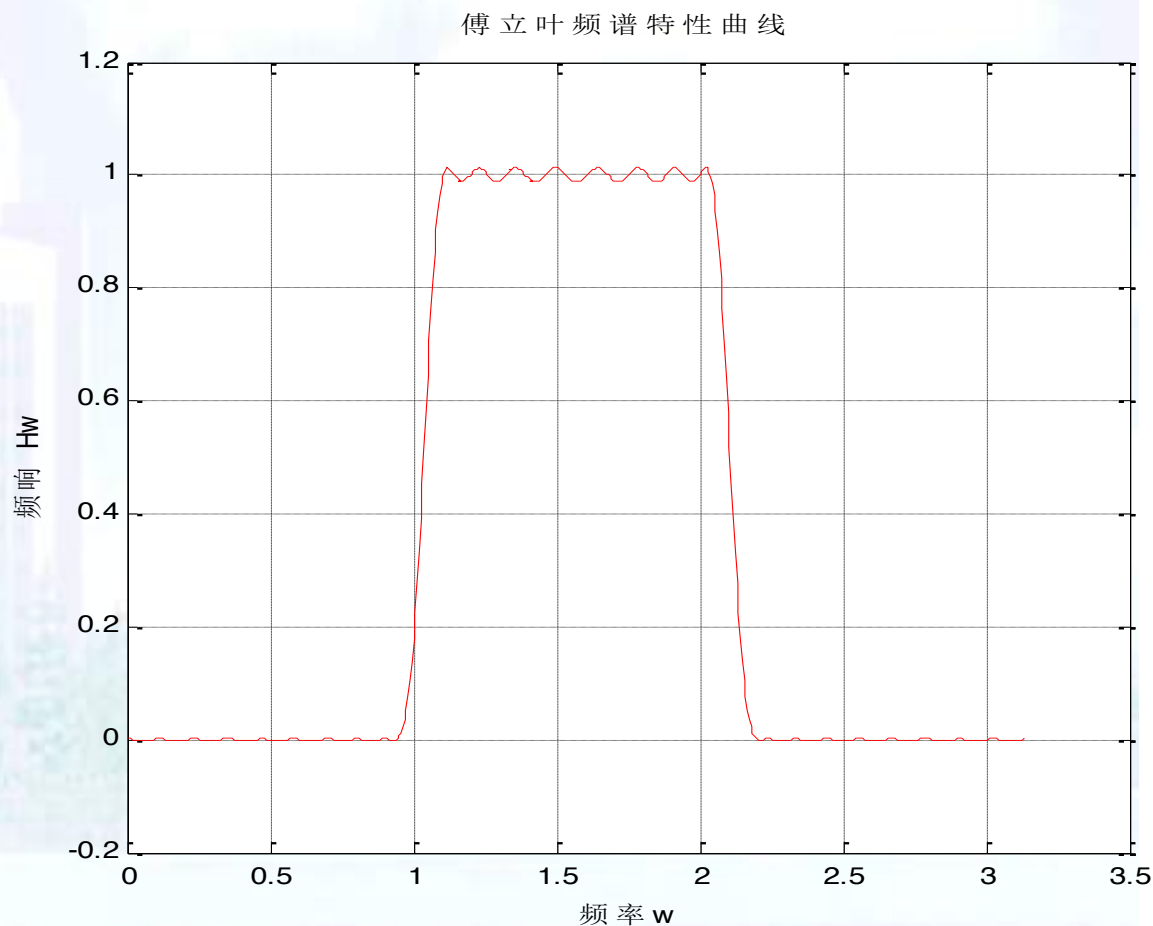
$$\omega_{p1}=0.35\pi$$

$$\omega_{p2}=0.65\pi$$

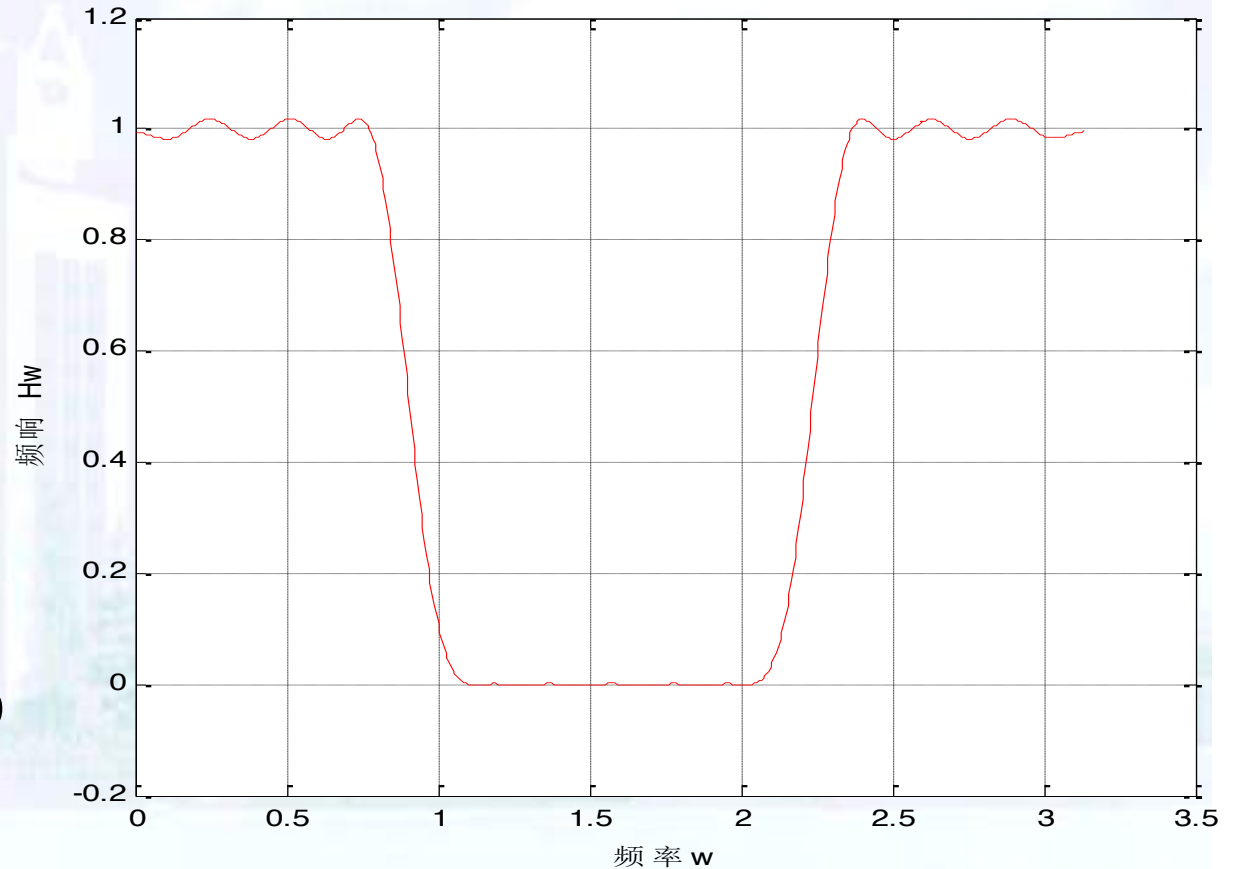
阻带衰减:  $A_s=60$

通带衰减:  $R_p=0.25$

$N=105$



傅立叶频谱特性曲线



通带截止频率:

$$\omega_{p1}=0.25\pi$$

$$\omega_{p2}=0.75\pi$$

阻带截止频率:

$$\omega_{s1}=0.35\pi$$

$$\omega_{s2}=0.65\pi$$

通带衰减:  $R_p=0.50$

阻带衰减:  $A_s=60$

$$N=49$$