

WPC 2019 题解

2019.08.03

A The Nature of Human

- 签到题
- 题意：
 - 将每个单词的首字母用大写输出

B Operation on Queue

- 题意：
 - 队列 Q 有 n 个元素，栈 S 有无限大的容量
 - 有以下两个操作：
 - 从 Q 的队头出队一个元素，并放在 S 的栈顶
 - 从 S 的栈顶弹出一个元素，并放在 Q 的队尾
 - 问队列 Q 能否从状态 A 通过执行任意次上述操作变为状态 B
- 做法：
 - 对于任意子队列 Q' ，可以通过将其所有元素 push 到栈后，再从栈 pop 到队尾，从而达到将 Q' 所有元素翻转的效果
 - 所以只要状态 A 和状态 B 中各个元素数量相同，就必然能从状态 A 转变为状态 B
 - **注意：用 set 等复杂度 $O(N \log N)$ 的方法可能导致超时**

C Graduation

- 题意：
 - 有 9 种颜色的旗子，每种颜色每种边长（长度为整数）的旗子有无数面，需要将这些旗子套在长度为 n 的横柱上，横柱不能留空，旗子不能重叠也不能腾空
 - 横柱上有 m 个腐烂的地方，两面旗子不能以这些地方作为分界点
 - 设一面边长为 x 的旗子，它的美丽值为 $a \cdot x^2 + b \cdot x$ ，一种方案的美丽值为该方案所有旗子美丽值之和，问所有方案的美丽值之和为多少
 - 两种方案不同，当且仅当存在一个地方被不同旗子覆盖，旗子不同是指颜色或者边长不同

C Graduation

我们可以很快地写出一个 DP:

设 f_i 表示考虑了长度为 i 的数轴, 其中最后一个正方形恰好在 i 这个位置结束, 的所有方案的美丽值之和。那么转移就是枚举最后一个正方形怎么放:

$$f_i = \sum_{j=0, j \neq p_k}^{i-1} f_j \cdot S(j-i) \cdot 9$$
$$S(x) = ax^2 + bx$$

尝试优化这个 DP, 我们需要转化模型。

先考虑最简单的情况—— $S(x) = x^2$, 即

$$f_i = \sum_{j=0}^{i-1} f_j \cdot (j-i)^2$$

那么这个 x^2 可以看作是**长度为 x 的线段内 (看作是 x 个格子), 恰好放一个红球和一个蓝球 (可以放在同一位置) 的方案数**。于是可以设 $f_{i,j}$ 表示考虑了长度为 i 的数轴, 当前线段已经放了 j 个球 ($j \leq 2$) 的方案数。转移讨论一下就是 9 个转移, 然后写出转移矩阵就可以矩阵乘法了。

至于标记的位置, 实际上是那些位置的 $f_{i,2}$ 的转移要改一下, 不能新开一个正方形。

有了这个模型以后, 处理 $S(x) = ax^2 + bx$ 就很容易了。由于 $S(x) = a(x^2 - x) + x(a + b)$, 我们可以看作是, 在 x^2 种放球的方案里, 红球和蓝球不在同一格的 $x^2 - x$ 种方案都乘上 a , 而红球和蓝球在同一格的 x 种方案都乘上 $a + b$ 。这也是改一下矩阵就行了。

最后还有一个乘 9 的问题, 那就每当新开一个正方形的时候给它乘 9 就行了。

D One Cut

- 题意：
 - 给出一个不超过 1000 个点的简单凸多边形，求平分凸多边形面积的最长线段和最短线段的长度
- 做法：
 - 枚举端点在凸多边形各条边上时，平分面积的线段的长度，求出最大最小值即可

E Distinct Number

- 题意：
 - 给出 n 个区间，所有区间的每一个数和 x 做与运算，求得到的结果有多少个不同的数
- 题解：
 - 首先可以把有交的区间合并，得到 m 个不相交的区间，然后用这些区间构建 trie 树
 - 注意构建的时候，如果一个节点下面是一棵完全二叉树就不要展开了，这样这棵 trie 树最多有 $m \log A$ 个节点， A 是值域范围
 - 从高到低位枚举 x 二进制的每一位，如果是 0 则合并 trie 树那一层每个节点的两个子树
 - 这样最后得到的新 trie 树的叶节点数量就是答案（叶子节点包括未展开的子树的叶节点）
 - 注意如果一个节点下面是一棵完全二叉树就没有合并的必要了（因此上面构建二叉树的时候也没有展开它），另外两棵子树只需要递归一个

F Tree Product

- 题意：
 - 对于两棵有根树 A 和 B , $A \times B$ 表示用树 B 替换树 A 中的每一个节点
 - 给出 n 棵有根树, 找出这 n 棵树按照某种顺序做 “ \times ” 后得到的树的直径的最大及最小值
- 做法：
 - 树的乘积的直径, 就是第一棵树的直径, 加上剩下树的深度的两倍
 - 所以只要枚举哪一棵树作为第一棵树即可

G Another Strange Function

- 题意：
 - 假定 $f(a)$ 表示数字串 a 中最小的数字，给定一个由 0-9 构成的数字串 s ，对 s 的所有子串 t 对应的 $f(t)$ 求和
- 做法：
 - 枚举 0~9，统计字符串被分割成多少个子串
 - 例如1324123，数字1将字符串分割为324和23，数字2将余下子串分割为3、4和3

H Attention Mechanism

- 题意：
 - 根据给出的公式求值
 - **注意：** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的运算结果最大可为 10000，对 $\exp(10000)$ 直接运算会溢出

I A + B Problem

- 题意：
 - 用 n 个加法器对 n 位二进制数 A 和 B 做加法，其中 k 个加法器的进位永远输出 0
 - 在不知道哪 k 个加法器坏了的情况下，求 $A + B$ 可能得到的最大和最小值
- 做法：
 - 我们把 $1111\dots111 + 0000\dots001$ 称为 pattern
 - 为了得到最小值，分为以下三步：
 - 1. 首先从最高位向最低位枚举 pattern，损坏每个 pattern 的最高位
 - 2. 若损坏数量不足，则损坏不在 pattern 里的位
 - 3. 若损坏数量还不足，则从最低位向最高位枚举 pattern，每个 pattern 内部从次高位向最低位开始损坏
 - 为了得到最大值，分为以下两步：
 - 1. 首先损坏不在 pattern 里的位
 - 2. 若损坏数量还不够，则从最高位向最低位枚举 pattern，如果这个 pattern 当前必须被损坏（不包括这个 pattern，比它低位的 pattern 位的总数不够），则损坏该 pattern 所有位

J Game of Life

- 题意:

- 在一个无边界的棋盘上, 每个格子都有初始状态 live 或者 dead , 游戏会持续 n 秒

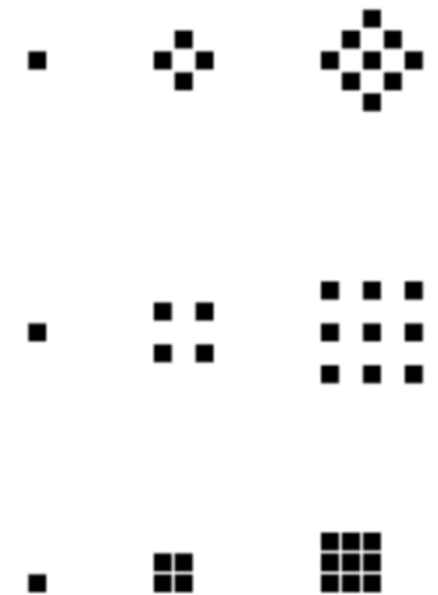
- 每个格子在每一秒和其周围四个相邻格子以下列规则交互:

- 周围有 live 格子的格子会变成 live 格子

- 周围没有 live 格子的格子会变成 dead 格子

- 定义 $f(i)$ 为第 i 秒结束后, live 格子的个数, 求 $\sum_{i=0}^n f(i)$

- 在第 0 秒的时候, 每个格子 (x, y) 满足 $x+y$ 为偶数



- 做法:

- 如果我们先把整个坐标系旋转 45 度, 然后去掉多余的行和列, 那么每个初始 live 格子扩展出去都是正方形, 所以格子的扩展可以看作正方形的扩展

- 在每个时刻 t , live 格子的数量就是该时刻正方形的面积并

- 每个正方形向外扩展可以用 $(1+t)^2$ 表示, 在一些特定的时间段内, 正方形和相交的矩形个数是恒定的, 所以正方形并的面积可以表示为 $f(t)=a*t^2+b*t+c$

- 这些时间段的端点是两个正方形第一次相交的时间点, 所以只要求出所有的相交时间点, 然后在时间段内求出多项式即可