תרגיל 5

① a. $f(x,y)=e^{xy}$, constraint: $2x^2+y^2=72$

$2x^2+y^2-72=0$

$$L=e^{xy}-\lambda(2x^2+y^2-72)$$

$$\nabla L=\nabla(e^{xy}-\lambda(2x^2+y^2-72))=0$$

$$\nabla x = y e^{xy}-4\lambda x=0 \Rightarrow e^{xy}=\frac{4\lambda x}{y} \Rightarrow xy=\ln\left(\frac{4\lambda x}{y}\right)= \ln 4+\ln\lambda+\ln x-\ln y \quad (*)$$

$$\nabla y = x e^{xy}-2\lambda y=0 \Rightarrow e^{xy}=\frac{2\lambda y}{x} \Rightarrow xy=\ln 2+\ln\lambda+\ln y-\ln x \quad (**)$$

$$\nabla \lambda = -2x^2-y^2+72=0$$

$(**) = (*)$:

$$\ln 4+\cancel{\ln\lambda}+\ln x-\ln y=\ln 2+\cancel{\ln\lambda}+\ln y-\ln x$$

$$\ln 4+2\ln x=\ln 2+2\ln y$$

$$\ln 4+\ln x^2=\ln 2+\ln y^2$$

$$\ln 4x^2=\ln 2y^2 \Rightarrow 4x^2=2y^2 \Rightarrow 2x=\sqrt{2}y \Rightarrow \boxed{\sqrt{2}x=y}$$

$$-2x^2-(\sqrt{2}x)^2+72=0 \Rightarrow 2x^2+2x^2-72=0$$

$$4x^2-72=0 \Rightarrow x^2-18=0$$

$x=\pm\sqrt{18}$ אם $x=-\sqrt{18}$ אזי $y=-6$

אם $x=\sqrt{18}$ אזי $y=6$

אז, $(\sqrt{18},6)$ נק' מקסימום של e^{xy} תחת האילוץ

$(-\sqrt{18},-6)$ נק' מינימום תחת האילוץ

b.

$$L = x^2 + y^2 - \lambda(y - \cos 2x)$$

$$\nabla(x^2 + y^2 - \lambda(y - \cos 2x)) = 0$$

$$\nabla x = 2x + \lambda(-2\sin 2x) = 0$$

$$\nabla y = 2y - \lambda y = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

$$2x - 4\sin 2x = 0 \qquad x = 2\sin 2x \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0.898$$

$$\cancel{t = 2x \quad t \cdot 3t}$$

$$\cancel{t - 4\sin t = 0} \Rightarrow \frac{t}{4} = \sin t \Rightarrow \boxed{t_1 = 2x = 0} \quad t_2 = 2.475 = 2x$$

$$x = 1.2375,\ y = 0.78$$

כעת, לפי ~~...~~ ~~...~~ נציב, ב' λ:

$$\nabla\lambda = -y + \cos 2x = 0 = -y + 1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, \quad \nabla\lambda = -y + \cos 2x = 0 \Rightarrow y_2 = -0.315$$

קיבלנו $(0,1)$, ~~...~~ x^2+y^2 ⟸ $(0,1)$ נק' מינ'

~~נק' ... $(1.2375, 0.78)$~~ של x^2+y^2 ~~...~~ הכי גדולה.

נק' $(0.898, 0.102)$ מקס'.

$\cancel{\ell(x,x) = K(x,x) =}$

$\cancel{\ell(x)\cdot\ell(x) = K(x,x) = 7\ell_1(x)\cdot\ell_1(x) + 3\ell_2(x)\cdot\ell_2(y) =}$

② a.

נניח כי $\ell_1 : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_d$ אזי:

$\ell_2 : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$

$$K(x,y) = 7K_1(x,y) + 3K_2(x,y) =$$

$$7\ell_1(x)\ell_1(y) + 3\ell_2(x)\ell_2(y) =$$

$$\langle(\sqrt{7}\ell_{1_1}(x), \sqrt{7}\ell_{1_2}(x) \ldots \sqrt{7}\ell_{1_d}(x), \sqrt{7}\ell_{1_1}(y), \sqrt{7}\ell_{1_2}(y) \ldots \sqrt{7}\ell_{1_d}(y))\rangle +$$

$$\langle(\sqrt{3}\ell_{2_1}(x), \sqrt{3}\ell_{2_2}(x), \ldots \sqrt{3}\ell_{2_m}(x), \sqrt{3}\ell_{2_1}(y), \sqrt{3}\ell_{2_2}(y), \ldots \sqrt{3}\ell_{2_m}(y))\rangle =$$

$$\langle(\sqrt{7}\ell_{1_1}(x) \ldots \sqrt{7}\ell_{1_d}(x), \sqrt{3}\ell_{2_1}(x), \ldots \sqrt{3}\ell_{2_m}(x)), (\sqrt{7}\ell_{1_1}(y), \ldots \sqrt{7}\ell_{1_d}(y), \sqrt{3}\ell_{2_1}(y) \ldots \sqrt{3}\ell_{2_m}(y))$$
$$\rangle = \ell(x)\cdot\ell(y) = K(x,y)$$

כלומר, $\ell : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_{m+d}$ ו:

$$\ell(x) = (\sqrt{7}\ell_{1_1}(x), \sqrt{7}\ell_{1_2}(x) \ldots \sqrt{7}\ell_{1_d}(x), \sqrt{3}\ell_{2_1}(x), \sqrt{3}\ell_{2_2}(x) \ldots \sqrt{3}\ell_{2_m}(x))$$

(1) 6. נגדיר את w': $w' = (\frac{w_1}{\sqrt{7}}, \frac{w_2}{\sqrt{7}}, \dots \frac{w_m}{\sqrt{7}}, \overbrace{0, 0, \dots 0}^{|d|})$

יהי $x \in \mathbb{R}^{n}$. אזי

כאשר D^n זה הדוגמה במימד n

$$w' \cdot \phi(x) = \langle (\frac{w_1}{\sqrt{7}}, \frac{w_2}{\sqrt{7}}, \dots \frac{w_m}{\sqrt{7}}, 0, 0 \dots 0), (\sqrt{7}\phi_{1_1}(x), \sqrt{7}\phi_{1_2}(x) \dots \sqrt{7}\phi_{1_m}(x), \sqrt{3}\phi_{2_1}(x), \sqrt{3}\phi_{2_2}(x) \dots \sqrt{3}\phi_{2_k}(x)) \rangle =$$

$$\frac{w_1}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{7}\phi_{1_1}(x) + \frac{w_2}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{7}\phi_{1_2}(x) + \dots \frac{w_m}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{7}\phi_{1_m}(x) + 0 + 0 + \dots 0 =$$

$$w_1\phi_{1_1}(x) + w_2\phi_{1_2}(x) + \dots w_m\phi_{1_m}(x) = w \cdot \phi_1(x)$$

כלומר, קיבלנו כי w' מפריד לינארי עבור הדוגמה ומימד $\mathbb{R}^{m+d}$

(זאת כיוון שהפעולות שביצענו הביאו שהמימד ה-m ה"מימדים" הראשונים "שמורו" לביצוע ~~ל~~ לאחר פעולת המיפוי והמכפלה הוקטורית בין w' ל-$\phi(x)$ - דבר המבטיח כי $\phi(x)$ ניתן להפרדה לינארית)

c. ~~full rational full variety של הקרנל הפולינומי יש לב שלכל~~

נשים לב כי עבור $\beta=\alpha=1$, נקבל כי

$$K(x,y)=(x\cdot y+1)^d \Rightarrow \text{full rational variety mapping},$$

וכן, גם מהמקרה הכללי, נקבל זאת, אלא שמימד עבור φ, שווה $\binom{n+d}{n}$.

d. ~~נציג פונקציה אשר ממלאת את הדרוש~~

~~$\varphi = [g_i(x)]$~~

$$\varphi(x)=(g_1(x), g_2(x), \dots g_N(x))$$

כאשר

$$g_i=\begin{cases}\sqrt{5} & x\le i\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

לדוגמא: נניח $N=5$

$$\varphi(5)=(\sqrt{5},\sqrt{5},\sqrt{5},\sqrt{5},\sqrt{5})$$

$$\varphi(3)=(\sqrt{5},\sqrt{5},\sqrt{5},0,0)$$

$$\varphi(3)\cdot\varphi(5)=5+5+5+0+0=15=5\cdot 3=5\cdot\min(5,3)$$

e. נראה הפרכה: נניח $N=2$, $V=\{1,2\}$. אזי,

$\max(\varphi x,y)$ קרנל אם $\Rightarrow$ מטר.גרם, מוגדרת חיובית מהגדרה.

$$M=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{bmatrix}-1, & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\boxed{-1<0}$$

③ א. נגדיר את φ כך ש

$$\varphi(x)\varphi(y) = (x\cdot y+1)^3$$

(full rational variety)

ולכן

$$K(x,y) = (x\cdot y+1)^3 = \frac{1}{2}(x\cdot y+1)^3 + \frac{1}{2}(x\cdot y+1)^3$$

כלומר

$$K_1 = K_2 = (x\cdot y+1)^3,\quad \alpha=\beta=\frac{1}{2}$$

ב.

$$\varphi(x)\varphi(y) = (\sqrt{10}x_1^2, \sqrt{10}x_2^2, \sqrt{20}x_1x_2, \sqrt{8}x_1, \sqrt{8}x_2, \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{10}y_1^2, \sqrt{10}y_2^2, \sqrt{20}y_1y_2, \sqrt{8}y_1, \sqrt{8}y_2, \sqrt{2}) =$$

$$10x_1^2y_1^2 + 10x_2^2y_2^2 + 20x_1y_1x_2y_2 + 8x_1y_1 + 8x_2y_2 + 2 =$$

$$10(x_1^2y_1^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_2^2) + 8(x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{4}) =$$

$$10(x\cdot y)^2 + 8(x\cdot y + \frac{1}{4})$$

אז:

$$\alpha = 10,\ K_1 = (x\cdot y)^2,\ \beta = 8,\ K_2 = (x\cdot y + \frac{1}{4})$$

④ ג. המימד הוא $\binom{20+2}{20} = 231$,

$\varphi(x) =$ full rational variety of order 2 in input space of 20

X_1, X_2, X_3.

ג. לקח לחשב 14.425 שניות לחשב ע"י φ,
ורק 7.498 שניות ע"י הקרנל
(בשימוש ב sklearn.metrics.polynomial_kernel).

~~[illegible]~~

ניסוי זה ממחיש את העניין בגלל שם להראות ש
מכפלה עלים כיוון שהקרנל פחות יקר חישובית.