

姓名	学号	班级	选题	论述	结论	总分
骆梦家	2013301020123	材料				

# 从单摆到混沌现象

材料班 骆梦家 2013301020123

**摘要：**本文主要是对单摆的运动进行了分析。在对单摆所受外力的不同近似下通过 python 来模拟单摆的运动状态，角度与角速度的关系。并通过模拟阻尼力的不同大小得到单摆的混沌现象，通过改变阻尼力的系数来分析单摆的混沌现象。

**关键词：**单摆，混沌现象，混沌现象的周期性出现

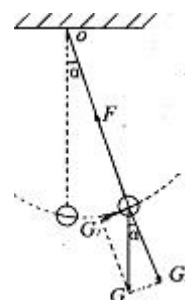
## 一、本文介绍

单摆的运动看似很简单，但是在摆角很大的情况下简单的单摆运动也会变得很麻烦。文中通过 python 程序对单摆的运动进行模拟，再分析不同阻尼系数、不同摆角等初始条件时单摆运动的图像以及在特定条件下单摆运动出现的混沌现象。

## 二、正文

### 1.单摆

所谓单摆，就是在不能伸缩的长度为  $l$  的细线下端悬挂一个小球，微微施加一个外力后就可以在一竖直面内来回摆动的装置。对单摆进行简单的受力分析可以得到： $F_{\theta} = -mg \sin \theta$ 。



对单摆做简单的分析就可以得到单摆的运动方程为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

当摆角很小时，单摆的运动方程可近似为  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta$ ，此时单摆可以看成是线性单摆，

此线性单摆的解为  $\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi)$ ，其中  $\Omega = \sqrt{g/l}$ 。

当摆角较大时，单摆的运动方程可近似为  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta - q \frac{d\theta}{dt}$ ，此时单摆是非线性单，

等式右边的第二项即为阻尼项，此非线性单摆的解为  $\theta = \theta_0 e^{-qt/2} \sin(\sqrt{\Omega^2 - q^2/4} t + \phi)$ ，其

中  $\Omega = \sqrt{g/l}$ 。

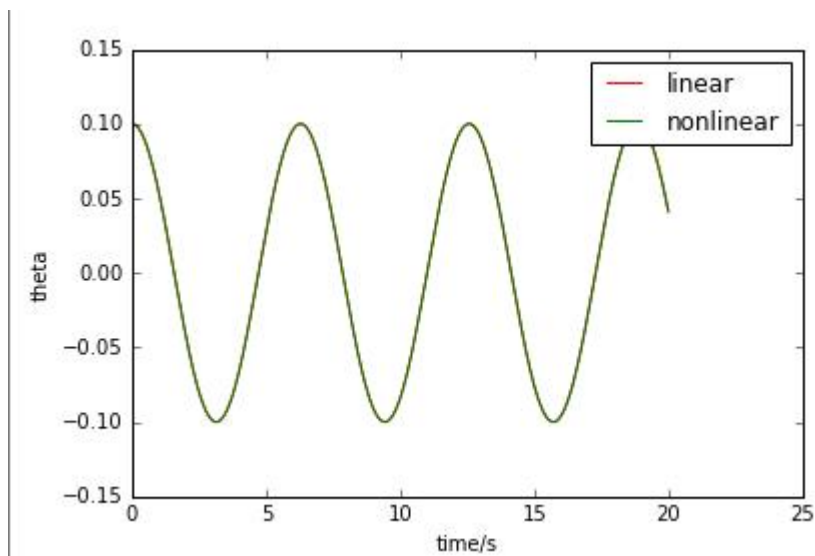
以上两种情形的单摆都是没有考虑外力影响的结果，如果考虑外力的话那么单摆的运动方程变为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F_D \sin(\Omega_D t)$$

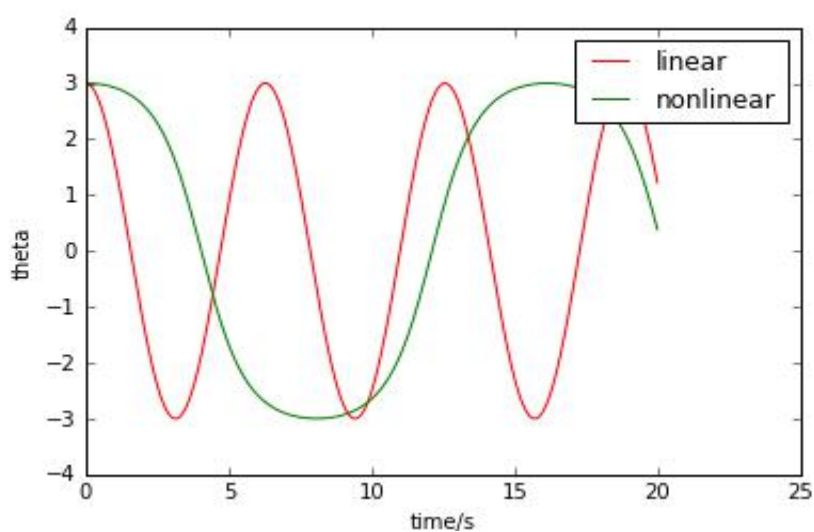
等式右边第三项即为外力所带来的影响项，此时等式的解为  $\theta = \theta_0 \sin(\Omega_D t + \phi)$ ，其中

$$\theta_0 = \frac{F_D}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_D^2) + (q\Omega_D)^2}}。$$

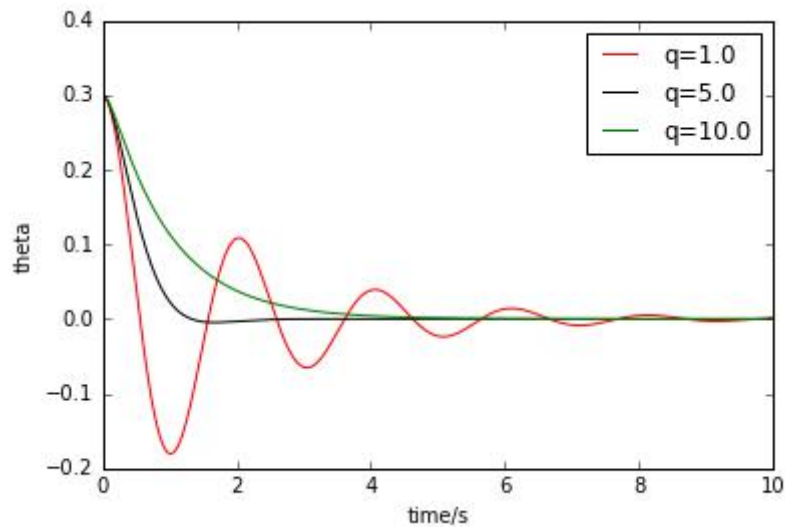
对只受重力的单摆的运动进行图像模拟，得到如下所示的图形：



上图为将初始角度设定为  $0.1^\circ$  时线性摆与非线性摆的图像，由图中可以看出两条曲线几乎完全重合，所以在小角度是线性摆与非线性摆是等价的；下图为将初始角度设定为  $3^\circ$  时线性摆与非线性摆的图像，两条曲线完全不重合，因此在大角度时非线性摆不可以等价于线性摆。(所选参数为  $t=20s$ ,  $dt=0.001s$ ,  $g=l=9.8$ )

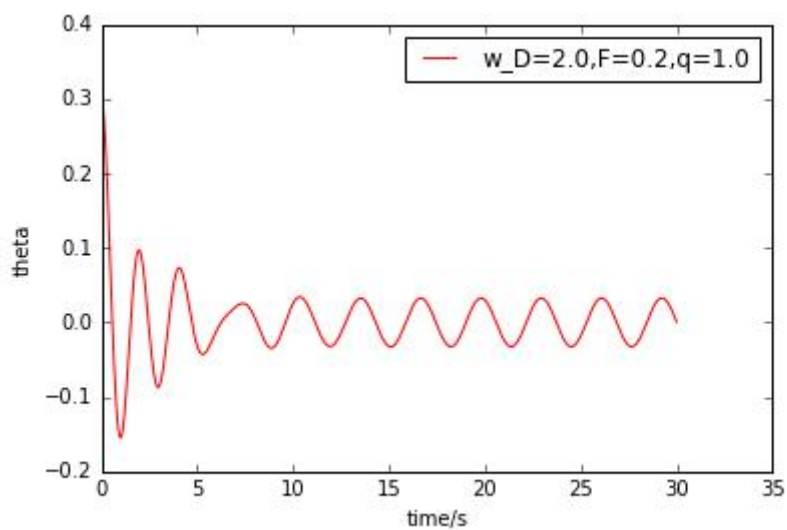


再对有阻尼项的单摆进行模拟，得到其运动图像为：



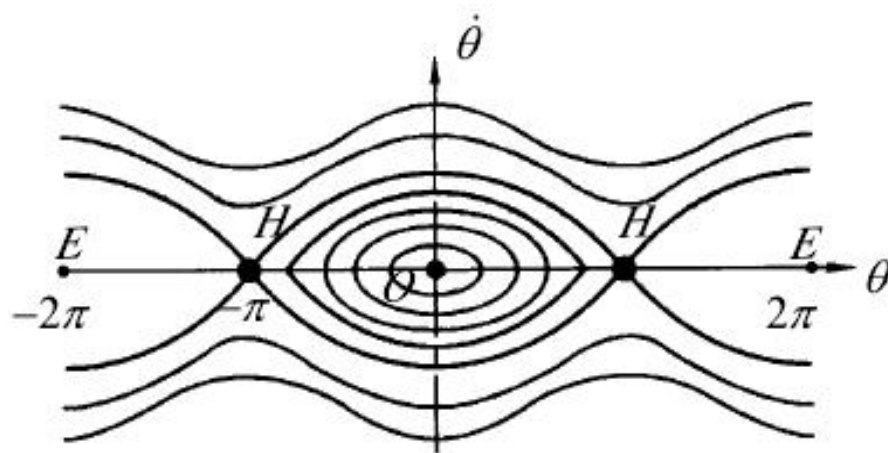
由图像上可以看出当受到阻尼力时单摆的摆动幅度会越来越小直至停止，当阻尼系数  $q=10$  时单摆摆动幅度接近指数下降。

在已经对线性非线性以及考虑阻尼力的单摆进行了分析之后，再考虑上外界驱动力并对其做图像模拟，可以得到图像如下：



通过上图可以看出当单摆受到阻尼力的时候，对单摆施加一个外界驱动力那么单摆在运动了一段时间之后又会做有固定周期的往返运动。

在对各单摆进行了一定的简单模拟之后再画出单摆的  $\omega-\theta$  图像。对无阻尼无驱动力的单摆的运动方程做积分，积分后可以得到  $\dot{\theta}$  与  $\theta$  的关系： $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + (1 - \cos\theta) = E$ ，单摆运动轨迹的相图如下所示：



在中心  $O$  周围，相图是椭圆，对于小角度摆动积分得出的也是椭圆方程，两种情况相符。摆动幅度再增大，相图不再是椭圆但仍然闭合，说明单摆仍作周期运动。若能量再高，相图不再闭合，表示单摆不再往复摆动，而是沿正向或反向转动起来了。当  $\theta = \pi$  时，即单摆摆到最高点时， $\dot{\theta} = 0$ ， $\ddot{\theta} = 0$ ，说明最高点是一个不稳定平衡点。在两个不稳定平衡点施加有细微差别的外界力的时候单摆的运动可能就会沿着单程旋转或者往复旋转两个方向发展，所以单摆的运动绝对不是能简单描述的。

## 2. 混沌

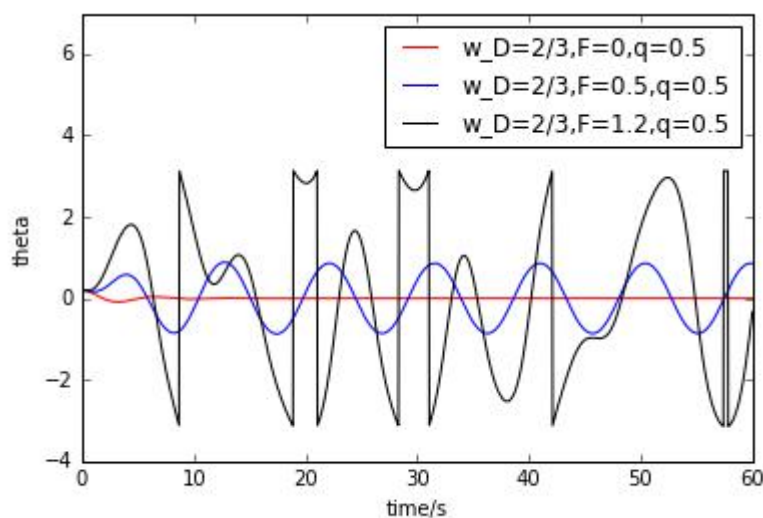
### 2.1 混沌现象

混沌现象是指发生在确定性系统中的貌似随机的不规则运动，一个确定性理论描述的系统，其行为却表现为不确定性——不可重复、不可预测，这就是混沌现象。

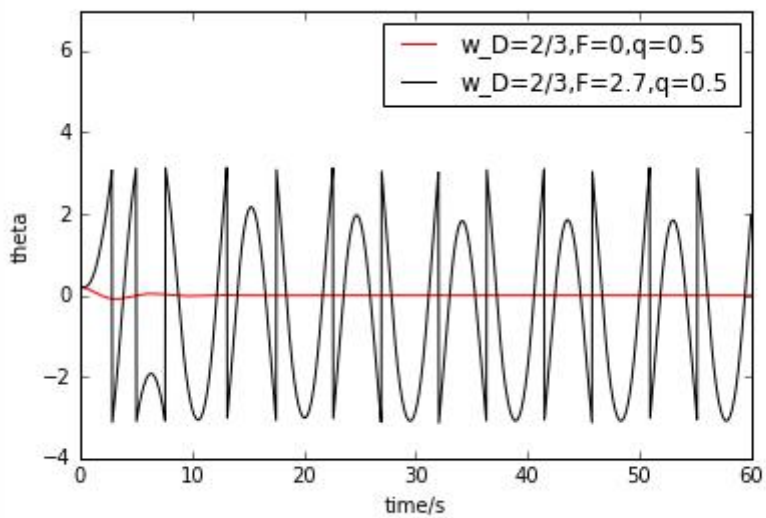
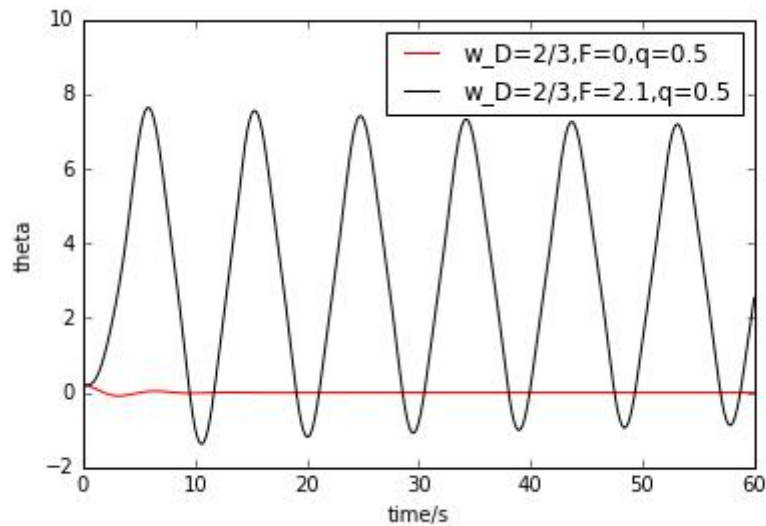
### 2.2. 单摆混沌现象的出现

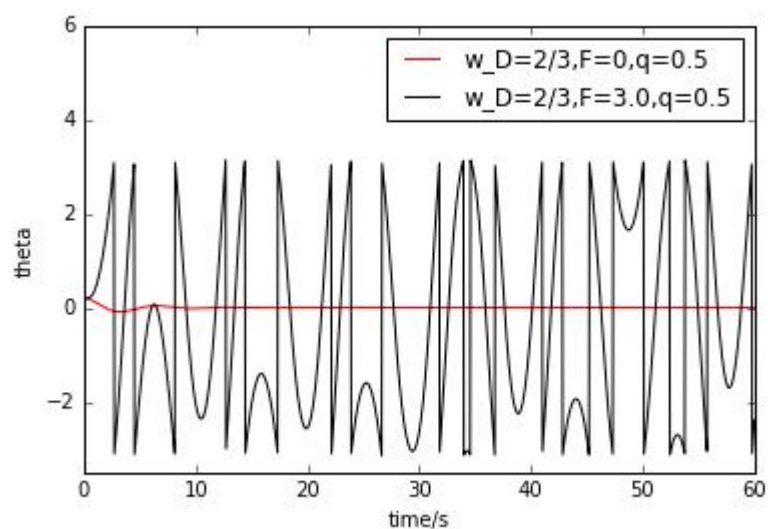
在上文对单摆的相图进行分析时我们就可以发现单摆的运动并不是可以简单描述的运动，在选取的参数不同时单摆会出现不同的运动状态，也会出现混沌现象。

接下来就来探讨一下单摆出现混沌现象的条件以及确定此时单摆出现混沌的原因。



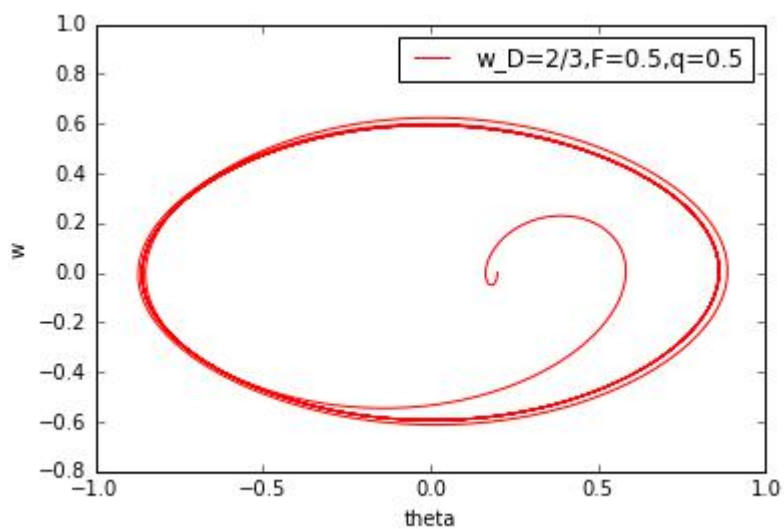
上图中的不同曲线分别为对考虑阻尼以及驱动力的非线性单摆取不同的  $F_D$  值时的  $\theta-t$  图像，其中  $\theta \in [-\pi, \pi]$ 。由图可以发现当  $F_D=0$  时单摆为受阻尼的非线性单摆，很快运动停止；当  $F_D=0.5$  时单摆在运动了一段时间后又开始进行有规律的运动；但是当  $F_D=1.2$  时单摆的运动图像已经找不到明显的规律，此时已经出现混沌现象。

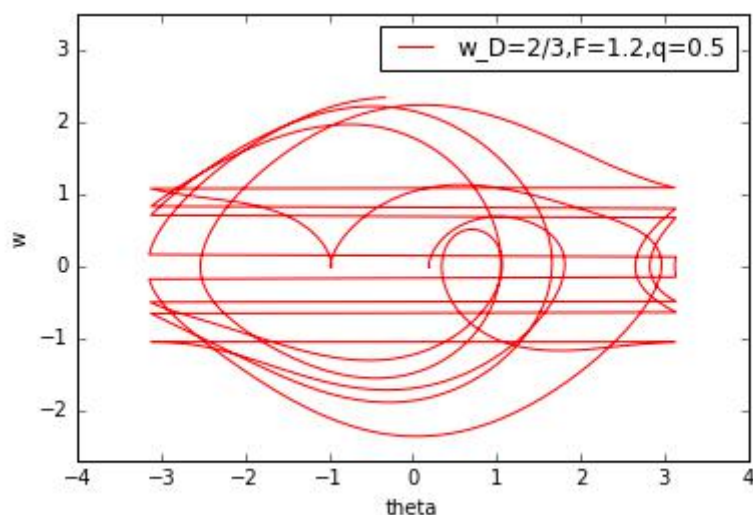




为了分析混沌现象出现的条件，在发现  $F_D=1.2$  会出现混沌现象的前提下，将  $F_D$  的值以步长为 0.1 的速度不断增大，然后就可以发现在  $F_D=2.1$  时图像又再次变得有规律，此时混沌现象几乎消失；继续加大  $F_D$ ，在  $F_D=2.7$  时图像的的第一个峰开始变形，如果再继续加大  $F_D$  图形再次变得没有规律，此时又出现混沌现象。

选取  $F_D=0.5$  以及  $F_D=1.2$  时的单摆做相图分析，





通过相图可以发现当  $F_D=0.5$  时  $\theta-\omega$  图像近似为一椭圆，此时单摆没有出现混沌现象，这与在上文中提到的也是一致的；当  $F_D=1.2$  时  $\theta-\omega$  图像很混乱，此时混沌现象已经出现。

### 三、结论

经过文中的讨论我们可以得到以下几点结论：

1. 单摆在小角度时非线性摆可以转换为线性摆讨论，影响并不会很大。
2. 在给予的外界驱动力与阻尼力相平衡的状态下单摆在运动一段时间之后重新恢复到有规律的状态上来。
3. 单摆在  $F_D$  取一定的值时会出现混沌现象，但是当继续增加  $F_D$  的值时混沌现象会消失，单摆的运动重新有规律，继续增大  $F_D$  值则单摆又会逐渐变成混沌状态，所以单摆的混沌现象是周期性出现的。

### 四、论文引用

- [1]. 从单摆运动到混沌理论 朱勤 《林区教学》
- [2]. 单摆振动分析 陈文涛, 龚善初 《湖南理工学院学报 (自然科学版)》
- [3]. 从单摆振动认识混沌 方云团 《物理通报》
- [4]. 《计算物理》 Nicholas J. Giordano, Hisao Nakanishi
- [5]. 百度百科 混沌现象