ANALIZA 1 - ZAPISKI

Gal Anton Gorše

Kazalo

1 ŠTEVILA

Naravna števila so števila, s katerimi štejemo. Označimo jih: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Na tej množici poznamo operaciji $+, \cdot$, torej lahko na njej seštevamo in množimo. Enačba $x + 5 = 3$ nima rešitve v $\mathbb{N}$, čeprav je izražena samo z naravnimi števili. Zato $\mathbb{N}$ razširimo na cela števila.

Množico celih števil označimo: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}$. Na njej imamo operaciji $+, \cdot$ in na množici celih števil lahko seštevamo, odštevamo in množimo. V $\mathbb{Z}$ ne moremo rešiti enačbe $2x - 1 = 0$, čeprav je izražena samo s celimi števili. Zato $\mathbb{Z}$ razširimo na množico racionalnih števil.

Elementi množice racionalnih števil $\mathbb{Q}$ so ulomki $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Pri tem sta dva ulomka $\frac{p}{q}$ in $\frac{p'}{q'}$ enaka tedaj in le tedaj, ko velja $pq' = p'q$. Ulomek $\frac{p}{q}$ je okrajšan tedaj in le tedaj, ko p in q nimata netrivialnih skupnih faktorjev. V $\mathbb{Q}$ imamo operaciji $+, \cdot$, torej lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo (s števili, različnimi od nič). Ogledali si bomo osnovne lastnosti računskih operacij seštevanja in množenja: aksiome.

1.1 Aksiomi operacij seštevanja in množenja.

Aksiom 1.1 (A1)**.** Asociativnost operacije seštevanja: za $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ velja

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Aksiom 1.2 (A2)**.** Komutativnost operacije seštevanja: za $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ velja

$$a + b = b + a.$$

Aksiom 1.3 (A3)**.** Obstoj nevtralnega elementa (enote) za seštevanje: obstaja $0 \in \mathbb{Q}$, da velja

$$a + 0 = a.$$

Aksiom 1.4 (A4)**.** Obstoj nasprotnega elementa za seštevanje: za $\forall a \in \mathbb{Q}$ obstaja nasprotno število $-a$, da velja

$$a + (-a) = 0.$$

Množica A z binarno operacijo z lastnostmi A1 – A4 je Abelova (komutativna) grupa, kot na primer $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ ali $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Posledica 1.1. *Za dani $a \in \mathbb{Q}$ je nasprotni element en sam (njegov obstoj zagotavlja aksiom A4).*

Dokaz. Naj bosta a' in a'' nasprotna elementa a. Tedaj velja $a + a' = 0$, $a + a'' = 0$ zaradi aksioma A4. Iz tega sledi

$$\begin{aligned} a' &\overset{(A3)}{=} a' + 0 \\ &\overset{(A4)}{=} a' + (a + a'') \\ &\overset{(A1)}{=} (a' + a) + a'' \\ &\overset{(A4)}{=} 0 + a'' \\ &\overset{(A3)}{=} a'' \end{aligned}$$

in a' in a'' sta enaka. □

Posledica 1.2 (Pravilo krajšanja)**.** *Iz $a + x = a + y$ sledi $x = y$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} a+x=a+y &\implies (-a)+a+x=(-a)+a+y \\ &\overset{(A4)}{\implies} 0+x=0+y \\ &\overset{(A3)}{\implies} x=y \end{aligned}$$

□

Posledica 1.3. *Enota za seštevanje je sama sebi nasprotno število:* $-0=0$

Dokaz. To je posledica tretjega in četrtega aksioma:

$$(-0)+0 \overset{(A4)}{=} 0 \overset{(A3)}{=} 0+0$$

in sledi $(-0)=0$ po pravilu krajšanja. □

Definicija 1.1. Za poljubni števili $a, b \in \mathbb{Q}$ definiramo operacijo odštevanja kot

$$a-b=a+(-b).$$

Posledica 1.4. *Število* $a-b$ *je edina rešitev enačbe* $x+b=a$*, za* $\forall a, b \in \mathbb{Q}$.

Dokaz. Dokazati moramo, da je rešitev take enačbe lahko le število oblike $a-b$ in pokazati, da $x=a-b$ res reši to enačbo. Denimo, da x reši enačbo $x+b=a$. Tedaj velja

$$\begin{aligned} x+b=a &\implies x+b+(-b)=a+(-b) \\ &\implies x=a-b \end{aligned}$$

Dokažimo še, da $a-b$ res reši to enačbo.

$$(a-b)+b=a+(-b)+b=a+0=a$$

□

Aksiom 1.5 (A5)**.** Asociativnost operacije množenja: za $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ velja

$$(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$$

Aksiom 1.6 (A6)**.** Komutativnost operacije množenja: za $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ velja

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Aksiom 1.7 (A7)**.** Obstoj nevtralnega elementa (enote) za operacijo množenja: obstaja $1 \in \mathbb{Q}$, da za $\forall a \in \mathbb{Q}$ velja

$$a \cdot 1 = a$$

Aksiom 1.8 (A8)**.** Obstoj recipročnega elementa za operacijo množenja: za $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ obstaja a^{-1}, da je

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Posledica 1.5. *Za* $a \neq 0$ *je recipročno število eno samo.*

Dokaz. Naj bo $a \neq 0$ in naj bosta a', a'' njegovi recipročni števili. Potem velja $a \cdot a' = 1$ in $a \cdot a'' = 1$

in sledi

$$\begin{aligned} a'' &= a'' \cdot 1 \\ &= a \cdot a' \cdot a'' \\ &= a'(a \cdot a'') \\ &= a' \end{aligned}$$

in posledično $a' = a''$. $\square$

Posledica 1.6 (Pravilo krajšanja)**.** *Če je $a \neq 0$, potem iz $ax = ay$ sledi $x = y$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} ax = ay &\implies a^{-1} \cdot ax = a^{-1} \cdot ay \\ &\implies 1 \cdot x = 1 \cdot y \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

$\square$

Aksiom 1.9 (A9)**.** Enota za seštevanje ni enaka enoti za množenje: $1 \neq 0$

Posledica 1.7. *Recipročna vrednost enote je enaka enoti sami:* $1^{-1} = 1$

Dokaz. Velja $1 \cdot 1^{-1} \overset{(A8)}{=} 1 \overset{(A7)}{=} 1 \cdot 1$, torej $1^{-1} \cdot 1 = 1 \cdot 1$ in po pravilu krajšanja mora veljati $1 = 1^{-1}$. $\square$

Opomba. Množica $A = \{0\}$ zadošča aksiomom A1-A8. A9 izključuje to možnost.

Aksiom 1.10 (A10)**.** Distributivnost: za $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ velja

$$a(b + c) = ab + ac$$

Posledica 1.8. *Za $\forall a \in \mathbb{Q}$ velja $a \cdot 0 = 0$*

Dokaz.

$$\begin{aligned} a + 0 &= a \\ &= a \cdot 1 \\ &= a \cdot (1 + 0) \\ &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a + a \cdot 0 \end{aligned}$$

Torej imamo $a + 0 = a + a \cdot 0$ in zaradi pravil krajšanja $a \cdot 0 = 0$. $\square$

Posledica 1.9. *Za $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ velja $(-a) \cdot b = -(ab)$*

Dokaz.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot b \\ &= (a + (-a)) \cdot b \\ &= ab + (-a)b \end{aligned}$$

Iz tega sledi $(-a)b = -(ab)$. $\square$

Izrek 1.10.

Edina rešitev enačbe $x \cdot b = a$ za $b \neq 0$ je $x = \frac{a}{b}$.

Dokaz. Če tak x obstaja, iz $x \cdot b = a$, $b \neq 0$ sledi $x = \frac{a}{b}$:

$$\begin{aligned} x \cdot b = a &\implies x \cdot b \cdot b^{-1} = a \cdot b^{-1} \\ &\implies x \cdot 1 = \frac{a}{b} \\ &\implies x = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Očitno je tudi, da $x = \frac{a}{b}$ reši to enačbo: $\frac{a}{b} \cdot b = a$. □

Če je (A,+,·) komutativen obseg ali polje, lahko rešimo lahko vsako enačbo $ax + b = c$, $a \neq 0$. Brez aksioma A8 je tak objekt komutativen kolobar.

Aksiom 1.11 (A11)**.** Urejenost: če je $a \neq 0$, je natanko eno od števil a in $-a$ pozitivno.

Opomba. Če je število $-a$ pozitivno, je a negativno. Število 0 ni niti pozitivno niti negativno.

Aksiom 1.12 (A12)**.** Usklajenost seštevanja in množenja z urejenostjo: za pozitivni števili a, b sta $a+b$ in $a \cdot b$ prav tako pozitivni števili.

Opomba. Za števili a, b lahko rečemo, da je a večje od b ($a > b$), če je njuna razlika $a - b$ pozitivno število. Število a je pozitivno natanko tedaj, ko je $a > 0$, in negativno natanko tedaj, ko je $a < 0$. Za pozitivni števili velja natanko ena od treh možnosti: $a > b$, $a < b$, ali $a = b$. Taka urejenost je linearna urejenost.

Posledica 1.11. *Tranzitivnost: Če velja $a > b$ in $b > c$, potem velja tudi $a > c$*

Dokaz.

$$\begin{aligned} a - b > 0,\ b - c > 0 &\implies (a - b) + (b - c) > 0 \\ &\implies a - c > 0 \\ &\implies a > c \end{aligned}$$

□

Posledica 1.12. *Iz $a > b$ sledi $a + c > b + c$*

Dokaz.

$$(a + c) - (b + c) = a - b > 0 \implies (a + c) > (b + c)$$

□

Posledica 1.13. *Iz $a > b$ in $c > 0$ sledi $ac > bc$*

Dokaz.

$$ac - bc = c(a - b) > 0 \implies ac > bc$$

□

Množica $(\mathbb{Q}, +, \cdot, >)$ z lastnostmi A1-A12 je urejen obseg. Vse te lastnosti ima tudi obseg realnih števil $\mathbb{R}$. Kaj je lastnost, ki naredi $\mathbb{R}$ bistveno drugačno od $\mathbb{Q}$?

Izrek 1.14.

Enačba $x^2 = 2$ nima rešitve v množici racionalnih števil.

Dokaz. Denimo, da obstaja $x \in \mathbb{Q}$, da velja $x^2 = 2$. Naj bo $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ okrajšan ulomek, torej p in q nimata netrivialnih skupnih deliteljev:

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{q^2} = 2 &\implies p^2 = 2q^2 \\ &\implies p = 2p' \\ &\implies 4p'^2 = 2q^2 \\ &\implies q^2 = 2p'^2 \\ &\implies q = 2q'\end{aligned}$$

Vidimo, da 2 deli p in q, kar je protislovje. Torej enačba $x^2 = 2$ res nima rešitev v množici $\mathbb{Q}$. $\square$

1.2 Omejenost nepraznih množic

Definicija 1.2. Naj bo S neprazna množica z linearno urejenostjo $>$.

1. Neprazna množica $A \subseteq S$ je navzgor omejena, če obstaja tak $M \in S$, da je $\forall a \in A,\ a \leq M$ in M je zgornja meja.

2. Neprazna množica $A \subseteq S$ je navzdol omejena, če obstaja tak $m \in S$, da je $\forall a \in A,\ a \geq m$ in m je spodnja meja.

3. Neprazna množica $A \subseteq S$ je omejena, če je navzgor in navzdol omejena.

Opomba. Če je $A \subseteq S$ neprazna navzgor omejena množica, ima zgornjo mejo v vsakem številu $M' > M$.

Definicija 1.3. Naj bo $A \neq \emptyset$ navzgor omejena množica v $S \subseteq \mathbb{Q}$. Število $b \in S$ je supremum ali natančna zgornja meja množice A (označimo $b = \sup A$), če velja:

1. za $\forall a \in A$ je $a \leq b$

2. za $\forall b' < b$ obstaja tak $a' \in S$, da velja $b' < a' \leq b$. To lahko zapišemo tudi drugače:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists a' \in A : b - \varepsilon < a' \leq b$$

Zgled 1.1. *Obstaja navzgor omejena množica racionalnih števil, ki nima supremuma.*

Dokaz. Naj bo $A = \{a \in \mathbb{Q}; a \geq 0 \text{ in } a^2 \leq 2\}$. Ta množica je navzgor omejena, saj za $a < 2$ velja $a^2 > 4 > 2$. Denimo, da obstaja $b = \sup A \in \mathbb{Q}$. Če je $b^2 = 2$, pridemo do protislovja po izreku 1.14. Torej mora veljati bodisi $b^2 < 2$ bodisi $b^2 > 2$. Če je $b^2 < 2$, potem lahko izberemo tak $0 < h < 1$, da velja $b + h > b$ in $(b + h)^2 < 2$, kar je protislovje. Res, naj bo $h = \frac{1}{3}\frac{2-b^2}{2b+1}$. Ker je $b > 0$, velja $0 < h < 1$ in $h \in \mathbb{Q}$. Sedaj pa je

$$(b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 < b^2 + 2bh + h < 2$$

in smo prišli do protislovja. Podobno pokažemo še za drugo možnost. Če je $b^2 > 2$, potem lahko izberemo tak $0 < h < b$, da velja $b - h < b$ in $(b - h)^2 > 2$, kar je protislovje. Sedaj izberemo

$h = \frac{b^2-2}{2b}$. Očitno velja $0 < h < b$ in $h \in \mathbb{Q}$. Sedaj velja:

$$(b-h)^2 = b^2 - 2bh + h^2 > b^2 - 2bh = 2$$

in smo prišli do protislovja. $\square$

Aksiom 1.13 (A13 - Dedekindov aksiom)**.** Vsaka neprazna navzgor omejena množica ima natančno zgornjo mejo.

Opomba. Dedekindov aksiom ne velja za $\mathbb{Q}$.

Izrek 1.15 (Obstoj množice realnih števil $\mathbb{R}$)**.**

Obstaja urejen obseg števil $\mathbb{R}$, ki zadošča tudi aksiomu A13 in ki vsebuje obseg racionalnih števil kot urejen podobseg ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$), operaciji $+, \cdot$ in urejenost v obsegu $\mathbb{R}$ pa sovpadajo s tistimi v $\mathbb{Q}$. Tak urejen obseg je en sam do izomorfizma natančno.

Definicija 1.4. Rez je taka neprazna množica $A \subseteq \mathbb{Q}$, ki ni ves $\mathbb{Q}$, da velja:

1. če je $a \in A$ in $a' < a$, potem je $a' \in A$
2. za vsak $a \in A$ obstaja a'', tako da velja $a'' > a$ in $a'' \in A$

Opomba. Reze si lahko predstavljamo kot odprte v levo neomejene poltrake.

Zgled 1.2. *Za $r \in \mathbb{Q}$ je $r^* = \{a \in \mathbb{Q};\ a < r\}$ rez, ki predstavlja racionalno število r.*

Množico $\mathbb{R}$ vpeljemo tako, da realna števila predstavimo z rezi (kot v zgornjem zgledu) in na njih vpeljemo operacije in urejenost $+, \cdot, >$. Preveriti moramo, da za definirane operacije veljajo aksiomi A1 - A13.

Definicija 1.5. Relacijo $>$ na rezih vpeljemo z relacijo stroge inkluzije. Za reza A, B velja $A < B$ natanko tedaj, ko velja $A \subset B$.

Opomba. Za poljubna dva reza veljajo natanko 3 možnosti: $A < B, A > B$ ali $A = B$.

Kdaj je rez A pozitiven? Vemo, da velja $A > 0^*$ natanko tedaj, ko $0^* \subset A$ oz. A vsebuje vsa negativna racionalna števila in število 0.

Definicija 1.6. Naj bosta A, B reza. Potem je njuna vsota enaka $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$.

Posledica 1.16. *Za tako definirano operacijo rezov veljajo naslednje trditve:*

1. *Množica $A + B$ je rez.*
2. *Za $p, q \in \mathbb{Q}$ velja $p^* + q^* = (p + q)^*$.*
3. *Za operacijo seštevanja na rezih veljajo aksiomi A1-A3.*

Dokaz 1. točke. Po točkah dokažemo, da je $A + B$ rez.

1. Naj bo $s < r$ za nek $r \in A + B$. Vemo, da velja $r = a + b$ za neka $a \in A, b \in B$. Potem velja $s = (a - (r - s)) + b$ in $s \in A + B$.

2. Za vsak $r \in A + B$, kjer je $r = a + b$, obstajata $a' \in A$, $b' \in B$, da velja: $a' > a$ in $b' > b$, iz česar sledi $r' = a' + b' > r$ in $r' \in A + B$.

3. Ker velja $A \neq \emptyset$ in $B \neq \emptyset$, sledi $A + B \neq \emptyset$ in A+B ni prazna množica. Iz definicije rezov sledi, da je $A + B$ navzgor omejena množica, saj bi sicer zaradi lastnosti 1 bil enak $\mathbb{Q}$, kar pa smo izključili. □

Dokaz 2. točke. Dokažemo v obeh smereh:

1. Za vse $r \in (p+q)^*$ po definiciji velja $r < p + q$ in zato obstajata $p' < p$, $q' < q$, da velja $r = p' + q'$. Ker je $p' \in p^*$ in $q' \in q^*$, sledi $r = p' + q' \in p^* + q^*$.

2. Za vse $r \in p^* + q^*$ po definiciji obstajata $p' \in p^*$, $q' \in q^*$, da je $r = p' + q'$. Iz tega sledi $r = p' + q' < p + q$ in $r \in (p+q)^*$. □

Definicija 1.7. Nasprotni rez reza A definiramo kot $-A = \{r \in \mathbb{Q};\ \exists r' > r,\ -r' \notin A\}$.

Posledica 1.17. *Za nasprotni rez reza A veljata naslednji trditvi:*

1. Množica $-A$ je rez.

2. Za tako definiran nevtralni element velja tudi aksiom A4 oziroma: $A + (-A) = 0^*$.

Dokaz 1. točke. Ponovno po točkah dokažemo, da je $-A$ rez.

1. Naj bo $r \in -A$ in $s < r$. Potem obstaja tak r', da velja $r < r'$ in $-r' \notin A$. Iz tega sledi, da obstaja za vsak s tak r', da velja $s < r < r'$ in $-r' \notin A$, torej $s \in -A$.

2. Naj bo $r \in -A$. Potem velja $\exists r' > r : -r' \notin A$. Potem lahko najdemo element $s = \frac{r+r'}{2} \implies r < s < r'$, tako da je $s \in -A$.

3. Naj bo $r' \notin A$, saj A ni ves $\mathbb{Q}$. Potem za vsak $r < -r'$ velja $r \in -A$ in $-A$ je neprazna množica. Naj bo $s \in A$, saj je A neprazna množica. Potem velja $-s \notin -A$ in $-A$ ni ves $\mathbb{Q}$. □

Definicija 1.8. Naj bosta A, B pozitivna reza. Množenje na rezih definiramo kot

$$A \cdot B = \{a \cdot b; a \geq 0, a \in A, b \geq 0, b \in B\} \cup 0^*,$$

recipročni rez reza A pa definiramo kot

$$A^{-1} = \{r \in \mathbb{Q};\ r \geq 0,\ \exists r' > r,\ \frac{1}{r'} \notin A\} \cup 0^*$$

Posledica 1.18. *Podobno kot prej velja, da sta $A \cdot B$ in A^{-1} reza, $p^* \cdot q^* = (p \cdot q)^*$ in za tako definirano operacijo množenja na pozitivnih rezih veljajo aksiomi A5-A8. Dokazi so skoraj popolnoma enaki.*

Sedaj lahko množenje razširimo še na ostale reze:

1. če je $A > 0$ in $B < 0$, potem $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$

2. če je $A < 0$ in $B > 0$, potem $A \cdot B = -((-A) \cdot B)$

3. če je $A, B < 0$, potem $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$

4. če je $A = 0$ ali $B = 0$, potem $A \cdot B = 0$

Posledica 1.19. *Za tako definirani operaciji seštevanja in množenja in ureditvijo $>$ na množici rezov veljajo aksiomi A1-A12.*

Izrek 1.20.

Za urejen obseg rezov z operacijama seštevanja in množenja in ureditvijo $>$ velja aksiom A13.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{A}$ neprazna navzgor omejena množica rezov A in torej obstaja tak rez B, da velja $\forall A \in \mathcal{A} : A \leq B$. Radi bi dokazali, da obstaja natančna zgornja meja za $\mathcal{A}$. Definiramo $C = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Najprej pokažimo, da je C rez in da velja $C = \sup \mathcal{A}$.

1. Ker velja $\mathcal{A} \neq \emptyset$, obstaja $A \in \mathcal{A}$ in $A \neq \emptyset$, ker je A rez in je zato neprazen. Zato velja $A \subseteq C$ in $C \neq \emptyset$, torej je C neprazen.

2. Ker je $\mathcal{A}$ navzgor omejena, obstaja tak rez B, da velja $\forall A \in \mathcal{A} : A \subseteq B$ in $C = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subseteq B$. Ker je B rez, velja $B \neq \mathbb{Q}$ in torej tudi C ni ves $\mathbb{Q}$.

3. Naj bo $c \in C$. Potem obstaja tak $A \in \mathcal{A}$, da velja $c \in A$. Za vsak $c' \in \mathbb{Q}$, $c' < c$ velja $c' \in A$ in posledično $c' \in C$.

4. Naj bo $c \in C$. Potem obstaja tak $A \in \mathcal{A}$, da velja $c \in A$. Potem obstaja tak $c' \in A$, da je $c' > c$ in iz tega sledi $c' \in C$.

Iz točk 1-4 sledi, da je C rez. Ker velja $A \subseteq C$ za $\forall A \in \mathcal{A}$, sledi $A \leq C$ za $\forall A \in \mathcal{A}$ in C je zgornja meja množice B. Naj bo rez $C' < C$. Iz definicije rezov sledi $C' \subset C$. Potem obstaja tak $c \in C = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, da velja $c \notin C'$ in rez $A \in \mathcal{A}$, da velja $c \in A$. Ker sta dva poljubna reza primerljiva po velikosti in $c \notin C'$, to pomeni , da je $C' < A$ in $C' \neq \sup B$. Torej smo dokazali, da je C natančna zgornja meja množice B. $\square$

Množica $\mathbb{R}$ je urejen obseg realnih števil, ki zadošča aksiomom A1-A13 in vsebuje $\mathbb{Q}$ kot urejen podobseg.

1.3 Posledice Dedekindovega aksioma

Definicija 1.9. Naj bo A neprazna navzdol omejena podmnožica $\mathbb{R}$. Število m je infimum ali natančna spodnja meja množice A, če velja:

1. za $\forall a \in A$ je $m \leq a$ (m je spodnja meja za A)

2. za $\forall m' > m$ obstaja $a' \in A$, da je $m \leq a' < m'$ oz. drugače zapisano

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists a' \in A : m + \varepsilon > a' \geq m$$

Posledica 1.21. *Vsaka neprazna navzdol omejena množica realnih števil ima infimum.*

Lema 1.22. *A je navzgor omejena natanko tedaj, ko je $A^- = \{a; -a \in A\}$ navzdol omejena.*

Dokaz. Če obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da velja $\forall a \in A : a \leq M$. Potem za $\forall a \in A$ velja $M \geq a$ in torej $-M \leq -a$. Tako je $m = -M$ po definiciji spodnja meja za A^-. S podobnim sklepom izjavo dokažemo še v nasprotno smer. $\square$

Dokaz. Trditev 1.21 je posledica A13. Naj bo A neprazna podmnožica $\mathbb{R}$ in $A^- = \{a; -a \in A\}$. Ker ima vsaka neprazna navzgor omejena množica v $\mathbb{R}$ supremum po A13, mora zaradi leme 1.22 imeti tudi vsaka neprazna navzdol omejena množica v $\mathbb{R}$ imeti infimum. Velja:

$$\inf A = -\sup(A^-), \quad \sup A = -\inf(A^-)$$ □

Definicija 1.10. Naj bo $A \neq \emptyset$ navzgor omejena množica v $\mathbb{R}$. Potem obstaja njen supremum $\sup A$. Če velja $\sup A \in A$, potem rečemo, da je to maksimum množice A.

Definicija 1.11. Naj bo $A \neq \emptyset$ navzdol omejena množica v $\mathbb{R}$. Potem obstaja njen infimum $\inf A$. Če velja $\inf A \in A$, potem rečemo, da je to minimum množice A.

Posledica 1.23. *Množica naravnih števil ni navzgor omejena v* $\mathbb{R}$.

Dokaz. Denimo, da je $\mathbb{N}$ navzgor omejena in ima supremum $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Potem po definiciji supremuma $c-1$ ni zgornja meja za $\mathbb{N}$ in obstaja $n \in \mathbb{N}$, da velja

$$c - 1 < n \leq c.$$

Iz teag pa sledi $n+1 > c$, kar pa seveda ni možno, saj je $n+1 \in \mathbb{N}$. Prišli smo v protislovje. □

Posledica 1.24. *Arhimedova lastnost realnih števil: za* $\forall a, b > 0$ *obstaja* $n \in N$*, da je* $an > b$.

Dokaz. Število $\frac{b}{a}$ ni zgornja meja za $\mathbb{N}$, torej obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $n > \frac{b}{a}$, iz česar sledi $n \cdot a > b$. □

Posledica 1.25. *Za* $\forall \varepsilon > 0$ *obstaja tak* $n \in \mathbb{N}$*, da je* $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Dokaz. Iz posledice 1.24 vemo, da za vsako po obstaja tako naravno število $n \in \mathbb{N}$, da velja $n\varepsilon > b$ oziroma $n > \frac{b}{\varepsilon}$. Če vstavimo $b = 1$, dobimo željeni rezultat $n > \frac{1}{\varepsilon}$ oziroma $\varepsilon > \frac{1}{n}$. □

Posledica 1.26. *Racionalna števila* $\mathbb{Q}$ *so povsod gosta v* $\mathbb{R}$*:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y:\ \exists r \in \mathbb{Q}:\ x < r < y$$

Dokaz. Sprva se bomo omejili na primer $y - x > 1$, nato pa bomo splošen primer $y - x > 0$ prevedli na prvega.

1. Osredotočimo se na primer $y - x > 1$. Dokazati želimo, da obstaja $p \in \mathbb{Z} : x < p < y$. Vzemimo $A = \{m \in \mathbb{Z}; m \leq x\}$. Vemo, da obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $-x < n$, zato mora veljati tudi $-n < x$. Množica A torej zagotovo ni prazna. Prav tako je očitno, da je x zgornja meja za A, zato ima A tudi supremum. Označimo $p' = \sup A$ in očitno sledi $p' \leq x$ in $p' + 1 > x$. Že od predpostavke vemo, da velja $y - x > 1$. Od tod $p' \leq x < y - 1$ in posledično $p' + 1 < y$. Hkrati pa velja $p' + 1 > x$, torej je $p = p' + 1$ celo število, za katerega velja
$$x < p < y.$$

2. Vzemimo splošen primer $y - x > 0$. Potem obstaja tak $q \in \mathbb{N}$, da je $q(y - x) > 1$, torej $qy - qx > 1$ in obstaja celo število p, da je $qx < p < qy$. Sedaj le še delimo s $q \neq 0$ in dobimo
$$x < \frac{p}{q} < y.$$ □

Oznake za posebne množice realnih števil:

Definicija 1.12. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

1. Zaprt interval definiramo kot $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$.
2. Odprt interval definiramo kot $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.
3. Polodprta intervala: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ in $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

Definicija 1.13. Naj bo $a \in \mathbb{R}$.

1. Odprta poltraka: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$ in $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$.
2. Zaprta poltraka: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$ in $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$.

Uporabljamo lahko tudi oznako $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Razširjeni sistem realnih števil je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, vendar pa operaciji $+, \cdot$ ne razširimo na $\overline{\mathbb{R}}$.

1.4 Absolutna vrednost realnega števila

Definicija 1.14. Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo absolutno vrednost kot

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

Izrek 1.27 (Trikotniška neenakost)**.**

Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Enakost velja natanko tedaj, ko sta x, y enako predznačena.

Zgled 1.3. *Rešimo neenačbo $|x - a| < r$ za $a \in \mathbb{R}$ in $r > 0$. Obravnavamo dva primera. Če je $x - a \geq 0$ oziroma $x - a < r$, potem velja $x \in [a, a + r)$, če pa $x - a < 0$ oziroma $a - x < r$, potem je $x \in (a - r, a]$. Torej velja $x \in [a, a + r) \cup (a - r, a] = (a - r, a + r)$.*
Tako dobimo pojma odprte in zaprte okolice s polmerom r:

$$\{x \in \mathbb{R}, |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$$
$$\{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]$$

Posledica 1.28. *Za $\forall x, y \in \mathbb{R}$ velja $|x - y| \geq ||x| - |y||$*

Dokaz. Dvakrat uporabimo trikotniško neenakost in dobimo:

$$|x - y| + |y| \geq |x| \implies |x - y| \geq |x| - |y|$$
$$|y - x| + |x| \geq |y| \implies |y - x| \geq |y| - |x|$$

Od tod sledi $|x - y| \geq ||x| - |y||$ $\square$

1.5 Decimalni zapis realnih števil

Naj bo $x \in \mathbb{R}$. $[x]$ je celi del števila oz. največje celo število, ki je manjše ali enako x.

Definicija 1.15. Naj bo $x \geq 0$. Decimalni zapis števila x je $N, n_1 n_2 n_3 ...$, kjer je $N = [x]$ in $n_j \in \{0, 1, \cdots, 9\}$.

Decimalni zapis dobimo tako, da tvorimo naraščajoče zaporedje racionalnih približkov števila x. Število $x_0 = [x] = n$ – največje celo število, ki je manjše ali enako x – obstaja in zanj velja $[x] \leq x < [x] + 1$. Res, naj bo $A = \{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$. A je neprazna in navzgor omejena. Označimo $[x] = \sup A \leq x$, zaradi česar obstaja tak $n' \in A$, da velja

$$[x] - 1 < n' \leq [x] < n' + 1$$
$$x < n' + 1 \leq [x] + 1.$$

Iz obeh neenakosti sledi $[x] \leq x < [x]+1$, kar pa smo želeli dokazati. Sedaj je za $i \in \mathbb{N}$ $n_i \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ največje število, tako da velja

$$x_i = x_{i-1} + \frac{n_i}{10^i} \leq x < x_i + \frac{1}{10^i}.$$

Postopek nadaljujemo in dobimo naraščajoče zaporedje racionalnih števil $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x$, za katere velja

$$0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n}.$$

Izrek 1.29.

Število x je supremum množice racionalnih približkov števila x oziroma $x = \sup\{x_0, x_1, \cdots\}$.

Lema 1.30. *Če je $b > 0$, potem obstaja tak $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da je $0 < \frac{1}{10^k} < b$.*

Dokaz leme. Naj bo $A = \{10^n;\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Dokazati moramo, da A ni navzgor omejena. Če bi bila A omejena, bi imela supremum $m = \sup A$ in bi obstajal tak $n' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da bi veljalo:

$$m - 9 < 10^{n'} \leq m \implies m < 10^{n'} + 9 \leq 10^{n'+1} \in A$$

in pridemo do protislovja. □

Dokaz izreka. Množica $\{x_0, x_1, \cdots\}$ je neprazna in navzgor omejena z x, zato po aksiomu A13 obstaja $\sup\{x_0, x_1, \cdots\} = y \leq x$. Predpostavimo, da velja $y < x$. Zaradi 1.30 velja, da obstaja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da velja

$$\frac{1}{10^k} < x - y \leq x - x_k < \frac{1}{10^k},$$

kar pa je seveda nemogoče. □

Vsakemu realnemu številu smo priredili natanko določen decimalni zapis. Vsakemu decimalnemu zapisu pripada natanko eno realno število, a obstajajo različni decimalni zapisi, ki jim pripada isto realno število.

Zgled 1.4. *Obstajajo različni decimalni zapisi, ki jim pripada isto realno število. Tak primer je recimo*

$$0.999\ldots = 1.000\ldots.$$

Pri naši konstrukciji bi lahko prišli zgolj do števila $1.000\ldots$, ne pa $0.999\ldots$.

Število je racionalno, natanko tedaj ko je njegov zapis od nekod dalje periodičen. Iracionalna števila nimajo periodičnega zapisa.

Definicija 1.16. Število $r \in \mathbb{R}$ je algebraično, če obstaja polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

s koeficienti $a_n, \cdots, a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$ in velja $p(r) = 0$. Vsa racionalna števila so algebraična. Primer algebraičnega števila je $\sqrt{2}$. Realna števila, ki niso algebraična, so transcendentna, npr. π.

1.6 Peanovi aksiomi

Peanovi aksiomi so aksiomi množice naravnih števil $\mathbb{N}$.

Aksiom 1.14 (P1)**.** 1 je naravno število

Aksiom 1.15 (P2)**.** Vsakemu naravnemu številu n sledi natančno določeno naravno število n^+, ki ga imenujemo naslednik števila n

Aksiom 1.16 (P3)**.** Iz $n \neq m$ sledi $n^+ \neq m^+$.

Aksiom 1.17 (P4)**.** Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.

Aksiom 1.18 (P5 - Princip popolne indukcije)**.** Vsak podmnožica naravnih števil, ki vsebuje število 1 in je v njej s številom n vedno tudi njegov naslednik n^+, vsebuje vsa naravna števila, t.j. če velja $P \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in P$ in $n \in P \implies n^+ \in P$, potem velja $P = \mathbb{N}$.

S pomočjo P1 - P5 na množici $\mathbb{N}$ uvedemo operaciji seštevanja in množenja.

Definicija 1.17. Naj bo $p \in \mathbb{N}$. Definirati moramo $p + k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$.

1. Definirajmo $p + 1 = p^+$.
2. Če poznamo $p + k$, definiramo $p + (k + 1) = (p + k)^+$.
3. Po P5 smo tako definirali $p + k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.18. Naj bo $p \in \mathbb{N}$. Definirati moramo $p \cdot k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$.

1. Definirajmo $p \cdot 1 = p$.
2. Če poznamo $p \cdot k$, definiramo $p \cdot (k + 1) = pk + p$.
3. Po P5 smo tako definirali vse produkte $p \cdot k$ za $k \in \mathbb{N}$.

1.7 Uporaba Dedekindovega aksioma A13 za dokaz obstoja korenov, potenc z realnimi eksponenti in logaritmov

Izrek 1.31 (Obstoj n-tega korena)**.**

Za vsako pozitivno realno število $x > 0$ in naravno število $n \in \mathbb{N}$ obstaja natanko eno število $y > 0$, da velja enačba $y^n = x$. Označimo ga $y = \sqrt[n]{x}$. Če $x = 0, y = 0$ in če je n liho število, izrek velja za $x < 0,\ y < 0$.

Dokaz. Najprej dokažimo enoličnost. Denimo, da števili $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $0 < y_1 < y_2$ obe rešita enačbo $y^n = x$. Potem velja
$$y_2^n - y_1^n = (y_2 - y_1)(\cdots) = 0,$$
kar pa je nemogoče in smo prišli v protislovje. Tako smo dokazali enoličnost: če rešitev y obstaja, je zgolj ena.

Dokažimo še obstoj: če $x = 1$, potem je $y = 1$. Naj bo torej $x > 1$ in $E = \{t \geq 0; t \in \mathbb{R}, t^n \leq x\}$. E je neprazna množica, saj velja $0 \in E$. Če je $t > x$, potem sledi $t^n > x^n \geq x$ zaradi $x > 1$. Torej za $\forall t \in E$ velja $t \leq x$ in x je zgornja meja za E. Ker je E neprazna navzgor omejena množica, po aksiomu A13 obstaja njen supremum: $y = \sup E$.

Trdimo, da velja $y^n = x$. Denimo, da to ne drži. Predpostavimo, da je $y^n < x$. Dokazali bomo, da obstaja tak $0 < h < 1$, da je $(y+h)^n < x$ in $(y+h) \in E$. Naj bo $b = \binom{n}{1}y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}y + 1$. Res, zaradi neomejenosti naravnih števil obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da velja $0 < h = \frac{1}{k}\frac{x-y^n}{b} < 1$. Od tod sledi:
$$\begin{aligned}(y+h)^n &= y^n + \binom{n}{1}y^{n-1}h + \cdots + \binom{n}{n-1}yh^{n-1} + h^n \\ &< y^n + h\left(\binom{n}{1}y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}y + 1\right) \\ &= y^n + hb < x\end{aligned}$$
in smo dokazali, da je $y + h \in E$ in zato y ne more biti $\sup E$. Podobno eliminiramo možnost $y^n > x$. Poiščemo tak $0 < h < 1$, da je $(y-h)^n > x$ in tedaj velja $y \neq \sup E$. Res, naj bo $b = \binom{n}{1}y^{n-1} + \binom{n}{3}y^{n-3} + \cdots > 0$ in $k \in \mathbb{N}$ tako število, da velja $0 < h = \frac{1}{k}\frac{y^n - x}{b} < 1$. Sedaj velja:
$$\begin{aligned}(y-h)^n &= y^n - \binom{n}{1}y^{n-1}h + \binom{n}{2}y^{n-2}h^2 - \binom{n}{3}y^{n-3}h^3 + \binom{n}{4}y^{n-4}h^4 + \cdots \\ &> y^n - \binom{n}{1}y^{n-1}h - \binom{n}{3}y^{n-3}h^3 - \cdots \\ &> y^n - h\left(\binom{n}{1}y^{n-1} + \binom{n}{3}y^{n-3} + \cdots\right) \\ &= y^n - hb > x\end{aligned}$$
in smo dokazali, da je $y - h \notin E$, kar pomeni, da y ni natančna zgornja meja. S tem smo dokazali, da velja $y^n = x$.

Sedaj pa moramo obravnavati še primer $0 < x < 1$. Velja $\frac{1}{x} > 1$ in tako po prejšnjem argumentu obstaja tak $y' > 0$, da velja $y'^n = \frac{1}{x}$. Torej za $y = \frac{1}{y'}$ velja $y^n = x$. □

Definicija 1.19. Naj bo $b > 0$ in $n \in \mathbb{N}$. Definiramo $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$. Za poljuben ulomek definiramo $b^{\frac{m}{n}} = (b^{\frac{1}{n}})^m$

Za tako definirane potence veljajo tri osnovna pravila potenciranja.

Trditev 1.32 (Osnovna pravila potenciranja)**.** *Za $a, b \in \mathbb{Q}$ velja:*

1. $b^r \cdot b^s = b^{r+s}$
2. $(b^r)^s = b^{rs}$
3. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

Definicija 1.20. Definirali bomo b^x za $b > 0$ in $x \in \mathbb{R}$:

1. Če je $b = 1$, definiramo $1^x = 1$
2. Če je $b > 1$, definiramo $b^x = \sup\{b^r;\ r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}$
3. Če je $0 < b < 1$, velja $b^x = (\frac{1}{b})^{-x}$, kar smo pa že definirali pri 2. točki.

Opomba. Definicija v 2. točki je smiselna, saj je množica $\{b^r;\ r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}$ neprazna in zaradi monotonosti navzgor omejena: če je $s \in \mathbb{Q},\ s > x$, za vsak $r \leq x$ velja $r < s$ in zato $b^r < b^s$ in tako je b^s zgornja meja za to množico. Torej supremum te množice obstaja in za $x \in \mathbb{Q}$ sovpada z že znano definicijo b^x. Tudi za tako definirane potence veljajo zgoraj navedena osnovna pravila potenciranja (ker ta veljajo za racionalne potence in definicije s supremumom).

Lema 1.33. *Množica $\{b^n; n \in \mathbb{N}\}$, kjer je $b > 1$, ni navzgor omejena.*

Dokaz. Če bi bila, bi imela supremum c. Potem mora obstajati takšen $n' \in \mathbb{N}$, da velja $c-(b-1) < b^{n'} \leq c$ in potem zaradi $1 < b^{n'}$ sledi

$$c < b^{n'} + (b-1) < b^{n'+1},$$

kar pa je protislovje. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak n, da je $0 < b^{-n} < \varepsilon$. □

Izrek 1.34 (Obstoj logaritma).

Naj bo $b > 0,\ b \neq 1$. Za vsak $x > 0$ obstaja tak enolično določen $y \in \mathbb{R}$, da je $b^y = x$. Potem je y logaritem z osnovo b števila x: $y = \log_b x$.

Dokaz. Enoličnost je očitna. Dokažimo obstoj: Naj bo $b > 1$ in $E = \{t \in \mathbb{R};\ b^t \leq x\}$. Množica E je neprazna, saj obstaja nek $n \in \mathbb{N}$, da je $b^{-n} < x$, torej $-n \in E$ (posledica leme 1.33). Prav tako je E navzgor omejena, saj obstaja tak n', da velja $x < b^{n'}$, torej je n' zgornja meja za E. Ker je E neprazna in navzgor omejena, ima supremum. Naj bo $y = \sup E$. Trdimo, da je $b^y = x$. Če to ni res, velja bodisi $b^y < x$ bodisi $b^y > x$.

Predpostavimo prvo možnost. Potem lahko najdemo tak $n \in \mathbb{N}$, da velja $b^{y+\frac{1}{n}} < x$ oz. ekvivalentno $b^{\frac{1}{n}} < \frac{x}{b^y}$. Res, naj bo $\frac{x}{b^y} = a > 1$ in $n > \frac{b-1}{a-1}$. Zapišimo $b^{\frac{1}{n}} = 1 + p_n$ in sedaj velja $b = (1+p_n)^n > 1 + np_n$. Od tod pa sledi

$$b^{\frac{1}{n}} - 1 = p_n < \frac{b-1}{n} < a - 1.$$

in posledično $b^{\frac{1}{n}} < a$, torej y ni zgornja meja množice E.

Sedaj pa še primer $b^y > x$. Poiščemo lahko tak $n \in \mathbb{N}$, da velja: $b^{y-\frac{1}{n}} > x$ oz. ekvivalentno $b^{\frac{1}{n}} < \frac{b^y}{x}$. Res, naj bo $\frac{b^y}{x} = a > 1$ in ponovno izberemo $n > \frac{b-1}{a-1}$. Zapišemo $b^{\frac{1}{n}} = 1 + p_n$ in sedaj velja $b = (1+p_n)^n > 1 + np_n$. Od tod pa sledi

$$b^{\frac{1}{n}} - 1 = p_n < \frac{b-1}{n} < a - 1.$$

in posledično $b^{\frac{1}{n}} < a$, torej y ni natančna zgornja meja množice E.

Sedaj pa obravnavajmo še primer $0 < b < 1$. Potem velja $\frac{1}{b} > 1$ in po zgornjem argumentu obstaja tak y', da velja $\left(\frac{1}{b}\right)^{y'} = \frac{1}{x}$, kar pa je ekvivalentno $b^{y'} = x$. □

Opomba. Do sedaj smo spoznali množice $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Zdi se, da smo vsakič naredili 'najmanjšo' razširitev: v $\mathbb{Z}$ lahko vedno odštevamo, v $\mathbb{Q}$ lahko delimo z vsakim od 0 različnim številom. Ali obstaja kakšen $\mathbb{F}$, da je $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$?

Kot smo videli, lahko v $\mathbb{R}$ rešimo vse enačbe $x^n = a$ za $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$. Enolična pozitivna rešitev je $a^{\frac{1}{n}}$ in marsikatero od teh enačb ne moremo rešiti v $\mathbb{Q}$. Zato lahko $\mathbb{Q}$ dodamo rešitev le ene take enačbe, npr. $\sqrt{2}$, in dobimo obseg $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$, ki je zaprt za npr. operacije seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ je razširitev obsega $\mathbb{Q}$, v kateri lahko rešimo enačbo $x^2 = 2$, ne moremo pa rešiti enačbe $x^2 = 3$.

Kljub temu, da lahko v $\mathbb{R}$ poiščemo vse korene pozitivnih števil, ne moremo rešiti enačbe $x^2 + 1 = 0$, saj za $\forall x \in \mathbb{R}$ velja $x^2 + 1 > 0$. Želimo dobiti razširitev $\mathbb{R}$ z enim številom i, da bo enačba $x^2 + 1 = 0$ v tej razširitvi rešljiva: $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$. Tako dobimo obseg kompleksnih števil $\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$, ki ni urejen. Število i je (ena od dveh) rešitev enačbe $z^2 + 1 = 0$. i je imaginarna enota: $i^2 = -1$

1.8 Obseg kompleksnih števil

Definicija 1.21. Za kompleksni števili $z = a + bi$, $w = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiramo operacijo seštevanja in množenja kot $z + w = (a + c) + (b + d)i$ in $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Multiplikativni inverz števila $z \neq 0$ je

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Definicija 1.22. Za $z = a + bi$ definiramo konjugirano število $\overline{z} = a - bi$.

Definicija 1.23. Realni in imaginarni del kompleksnega števila $z = a + bi$, kjer je $a, b \in \mathbb{R}$, sta $a = \Re z = \frac{z + \overline{z}}{2}$ in $b = \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2}$.

Definicija 1.24. Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Opomba. Iz zgoraj navedenih točk sledi, da za operaciji seštevanja in množenja na kompleksnih številih veljajo aksiomi A1-A10. Omembe vredno je tudi dejstvo, da velja $|\Re z| \leq |z|$ in $|\Im z| \leq |z|$.

Posledica 1.35. *Lastnosti absolutne vrednosti z*

1. *Za vsako število $z \in \mathbb{C}$ velja $|z| \geq 0$.*
2. *Za $z \in \mathbb{C}$ velja $|z| = 0$ natanko tedaj, ko je $z = 0$.*
3. *Za poljubni števili $z, w \in \mathbb{C}$ velja $|zw| = |z||w|$.*
4. *Za poljubni števili $z, w \in \mathbb{C}$ velja $|z + w| \leq |z| + |w|$ (trikotniška neenakost).*

Dokaza za (1) in (2) sta trivialna, saj $|z| = a^2 + b^2$.

Dokaz 3. točke. Naj bo $z = a + bi$ in $w = c + di$. Potem je $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$ in od tod sledi

$$\begin{aligned}
|zw|^2 &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \\
&= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\
&= |z|^2|w|^2
\end{aligned}$$

□

Dokaz 4. točke.

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2\Re(z\overline{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w^2| \\
&= |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w^2| \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w^2| \\
&= (|z|+|w|)^2
\end{aligned}$$

□

Kompleksna števila lahko identificiramo s pari realnih števil $a+bi \sim (a,b),\ a,b \in \mathbb{R}$. Torej lahko kompleksna števila predstavimo v ravnini. Taki ravnini se reče Gaussova ravnina (ima imaginarno in realno os). Število $\overline{z}$ lahko dobimo z zrcaljenjem števila z preko realne osi. $|z|$ pomeni oddaljenost števila z od koordinatnega izhodišča.

Definicija 1.25. Za $z,w \in \mathbb{C}$, je $d(z,w) = |z-w|$ razdalja med z in w. Taki funkciji $d(z,w)$ rečemo metrika.

Opomba. Lastnosti metrike razdalje v $\mathbb{C}$:

1. Razdalja med številoma $z,w \in \mathbb{C}$ v kompleksni ravnini je pozitivna: $d(z,w) \geq 0$
2. Razdalja med številoma $z,w \in \mathbb{C}$ je $d(z,w) = 0$ natanko tedaj, ko je $z = w$.
3. Razdalja med z in w je enaka razdalji med w in z: $d(z,w) = d(w,z)$
4. Trikotniška neenakost: $d(z,w) \leq d(z,u) + d(w,u)$

Definicija 1.26. Naj bo $z \neq 0 \in \mathbb{C}$. Polarni zapis števila z je

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Opomba. Polarni kot $\phi \in [0,2\pi)$ je kot med pozitivnim delom realne osi in poltrakom od točke O do $z = a+bi$. Potem velja $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$, $\tan\phi = \frac{b}{a}$ in $\phi = \arg(z)$. Če je $z = 0$, kot ni določen in polarni zapis ni definiran. Realni in imaginarni del z lahko zapišemo kot $a = \Re z = |z|\cos\phi$ in $b = \Im z = |z|\sin\phi$. Polarni kot oz. argument števila z je določen do celega večkratnika 2π natančno, torej:

$$\cos(\phi+2\pi k) + i\sin(\phi+2\pi k) = \cos(\phi) + i\sin(\phi).$$

Računske operacije v $\mathbb{C}$ imajo posebno geometrijsko interpretacijo. Kompleksna števila recimo seštevamo tako kot vektorje oz. sile: za $z = a+bi$ in $w = c+di$ je

$$z+w = (a+c) + (b+d)i.$$

Pri množenju pa se absolutne vrednosti množijo in argumenti seštejejo. Naj bosta $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ in $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Potem velja

$$z \cdot w = ((\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi) + i(\sin\psi\cos\phi + \sin\phi\cos\psi))$$

in od tod dobimo $z \cdot w = |z||w|\,(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi))$. Množenje $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ s številom $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, $w \neq 0$ lahko interpretiramo dvofazno: množenje z z $|w|$ predstavlja razteg za faktor $|w|$, s čimer dobimo $|z||w|(\cos\phi + i\sin\phi))$, množenje s številom $(\cos\psi + i\sin\psi)$, ki ima absolutno vrednost 1 in leži na enotski krožnici, pa predstavlja zasuk v pozitivni smeri za kot ψ. Tako dobimo $|z||w|(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi))$.

Opomba. Množenje s kompleksnimi števili z enotske krožnice pomeni rotacijo oz. zasuk.

Posledica 1.36 (De Moivrova formula)**.** *Naj bo $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ neničelno kompleksno število in $n \in \mathbb{Z}$. Potem velja*

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)).$$

Zgled 1.5 (n-ti koreni enote in drugih kompleksnih števil)**.** *Rešimo enačbo $z^n = \alpha$, kjer je $\alpha \neq 0$, $\alpha = |\alpha|(\cos\theta + i\sin\theta)$ (če je $\alpha = 0$, je edina rešitev $z = 0$) in $n \in \mathbb{N}$. Naj bo $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ rešitev te enačbe. Potem velja:*

$$|z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = |\alpha|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

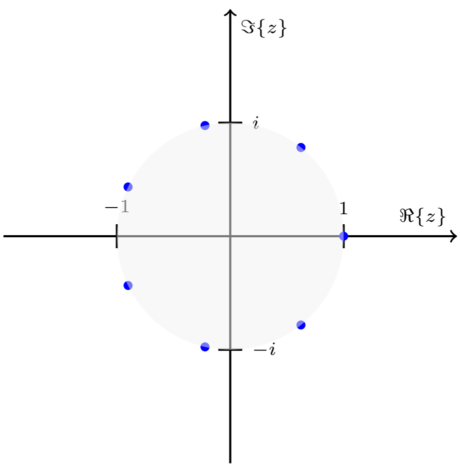
in od tod sledi $|z| = \sqrt[n]{|\alpha|}$ in $n\phi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Izrazimo kot ϕ in dobimo $\phi = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$. Za vsak $k \in \mathbb{Z}$ dobimo število

$$z_k = |\alpha|^{\frac{1}{n}}(\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})\right).$$

Opazimo, da velja $z_n = z_0$, $z_{n+1} = z_1$ itd. Zaradi tega za vsak $j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ velja $z_{n+j} = z_j$. Torej ima enačba $z^n = \alpha$ natanko n rešitev v $\mathbb{C}$ in sicer

$$z_k = |\alpha|^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})\right),$$

kjer k teče od $0, 1, \ldots, n-1$. Rešitve tvorijo oglišča pravilnega n-kotnika z oglišči na krožnici s središčem O in polmerom $|\alpha|^{\frac{1}{n}}$. Če je $\alpha = 1$, so to n-ti koreni enote.



Slika 1: Sedmi koreni enote

To je bil le poseben primer naslednjega izreka.

Izrek 1.37 (Osnovni izrek algebre)**.**

Obseg $\mathbb{C}$ *je algebraično zaprt oz. vsak nekonstanten polinom* $p(z)$ *s kompleksnimi koeficienti ima vsaj eno ničlo v* $\mathbb{C}$*, t.j. obstaja* $a \in \mathbb{C}$*, da je* $p(a) = 0$*.*

Posledica 1.38. *Vsak polinom* $p(z)$ *s kompleksnimi koeficienti in stopnje* $n \in \mathbb{N}$ *ima* n *ničel štetih s kratnostjo. To pomeni, da lahko* $p(z)$ *razcepimo na produkt* n *linearnih faktorjev*

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n),$$

kjer je $a_n \neq 0$ *vodilni koeficient polinoma,* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ *pa so njegove ničle.*

Opomba. S tem, da smo $\mathbb{R}$ dodali rešitev enačbe $x^2 + 1 = 0$, smo uspeli rešiti vse polinomske enačbe $p(z) = 0$, kjer $p(z)$ ni konstanten.

2 MNOŽICE IN PRESLIKAVE

Sistem teorije množic je ZFC (Zermelo-Fraenkel + aksiom izbire). Definirajmo nekaj osnovnih operacij med množicami $A, B \subseteq U$

Definicija 2.1. U je neka univerzalna množica objektov, o katerih govorimo: velja $A \subseteq U$ oz. A je podmnožica množice U.

Definicija 2.2. A je podmnožica množice B, natanko tedaj ko so vsi elementi A hkrati v B:

$$A \subseteq B \iff \forall a : (a \in A \implies a \in B).$$

Definicija 2.3. Množici A in B sta enaki, ko vsebujeta natanko enake elemente:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Definicija 2.4. Prazna množica je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa. Označimo jo s simbolom $\emptyset$ in zanjo velja: $\emptyset \subseteq A,\ \forall A$.

Definicija 2.5. Unija množic A in B je množica vseh elementov, ki so v A ali v B:

$$A \cup B = \{x \in U;\ x \in A \vee x \in B\}.$$

Definicija 2.6. Presek množic A in B je množica vseh elementov, ki pripadajo A in B:

$$A \cap B = \{x \in U;\ x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definicija 2.7. Komplement množice A je množica vseh elementov U, ki ne pripadajo A:

$$A^{\mathsf{c}} = \{x \in U;\ x \notin A\},\ A \cup A^{\mathsf{c}} = U,\ A \cap A^{\mathsf{c}} = \emptyset.$$

Definicija 2.8. Množici A in B sta disjunktni, če velja $A \cap B = \emptyset$.

Definicija 2.9. Razlika množic A in B je:

$$A \setminus B = \{x \in U;\ x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^{\mathsf{c}}$$

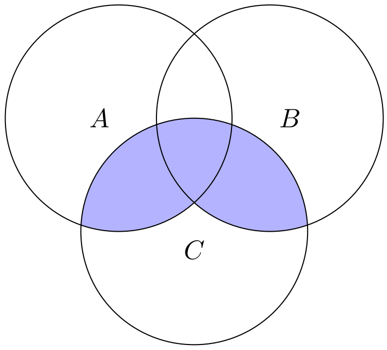
Izrek 2.1 (Distributivnost unije in preseka)**.**

Za poljubne množice A, B, C veljata naslednji identiteti:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (C \cup C)$$

Zgled 2.1.

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Slika 2: Vennov diagram množice $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Posledica 2.2. *Posplošitev na več množic (I je indeksna množica, $A_\alpha \subseteq U$ za $\forall \alpha \in I$).*

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \in U;\ \exists \alpha \in I,\ x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \in U;\ \forall \alpha \in I,\ x \in A_\alpha\}$$

Definicija 2.10. Potenčna množica množice X je množica, katere elementi so vse podmnožice X (vključno z $\emptyset$ in X):

$$P(X) = \{A;\ A \subseteq X\}$$

2.1 Preslikave med množicami

Definicija 2.11. Preslikava množice X v množico Y je pravilo, ki vsakemu elementu $x \in X$ priredi natanko določen element $y \in Y$. Uporabimo lahko funkcijsko pisavo $f : X \to B$ oziroma $x \mapsto f(x)$ – to pomeni, da f vsakemu $x \in X$ priredi $f(x) \in Y$.

Preslikava je natanko določena s pravilom f in množicama X, Y. Če spremenimo eno izmed teh lastnosti, dobimo drugo preslikavo. Če je Y množica števil, se preslikava imenuje tudi funkcija. $f : X \to \mathbb{R}$ je npr. realna funkcija na X, $f : X \to \mathbb{C}$ pa kompleksna funkcija na X.

Pogosto opazujemo preslikave, ki niso definirane na vsem X, ampak le na neki podmnožici $D \subseteq X$.

Definicija 2.12. Domena preslikave $f : X \to Y$ je taka podmnožica $D \subseteq X$, na kateri je f definirana. Običajno za domeno vzamemo največjo tako podmnožico D.

Definicija 2.13. Zaloga vrednosti preslikave $f : X \to Y$ je taka podmnožica $Z_f \subseteq Y$, ki vsebuje slike vseh elementov iz domene: $Z_f = \{y \in Y; \exists x \in X : f(x) = y\} = \{f(x); x \in X\}$

Definicija 2.14. Preslikava $f : X \to Y$ je injektivna, če za $\forall x_1, x_2 \in X$ velja

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

oziroma ekvivalentno

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Enačba $f(x) = b$ ima največ eno rešitev za nek $b \in Y$.

Definicija 2.15. Preslikava $f : X \to Y$ je surjektivna, če velja $Z_f = Y$ oz. za $\forall y \in Y$ obstaja $x \in X$, da velja $f(x) = y$. Enačba $f(x) = b$ ima vsaj eno rešitev za nek $b \in Y$.

Definicija 2.16. Preslikava $f : X \to y$ je bijektivna, če je hkrati injetivna in surjektivna. Taki funkciji rečemo tudi bijekcija iz X na Y. Enačba $f(x) = b$ ima natanko eno rešitev za nek $b \in Y$.

Definicija 2.17. Če je $f : X \to Y$ bijektivna, obstaja inverzna preslikava $f^{-1} : Y \to X$ oz. $y \mapsto f^{-1}(x) = x$, da je to natanko tisti $x \in X$, da je $f(x) = y$.

Definicija 2.18. Kompozitum preslikav $g : Y \to Z$ in $f : X \to Y$ je funkcija $g \circ f : X \to Z$ s predpisom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Opomba. Če lahko tvorimo $g \circ f$, to še ne pomeni, da lahko tvorimo tudi $f \circ g$. Kompozitum v splošnem ni komutativna operacija. Iz množice vase $f : X \to X$ in $g : Y \to Z$ obstajata $g \circ f$ in $f \circ g$.

Definicija 2.19. Identiteta ali identična preslikava na množici X oziroma $Id_x : X \to X$ je dana s predpisom $Id_X(x) = x$ za poljuben $x \in X$. Če je $f : X \to Y$ bijekcija in $f^{-1} : Y \to X$ njen inverz, potem velja $f^{-1} \circ f = Id_x$ in $f \circ f^{-1} = Id_y$

2.2 Moč množic

Definicija 2.20. Moč množice A lahko razumemo kot »število elementov« v A.

1. Ekvipolenca množic oz. $|A| = |B|$ velja natanko tedaj, ko obstaja bijekcija $f : A \to B$. Takrat rečemo, da sta množici ekvipolentni.

2. Neenakost $|A| \leq |B|$ velja natanko tedaj, ko obstaja injektivna preslikava $f : A \to B$, $|A| < |B|$ pa tedaj, ko med funkcijama obstaja le injektivna preslikava, ki ni bijekcija.

Opomba. Lastnosti bijektivnih preslikav:

1. Za poljubno množico A velja $|A| = |A|$ za Id_A.

2. Če je $f : A \to B$ bijektivna, je tudi njen inverz $f^{-1} : B \to A$ bijekcija.

3. Če je $|A| = |B|$ in $|B| = |C|$, potem je tudi $|A| = |C|$, saj je kompozitum bijekcij tudi bijekcija.

Definicija 2.21. Množica A je končna, če je ekvipolentna množici $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Tedaj rečemo $|A| = n$.

Definicija 2.22. Množica A je števna (tudi števno neskončna), če je ekvipolentna množici naravnih števil $\mathbb{N}$. Tako obstaja bijekcija $a : \mathbb{N} \to A$ oz. $n \mapsto a(n) = a_n$. Množico A lahko tedaj zapišemo kot $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ oz njene elemente razvrstimo v zaporedje.

Opomba. Množica A je kvečjemu števna, če je ali končna ali števna.

Definicija 2.23. Množica A je kontinuum, če je ekvipolentna množici $\mathbb{R}$.

Opomba. Če za množice A, B, C velja $|A| \leq |B|$ in $|B| \leq |C|$, potem velja $|A| \leq |B|$, saj je kompozitum dveh injektivnih funkcij tudi injektiven.

Izrek 2.3.

Za poljubni dve množici velja $|A| \leq |B|$ ali $|A| \geq |B|$ (posledica Zornove leme, ki je ekvivalentna aksiomu izbire.)

Izrek 2.4 (Cantor-Bernstein-Schroeder)**.**

Če za množici A, B velja $|A| \leq |B|$ in $|A| \geq |B|$, potem velja tudi $|A| = |B|$.

Izrek 2.5.

Množica racionalnih števil je števna: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

Dokaz. Racionalna števila

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

razvrstimo v tabelo in jih nato zaobjamemo, tako da lahko tvorimo bijekcijo med $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{N}$.

$$a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = 1, a_6 = -2, a_7 = -\frac{2}{3}, \cdots$$

Podvojitve seveda izločimo, da imamo injektivnost, hkrati pa je poljubno racionalno število v sliki nekega naravnega števila in imamo surjektivnost. □

Izrek 2.6.

Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica A_n števno neskončna. Potem je unija

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

števno neskončna (števna unija števnih množic je tudi števna).

Dokaz. Izrek dokažemo podobno kot prej. Ker so vse množice A_n števno neskončne, lahko njihove elemente zapišemo kot injektivno zaporedje. Sedaj lahko tvorimo novo zaporedje:

$$a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{12}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{23}, a_{13}, \ldots,$$

ki vsebuje vse elemente unije $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (če množice A_n niso paroma disjunktne ponovno izločimo podvojene elemente). □

Opomba. Seveda je tudi množica $\mathbb{Z}$ števno neskončna, saj zanjo lahko bijektivno zaporedje:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{2}; & \text{n je liho} \\ -\frac{n}{2}; & \text{n je sodo} \end{cases}$$

Izrek 2.7.

Kartezični produkt končno mnogo števno neskončnih množic je tudi števno neskončnen. Če so

$A_1, A_2, \dots A_n,\ n \in \mathbb{N}$ števne množice, je števna tudi množica

$$P = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

Dokaz. Dovolj je, da dokažemo za $n = 2$, saj za ostala naravna števila velja z indukcijo (med $A_1 \times A_2 \times A_3$ in $(A_1 \times A_2) \times A_3$ obstaja očitna bijekcija). Naj bosta A in B števni množici. Če zapišemo elemente $P = A \times B$ v tabeli, lahko po diagonalah tvorimo zaporedje:

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_2, b_2), \dots \qquad \square$$

Posledica 2.8. *Množica algebraičnih števil je števna.*

Dokaz. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Vseh polinomov stopnje n s celoštevilskimi koeficienti je števno mnogo, saj je vsak tak polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

za $a_n \neq 0$ in $a_j \in \mathbb{Z}$ enolično določen z $(n+1)$-terico celih števil:

$$(a_n, a_{n-1}, \dots a_1, a_0) \in \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{\text{n+1 faktorjev}}$$

kjer $a_n \neq 0$. Vsak tak polinom definira največ n algebraičnih števil, torej je množica vseh algebraičnih števil, ki so ničle kakšnega celoštevilskega koeficienta stopnje n, števna. Sedaj pa naredimo unijo po vseh $n \in \mathbb{N}$ in po prejšnjem izreku dobimo, da je množica vseh algebraičnih števil števna. $\square$

Opomba. Množica transcendentnih števil je kontinuum.

Izrek 2.9.

Vsaka podmnožica $\mathbb{N}$ je bodisi končna bodisi števno neskončna.

Dokaz. Naj bo $A \subseteq \mathbb{N},\ A \neq \emptyset$. Uredimo elemente A po velikosti.

$$m_1 = \inf A = \min A,\ m_2 = \min A \setminus \{m_1\},\ m_3 = \min A \setminus \{m_1, m_2\}, \dots$$

Tako lahko A zapišemo kot $A = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$. Če se to konča, je A končna, če pa ne, smo elemente A zapisali v zaporedju: $|A| = |\mathbb{N}|$. $\square$

Izrek 2.10.

Množica $\mathbb{R}$ ni števna: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

Dokaz. Očitno velja $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, saj je $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ in $f : n \mapsto n$ je injektivno zaporedje.

Sedaj predpostavimo, da velja $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|$. To pomeni, da lahko vse elemente $\mathbb{R}$ zapišemo v zaporedju, kar pa seveda pomeni, da lahko vse elemente na intervalu $X = [0, 1) \in \mathbb{R}$ prav tako zapišemo v zaporedju. Vsak $x_j \in X$ zapišemo v decimalnem zapisu

$$x_j = 0, n_{1j} n_{2j} n_{3j} \dots,$$

kjer $n_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ in decimalni zapis se ne konča z neskončno mnogo 9. Sedaj definiramo

$$N_j = \begin{cases} 0; & \text{če je } n_{jj} \neq 0 \\ 1; & \text{če je } n_{jj} = 0 \end{cases}$$

Naj bo $x = 0, N_1N_2N_3\ldots$ Očitno velja $x \in [0,1) = X$. Tedaj za vsak $j \in \mathbb{N}$ velja $x \neq x_j$, kar je protislovje. Tako smo dokazali, da ne velja $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$, torej sledi $|\mathbb{N}|$ □

Izrek 2.11.

Za vsako množico X je $|X| < |P(X)|$

Dokaz. Za $A \subseteq X$ definiramo karakteristično funkcijo množice A

$$f_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}$$

Sedaj definiramo množico $F = \{f : X \to \{0,1\}\}$, za katero velja $|F| = |P(X)|$, ker obstaja bijekcija $A \in P(X) \mapsto f_A \in F$. Vemo, da mora veljati $|X| \leq |F|$, saj med množicama X in F obstaja injektivna preslikava $x \in X \mapsto f_{\{x\}} \in F$.

Dokažimo še $|X| \neq |F|$ s protislovjem: naj bo $|X| = |F|$. Potem obstaja bijekcija $\Theta(x) : X \to F$. Za vsak $x \in X$ je $\Theta(x) \in F$ funkcija z vrednostmi 0 ali 1: za poljubna $x, y \in X$ je $(\Theta(x))(y) \in \{0,1\}$. Definirajmo funkcijo $\Psi(x) : X \to \{0,1\}$ kot

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1; & \text{če je } (\Theta(x))(x) = 0 \\ 0; & \text{če je } (\Theta(x))(x) = 1 \end{cases}$$

Tedaj hkrati velja $\Psi \in F$ in $\Psi \neq \Theta(x)$ za $\forall x \in X$, kar je protislovje. Torej bijekcija med X in F ne obstaja, iz česar sledi $|X| < |F|$. Ker smo dokazali $|F| = |P(X)|$ in $|X| < |F|$, sledi $|X| < |P(X)|$. □

Opomba. Potenčna množica množice naravnih števil je kontinuum: $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})|$. Pri razmisleku si lahko pomagamo z dvojiškim zapisom.

3 ŠTEVILSKA ZAPOREDJA

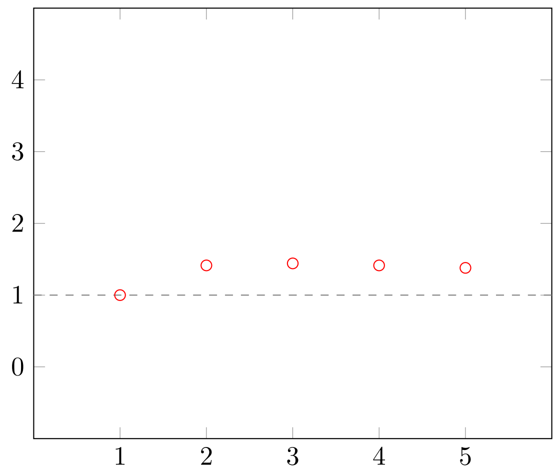
Definicija 3.1. Naj bo $A \neq \emptyset$. Zaporedje v A je preslikava $a : \mathbb{N} \to A$, kjer n-ti člen zaporedja lahko zapišemo $a(n) = a_n$. Elementi oz. členi zaporedja se lahko tudi ponavljajo. Zaporedje zapišemo kot $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Za nas bo $A = \mathbb{R}$ ali $A \subseteq \mathbb{R}$ (realno zaporedje).

Definicija 3.2. Podzaporedje danega zaporedja dobimo tako, da vzamemo le nekatere člene zaporedja. Tvorimo strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil $1 = n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, kjer je $n_j \in \mathbb{N}$. Podzaporedje, ki pripada temu določenemu zaporedju, je:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots = (a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$$

Zgled 3.1. *Zgledi nekaterih zaporedij*

1. *Aritmetično zaporedje: za neka* $a, d \in \mathbb{R}$ *je* $a_n = a + (n-1)d,\ n \in \mathbb{N}$
2. *Geometrijsko zaporedje: za neka* $a, q \in \mathbb{R}$ *je* $a_n = aq^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$
3. *Zaporedje* $a_n = \sqrt[n]{n}$
4. *Zaporedje* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$



Slika 3: Zaporedje $a_n = \sqrt[n]{n}$

3.1 Stekališča zaporedij

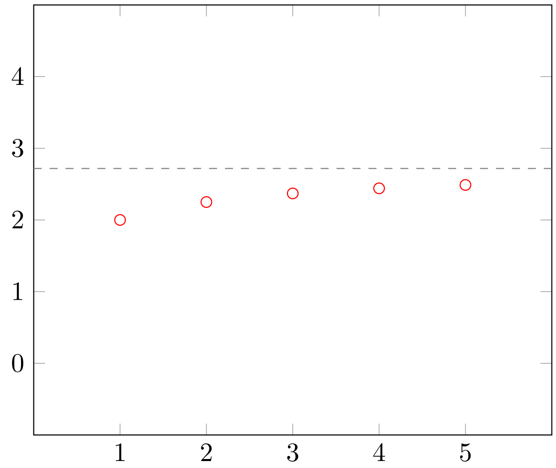
Definicija 3.3. Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje. Število $a \in \mathbb{R}$ je stekališče tega zaporedja, če za vsak $\varepsilon > 0$ in $n_0 \in \mathbb{N}$ obstaja tako naravno število $n \geq n_0$, da velja $|a_n - a| < \varepsilon$. Ta trditev je ekvivalentna naslednjima dvema:

1. Število a je stekališče zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ v epsilonski okolici a leži neskončno mnogo členov zaporedja.

2. V vsaki okolici števila a ležijo členi zaporedja s poljubno visokimi indeksi – za noben $\varepsilon > 0$ množica $\{n; |a_n - a| < \varepsilon\}$ ni navzgor omejena.

Zgled 3.2. *Zgledi stekališč zaporedij*

1. *Zaporedje* $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, \dots$ *ima stekališča v vseh naravnih številih.*
2. *Zaporedje vseh racionalnih števil je primer zaporedja, katerega stekališča so vsa realna šte-*



Slika 4: Zaporedje $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

vila.

Definicija 3.4. Naj bo A množica in $f : A \to \mathbb{R}$ realna funkcija. Funkcija f je navzgor omejena, če je $Z(f)$ navzgor omejena v $\mathbb{R}$ t.j. obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je za $\forall x \in A$ $f(x) \leq M$. Funkcija f je navzdol omejena, če je $Z(f)$ navzgor omejena v $\mathbb{R}$ t.j. obstaja $m \in \mathbb{R}$, da je za $\forall x \in A$ $f(x) \geq m$. Funkcija f je omejena, če je navzgor in navzdol omejena.

Izrek 3.1 (Bolzano-Weierstrass)**.**

Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.

Lema 3.2. *Če je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omejeno zaporedje, potem obstaja supremum za množico*

$$E = \{x \in \mathbb{R};\ a_n < x \text{ velja za končno mnogo indeksov } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokaz. Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omejeno zaporedje. Potem obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$, da za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $-M \leq a_n \leq M$. Naj bo $\alpha = \sup E$. Dokazati moramo, da za poljuben $\varepsilon > 0$ na intervalu $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Število α je zgornja meja za množico E, kar pomeni, da obstaja neskončno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ki ležijo levo od $\alpha + \varepsilon$. Prav tako je α natančna zgornja meja za E, torej obstaja tak $x \in E$, da velja $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$. Torej levo od x leži končno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Ker levo od $\alpha + \varepsilon$ leži neskončno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, levo od x pa leži končno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, sledi sklep, da na intervalu $[x, \alpha + \varepsilon)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Zaradi relacije $[x, \alpha+\varepsilon) \subseteq (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ velja, da na intervalu $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Dokaz leme. Dokazati moramo, da je E neprazna in navzgor omejena. Ker velja $-M \in E$, je E neprazna. Naj bo $x > M$. Potem za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $a_n < x$, iz česar sledi $x \notin E$. Torej je M zgornja meja za E. Po Dedekindovemu aksiomu ima E supremum. □

Opomba (Limes superior in limes inferior.). Iz konstrukcije je razvidno, da $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nima manjšega stekališča. Torej je α najmanjše stekališče zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oziroma **limes inferior.** Za vsak $\varepsilon > 0$ je členov a_n manjših od $\alpha - \varepsilon$ končno mnogo, členov a_n manjših od $\alpha + \varepsilon$ pa neskončno mnogo. Velja torej

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup\{x \in \mathbb{R};\ a_n < x \text{ velja za končno mnogo indeksov } n \in \mathbb{N}\}.$$

Podobno obstaja največje stekališče β oziroma **limes superior.** Za vsak $\varepsilon > 0$ je členov a_n večjih od $\alpha + \varepsilon$ končno mnogo, členov a_n večjih od $\alpha - \varepsilon$ pa neskončno mnogo. Velja

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf\{x \in \mathbb{R};\ a_n > x \text{ velja za končno mnogo indeksov } n \in \mathbb{N}\}.$$

Od tod pa sledi, da vsako stekališče za $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ leži na intervalu $[\alpha, \beta] = [\liminf_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} a_n]$.

3.2 Limite zaporedij

Definicija 3.5. Število $a \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $|a_n - a| < \varepsilon$.

Opomba. V epsilonski okolici limite zaporedja ležijo vsi členi zaporedja razen končno mnogo, v epsilonski okolici stekališča zaporedja pa leži neskončno mnogo členov zaporedja.

Posledica 3.3. *Če je a limita zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, potem je a tudi stekališče zaporedja.*

Definicija 3.6. Če ima $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limito, rečemo, da je konvergentno in konvergira k a. To zapišemo kot $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Izrek 3.4.

Zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergetno natanko tedaj, ko je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omejeno in ima natanko eno stekališče.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Dokažimo najprej ekvivalenco v desno. Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje, ki konvergira k a. Najprej moramo dokazati omejenost. Naj bo $\varepsilon = 1$. Potem obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $a_n \in (a-1, a+1)$. Tako lahko najdemo zgornjo in spodnjo mejo:

$$M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a+1\}, \quad m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a-1\}$$

Vemo tudi že, da je limita zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sama po sebi stekališče. Dokazati želimo, da $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nima nobenega drugega stekališča. Denimo nasprotno. Predpostavimo, da je $b \neq a$ stekališče zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Vzemimo poljuben $\varepsilon < \frac{1}{2}|a-b|$. Tedaj velja, da sta intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ in $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ disjunktna. Potem po definiciji limite na intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ležijo vsi razen končno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. To pomeni, da jih na intervalu $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ leži kvečjemu končno mnogo, kar pa nasprotuje predpostavki, da je b stekališče. Torej je limita zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ njegovo edino stekališče.

$(\Leftarrow)$ Sedaj moramo trditev dokazati še v drugo smer. Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omejeno zaporedje z enim samim stekališčem v a. Dokazati moramo, da ima $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tudi limito. Denimo nasprotno. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ne vsebuje vseh členov zaporedja od nekega indeksa dalje, obstaja neskončno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ki ležijo zunaj intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Naj te členi tvorijo podzaporedje $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$. To podzaporedje je omejeno z mejami prvotnega zaporedja in ima po 3.1 stekališče, ki ga označimo z b. Ker po konstrukciji velja $|a_{n_j} - a| \geq \varepsilon$, sledi $|b-a| \geq \varepsilon$ in $b \neq a$. Ker pa je b stekališče podzaporedja $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, je hkrati tudi stekališče zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Torej ima $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dve različni stekališči a in b, kar pa je v nasprotju z našo predpostavko. Torej je a limita zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Posledica 3.5. *Omejeno zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ima limito natanko tedaj, ko velja*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Izrek 3.6.

Naslednji izjavi sta ekvivalentni za zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

1. *Število* $a \in \mathbb{R}$ *je stekališče zaporedja* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
2. *Obstaja podzaporedje* $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ *zaporedja* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$*, ki konvergira k* a *oziroma:* $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Dokažimo najprej ekvivalenco v desno. Naj bo $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a$ za neko podzaporedje $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$. Dokazati moramo, da je a stekališče zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Za poljuben $\varepsilon > 0$ velja, da v epsilonski okolici števila a ležijo vsi razen končno mnogo členov podzaporedja $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$. To pa tudi pomeni, da v epsilonski okolici števila a leži neskončno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Ker smo izbrali poljuben ε, po definiciji sledi, da je a stekališče zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

($\Leftarrow$) Sedaj pa še v drugo smer. Naj bo a stekališče zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in naj bo $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ padajoče zaporedje pozitivnih števil, za katerega velja $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Potem za epsilonske okolice a za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$(a - \varepsilon_{n+1}, a + \varepsilon_{n+1}) \subseteq (a - \varepsilon_n, a + \varepsilon_n)$$

Temu pravimo zaporedje vloženih okolic točke a. Ker je a stekališče zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, obstaja tako naraščajoče zaporedje naravnih števil

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

da za $\forall j \in \mathbb{N}$ velja $|a_{n_j} - a| < \varepsilon_j$. Ker je $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, za poljuben $\varepsilon > 0$ velja, da obstaja tak $j_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $j \in \mathbb{N},\ j \geq j_0$ velja $0 < \varepsilon_j < \varepsilon$. Če upoštevamo še prvo neenačbo, vidimo, da za vsak $j \geq j_0$ velja $|a_{n_j} - a| < \varepsilon_j < \varepsilon$ in iz tega sledi $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a$. $\square$

Posledica 3.7. *Vsako omejeno zaporedje* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ima konvergentno podzaporedje* $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$.

3.3 Monotona zaporedja

Definicija 3.7. Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje realnih števil.

1. Zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je naraščajoče, če za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq a_{n+1}$
2. Zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je padajoče, če za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq n_{n+1}$
3. Zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotono, če je ali naraščajoče ali padajoče.

Izrek 3.8.

Če je zaporedje omejeno in monotono, ima limito.

1. *Če je* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *naraščajoče in navzgor omejeno, je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

2. *Če je* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *padajoče in navzdol omejeno, je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Dokaz. Dokažimo prvo točko izreka, saj je pri drugi dokaz enak. Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ naraščajoče in navzgor omejeno. Množica $\{a_1, a_2, \dots\}$ je očitno neprazna in omejena, zato ima supremum $a = \sup a_n$ Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Iz definicije supremuma sledi, da obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Ker je zaporedje naraščajoče, za vsak $n \geq n_0$ velja

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a.$$

Od tod sledi $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Izrek 3.9 (Primerjalni test za konvergenco)**.**

Naj bodo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedja realnih števil, za katera za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Potem je zaporedje $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergetno in velja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$. Potem obstaja $n_1 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_1$ velja $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ in $n_2 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_2$ velja $|c_n - \alpha| < \varepsilon$. Če vzamemo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, potem za vsak $n \geq n_0$ velja

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon$$

in iz tega sledi $|b_n - \alpha| < \varepsilon$. Ker smo vzeli poljuben ε, je trditev dokazana. □

3.4 Pravila za računanje limit zaporedij

Izrek 3.10.

Naj bosta $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentni zaporedji. Potem so konvergentna tudi

$$(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty},\ (a_n - b_n)_{n=1}^{\infty},\ (a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}\ \textit{in}\ \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

Pozor: zadnje zaporedje je konvergentno le, če je $b_n \neq 0$, $\forall n$ in $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Posledica 3.11. *Pravila za računanje z limitami.*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$
4. $\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n})$

Dokaz 1. točke. Naj bosta $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ in $\varepsilon > 0$. Zaradi pogojev obstajata taka n_1, n_2, da za $\forall n \geq n_1$ velja $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ in za $\forall n \geq n_2$ velja $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sedaj pa vzemimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Za $\forall n \geq n_0$: velja:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Dokaz 2. točke. Obstajata taka n_1, n_2, da za $\forall n \geq n_1$ velja $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ in za $\forall n \geq n_2$ velja $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponovno vzemimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Za $\forall n \geq n_0$ velja:

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (a - b)| &= |(a_n - a) + (b - b_n)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Dokaz 3. točke. Ker je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentno, mora biti tudi omejeno. Zato obstaja $M \geq 0$, da je $|a_n| \leq M$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Ponovno obstajata taka n_1, n_2, da za $\forall n \geq n_1$ velja $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|b|+1}$ in za $\forall n \geq n_2$ velja $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{M+1}$. Vzemimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ in za $\forall n \geq n_0$ velja:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |b||a_n - a| + |a_n||b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \frac{|b|}{|b|+1} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{M}{M+1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Dokaz 4. točke. Dovolj je dokazati, da velja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}$. Obstajata taka n_1, n_2, da za $\forall n \geq n_1$ velja $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ in za $\forall n \geq n_2$ velja $|b_n - b| < \frac{b^2}{2}\varepsilon$. Zaradi trikotniške neenakosti velja $|b_n - b| \geq |b| - |b_n|$ in zato sledi, da za $\forall n \geq n_1$ velja $\frac{|b|}{2} > |b_n - b| \geq |b| - |b_n|$ in posledično $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Za $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ za $\forall n \geq n_0$ velja:

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} < \frac{\frac{|b|^2}{2}\varepsilon}{\frac{|b|^2}{2}} = \varepsilon$$

□

Posledica 3.12. *Naj bo* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

1. *Naj bo* $k \in \mathbb{N}$. *Tedaj je* $\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k$
2. *Naj bo* $k \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ *in* $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Tedaj velja* $\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k$
3. *Naj bo* $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$ *in* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Tedaj velja* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$
4. *Naj bo* $r \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ *in* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Tedaj velja* $\lim_{n\to\infty} {a_n}^r = a^r$
5. *Naj bo* $r \in \mathbb{R}$, $a > 0$ *in* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Tedaj velja* $\lim_{n\to\infty} {a_n}^r = a^r$

Trditev (1) sledi iz pravil za računanje z limitami in indukcijo, trditev (2) sledi iz trditve (1) in trditev (4) sledi iz trditev (2) in (3). Dokažimo (3) in (5).

Dokaz 3. točke. Naj bo $k \geq 2$. Označimo $\sqrt[k]{a} = \alpha$, $\sqrt[k]{a_n} = \alpha_n$ Ker je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, velja, da za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ velja $|a_n - a| < \varepsilon a^{\frac{k-1}{k}}$. Potem za vsak $n \geq n_0$ velja:

$$\begin{aligned}|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| &= |\alpha_n - \alpha| \\ &= \frac{|\alpha_n^k - \alpha^k|}{\alpha_n^{k-1} + \alpha\alpha_n^{k-2} + \cdots + \alpha^{k-1}} \\ &< \frac{|\alpha_n^k - \alpha^k|}{\alpha^{k-1}} \\ &< \frac{\varepsilon a^{\frac{k-1}{k}}}{a^{\frac{k-1}{k}}} = \varepsilon\end{aligned}$$

□

Dokaz 5. točke. Brez škode za splošnost privzemimo, da velja $r > 0$, $a > 1$ in $a_n > 1$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Ker je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, je zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omejeno. in obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je za $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 < a_n < M$. Od tod sledi $1 < a_n^r < M^r$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Naj bosta, $r^{'}, r^{''} \in \mathbb{Q}$, tako da velja $r^{'} < r < r^{''}$. Od tod sledi, da za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $a_n^{r^{'}} < a_n^r < a_n$. Ker velja $\lim_{n\to\infty} a_n^{r^{'}} = a^{r^{'}}$ in $\lim_{n\to\infty} a_n^{r^{''}} = a^{r^{''}}$, vsa stekališča zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ležijo na intervalu $[a^{r^{'}}, a^{r^{''}}]$. Ker sta $r^{'}$ in $r^{''}$ poljubna in velja

$$a^r = \sup\{a^{r^{'}}; r^{'} \in \mathbb{Q}; r^{'} \leq r\} = \inf\{a^{r^{''}}; r^{''} \in \mathbb{Q}; r^{''} \geq r\},$$

je a^r edino stekališče zaporedja $(a_n^r)_{n=1}^{\infty}$. Torej velja $\lim_{n\to\infty} {a_n}^r = a^r$. □

3.5 Limite nekaterih posebnih zaporedij

Izrek 3.13.

Za zaporedje $a_n = a^n$, kjer je $|a| < 1$, velja $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Dokaz. Ker velja $0 < |a^n| = |a|^n$, je dovolj, če trditev dokažemo le za $0 \leq a < 1$, kjer je primer $a = 0$ trivialen. To lahko naredimo na dva načina. Prvi način: Zapišemo $b = \frac{1}{a}$, kjer je $0 < a < 1$. Pri dokazu obstoja logaritma smo dokazali, da množica $\{b^n; n \in \mathbb{N}\}$ za $b > 1$ ni navzgor omejena. To pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $a^{n_0} = b^{-n_0} < \varepsilon$. Sedaj pa za vsak $n \geq n_0$ velja

$$a^n = b^{-n} \leq b^{-n_0} < \varepsilon$$

in s tem smo dokazali $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Drugi način: Zaporedje $a_n = a^n$ za $0 < a < 1$ je očitno padajoče in navzdol omejeno z 0, torej ima limito. Naj bo $\lim_{n\to\infty} a^n = \alpha \geq 0$. Potem velja

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} a^{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} a \cdot a^n \\ &= \lim_{n\to\infty} a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a\alpha\end{aligned}$$

in ker je $a \neq 1$, sledi $\alpha = 0$. □

Izrek 3.14.

Za zaporedje $a_n = \frac{1}{n^s}$, kjer je $s > 0$, velja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$.

Dokaz. Zaradi neomejenosti naravnih števil velja, da za poljubni $\varepsilon > 0$ obstaja tak n_0, da velja $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}} < n_0$. Tedaj za vsak $n \geq n_0$ velja

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}} < n \iff \left(\frac{1}{n^s}\right) < \varepsilon$$

in sledi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$. □

Izrek 3.15.

Za zaporedje $a_n = \sqrt[n]{a}$, kjer je $a > 0$, velja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

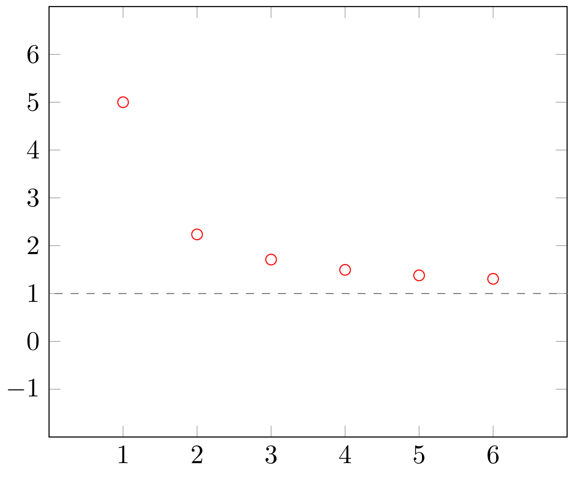
Dokaz. Tudi to smo že dokazali pri obstoju logaritma, ampak se da tudi na drug način. Naj bo $0 < a < 1$. Potem je zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ očitno naraščajoče in navzgor omejeno z 1. Torej ima $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limito $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \leq 1$, za katero po izreku velja $\alpha = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. To pomeni, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$0 < a_n = \sqrt[n]{a} \leq \alpha \implies 0 < a \leq \alpha^n.$$

Predpostavimo, da velja $0 < \alpha < 1$. Ker je za $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < a \leq \alpha^n$ in velja $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, je po primerjalnem testu za konvergenco tudi $a = 0$, kar pa vodi v protislovje. Torej je bila naša predpostavka napačna in velja $\alpha = 1$. Za $a = 1$ je izrek očiten. Vzemimo še primer $a > 1$. Potem za $b = \frac{1}{a} < 1$ po prvi točki velja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Zaradi tega velja

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.\end{aligned}$$

□



Slika 5: Zaporedje $a_n = \sqrt[n]{a}$ za $a = 5$

Izrek 3.16.

Za zaporedje $a_n = \frac{n^s}{a^n}$, kjer je $a > 1$ in $s \in \mathbb{R}$, velja $\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{a^n} = 0$

Dokaz. Zaporedje lahko zapišemo z rekurzivnim zapisom:

$$a_{n+1} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s a_n.$$

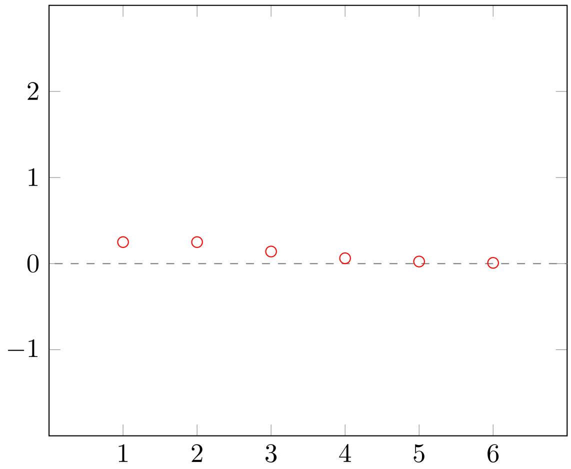
Sedaj lahko dokažemo, da je zaporedje $(a_n)_{n=1}^\infty$ od nekega člena dalje padajoče. Pokazati moramo, da obstaja tako naravno število $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ velja $\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s \leq 1$. Res, če je $s > 0$, lahko izberemo $n_0 \geq \frac{1}{a^{\frac{1}{s}}-1}$ in sedaj za $\forall n \geq n_0$ velja

$$n \geq \frac{1}{a^{\frac{1}{s}}-1} \iff \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s \leq 1.$$

Če pa je $s \leq 0$, za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s \leq 1$ in smo dokazali monotonost. Ker je torej $(a_n)_{n=1}^\infty$ padajoče in navzdol omejeno z 0 (vsi členi zaporedja so pozitivni), ima limito in lahko zapišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Od tod sledi:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s a_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \\
&= \frac{1}{a}\cdot 1 \cdot \alpha
\end{aligned}$$

in ker je $a > 1$, mora veljati $\alpha = 0$. □



Slika 6: Zaporedje $a_n = \frac{n^s}{a^n}$ za $a = 4$ in $s = 2$

Izrek 3.17.

Za zaporedje $a_n = \sqrt[n]{n}$ *velja* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Dokaz. Za $n > 1$ je $\sqrt[n]{n} > 1$. Naj bo $\sqrt[n]{n} = 1 + p_n$ za poljuben n, kjer je $p_n > 0$. Tedaj velja

$$\begin{aligned} n &= (1+p_n)^n \\ &= 1 + \binom{n}{1} p_n + \binom{n}{2} p_n^2 + \cdots + p_n^n \\ &< 1 + \binom{n}{2} p_n^2 \\ &= 1 + \frac{n(n-1)}{2} p_n^2 \end{aligned}$$

Od tod sledi neenačba $0 < p_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$ za poljuebn $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Iz limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n}} = 0$ sledi $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ po primerjalnem testu za konvergenco. Tako imamo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1+p_n) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$ □

Izrek 3.18.

Zaporedje $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je konvergentno.

Dokaz. Najprej dokažimo, da je $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ naraščajoče.

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \cdots + \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{\text{k faktorjev}}}\left(\frac{1}{k!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots \\ &\quad \cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{1}{k!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &< 1 + 1 + \cdots + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots \\ &\quad \cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{k!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Vidimo, da je za $3 \leq k \leq n$ k-ti člen v razvoju $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ manjši kot kot k-ti člen v razvoju $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, ki pa ima še en dodaten pozitiven člen. Zato za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n < a_{n+1}$.

Sedaj pokažimo še, da je $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ navzgor omejeno. Uporabimo kar razvoj iz prejšnje točke:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+1+\cdots+\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1+1+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots \\
&\quad \cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{1}{k!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&< 1+1+\cdots+\left(\frac{1}{k!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}\right) \\
&< 1+1+\left(\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}\right)+\cdots \\
&< 1+1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)+\cdots = 3.
\end{aligned}$$

Zaporedje $(a_n)_{n=1}^\infty$ je torej navzgor omejeno s 3. □

Opomba. Limita zaporedja $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je Eulerjevo število oz. e. To pomeni $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Zgled 3.3. *Izračunajmo* $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \\
&= e\cdot 1 = e
\end{aligned}$$

Torej velja

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

3.6 Cauchyjevo zaporedje

Izrek 3.19 (Cauchyjev pogoj za konvergenco zaporedij)**.**

Naj bo $(a_n)_{n=1}^\infty$ *zaporedje. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

1. *Zaporedje* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *je konvergentno.*
2. *Za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tak* $n_0 \in \mathbb{N}$*, da* $\forall m, n \geq n_0$ *velja* $|a_m - a_n| < \varepsilon$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Dokažimo najprej implikacijo v desno. Naj zaporedje $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergira k a oziroma $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da $\forall n \geq n_0$ velja $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sedaj za poljubna $m, n \geq n_0$ velja

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \\ &\leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &= |a_n - a| + |a_m - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Tako velja Cauchyjev pogoj.

($\Leftarrow$) Sedaj pa dokažimo še v drugo smer. Naj bo zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da $\forall m, n \geq n_0$ velja $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Dokazati moramo, da je zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omejeno. Naj bo $\varepsilon = 1$. Ker je zaporedje Cauchyjevo, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $|a_n - a_{n_0}| < 1$. Tedaj lahko zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ določimo zgornjo in spodnjo mejo:

$$\begin{aligned}M &= \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0} + 1\} \\ m &= \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1\}.\end{aligned}$$

Ker je Cauchyjevo zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omejeno, ima stekališče a. Dokazati moramo, da je a tudi limita zaporedja. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je zaporedje Cauchyjevo, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall m, n \geq n_0$ velja $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ker pa je a stekališče zaporedja, lahko v epsilonski okolici a najdemo člene zaporedja s poljubno visokimi indeksi. Torej obstaja tak $n_1 \geq n_0$, da velja $|a_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sedaj pa $\forall n \geq n_0$ velja

$$\begin{aligned}|a_n - a| &= |a_n - a_{n_1} + a_{n_1} - a| \\ &\leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Torej je res $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

3.7 Posplošene limite

Sedaj bomo definirali posplošeni limiti $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Operirali bomo v razširjenem sistemu realnih števil: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Definicija 3.8. Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje.

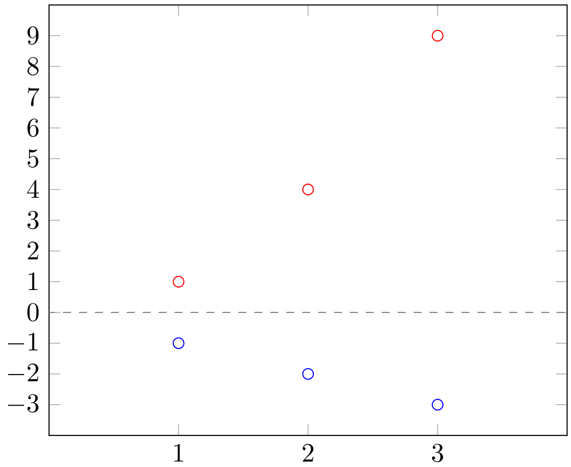
1. Pravimo, da $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira k plus neskončnosti, če za $\forall M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $a_n > M$. To zapišemo: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

2. Pravimo, da $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira k minus neskončnosti, če za $\forall m \in \mathbb{R}$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $a_n < m$. To zapišemo: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$,

Zgled 3.4. *Zaporedje $a_n = n^2$ konvergira k neskončnosti oz.* $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, *zaporedje $a_n = -n$ pa k minus neskončnosti oz.* $\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$.

Opomba. Taka zaporedja smatramo za nekonvergentna. Izraz »konvergira k neskončnosti« razumemo kot celoto.

Sedaj si pa poglejmo še posplošeno zgornjo in spodnjo limito.



Slika 7: Zaporedji iz zgleda 3.4

Definicija 3.9. Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje.

1. Posplošeni limes superior gre proti plus neskončnosti natanko tedaj, ko za $\forall M \in \mathbb{R}$ in za vse $n_0 \in \mathbb{N}$ obstaja tak $n \geq n_0$, da velja $M < a_n$. To je ekvivalentno temu, da zaporedje ni navzgor omejeno. Zapišemo: $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2. Posplošeni limes inferior gre proti minus neskončnosti natanko tedaj, ko za $\forall m \in \mathbb{R}$ in za vse $n_0 \in \mathbb{N}$ obstaja tak $n \geq n_0$, da velja $m > a_n$. To je ekvivalentno temu, da zaporedje ni navzdol omejeno. Zapišemo: $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Opomba. Naj bo E množica stekališč zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Veljajo naslednje trditve:

1. Če je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ navzgor omejeno in $E \neq \emptyset$, potem je $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup E$.

2. Če je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ navzgor omejeno in $E = \emptyset$, potem je $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

3. Če je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ navzdol omejeno in $E \neq \emptyset$, potem je $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf E$.

4. Če je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ navzgor omejeno in $E = \emptyset$, potem je $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3.8 Zaporedja kompleksnih števil

Definicija 3.10. Kompleksno zaporedje je preslikava $z : \mathbb{N} \to C$, kjer n-ti člen zaporedja zapišemo $z(n) = z_n$.

Definicija 3.11. Zaporedje $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira k $\alpha \in \mathbb{C}$, če za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ velja

$$d(a_n - \alpha) = |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

Izrek 3.20 (Limita kompleksnega zaporedja)**.**

Naj bo $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ kompleksno zaporedje, kjer je $z_n = a_n + ib_n$ in $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Zaporedje $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira k $a + ib$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$, natanko tedaj, ko $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira k a in $(b_n)_{n=1}^{\infty}$

konvergira k b.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + ib_n) = a + bi \iff \lim_{n\to\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Dokažemo najprej implikacijo v desno. Denimo, da velja $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha = a+bi$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $d(z_n, \alpha) = |z_n - \alpha| < \varepsilon$. Tedaj za vse $n > n_0$ velja

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$$

in končno $|a_n - a| < \varepsilon$ ter $|b_n - b| < \varepsilon$. Torej je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

($\Leftarrow$) Dokažimo sedaj isto trditev še v nasprotno smer. Denimo, da velja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $n_1 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_1$ velja $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Seveda obstaja tudi tak $n_2 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_2$ velja $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Vzemimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Sedaj za $\forall n \geq n_0$ velja

$$\begin{aligned} d(z_n, \alpha) &= \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ker je bil ε poljuben, smo dokazali $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha = a + bi$. □

Posledica 3.21. *Naj bosta $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ kompleksni zaporedji. Tedaj:*

1. $\lim_{n\to\infty} z_n + w_n = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$
2. $\lim_{n\to\infty} z_n - w_n = \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} w_n$
3. $\lim_{n\to\infty} z_n \cdot w_n = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}$, *če je $w_n \neq 0$ za $\forall n$ in $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$.*

Izrek 3.22.

Kompleksno zaporedje $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyjevo – za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall m, n \geq n_0$ velja

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Dokaz. Podobno kot v prejšnjem dokazu dokažemo, da je zaporedje $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo natanko tedaj, ko sta zaporedji $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevi. To pa velja natanko tedaj, ko sta konvergentni. □

Zgled 3.5. *Naj bo zaporedje podano s predpisom $z_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n + i\sqrt[n]{\frac{n^2}{n+1}}$. Oglejmo si zaporedje $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

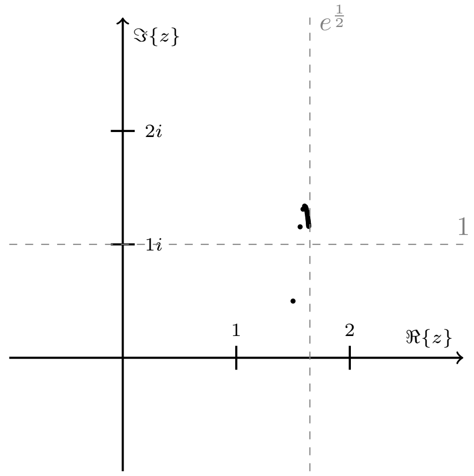
Sedaj izračunajmo še limito drugega zaporedja $b_n = \sqrt[n]{\frac{n^2}{n+1}}$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{n+1}} &= \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}^2}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} \\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

Zadnji korak sledi iz tega, ker velja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Limito v imenovalcu lahko določimo z oceno in izrekom o sendviču:

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}.$$

Torej velja $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{\frac{1}{2}} + i$.



Slika 8: Prvih 20 členov zaporedja iz zgleda 3.5

4 FUNKCIJE REALNE SPREMENLJIVKE IN ZVEZNOST

Definicija 4.1. Naj bo X množica. Funkciji $f : X \to \mathbb{R}$ pravimo realna funkcija, funkciji $f : X \to \mathbb{C}$ pa kompleksna funkcija.

Opazovali bomo le primere, ko velja $X = D_f \subseteq \mathbb{R}$.

4.1 Graf funkcije

Definicija 4.2. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Graf funkcije f je podmnožica $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in D,\ y = f(x)\big\}$$

Množica $\mathbb{R}^2 \subseteq \Gamma$ je graf funkcije natanko tedaj, ko vsaka navpična premica $x = a$ seka Γ v največ eni točki. Če Γ zadošča tej lastnosti, je graf funkcije f oz. $\Gamma = G(f)$, kjer je f definirana na množici $D = \Pi_x(\Gamma)$.

Definicija 4.3. Projekcija na x-os je funkcija $\Pi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s predpisom $(x, y) \mapsto x$.

Definicija 4.4. Projekcija na y-os je funkcija $\Pi_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s predpisom $(x, y) \mapsto y$.

Definicija 4.5. Naj bo f funkcija in $\Gamma = G(f)$ njen graf. Definicijsko območje funkcije f je $\Pi_x(\Gamma)$.

Vrednost f v točji $x \in D = \Pi_x(\Gamma)$ je določena s pogojem $(x, f(x)) \in \Gamma$, saj je edino presečišče Γ in navpične premice skozi X.

Zgled 4.1. *Krožnica $x^2 + y^2 = 1$ ni graf nobene funkcije, lahko pa jo razdelimo na dva dela:*

$$\Gamma_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\big\}$$
$$\Gamma_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y \leq 0\big\}$$

To sta grafa funkcij $\Gamma_1 = G\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$ in $\Gamma_2 = G\left(-\sqrt{1 - x^2}\right)$ na intervalu $D_{f_1} = D_{f_2} = [-1, 1]$.

Opomba. Funkcija f je injektivna natanko tedaj, ko vsaka vodoravna premica $y = b$ seka graf $G(f)$ največ enkrat oz. natanko tedaj, ko je $\Pi_y : G(f) \to \mathbb{R}$ injektivna.

Denimo, da je $f : D \to \mathbb{R}$ injektivna. Naj bo $B = Z_f$ zaloga vrednosti funkcije f oz. $B = \{f(x); x \in D\}$. Potem je $f : D \to B$ bijekcija in ima inverz $f^{-1} : B \to D$, tako da za $x \in D,\ y \in B$ velja $f(x) = y$ natanko tedaj, ko je $x = f^{-1}(y)$. Torej je graf inverza:

$$G(f^{-1}) = \big\{(y, f^{-1}(y));\ y \in B\big\} = \{(f(x), x);\ x \in D\}\,.$$

Naj bo $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s predpisom $(x, y) \mapsto (y, x)$ preslikava, ki točko prezrcali preko simetrale lihih kvadrantov. Tedaj je $\tau(G(f)) = G(f^{-1})$.

4.2 Algebraične operacije s funkcijami

Definicija 4.6. Naj bosta $f, g : D \to \mathbb{R}$ realni funkciji. Definiramo naslednje operacije:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ta funkcija je definirana le na množici $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D;\ g(x) \neq 0\}$

Zgled 4.2. *Polinom je vsota funkcij $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, \dots a_1 x, a_0$, pri čemer so te funkcije produkti kontstantne funkcije in večih funkcij $Id(x) = x$. Zapišemo:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}.$$

Definicija 4.7. Če je funkcija f navzgor omejena, je

$$\sup_D f = \sup Z_f = \sup\{f(x);\ x \in D\}$$

in če je f navzdol omejena, je

$$\inf_D f = \inf Z_f = \inf\{f(x);\ x \in D\}.$$

Če obstaja $a \in D$, da je $f(a) = \sup_D f$, potem f v točki a zavzame maksimum $f(a)$ oz. $\max_D f$. Če obstaja $a \in D$, da je $f(a) = \inf_D f$, potem f v točki a zavzame minimum $f(a)$ oz. $\min_D f$.

4.3 Zveznost

Definicija 4.8. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f je zvezna v $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$, ki zadošča $|x - a| < \delta$, velja tudi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Z drugimi besedami: f slika $(a - \delta, a + \delta)$ v $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

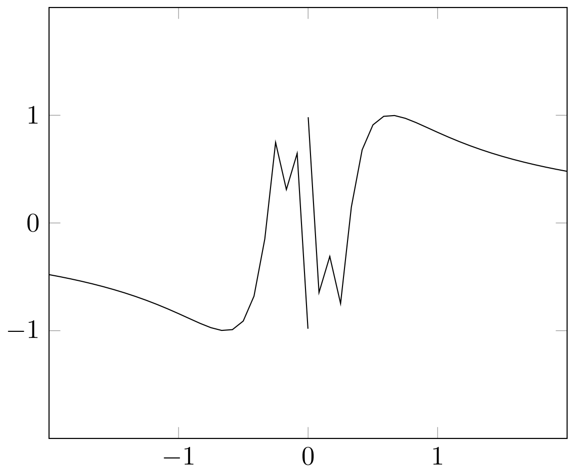
Zgled 4.3. *Preverimo zveznost nekaterih funkcij.*

1. *Funkcija $f(x) = x$ je v poljubni točki $a \in \mathbb{R}$ zvezna, saj si lahko za poljubni $\varepsilon > 0$ izberemo $\delta = \varepsilon$. Če velja $|x - a| < \delta$, potem velja tudi $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.*
2. *Funkcija*
$$f(x) = \begin{cases} 0; & \text{če je } x \leq 0 \\ 1; & \text{če je } x > 0 \end{cases}$$
ni zvezna v točki $a = 0$, saj vzamemo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ in poljuben $\delta > 0$ in sedaj za katerikoli $x \in (0, \delta)$ velja $|f(x) - f(0)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$.
3. *Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je zvezna v vsaki točki $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. V $a = 0$ ni definirana in se torej ne moremo pogovarjati o zveznosti v tej točki. Še več, funkcije f ne moremo definirati oz. ji predpisati neko vrednost v 0, da bi bila tudi v tej točki zvezna.*
4. *Funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = 1$ je zvezna v vsaki točki $a \neq 0$. Lahko jo dodefiniramo za $x = 0$, da bo zvezna tudi v tej točki, in sicer $f(0) = 1$. Potem je definirana na $\mathbb{R}$ in zvezna v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.*
5. *Funkcija $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ni definirana v točki $a = 0$. Nje tudi ne moremo definirati tako, da bi razširitev bila zvezna v 0. Ničle te funkcije so $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. V okolici točke $x = 0$ graf te funkcije močno oscilira. Kasneje bomo pokazali, da je ta funkcija zvezna na množici $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
6. *Funkcija $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ nihanje umiri z amplitudo x. Definirajmo $f(0) = 0$ in sedaj lahko pokažemo, da je f zvezna v $a = 0$. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\delta = \varepsilon$. Če velja $|x| = |x - 0| < \delta$, potem*

je

$$|f(x) - f(0)| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

Funkcija f je torej zvezna na vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.



Slika 9: Funkcija $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Opomba. Funkcija f ni zvezna v $a \in D$, če obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstaja tak $x_\delta \in D$, da je $|x_\delta - a| < \delta$ in $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$.

4.4 Karakterizacija zveznosti z zaporedji

Izrek 4.1 (Karakterizacija zveznosti z zaporedji)**.**

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki a natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(x_n)_{n=1}^\infty \in D$, za katerega velja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, velja tudi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Opomba. Če je f zvezna v a, velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Dokažimo implikacijo v desno. Naj bo f zvezna v a in naj bo $(x_n)_{n=1}^\infty$ tako zaporedje iz D, da je $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za $x \in D$ velja:

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Zaradi $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $|x_n - a| < \delta$, torej za $\forall n \geq n_0$ velja $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ in zato sledi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

($\Leftarrow$) Sedaj pa še v drugo smer. Denimo, da f ni zvezna v a. Naj bo $\varepsilon > 0$ kot v zgornji opombi. Naj bo $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potem po zgornji opombi za $\forall n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $x_n \in D$, da velja

$$|x_n - a| < \delta = \frac{1}{n} \quad \text{in} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Tako smo našli zaporedje $(x_n)_{n=1}^\infty$ iz D, da je $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ pa ne konvergira k $f(a)$, kar pa je v nasprotju z našo predpostavko. $\square$

Definicija 4.9. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je zvezna (na D), če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Izrek 4.2.

Naj bosta $f, g : D \to \mathbb{R}$ funkciji, ki sta zvezni v točki $a \in D$. Potem so v a zvezne tudi funkcije:

$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}.$$

Pozor: funkcija $\frac{f}{g}$ je zvezna v a le, če je tam tudi definirana oz. velja $g(a) \neq 0$.

Opomba. Iz zgornjega izreka sledi, da je v a zvezna tudi funkcija $c \cdot f$, kjer je $c \in \mathbb{R}$, saj za g vzamemo konstantno funkcijo $g(x) = c$, ki je zvezna v vsaki točki.

Dokaz. Dokažimo to trditev le za prvo in tretjo funkcijo, saj sta preostala dokaza podobna. Najprej dokažimo zveznost funkcije $(f+g)$ v a. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna v a, obstaja $\delta_f > 0$, da za $x \in D$ velja $|x-a| < \delta_f \implies |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ker je g zvezna v a, obstaja $\delta_g > 0$, da za $x \in D$ velja $|x-a| < \delta_g \implies |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Naj bo $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Potem za $x \in D$, $|x-a| < \delta$ velja

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(x)| &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Dokažimo še zveznost funkcije $(f \cdot g)$. Naj bo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje iz D, da je $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Ker sta f in g zvezni funkciji, po karakterizaciji zveznosti z zaporedji velja: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ in $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$. Iz tega sledi:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f \cdot g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) g(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\ &= f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a) \end{aligned}$$

Torej je $(f \cdot g)$ zvezna v a. □

Posledica 4.3. *Naj bodo funkcije $f_1, \ldots, f_n$ zvezne na D. Tedaj sta tudi funkciji $f_1 + \cdots + f_n$ in $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ zvezni na D. Dokaz sledi z indukcijo.*

Izrek 4.4.

Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija. Naj bo $f : D \to G$ zvezna v a in $g : G \to \mathbb{R}$ zvezna v $b = f(a) \in G$. Tedaj je $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ zvezna v $a \in D$.

Dokaz. Izrek bomo dokazali z zaporedji. Naj bo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje v D, da je $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Potem mora veljati $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, saj je f zvezna v a. Torej je $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$, saj je g zvezna v $f(a) = b$. Od tod pa sledi:

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(a)$$

in $g \circ f$ je zvezna v a. □

Zgled 4.4. *Podajmo nekaj zgledov zveznih funkcij.*

1. *Konstantne funkcije so zvezne povsod na $\mathbb{R}$.*
2. *Funkcija $f(x) = x$ je zvezna povsod na $\mathbb{R}$.*

3. *Polinomi*
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$, so zvezni na $\mathbb{R}$.
4. *Racionalne funkcije $\frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta p, q polinoma, so zvezne na celotnem definicijskem območju $\mathbb{R} \setminus \{x; q(x) = 0\}$.*
5. *Eksponentna funkcija $f(x) = b^x$, $b > 0$, je zvezna na $\mathbb{R}$.*
6. *Sinusna funkcija je zvezna na $\mathbb{R}$. Posledično je $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ zvezna na $\mathbb{R}$ (po pravilu zveznosti kompozituma dveh zveznih funkcij), $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ je zvezna na $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ in $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ je zvezna na $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.*

Dokaz 5. točke. To smo že dokazali pri obstoju logaritma. Naj bo $f(x) = b^x$ za nek $b > 1$. Sedaj velja $|f(x) - f(a)| = |b^a||b^{x-a} - 1|$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Iščemo $\delta > 0$, da velja
$$|x - a| < \delta \implies |b^{x-a} - 1| < \frac{\varepsilon}{b^a}.$$
Vemo že, da velja $\lim_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$. Torej obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $|b^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{\varepsilon}{b^a}$. Od tod velja, da iz $0 \leq x - a < \frac{1}{n_0}$ sledi
$$0 \leq b^{x-a} - 1 < b^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \frac{\varepsilon}{b^a}.$$
Sedaj se približajmo limiti še iz druge strani. Tokrat uporabimo limito $\lim_{n\to\infty} b^{-\frac{1}{n}} = 1$. Torej obstaja tak $n_1 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_1$ velja $|b^{-\frac{1}{n}} - 1| < \frac{\varepsilon}{b^a}$. Od tod velja, da iz $0 \geq x - a > -\frac{1}{n_1}$ sledi
$$0 \leq |b^{x-a} - 1| < 1 - b^{-\frac{1}{n_1}} < \frac{\varepsilon}{b^a}$$
Naj bo $\delta = \frac{1}{\max\{n_0, n_1\}}$. Sedaj za x, za katerega velja $|x - a| < \delta$, velja tudi $|b^{x-a} - 1| < \varepsilon b^{-a}$ oz. $|b^x - b^a| < \varepsilon$. Če je $0 < b < 1$, potem lahko zlahka prevedemo na prejšnji primer s pomočjo kompozituma. $\square$

Lema 4.5. *Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $|\sin x| \leq x$. Trditev ima geometrijski dokaz, ki smo ga že srečali v gimnaziji.*

Dokaz 6. točke. Za dokaz bomo uporabili lemo 4.5. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Potem velja
$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= 2|\sin\frac{x-a}{2}||\cos\frac{x+a}{2}| \\ &\leq 2 \cdot \frac{|x-a|}{2} \cdot 1 \\ &= |x - a| \end{aligned}$$
Naj bo $\varepsilon > 0$. Izberimo $\delta = \varepsilon$ in dobimo:
$$|x - a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| < \delta = \varepsilon$$
$\square$

Opomba. Manjka še zveznost korenov, logaritmov in ciklometričnih funkcij. Ta bo sledila iz že dokazanih zveznosti, ker so te funkcije inverzne funkcije prejšnjim.

4.5 Monotone funkcije

Definicija 4.10. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f je monotona, če zanjo velja vsaj ena izmed naslednjih točk:

1. f je naraščajoča, če velja
$$x_1, x_2 \in D;\ x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$
2. f je padajoča, če velja
$$x_1, x_2 \in D;\ x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$
3. f je strogo naraščajoča, če velja
$$x_1, x_2 \in D;\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$
4. f je strogo padajoča, če velja
$$x_1, x_2 \in D;\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Opomba. Povezava z injektivnostjo.

- Če je f strogo monotona funkcija, je tudi injektivna.
- Če je f zvezna injektivna funkcija na intervalu/poltraku/celi realni osi, potem je strogo monotona.

Izrek 4.6.

Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ zvezna strogo monotona funkcija na intervalu I (interval ali poltrak ali $\mathbb{R}$). Tedaj je njena inverzna funkcija $f^{-1} : J = Z_f \to I$ zvezna.

Posledica 4.7. *Navedimo nekaj posledic tega izreka.*

1. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$ zvezna na $[0, \infty)$. To smo že dokazali pri zaporedjih, saj velja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$. Sledi pa tudi iz tega, da je to inverzna funkcija funkcije $f : I = [0, \infty) \to J = [0, \infty)$ s predpisom $f(x) = x^n$.*

2. *Naj bo $r \in \mathbb{Q}$. Funkcija $f(x) = x^r$ je zvezna na $(0, \infty)$. Tudi to smo že dokazali pri zaporedjih. Sicer pa naj bo $r = \frac{m}{n}$, za $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$ in $f(x) = x^r$. To pa je kompozitum funkcij $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ in $y \mapsto y^m$ in potemtakem mora biti zvezen.*

3. *Naj bo $r \in \mathbb{R}$. Funkcija $f(x) = x^r$ je zvezna na $(0, \infty)$. Tudi to smo že dokazali pri zaporedjih. Če je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ za $a_n > 0,\ a > 0$, potem velja $\lim_{n\to\infty} a_n^r = a^r$. To pa je natanko pogoj za zveznost v a.*

Posledica 4.8. *Naj bo $b > 0,\ b \neq 1$. Funkcija $f(x) = b^x$ je strogo monotona preslikava iz $\mathbb{R} \to (0, \infty)$. Inverzna preslikava je $\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ in je po izreku zvezna funkcija.*

Posledica 4.9. *Ciklometrične funkcije so zvezne tam, kjer so definirane.*

1. *Funkciji $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ in $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sta druga drugi inverzni. Vse rešitve enačbe $\sin x = a,\ a \in [-1, 1]$ so oblike $\arcsin(a) + 2k\pi$ ali $\pi - \arcsin(a) + 2k\pi$ za poljuben $k \in \mathbb{Z}$.*

2. *Funkciji $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ in $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ sta druga drugi inverzni. Vse rešitve*

enačbe $\cos x = a$*,* $a \in [-1, 1]$ *so oblike* $\arccos(a) + 2k\pi$ *ali* $-\arccos(a) + 2k\pi$ *za poljuben* $k \in \mathbb{Z}$*.*

3. *Funkciji* $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *in* $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *sta druga drugi inverzni. Vse rešitve enačbe* $\tan x = a$*,* $a \in \mathbb{R}$ *so oblike* $\arctan(a) + k\pi$ *za* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Posledica 4.10. *Funkcije, ki jih prav tako pogosto srečamo, so hiperbolične funkcije. Hiperbolični sinus in kosinus sta:* $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *in* $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$*. Ti funkciji sta obe zvezni, vendar pa je* $\sinh$ *liha,* $\cosh$ *pa soda. Za hiperbolične funkcije veljajo nekatere formule, ki veljajo že za trigonometrične formule, na primer* $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$*. Posledica tega je, da je tudi funkcija* $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ *zvezna na* $\mathbb{R}$ *(opomba:* $\tanh(x)$ *je definirana na celotnem* $\mathbb{R}$*, saj velja* $\cosh(x) \geq 0$*).*

1. *Funkcija* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je bijektivna. Njen inverz je funkcija area hiperbolični sinus oziroma* $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *s predpisom* $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$*.*

2. *Funkcija* $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ *je bijektivna. Njen inverz je funkcija area hiperbolični kosinus oziroma* $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *s predpisom* $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$*.*

3. *Funkcija* $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ *je bijektivna. Njen inverz je funkcija area hiperbolični tangens oziroma* $\operatorname{artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ *s predpisom* $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$*.*

Dokaz izreka o zveznosti inverzne funkcije. Naj bo $f : I \to J = Z_f$ zvezna, strogo monotona bijekcija na intervalu I in $f^{-1} : J \to I$ njen inverz. Naj bo $a \in I$ in $b = f(a) \in J$. Dokazujemo zveznost f^{-1} v b. Naj bo $\varepsilon > 0$. Brez škode za splošnost naj bo f strogo naraščajoča in naj bo a notranja točka I. Če je potrebno, ε zmanjšamo, da je $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subseteq I$. Potem velja:

$$f(a - \varepsilon) = b_{-\varepsilon} < b = f(a) < b(a + \varepsilon) = b_{+\varepsilon}$$

Naj bo $\delta = \min\{b - b_{-\varepsilon}, b_{+\varepsilon} - b\}$. Vzemimo tak $y \in J$ tak, da je $|y - b| < \delta$. Torej velja:

$$f(a - \varepsilon) = b_{-\varepsilon} \leq b - \delta < y < b + \delta \leq b_{+\varepsilon} = f(a + \varepsilon) \tag{$*$}$$

Ker je $y \in J = Z_f$, obstaja natanko določen $x \in I$, da je $f(x) = y$ oz. $f^{-1}(y) = x$. Sedaj zaradi $(*)$ in stroge monotonosti f velja:

- $x < a + \varepsilon$, saj bi v nasprotnem primeru ($x \geq a + \varepsilon$) veljalo $f(a + \varepsilon) = b_{+\varepsilon} \leq f(x)$, kar pa vodi v protislovje zaradi $|y - b| < \delta$.

- $x > a - \varepsilon$, saj bi v nasprotnem primeru ($x \leq a - \varepsilon$) veljalo $f(a - \varepsilon) = b_{-\varepsilon} \geq f(x)$, kar pa ponovno vodi v protislovje zaradi $|y - b| < \delta$.

Torej velja $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Da ponovimo: Za vsak $y \in J$, za katerega velja $|y - b| < \delta$, obstaja točno določen $x \in I$, da velja $f(x) = y$ in $|x - a| < \varepsilon$. Torej za $\forall y \in J$ obstaja $\delta > 0$, da velja

$$|y - b| < \delta \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$$

in funkcija f^{-1} je zvezna v točki b. □

4.6 Enakomerna zveznost

Naj bo funkcija f zvezna na D. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $\delta > 0$, da iz $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, kjer je $a \in D$. V definiciji zveznosti je pri danem $\varepsilon > 0$ izbor δ torej odvisen od $a \in D$. Zanima nas, če lahko najdemo podoben δ, ki ne bi bil odvisen od a, t.j. ali bi za izbrani δ veljal pogoj zveznosti za katerikoli $a \in D$. V splošnem to ne velja, zaradi česar uvedemo pojem enakomerne zveznosti funkcije.

Zgled 4.5. *Naredimo nekaj zgledov enakomerne zveznosti:*

1. *Oglejmo si funkcijo* $f(x) = x^2$. *Naj bo* $\varepsilon > 0$ *in* $a \in \mathbb{R}$ *poljubna točka. Zanima nas, če obstaja univerzalen* $\delta > 0$, *da velja* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ *za vsak* $x \in D$, *ki zadošča* $|x - a| < \delta$. *Vzemimo poljuben* $\delta > 0$ *in* $x = a + \frac{\delta}{2}$. *Sedaj velja* $|x - a| < \delta$ *in* $|f(x) - f(a)| = |a\delta + \frac{\delta^2}{4}|$ *in ta izraz gre proti neskončnosti, ko gre* a *preko vsake meje. Torej takšen* δ *ne obstaja.*
2. *Oglejmo si* $f(x) = \frac{1}{x}$ *na intervalu* $(0, 1]$. *Naj bo* $\varepsilon > 0$. *Zanima nas, če obstaja* $\delta > 0$, *neodvisen od* $a \in (0, 1]$, *da velja* $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$ *za* $x \in (0, 1]$, *ki zadošča* $|x - a| < \delta$? *Če je* $a < \delta$, *potem to mora veljati za* $x = \frac{a}{2}$. *Sledi* $\left|\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{a} < \varepsilon$, *kar pa seveda ne velja za vse* $a \in (0, 1]$. *Ponovno želeni* δ *ne obstaja.*

Definicija 4.11. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna na D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak par $x, x' \in D$ velja

$$|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Zgled 4.6. *Za* $f(x) = x$ *na* $\mathbb{R}$ *vzamemo* $\delta = \varepsilon$ *in smo dokazali enakomerno zveznost.*

Izrek 4.11.

Naj bo D *omejen interval in* $f : D \to \mathbb{R}$ *enakomerno zvezna. Potem je* f *omejena na* D.

Dokaz. D je lahko zaprt, odprt ali polodprt interval. Naj bo $a \in D$ in $\varepsilon = 1$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za $x, x' \in D$ velja:

$$|x - x'| < 2\delta \implies |f(x) - f(x')| < 1.$$

Oglejmo si točke $a_k = a + k\delta$ za $k \in \mathbb{Z}$. Ker je D omejen interval, leži na intervalu D največ $\frac{l(D)}{\delta} + 1 = N$ takih točk. Za poljubno točko $x \in D$ obstaja $k \in \mathbb{Z}$, da velja $a_{k-1} \leq x < a_k$. Denimo, da je $k \geq 1$. Potem velja:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f(a_{k-1})| + \cdots + |f(a_1) - f(a_0)| \\ &< k \cdot 1 \leq N \end{aligned}$$

Tako za vsak $x \in D$ velja

$$f(a) - N < f(x) < f(a) + N.$$

S tem smo pokazali, da je f omejena na D. □

Opomba. Zgornji izrek ne velja nujno za poltrake ali pa $\mathbb{R}$. Primer: $f(x) = x$.

Izrek 4.12.

Kompozitum dveh enakomerno zveznih funkcij je enakomerno zvezna funkcija.

4.7 Osnovne lastnosti zveznih funkcij na zaprtih omejenih intervalih.

Izrek 4.13.

Naj bo zaprt omejen interval $D = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Če je* $f : D \to \mathbb{R}$ *zvezna na* D, *potem je tudi enakomerno zvezna na* D.

Dokaz. Denimo, da f ni enakomerno zvezna na D. Obstaja $\varepsilon > 0$, da za $\forall n \in \mathbb{N}$ obstajata $x_n, x_n' \in D$, da velja $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$ in $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon$.

Zaporedji $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(x_n')_{n=1}^{\infty}$ sta zaporedji na zaprtem intervalu $[a, b]$ in zato imata stekališči. Torej obstaja podzaporedje $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, ki konvergira k $\alpha \in [a, b]$ oziroma $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \alpha$. Prav tako obstaja podzaporedje $(x_{n_{j_k}}')_{k=1}^{\infty}$, ki konvergira k $\beta \in [a, b]$ oziroma $\lim_{k\to\infty} x_{n_{j_k}}' = \beta$. Od tod sledi

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_{j_k}} = \alpha \quad \text{in} \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_{j_k}}' = \beta.$$

V nadaljne bomo ta sklep preskočili in zgolj brez škode za splošnost predpostavili, da obe originalni zaporedji konvergirata. Sedaj zaradi predpostavke $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$ velja $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_n') = 0$. Iz tega sledi

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_{j_k}} - x_{n_{j_k}}') = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_{j_k}} = \lim_{k\to\infty} x_{n_{j_k}}' = \alpha$$

Po drugi strani pa velja $|f(x_{n_{j_k}}) - f(x_{n_{j_k}}')| \geq \varepsilon$ in zato f ni zvezna v točki α (sicer bi oba člena konvergirala proti $f(\alpha)$ – karakterizacija zveznosti z zaporedji). $\square$

Izrek 4.14.

Naj bo f zvezna na zaprtem omejenem intervalu $D = [a, b]$, $a < b$. Potem je f na D omejena in obstajata točki $x_m, x_M \in D$, da je

$$f(x_m) = \inf_D f = \min_D f$$
$$f(x_M) = \sup_D f = \max_D f$$

oz. f zavzame minimum in maksimum.

Zgled 4.7. *To seveda ne velja za odprte intervale: naj bo $D = (0, 1)$ in $f(x) = x$. Očitno f na D ne zavzame maksimuma oziroma minimuma.*

Dokaz. Zgornji izrek lahko dokažemo s kombinacijo prejšnjih dveh: f je na zaprtem intervalu zvezna, zato je na zaprtem intervalu tudi enakomerno zvezna, iz enakomerne zveznosti pa sledi omejenost.

Lahko pa trditev dokažemo tudi neposredno: naj bo f navzgor neomejena. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $x_n \in [a, b]$, da velja: $f(x_n) > n$. Zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je omejeno, zato ima stekališče. Tako obstaja neko podzaporedje $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, da velja

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \alpha \in [a, b],$$

vendar pa zaradi $f(x_{n_j}) > n_j$ zaporedje $(f(x_{n_j}))_{j=1}^{\infty}$ ne konvergira k $f(\alpha)$. Torej f ni zvezna v točki $\alpha \in [a, b]$, kar vodi v protislovje. Identičen dokaz je za navzdol omejenost.

Dokažimo še, da f na D zavzame maksimum: naj bo $M = \sup_D f$. Če f ne zavzame vrednosti M na D, potem je funkcija $g = \frac{1}{M-f}$ zvezna na D. Ker pa iz definicije supremuma velja, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $x_\varepsilon \in D$, da je $M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) < M$ in iz tega sledi $g(x_\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, torej g ni navzgor omejena na D. Ker pa je g zvezna, to privede v protislovje. Zato f zavzame maksimum na D in podobno sledi, da na D zavzame tudi minimum. $\square$

Izrek 4.15.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Če je f v krajiščih nasprotno predznačena oz. velja $f(a)f(b) < 0$, potem obstaja tak $c \in (a, b)$, da je $f(c) = 0$, tj. f ima ničlo na intervalu (a, b).

Dokaz. Metoda bisekcije: Denimo, da je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$. Naj bo $a_1 = a$, $b_1 = b$ in $c = \frac{a_1+b_1}{2}$. Če je $f(c_1) = 0$, smo ničlo našli, sicer pa velja bodisi $f(c_1) < 0$ bodisi $f(c_1) > 0$. V prvem primeru definiramo $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$, v drugem pa $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$. Postopek ponovimo na intervalu $[a_2, b_2]$, kjer ponovno velja $f(a_2)f(b_2) < 0$. Če na katerem koli koraku dobimo ničlo, postopek zaključimo. Sicer dobimo dve zaporedji $(a_n)_{n=1}^\infty$ in $(b_n)_{n=1}^\infty$. Zaporedje $(a_n)_{n=1}^\infty$ je naraščajoče, $(b_n)_{n=1}^\infty$ pa padajoče. Za vsak $j \in \mathbb{N}$ velja

$$b_j - a_j = \frac{b-a}{2^{j-1}} \quad \text{in} \quad f(a_j)f(b_j) < 0. \tag{1}$$

Očitno je, da iz zaporedij $(a_n)_{n=1}^\infty$ in $(b_n)_{n=1}^\infty$ dobimo zaporedje vloženih intervalov

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \ldots$$

Ker sta $(a_n)_{n=1}^\infty$ in $(b_n)_{n=1}^\infty$ monotoni in omejeni, obstajata limiti $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$. Iz (1) sledi, da velja $\alpha = \beta = c$, torej je presek vloženih intervalov enak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

Zaradi $f(a_j)f(b_j) < 0$ velja

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = f(c)^2 \leq 0,$$

kar pa je možno le za $f(c) = 0$. Torej smo izrek dokazali. □

Posledica 4.16. *Naj bo f zvezna na omejenem zaprtem intervalu $D = [a, b]$. Potem f zavzame vse vrednosti med $m = \min_D f$ in $M = \max_D f$. To pomeni, da za $\forall y \in [m, M]$ obstaja $\exists x_0 \in [a, b]$, da je $f(x_0) = y$ oziroma $Z_f = f(D) = [m, M]$.*

Dokaz. Naj bo $y \in [m, M]$. Za $y = M$ ali $y = m$ je trditev že dokazana z izrekom 4.14, saj obstajata $x_m, x_M \in D$, da je $f(x_M) = M$ in $f(x_m) = m$. Vzemimo torej $y_0 \in (m, M)$ in poglejmo funkcijo $g(x) = f(x) - y_0$ na intervalu od x_m do x_M. Potem je

$$g(x_m) = m - y_0 < 0 \quad \text{in} \quad g(x_M) = M - y_0 > 0$$

ter iz izreka o bisekciji sledi, da ima funkcija g na intervalu od x_m do x_M ničlo x_0. Ker je

$$g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0,$$

funkcija f v točki $x_0 \in D$ zavzame vrednost y_0. □

Posledica 4.17. *Naj bo I interval ali poltrak ali $\mathbb{R}$ in funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ zvezna in injektivna. Tedaj je f strogo monotona na I.*

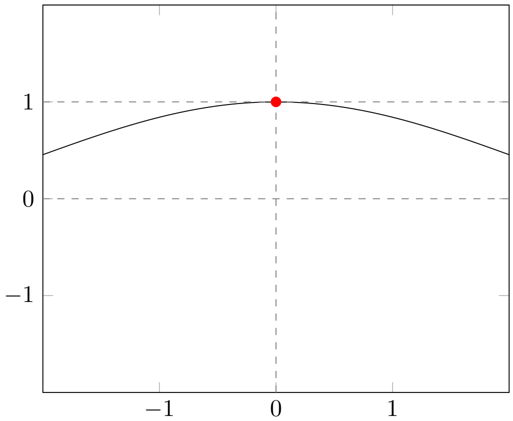
Dokaz. Naj bosta $a, b \in I$, $a < b$. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $f(a) < f(b)$ (enakost ne more veljati zaradi injektivnosti).

Naj bo $c \in I$, da velja $a < c < b$. Potem mora veljati $f(a) < f(c) < f(b)$, saj bi sicer prišli v protislovje z injektivnostjo. Res, f na intervalu $[c, b]$ zavzame vse vrednosti od $f(c)$ do $f(b)$. Če bi veljalo $f(c) \leq f(a)$, potem bi za nek $x_0 \in [c, b]$ bilo $f(x_0) = f(a)$. Ker pa je $x_0 > a$, je to v protislovju z injektivnostjo, torej velja $f(c) > f(a)$. Na enak način pokažemo tudi $f(c) < f(b)$.

S podobnim argumentom pokažemo tudi, da iz $b < d$ sledi $f(d) > f(b)$ in iz $e < a$ sledi $f(a) > f(e)$ za poljubna $d, e \in I$. Vse ostale primere lahko privedemo do zgornjih, torej smo dokazali. □

4.8 Limite funkcij

Zgled 4.8. *Naj bo $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ za $x \neq 0$ in f je zvezna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ali bi jo lahko primerno dodefinirali v točki $x = 0$, da je zvezna na $\mathbb{R}$? Vemo že, da za $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ velja $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. Ko je x blizu 0, je zaradi zveznosti $\cos x$ blizu 1. Torej je za $x \approx 0$, $x \neq 0$ vrednost izraza $\frac{\sin x}{x} \approx 1$. Zdi se, da bi bilo naravno definirati $f(0) = 1$.*



Slika 10: Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Definicija 4.12. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $r > 0$. Definiramo funkcijo $f : (a - r, a + r) \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ na punktirani oz. prebodeni okolici a. Število $A \in \mathbb{R}$ je limita funkcije f v točki a, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$[a], da velja $|f(x) - A| < \varepsilon$ za vse x, ki zadoščajo $0 < |x - a| < \delta$. To označimo kot $A = \lim_{x \to a} f(x)$.

[a]Veljati mora $0 < \delta \leq r$

Trditev 4.18. *Definicija močno spominja na definicijo zveznosti, le da f v a ni definirana.*

1. *Če je f definirana na $(a - r, a + r)$ in zvezna v a, potem velja $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
2. *Če je $\lim_{x \to a} f(x) = A$ in definiramo*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x); & x \neq a \\ A; & x = a \end{cases}$$

je $\tilde{f}(x)$ zvezna v a.

Zgled 4.9. *Iz zgornje neenakosti $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ za $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ sledi: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.*

Opomba. Od tod sledi običajna aproksimacija v fiziki. Če so koti (v radianih) majhni, je $\sin x \approx x$.

Zgled 4.10. *Funkcija* $f(x) = \frac{1}{x}$ *je definirana na* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*, a nima limite v točki* 0*, ker ni omejena v nobeni prebodeni okolici točke* 0*.*

Izrek 4.19.

Karakterizacija limite funkcije z zaporedji: za funkcijo $f : (a-r, a+r) \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

1. *Limita funkcije v točki* a *je* $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$*.*
2. *Za vsako zaporedje* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *iz množice* $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$*, za katerega velja* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$*, velja tudi* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$*.*

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz karakterizacije zveznosti z limitami zaporedij. □

Zgled 4.11. *Funkcija* $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$*,* $x \neq 0$ *je zvezna na* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*. A ker za* $x_n = \frac{1}{n\pi}$ *velja* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ *ter za* $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ *velja* $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$*, ne moremo dodefinirati* f *v točki* 0 *z neko vrednostjo, da bi razširjena funkcija bila zvezna. Torej* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *ne obstaja.*

Za limite funkcij v točki veljajo običajne algebraične lastnosti.

Trditev 4.20. *Naj bosta* f, g *definirani na* $(a-r, a+r) \setminus \{r\}$*. Če obstajata* $\lim_{x\to a} f(x)$ *in* $\lim_{x\to a} f(x)$*, potem obstajajo limite:* $\lim_{x\to a} (f+g)(x)$*,* $\lim_{x\to a} (f-g)(x)$*,* $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x)$*,* $\lim_{x\to a} (\frac{f}{g})(x)$*. Te limite so enake:*

1. $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a} (f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
4. $\lim_{x\to a} (\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Pozor: limita $\lim_{x\to a} (\frac{f}{g})(x)$ *obstaja le, če je* $g(a) \neq 0$*.*

Trditev sledi iz podobnega izreka z zveznimi funkcijami ali iz karakterizacije z limitami zaporedij.

Zgled 4.12. *Oglejmo si funkcijo sgn*(x)*:*

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$$

Limita $\lim_{x\to 0} f(x)$ *ne obstaja, saj hkrati veljata limiti* $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 1$ *in* $\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = -1$*. Zdi pa se, da če se točki* $x = 0$ *približujemo le z ene strani, npr. z desne, se vrednost funkcije približuje vrednosti* 1*.*

Definicija 4.13. Naj bo $f : (a-r, a) \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f ima levo limito v točki a, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in (a-\delta, a)$ velja $|f(x) - A| < \varepsilon$. To označimo kot $\lim_{x\uparrow a} f(x) = A$.

Definicija 4.14. Naj bo $f : (a, a + r) \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f ima desno desno v točki a, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in (a, a+\delta)$ velja $|f(x)-A| < \varepsilon$. To označimo kot $\lim_{x\downarrow a} f(x) = B$.

Zgled 4.13. *Ponovno si oglejmo funkcijo*

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}.$$

Sedaj velja $\lim_{x\uparrow a} f(x) = -1$ *in* $\lim_{x\downarrow a} f(x) = 1$ *in nobena od teh vrednosti ni enaka* $f(0) = 0$.

Opomba. Če je f definirana na $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$ in leva ter desna limita obstajata ter nista enaki, pravimo, da ima f v a skok.

Trditev 4.21. *Funkcija f ima v a limito natanko tedaj, ko ima v a levo in desno limito in sta enaki. Tedaj velja* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\uparrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} f(x)$.

Levo limito pogosto označimo z $f(a - 0)$ oz. $f(a-)$, desno pa z $f(a + 0)$ oz. $f(a+)$.

Izrek 4.22.

Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ monotona funkcija na intervalu I. Potem ima f levo in desno limito v vsaki notranji točki intervala I.

Dokaz. Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ naraščajoča in naj bo $a \in I$ notranja točka. Naj bo $x < a$, $x \in I$. Potem je $f(x) \le f(a)$. Množica $E = \{f(x); x < a, x \in I\}$ je neprazna in navzgor omejena, zato ima supremum. Trdimo, da je $\lim_{x\uparrow a} f(x) = \sup E$. Naj bo $A = \sup E$ in poljuben $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $x_0 \in I$, $x_0 < a$, da je

$$A - \varepsilon < f(x_0) \le A.$$

Naj bo $\delta = a - x_0 > 0$. Če je $x \in (a - \delta, a) = (x_0, a)$, sledi

$$A - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le A$$

zaradi monotonosti. Torej za vsak $x \in (a - \delta, a)$ velja $|f(x) - A| < \varepsilon$ in zato je $A = \lim_{x\uparrow a} f(x)$. Podobno dokažemo

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = \inf\{f(x); x > a, x \in I\}.$$ □

Posledica 4.23. *Monotona funkcija ima največ števno mnogo skokov, t.j. točk nezveznosti.*

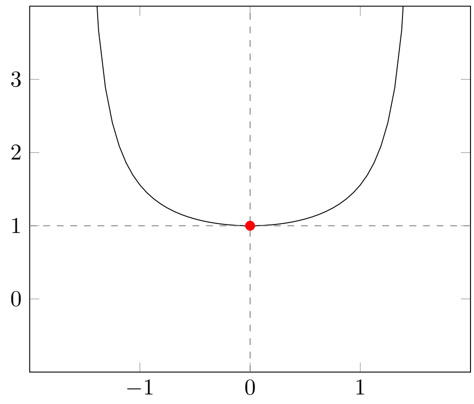
Dokaz. Če ima f v a skok, izberemo neko racionalno število ne intervalu med $f(a-)$ in $f(a+)$. Denimo, da je f naraščajoča. Potem je

$$r_a \in (f(a-), f(a+)).$$

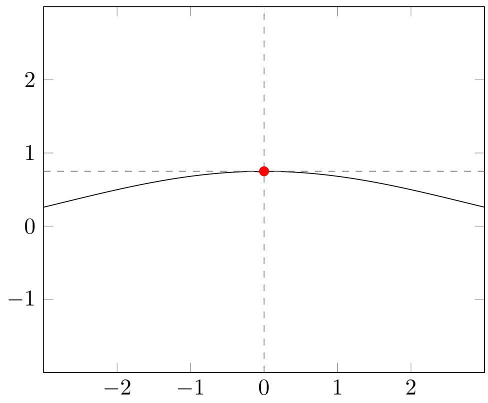
Naj bosta $a < b$ števili iz intervala I, v katerih ima f skok. Potem je

$$f(a+) = \lim_{x\downarrow a} f(x) \le f(b-) = \lim_{x\uparrow b} f(x),$$

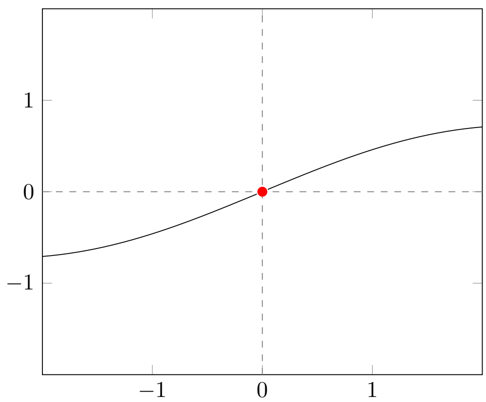
saj zaradi monotonosti velja $f(a+) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(b-)$. Torej sta intervala $(f(a-), f(a+))$ in $(f(b-), f(b+))$ disjunktna in zato je $r_a \ne r_b$. Tako je preslikava iz množice skokov za f v množico racionalnih števil $a \mapsto r_a$ injektivna. Torej je množica skokov za f kvečjemu števna (ali števna ali končna). □



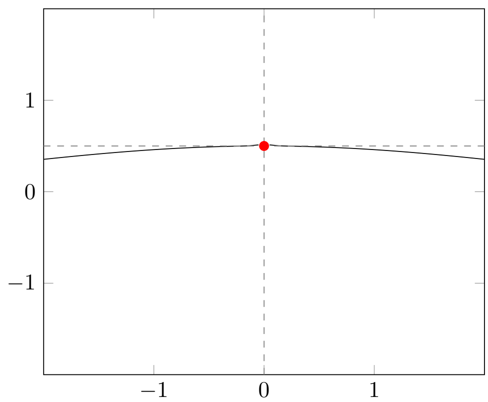
Slika 11: Funkcija $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$.



Slika 12: Funkcija $\frac{\sin\left(\frac{3}{4}x\right)}{x}$.



Slika 13: Funkcija $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$.



Slika 14: Funkcija $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$.

Zgled 4.14. *Izračunajmo naslednje limite:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\cdot\alpha \overset{\alpha x = t}{=} \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\alpha = \alpha$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Opomba. Iz zadnjega primera sledi, da za $x \approx 0$ velja $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$.

4.9 Posplošene limite

Definicija 4.15. Naj bo f definirana na $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$ za $a \in \mathbb{R}$ in $r > 0$.

1. Pravimo, da f konvergira k $+\infty$, ko gre x proti a, če za $\forall M \in \mathbb{R}$ (še tako velik) obstaja tak $\delta > 0$[a], da velja $f(x) > M$ za vse x, ki zadoščajo $0 < |x-a| < \delta$.

2. Pravimo, da f konvergira k $-\infty$, ko gre x proti a, če za $\forall m \in \mathbb{R}$ (še tako majhen) obstaja tak $\delta > 0$, da velja $f(x) < m$ za vse x, ki zadoščajo $0 < |x-a| < \delta$.

[a] Ponovno mora veljati mora $0 < \delta \leq r$

To zapišemo kot $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ in $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Zgled 4.15. *Limita funkcije* $f(x) = \frac{1}{x^2}$*, ko se* x *približuje* 0*, je* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Podobno definiramo posplošene enostranske limite: to so $\lim_{x\uparrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\uparrow a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\downarrow a} f(x) = +\infty$ in $\lim_{x\downarrow a} f(x) = -\infty$.

Zgled 4.16. *Oglejmo si primer posplošenih levih in desnih limit funkcij:*

1. *Enostranski limiti funkcije* $f(x) = \frac{1}{x}$*, ko se približujemo* $x = 0$*: desna limita je* $\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$*, leva pa* $\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$
2. *Enostranski limiti funkcije* $f(x) = \tan x$*, ko se približujemo* $x = 0$*: desna limita je tokrat* $\lim_{x\downarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$*, leva pa* $\lim_{x\uparrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$

Definicija 4.16. Naj bo f definirana na (a, ∞); $a \in \mathbb{R}$. Število $A \in \mathbb{R}$ je limita funkcije $f(x)$, ko gre x proti $+\infty$, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $M > a$, da za $\forall x > M$ velja $|f(x) - A| < \varepsilon$.

To označimo kot $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$. Podobno definiramo tudi limito od f, ko gre x proti minus neskončnosti: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Zgled 4.17. *Poglejmo si funkcijo* $f(x) = \arctan x$*. Limiti od* f*, ko gre* x *proti plus in minus neskončnosti, sta* $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ *in* $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

Trditev 4.24. *Naslednji izjavi sta enakovredni:*

1. *Funkcija* f *ima limito* $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$.

2. *Za vsako zaporedje* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$[1] *velja, da če je* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$*, potem je tudi* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Trditev 4.25. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Dokaz. Naj bosta $n \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathbb{R}$ taka, da je $n \leq x < n+1$. Potem je $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ in od tod sledi

$$1 < 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Zgornjo neenačbo preoblikujemo in dobimo:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

[1] Zaporedje mora biti seveda definirano: za $\forall n$ velja $x_n > a$

Vemo, da ko gre x preko vsake meje ($x \to \infty$), gre tudi n preko vsake meje ($n \to \infty$). Ker je $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$ in $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$, sledi

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

$\square$

5 ODVOD

Intuitivno: odvod predstavlja hitrost spreminjanja funkcije glede na neodvisno spremenljivko.

Zgled 5.1. *Osnovni primer uporabe odvoda. Naj bo x časovna spremenljivka, $f(x)$ pa funkcija pot, ki smo jo opravili od nekega začetnega časa x_0 do trenutnega časa $x = a$. Funkcija $f'(x)$ je odvod f po x oziroma hitrost gibanja v času x, $f'(a)$ pa je trenutna hitrost ob času $x = a$. Povprečna hitrost na intervalu $[a, a+h]$ za nek $h \neq 0$ je $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, kar je diferenčni kvocient v točki a. Če vstavimo $a + h = x$, dobimo $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Trenutna hitrost v $x = a$ je limita tega izraza, ko gre $x \to a$ oziroma $h \to 0$.*

Definicija 5.1. Naj bo $f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana na okolici točke a. Funkcija f je odvedljiva v a, če obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a),$$

kjer je $f'(a)$ odvod funkcije f v a.

Zgled 5.2. *Oglejmo si primere odvodov nekaterih funkcij.*

1. *Odvod konstantne funkcije $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$ v poljubni točki $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = 0$. To zapišemo $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*
2. *Odvod funkcije $f(x) = x$ v točki $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$. Ponovno to zapišemo $f'(x) = 1$.*
3. *Odvod funkcije $f(x) = \sin x$ v točki $a = 0$ je $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to a} \frac{\sin h}{h} = 1$. Torej je $\sin'(0) = 1$.*

Definiramo lahko tudi pojma levega in desnega odvoda, če te limite obstajajo:

1. Levi odvod: $f'(a-) = \lim_{x\uparrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h}$
2. Desni odvod: $f'(a+) = \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h}$

5.1 Geometrijska interpretacija odvoda.

Sekanta na graf funkcije f gre skozi točki $(a, f(a))$ in $(a+h, f(a+h))$ in njen smerni koeficient je $k = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Enačba sekante je $y - f(a) = k(x-a)$. Ko h pošljemo proti 0, sekanta preide v tangento na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$. Smerni koeficient tangente je $f'(a)$. Enačba tangente na graf f v točki $(a, f(a))$ je $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

Zgled 5.3. *Geometrijski pomen odvoda funkcij v prejšnjem zgledu.*

1. *Graf funkcije $f(x) = c$ je premica s smernim koeficientom 0 in je tudi tangenta na graf v vsaki točki.*
2. *Graf funkcije $f(x) = x$ je premica s smernim koeficientom 1 in je prav tako tangentna na graf v vsaki točki.*
3. *Tangenta na graf funkcije $f(x) = \sin x$ v točki $(0,0)$ je $x = y$.*

Zgled 5.4. *Oglejmo si še nekatere posebne primere odvodov funkcij.*

1. *Funkcija*
$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ x; & x > 0 \end{cases}$$
v točki 0 *ni odvedljiva, obstajata pa levi in desni odvod* $f'(0-) = 0$ *in* $f'(0+) = 1$*. V vseh točkah* $a \neq 0$ *je* f *odvedljiva.*
2. *Funkcija* $f(x) = |x|$ *podobno ni odvedljiva v* $x = 0$.
3. *Funkcija* $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ *prav tako ni odvedljiva v* $x = 0$*, saj je tam tangenta na graf navpična premica. V ostalih točkah pa je ta funkcija odvedljiva.*
4. *Funkcija* $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ *tudi ni odvedljiva v* $x = 0$*, podobno kot v prejšnjem primeru.*
5. *Za funkcijo* $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$*,* $f(0) = 0$ *smo že pokazali, da je zvezna na* $\mathbb{R}$*, vendar pa ni odvedljiva v* $x = 0$*. Res, njen odvod v tej točki je* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$*, ta limita pa ne obstaja.*

Definicija 5.2. Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija na intervalu I. Rečemo, da je f odvedljiva na I, če je odvedljiva na vsaki notranji točki intervala I, v krajiščih (če pripadajo I) pa obstajajo ustrezni enostranski odvodi. Če je funkcija f odvedljiva na I, dobimo novo funkcijo $f' : I \to \mathbb{R}$ s predpisom $x \mapsto f'(x)$, ki ji pravimo odvod funkcije f ali Df.

Zgled 5.5. *Iz prejšnjih zgledov lahko izračunamo naslednje odvode:*

1. *Odvod funkcije* $f(x) = c$ *je* $f'(x) = 0$
2. *Odvod funkcije* $f(x) = x$ *je* $f'(x) = 1$
3. *Odvod funkcije* $f(x) = kx + n$ *je* $f'(x) = k$*.*

Definicija 5.3. Funkcija f je zvezno odvedljiva na I, če je na I odvedljiva in je njen odvod $f' : I \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na I. Množico zveznih funkcij na I označimo s $C(I)$, množico zvezno odvedljivih funkcij na I pa s $C^1(I)$

Trditev 5.1. *Če je* f *odvedljiva v* a*, je tudi zvezna v* a*.*

Dokaz. Naj bo f odvedljiva v a. Naj bo $\eta(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$ in $o(h) = h\eta(h)$. Iz odvedljivosti sledi $\lim_{h\to 0} \eta(h) = \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$, od tod pa $\lim_{h\to 0} o(h) = 0$. Sedaj velja
$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} (f(a) + f'(a)h + \eta(h)h) = f(a)$$
in f je zvezna v a. □

Opomba. Če je f odvedljiva na I, je tudi zvezna na I. Seveda pa ne velja obratno, saj obstajajo zvezne funkcije na I, ki niso v nobeni točki odvedljive.

Pri odvajanju smo vrednosti $f(a + h)$ v okolici točke a aproksimirali z linearno afino preslikavo s predpisom $h \mapsto f(a) + f'(a)h$. To je ekvivalentno temu, da smo $f(x)$ aproksimirali s funkcijo $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$, ki prav tako podaja tangento na graf f v točki $(a, f(a))$.

Definicija 5.4. Funkcija f, definirana v okolici točke a, je diferenciabilna v a, če obstaja taka linearna funkcija $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da velja
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{h} = 0.$$

Opomba. Če tak L obstaja, je en sam in ga imenujemo diferencial funkcije f v točki a: $L = df_a$.

Linearne funkcije iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ so take funkcije, za katere velja $L(h_1+h_2) = L(h_1)+L_(h_2)$ in $L(\lambda h) = \lambda L(h)$ za poljubne $h_1, h_2, h, \lambda \in \mathbb{R}$. Ker je $h = h \cdot 1$, je $L(h) = h \cdot L(1) = \alpha h$. Vsaka linearna preslikava iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ je take oblike.

Trditev 5.2. *Funkcija f, definirana v okolici točke a, je v a diferenciabilna natanko tedaj, ko je v a odvedljiva. Tedaj je $df_a(h) = f'(a) \cdot h$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo f v a diferenciabilna in L in njen diferencial. Potem je

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{h} = 0.$$

Naj bo $L = \alpha h$. Potem imamo $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \alpha\right) = 0$ in od tod $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha$. Torej odvod $f'(x)$ v točki a obstaja in je enak α.

($\Leftarrow$) V obratno smer pa smo trditev dokazali že v prejšnjem dokazu. Že iz prejšnjega dokaza vemo, da je $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + o(h)$ in $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Od tod sledi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0,$$

torej je $L(h) = f'(a)h$ diferencial funkcije f v a. □

Naj bo f diferenciabilna v točki a. Potem iz enačbe $dx_a(h) = 1 \cdot h = h$ sledi $df_a(h) = f'(a) \cdot h = f'(a) \cdot dx_a$. Od tod sledi zapis $df = f'(a)\, dx$ oziroma $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

5.2 Pravila za odvajanje

Izrek 5.3.

Naj bosta $f, g : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ funkciji, definirani v okolici točke a in v tej točki odvedljivi. Potem so v a odvedljive tudi funkcije $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ in velja

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$
3. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, *če je $g(a) \neq 0$.*

Opomba. Množica funkcij, definiranih na intervalu $(a-r, a+r)$ in zveznih v točki a, je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ in preslikava iz tega prostora v $\mathbb{R}$ s predpisom $f \mapsto f(a)$ je linearen funkcional.

Dokaz. Predpostavimo, da sta f, g definirani v okolici točke a in v a odvedljivi.

1. Dokaz 1. točke:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= f'(a) + g'(a)\end{aligned}$$

2. Dokaz 3. točke:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a+h)-f(a)\cdot g(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)}{h}\\
&+ \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)f(a)-f(a)g(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} g(a+h)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\
&+ \lim_{h\to 0} f(a)\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\
&\overset{g\text{ zvezna}}{=} g(a)f'(a)+f(a)g'(a)
\end{aligned}$$

3. Dokaz 4. točke:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a+h)}{h\cdot g(a+h)\cdot g(a)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a+h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a+h)g(a)}\\
&\overset{g\text{ zvezna}}{=} -\frac{g'(a)}{g^2(a)}
\end{aligned}$$

□

Posledica 5.4. *Naj bodo funkcije $f_1, f_2, \dots f_n$ definirane na $(a-r, a+r)$ in odvedljive v a. Potem je*

$$(f_1 f_2 \dots f_n)'(a) = f_1'(a)f_2(a)\dots f_n(a) + f_1(a)f_2'(a)\dots f_n(a) + \dots + f_1(a)f_2(a)\dots f_n'(a).$$

Zgled 5.6. *Naj bo $f(x) = x^n$ in $n \in \mathbb{N}$. Po prejšnji posledici je odvod od te funkcije $f'(x) = nx^{n-1}$. To bi lahko izračunali tudi direktno, in sicer*

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}((x+h)^{n-1}+\dots+x^{n-1}) = nx^{n-1}$$

Posledica 5.5. *Odvod polinoma:*

$$\left(\sum_{m=0}^{n} a_m x^m\right)' = \sum_{m=0}^{n} a_m (x^m)' = \sum_{m=1}^{n} m a_m x^{m-1}.$$

Od tod sledi, da znamo odvajati tudi racionalne funkcije. Naj bo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta p, q polinoma. Potem je njen odvod $f'(x) = \frac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{q^2(x)}$.

Zgled 5.7. *Naj bo $f(x) = \frac{1}{x^k}$ in $k \in \mathbb{Z}^+$. Odvod te funkcije je $f'(x) = \frac{-kx^{k-1}}{x^{2k}} = -kx^{-k-1}$. S tem smo dobili odvode potenčnih funkcij s celimi eksponenti.*

Zgled 5.8. *Naj bo $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $x > 0$. Potem je*

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}\frac{1}{(x+h)^{\frac{n-1}{n}} + (x+h)^{\frac{n-2}{n}}x^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1},$$

kjer zadnji enačaj sledi iz zveznosti korenske funkcije na intervalu $[0,\infty)$. Sedaj poznamo tudi odvod korenskih funkcij.

Trditev 5.6. *Iz prejšnjih zgledov je očitno:*

1. *Za vsak $n \in \mathbb{Z}$ velja $(x^n)' = nx^{n-1}$.*
2. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$.*
3. *Za vsak $r \in \mathbb{Q}$ velja $(x^r)' = rx^{r-1}$.*

Zgled 5.9. *Izračunajmo odvod funkcije naravnega logaritma. Naj bo $f(x) = \ln x$. Njen odvod je limita diferenčnega kvocienta oziroma*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Izračunajmo levo in desno limito. Naj gre $h \uparrow 0$ in naj bo $t = \frac{1}{h}$. To pomeni, da gre $t \to -\infty$. Tedaj velja:

$$\begin{aligned}\lim_{h\uparrow 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{t\to-\infty} \ln\left(1+\frac{1}{tx}\right)^{t} \\ &= \ln\left(\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{tx}\right)^{t}\right) \\ &= \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Podoben razmislek naredimo še za njeno desno limito, vendar pa sedaj gre $h \downarrow 0$ in $t = \frac{1}{h}$ proti $t \to \infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{h\downarrow 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{t\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{tx}\right)^{t} \\ &= \ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{tx}\right)^{t}\right) \\ &= \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Torej sta leva in desna limita enaki in zato velja $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{1}{x}$. Torej smo pokazali, da velja $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Zgled 5.10. *Preostanejo nam še trigonometrijske formule. Izračunajmo odvod sinusne funkcije. Poračunajmo:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \cos x.$$

Torej je $(\sin x)' = \cos x$.

Izrek 5.7 (Odvod kompozituma funkcij)**.**

Naj bo f definirana v okolici a in odvedljiva v a ter naj bo funkcija g definirana v okolici točke

$b=f(a)$ in odvedljiva v b. Tedaj je $g\circ f$ odvedljiva v a in velja verižno pravilo:

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a).$$

Dokaz. Naj bo $b=f(a)$. Ker je g odvedljiva v b, je

$$g(b+k) = g(b) + g'(b)k + k\eta_g(k),$$

kjer velja $\lim_{k\to 0}\eta_g(k) = 0$. Podobno je f odvedljiva v a, zato velja:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\eta_f(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0}\eta_f(h) = 0$. Vstavimo $b=f(a)$ in $k(h) = f'(a)h + h\eta_f(h)$. Očitno velja $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. Sedaj iz prvih dveh enačb sledi

$$\begin{aligned}
g(f(a+h)) &= g(f(a) + f'(a)h + h\eta_f(h)) \\
&= g(b) + g'(b)(f'(a)h + h\eta_f(h)) + k(h)\eta_g(k(h)) \\
&= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)h + g'(b)h\eta_f(h) + k(h)\eta_g(k(h)).
\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}
\frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a)}{h} &= g'(f(a))f'(a) + g'(b)\eta_f(h) + \frac{k(h)}{h}\eta_g(k(h)) \\
&= g'(f(a))f'(a) + g'(b)\eta_f(h) + (f'(a) + \eta_f(h))\eta_g(k(h)).
\end{aligned}$$

Vemo, da velja $\lim_{h\to 0} g'(b)\eta_f(h) = 0$ in $\lim_{h\to 0}\eta_g(k(h)) = 0$, saj je $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. Tako obstaja limita in je enaka

$$\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a)}{h} = g'(f(a))f'(a). \qquad \square$$

Posledica 5.8. *Odvod kosinusne funkcije je $(\cos x)' = -\sin x$, kar sledi iz identitete $\cos = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ in verižnega pravila.*

Zgled 5.11. *Odvajanje trigonometričnih funkcij:*

1. *Odvod tangensa je $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$*
2. *Odvod kotangensa je $(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$*

Opomba. Odvod logaritemske funkcije z osnovo a je $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln a}$.

Izrek 5.9 (Odvod inverzne funkcije)**.**

Naj bo $f: I \to \mathbb{R}$ zvezna in strogo monotona na intervalu I. Če je f v točki $a\in I$ odvedljiva in je $f'(a)\neq 0$, je inverzna funkcija odvedljiva v $b=f(a)$ in velja

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Dokaz. Funkciji f in f^{-1} sta druga drugi inverzni, zato velja $f(y) = x$ natanko tedaj, ko je $f(x) = y$. Ker je f zvezna in strogo monotona na intervalu I, je tudi f^{-1} zvezna funkcija. To pomeni, da gre $y\to b$ natanko tedaj, ko gre $x = f^{-1}(y)\to a$. Tako lahko zapišemo limito diferenčnega kvocienta funkcije f^{-1} v točki b kot

$$\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-f(a)}=\frac{1}{f'(a)}. \qquad \square$$

Opomba. Če bi vedeli, da je f^{-1} odvedljiva v $b=f(a)$, potem formula za $(f^{-1})'(b)$ sledi iz $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}$. Po verižnem pravilu velja $(f^{-1})'(f(a))f'(a)=1$. Torej $f'(a)\neq 0$ in zato $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$.

Posledica 5.10. *Odvod eksponentne funkcije je eksponentna funkcija sama oziroma* $(e^x)'=e^x$. *To dokažemo s pomočjo prejšnjega izreka: naj bo* $f(x)=\ln x$ *in* $f^{-1}=e^x$. *Potem je*

$$(e^x)'=(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x$$

Posledica 5.11. *Sedaj poznamo tudi odvode vseh hiperboličnih funkcij, in sicer* $(\sinh x)'=\cosh x$, $(\cosh x)'=\sinh x$, $(\tanh x)'=\frac{1}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$ *in* $(\coth x)'=-\frac{1}{\sinh^2 x}=1-\coth^2 x$.

Posledica 5.12. *Odvod potenčne funkcije z realnim eksponentom je* $(x^r)'=rx^{r-1}$. *To je posledica odvoda eksponentne funkcije:*

$$(x^r)'=(e^{r\ln x})'=e^{r\ln x}(r\ln x)'=r\frac{1}{x}x^r=rx^{r-1}.$$

Posledica 5.13. *Izračunajmo še odvode inverznih krožnih funkcij. Naj bo* $f(x)=\sin x$ *in njen inverz* $f^{-1}(x)=\arcsin x$. *Ker funkcija* $\arcsin x$ *slika iz* $[-1,1]$ *v interval* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, *za vsak* $x\in[-1,1]$ *velja* $\cos(arcsin)\geq 0$. *To pomeni, da je*

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=\sqrt{1-x^2}.$$

Od tod pa po izreku o odvodu inverza sledi

$$(\arcsin)'=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Iz identitete $\sin x+\cos x=\tan x+\cot x=\frac{\pi}{2}$ *sledijo še drugi odvodi, in sicer* $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ *in* $(\mathrm{arccot}\ x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Posledica 5.14. *Odvajajmo še inverzne hiperbolične funkcije, in sicer* $\mathrm{arsinh}\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $\mathrm{arcosh}\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ *in* $\mathrm{artanh}\,x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. *Vse te funkcije so sestavljene iz elementarnih funkcij in jih lahko zato zlahka odvajamo. Za* $a\in\mathbb{R}$ *je*

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

in od tod sledi $(\mathrm{arsinh}\ x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ *ter* $(\mathrm{arcosh}\ x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. *Preostane nam le še odvod od area hiperbolični tangens oziroma* $(\mathrm{artanh}\ x)'=\frac{1}{1-x^2}$.

5.3 Višji odvodi

Naj bo $f:I\to\mathbb{R}$ funkcija, definirana na intervalu I. Denimo, da je f na intervalu I odvedljiva. Torej obstaja funkcija $f':I\to\mathbb{R}$. Če je f' zopet odvedljiva, je njen odvod $f^{(2)}$ drugi odvod funkcije f na I. Višje odvode, če obstajajo, definiramo rekurzivno: $f^{(0)}=f$, $f^{(1)}=f'$, $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$, kjer je $n\in\mathbb{N}$.

Zgled 5.12. *Naredimo nekaj zgledov višjih odvodov nekaterih funkcij.*

1. *Polinom* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je neskončnokrat odvedljiva funkcija. Njegovi višji odvodi so na primer* $p' = na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1$, $p^{(2)} = n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots + 2a_2$, $p^{(n)} = n!a_n$ *in* $p^{(k)} = 0$ *za* $k \geq n+1$.
2. *Vsi višji odvodi eksponentne funkcije so enaki eksponentni funkciji, oziroma* $(e^x)^{(n)} = e^x$ *za* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Višji odvodi funkcije* $f(x) = a^x$ *so oblike* $f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n$ *za* $n \in \mathbb{N}$.
4. *Višji odvodi potenčne funkcije z realnim eksponentom* $f(x) = x^r$ *so oblike* $f^{(n)} = r(r-1)\dots(r-n+1)x^{r-n}$ *za* $n \in \mathbb{N}$. *Če je* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *je faktor za* $n > r$ *enak* 0, *sicer pa ni nikoli ničeln.*
5. *Višji odvodi sinusne in kosinsne funkcije so ciklični. Naj bo* $f(x) = \sin x$. *Potem so prvi višji odvodi* $f'(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\sin x$, $f^{(3)} = -\cos x$ *in* $f^{(4)} = \sin x$. *V splošnem velja* $(\sin x)^{(4k)} = \sin x$, $(\sin x)^{(4k+1)} = \cos x$, $(\sin x)^{(4k+2)} = -\sin x$ *in* $(\sin x)^{(4k+3)} = -\cos x$ *za* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Podoben vzorec velja tudi za* $\cos x$.
6. *Podobno kot v prejšnji točki velja tudi za funkciji* $\sinh x$ *in* $\cosh x$*:* $(\sinh x)^{(2k)} = \sinh$ *in* $(\sinh x)^{(2k+1)} = \cosh$ *za* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sedaj lahko nadgradimo prostora $C(I)$ in $C^1(I)$, ki smo ju definirali na začetku poglavja o odvodih.

Definicija 5.5. Naj bo I interval, poltrak ali celotna množica $\mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$. Potem $C^n(I)$ označuje množico vseh funkcij $f : I \to \mathbb{R}$, ki so n-krat zvezno odvedljive na I. To je natanko takrat, ko na I obstajajo odvodi $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ in so zvezne funkcije na I.

Opomba. Če obstaja $f^{(k+1)}$ na I, je $f^{(k)}$ zvezna na I. Torej je zgoraj poleg pogoja za obstoj odvodov do reda N netrivialen pogoj, da je $f^{(n)}$ zvezna na I. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $C^{n+1}(I) \subseteq C^n(I)$ in obstajajo funkcije, ki so v $C^n(I)$, a niso v $C^{n+1}(I)$.

Zgled 5.13. *Oglejmo si funkcijo*

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

za $k \in \mathbb{N}$.

1. *Vzemimo* $k = 1$. *Funkcija*
$$f_1(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$
je zvezna na $\mathbb{R}$, *a ni odvedljiva v točki* 0.
2. *Poglejmo še* $k = 2$. *Funkcija*
$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$
ima odvod v 0, *a njen odvod ni zvezen v tej točki ni zvezen. To pomeni, da je* f_2 *odvedljiva, a ni zvezno odvedljiva.*
3. *Splošno: če nadaljujemo vzorec, opazimo, da velja* $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R})$, $f_3, f_4 \in C^1(\mathbb{R})$, $f_5, f_6 \in C^2(\mathbb{R})$ *in tako dalje. V splošnem velja, da je funkcija* f_k, *kot smo jo definirali,* $\left[\frac{k}{2}\right]$*-krat odvedljiva na* $\mathbb{R}$ *in* $\left[\frac{k-1}{2}\right]$*-krat zvezno odvedljiva na* $\mathbb{R}$.

Ponovno se izkaže, da je množica $C^n(\mathbb{R})$ vektorski prostor za vsak $n \in \mathbb{N}$, operator odvajanja $D : C^n(I) \to C^{n-1}(I)$, ki funkciji f priredi njen odvod f', je linearen operator. Lahko tvorimo tudi $C^\infty(I) = \bigcap_{n=0}^\infty C^n(I)$ – vektorski prostor gladkih oziroma neskončnokrat odvedljivih funkcij na I. Primeri gladkih funkcij na $\mathbb{R}$ so $\sin x$, $\cos x$, e^x in vsi polinomi. Sledi, da so vse te funkcije gladke tudi na kateremkoli intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Zgled 5.14. *Primer sestavljene gladke funkcije:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

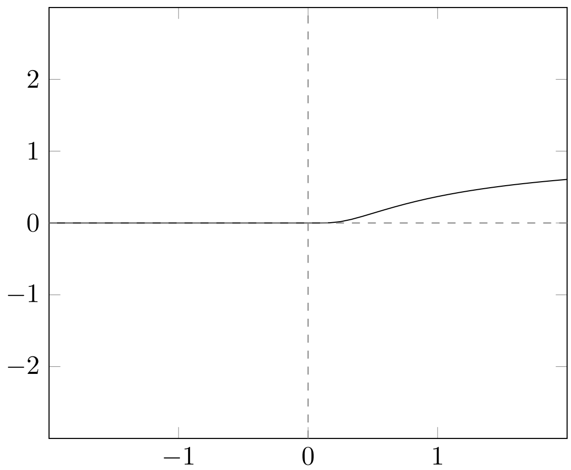
Ta funkcija je očitno gladka na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in vsi levi odvodi v 0 so enaki 0. Dokazati moramo, da so vsi višji odvodi funkcije f zvezni v 0 – tej točki se bomo torej morali približati z desne strani. Vzemimo prvi odvod: $f' = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{e^t} = 0$$

V splošnem so za $x > 0$ vsi odvodi oblike $f^{(k)}(x) = p(\frac{1}{x})x^{-\frac{1}{x}}$, kjer je $p(x)$ polinom. Torej je dovolj pokazati, da je za poljuben $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, kar naredimo po enakem argumentu kot zgoraj:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{t^n}{e^t} = 0.$$

Od tod pa sledi, da je f neskončnokrat odvedljiva na $\mathbb{R}$.



Slika 15: Funkcija f iz zgleda 5.14.

5.4 Rolleov in Lagrangev izrek

Trditev 5.15. *Naj bo f definirana v kolici točke a. Če je:*

- *$f'(a) > 0$, funkcija narašča v točki a – to pomeni, da obstaja $\delta > 0$, da za vsak $0 < h < \delta$ velja $f(a-h) < f(a) < f(a+h)$.*
- *$f'(a) < 0$, funkcija pada v točki a – to pomeni, da obstaja $\delta > 0$, da za vsak $0 < h < \delta$ velja $f(a-h) > f(a) > f(a+h)$.*

Dokaz. Naj bo $f'(a) > 0$. To pomeni, da velja $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$. Od tod sledi, da obstaja $\delta > 0$, da za vsak $|h| < \delta$ velja $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$. Če je $0 < h < \delta$, potem mora veljati $f(a+h) - f(a) > 0$. Če pa je $-\delta < h < 0$, potem mora veljati $f(a+h) - f(a) < 0$ oziroma $f(a) - f(a - |h|) > 0$. Torej smo dokazali prvo točko. Če je $f'(a) < 0$, je dokaz podoben. $\square$

Definicija 5.6. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$.

1. Funkcija f ima v $a \in D$ lokalni maksimum, če obstaja tak $r > 0$, da za vsak $x \in D \cap (a-r, a+r)$ velja $f(x) \leq f(a)$.

2. Funkcija f ima v $a \in D$ lokalni minimum, če obstaja tak $r > 0$, da za vsak $x \in D \cap (a-r, a+r)$ velja $f(x) \geq f(a)$.

3. Lokalni maksimum in lokalni minimum imenujemo lokalna ekstrema.

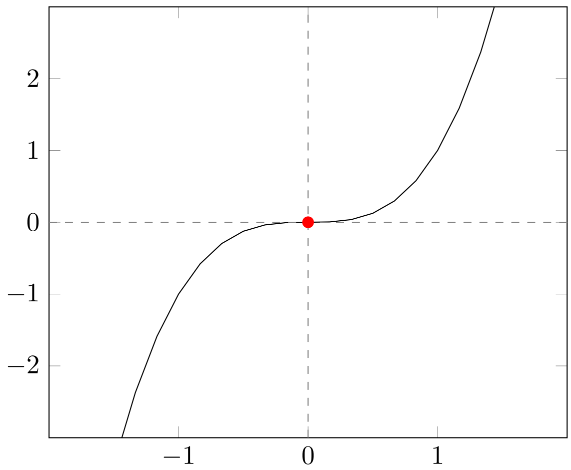
Posledica 5.16. *Naj bo f definirana v okolici točke a in naj bo v a odvedljiva. Če ima f v a lokalni ekstrem, je $f'(a) = 0$.*

Dokaz. Če je $f'(a) \neq 0$, potem f v a ali narašča ali pada in ne more imeti v a lokalnega ekstrema. □

Definicija 5.7. Točko a, v kateri je $f'(a) = 0$, imenujemo stacionarna točka funkcije f.

Biti stacionarna točka je torej potreben pogoj za to, da je točka lokalni ekstrem funkcije f. Z drugimi besedami – vsi lokalni ekstremi so stacionarne točke, a niso vse stacionarne točke lokalni ekstremi.

Zgled 5.15. *Funkcija $f = x^3$ ima v točki $a = 0$ stacionarno točko, a ne lokalnega ekstrema.*



Slika 16: Funkcija $f = x^3$.

Opomba. Prejšnjo posledico lahko za zgled dokažemo tudi neposredno. Naj ima f v a lokalni maksimum. Potem je $f(x) \leq f(a)$ za $x \in (a-r, a+r)$. Uporabimo definicijo odvoda:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Če gre $x \uparrow a$, potem je $x - a < 0$ in $f(x) - f(a) \leq 0$, torej je limita $f'(a) \geq 0$. Po drugi strani pa iz $x \downarrow a$ sledi $x - a > 0$ in $f(x) - f(a) \leq 0$, torej je limita $f'(a) \leq 0$. Od tod pa sledi, da je $f'(a) = 0$.

Omenimo še očitno geometrijsko dejstvo, da ima graf funkcije f v lokalnih ekstremih vodoravno tangento.

Izrek 5.17 (Rolleov izrek)**.**

Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva na (a,b). Naj bo $f(a) = f(b) = 0$. Tedaj obstaja taka točka $c \in (a,b)$, da je $f'(c) = 0$ (f ima stacionarno točko na odprtem intervalu.)

Dokaz. Ker je f zvezna na $[a,b]$, na tem intervalu doseže maksimum in minimum. Naj f doseže minimum v x_m in maksimum v x_M. Ker je $f(a) = f(b) = 0$, je $f(x_m) \leq 0 \leq f(x_M)$. Sedaj obravnavamo dva primera:

1. Če je $f(x_m) = f(x_M) = 0$, je $f(x) = 0$ za $\forall x \in [a,b]$ in zato za $\forall c \in (a,b)$ velja $f'(c) = 0$.
2. Vsaj ena od vrednosti $f(x_m)$ in $f(x_M)$ ni enaka 0. Denimo, da je $f(x_M) > 0$. Potem je $x_M \in (a,b)$ in funkcija f v x_M doseže globalni maksimum, zato je $f'(x_M) = 0$. Podoben argument velja tudi za $f(x_m) < 0$. □

Izrek 5.18 (Lagrangev izrek)**.**

Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je na (a,b) odvedljiva. Potem obstaja točka $c \in (a,b)$, da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dokaz. Na intervalu $[a,b]$ definiramo funkcijo

$$g(x) = (f(x) - f(a)) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a).$$

Ker je f na intervalu $[a,b]$ zvezna in na (a,b) odvedljiva, je tudi funkcija g na $[a,b]$ zvezna in na (a,b) odvedljiva. Ker je $g(a) = g(b) = 0$, po Rollejevem izreku obstaja $c \in (a,b)$, da je $g'(c) = 0$. Od tod sledi

$$g'(c) = f'(c) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) = 0,$$

torej obstaja tak $c \in (a,b)$, da velja $f'(c) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$. □

Posledica 5.19. *Naj bo f zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b). Potem veljajo naslednje trditve:*

1. *Funkcija f je konstantna funkcija natanko tedaj, ko je $f'(x) = 0$ za vse $x \in (a,b)$.*
2. *Funkcija f je naraščajoča natanko tedaj, ko je $f'(x) \geq 0$ za vse $x \in (a,b)$.*
3. *Funkcija f je padajoča natanko tedaj, ko je $f'(x) \leq 0$ za vse $x \in (a,b)$.*
4. *Če je $f'(x) > 0$ za vse $x \in (a,b)$, potem je f strogo naraščajoča.*
5. *Če je $f'(x) < 0$ za vse $x \in (a,b)$, potem je f strogo padajoča.*

Dokažimo le prvi dve točki. Naj bo f taka funkcija, da je $f'(x) = 0$ za vse $x \in (a,b)$. Vzemimo poljuben $x \in (a,b]$. Po Lagrangevem izreku obstaja tak $c \in (a,x)$, da je

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$

Od tod sledi, da za vsak $x \in (a,b]$ velja $f(x) = f(a)$ in f je konstantna funkcija. Dokaz izjave v obratni smeri je očiten.

Naj bo sedaj f taka funkcija, da je $f'(x) \geq 0$ za vse $x \in (a,b)$. Vzemimo poljubna $x_1, x_2 \in [a,b]$. Po Lagrangevem izreku obstaja $c \in (x_1, x_2)$, da je $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$ in od tod sledi, da je f naraščajoča. Dokaz izjave v obratni smeri sledi iz definicije odvoda. □

Problem: Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva. Poišči intervale naraščanja, padanja, lokalne in globalne ekstreme.

Če ima f v neki točki $c \in (a,b)$ lokalni ekstrem, je $f'(c) = 0$. Torej najprej poiščemo stacionarne točke f na $[a,b]$ oziroma ničle enačbe $f'(x) = 0$ na $[a,b]$. Denimo, da ima f na intervalu $[a,b]$ končno mnogo stacionarnih ničel:

$$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leq b.$$

Na vsakem od podintervalov (x_j, x_{j+1}) za $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ je $f'(x)$ istega predznaka in je f torej na intervalu $[x_j, x_{j+1}]$ strogo monotona.

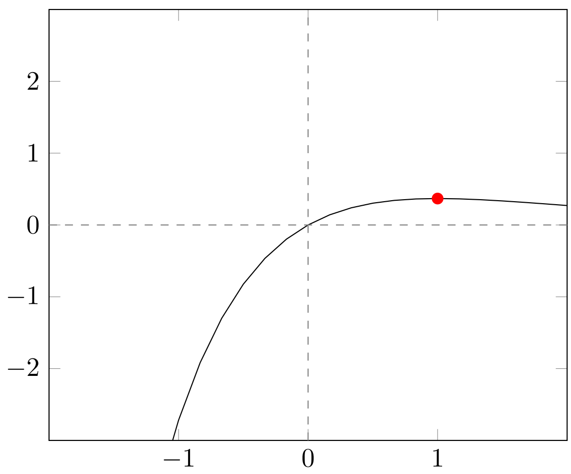
Posledica 5.20. *Naj bo $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva in naj bo $c \in (a,b)$ izolirana ničla odvoda f':*

1. *če odvod $f'(x)$ pri prehodu točke $x = c$ od leve spremeni predznak iz pozitivnega v negativno, ima f v c lokalni maksimum.*

2. *če odvod $f'(x)$ pri prehodu točke $x = c$ od leve spremeni predznak iz negativnega v pozitivno, ima f v c lokalni minimum.*

3. *če odvod $f'(x)$ pri prehodu točke $x = c$ od leve ne spremeni predznaka, f v c nima lokalnega ekstrema.*

Zgled 5.16. *Naj bo funkcija $f(x) = xe^{-x}$. Njen odvod je $f'(x) = (1-x)e^{-x}$. Torej ima f stacionarno točko v $x = 1$, na intervalu $(-\infty, 1)$ je njen odvod pozitiven, na $(1, \infty)$ pa negativen. Očitno ima f v točki $x = 1$ lokalni maksimum. Ker f narašča za vse $x < 1$ in pada za vse $x > 1$, je to tudi globalni ekstrem. Da se v to prepričamo, lahko izračunamo še limiti* $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$ *in* $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$.



Slika 17: Funkcija $f(x) = xe^{-x}$ iz zgleda 5.16.

Zgled 5.17. *Oglejmo si še funkcijo $f(x) = x^3 - 3x - 2$ na intervalu $[0,3]$. Njen odvod je $f'(x) = 3x^2 - 3$, torej sta edini stacionarni točki funkcije f v $x = -1$ in $x = 1$. Funkcija f ima lokalne ekstreme na intervalu $[0,3]$ v krajiščih krajišča in stacionarni točki v $x = 1$. Z računom pokažemo, da ima f na tem intervalu globalni minimum v točki $(1, -4)$ in globalni maksimum v točki $(3, 16)$.*

5.5 Konveksnost in konkavnost

Definicija 5.8. Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija na intervalu I (lahko tudi poltrak ali cela realna os). Naj bosta $a \leq b$ poljubni točki z intervala I. Funkcija f je konveksna na I, če za vsak x, za katerega velja $a \leq x \leq b$, velja

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Opomba. Enačba $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ določa sekanto skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$. To pomeni, da graf f nad intervalom $[a, b]$ leži pod sekantno premico za vsak izbor a, b.

Definicija 5.9. Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija na intervalu I (lahko tudi poltrak ali cela realna os). Naj bosta $a \leq b$ poljubni točki z intervala I. Funkcija f je konkavna na I, če za vsak x, za katerega velja $a \leq x \leq b$, velja

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Opomba. Graf f nad intervalom $[a, b]$ leži nad sekantno premico za vsak izbor a, b.

Opomba. Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če je za vsak par točk $\vec{a}, \vec{b} \in K$ tudi daljica, ki povezuje $\vec{a}$ in $\vec{b}$, vsebovana v K. To pomeni, da za poljubna $\vec{a}, \vec{b} \in K$ velja $\{t\vec{a} + (1 - t)\vec{b};\ t \in [0, 1]\} \subseteq K$. Primer konveksne množice je poljuben interval.

Posledica 5.21. *Funkcija f je konveksna na I natanko tedaj, ko je množica*

$$K = \{(x, y);\ x \in I,\ y \geq f(x)\}$$

konveksna. Po drugi strani pa je f konkavna na I natanko tedaj, ko je množica

$$K = \{(x, y);\ x \in I,\ y \leq f(x)\}$$

konveksna v $\mathbb{R}^2$. Od tod sledi, da je f konveksna na I natanko tedaj, ko je $-f$ konkavna na I.

Pogoj $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ lahko zapišemo tudi drugače. Naj bo $a < b$ in $x = a(1 - t) + tb$ za nek $t \in [0, 1]$. Temu pravimo konveksna kombinacija a in b. Iz definicije konveksnosti sledi, da je f konveksna na I, če za $\forall a, b \in I$ in $\forall t \in [0, 1]$ velja

$$f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b).$$

Funkcijska vrednost konveksne kombinacije je pod konveksno kombinacijo funkcijskih vrednosti, za konkavnost pa velja obratna neenakost.

Velikokrat je uporabno konveksnost in konkavnost funkcije f na intervalu I karakterizirati s prvim in drugim odvodom f' in f'', če ta na I obstajata.

Izrek 5.22.

Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ odvedljiva na intervalu I. Potem je f na I konveksna natanko tedaj, ko za vsak $a, x \in I$ velja neenakost:

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Opomba. Funkcija f je konveksna na I natanko tedaj, ko graf f leži nad tangento na graf v poljubni točki $a \in I$. Podobno je f konkavna na I natanko tedaj, ko graf f leži pod tangento v poljubni točki $a \in I$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Dokažimo najprej implikacijo v desno. Naj bo f konveksna in odvedljiva na I ter naj bosta $a, x \in I$, tako da $a \neq x$. Tedaj za vsak y med a in x velja $f(y) \leq f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a)$. Potem za bodisi $a < y < x$ bodisi $x < y < a$ velja

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a}(x - a) + f(a) \leq f(x).$$

Na levi strani tega izraza naredimo limito, ko gre $y \to a$, in dobimo $f'(a)(x-a) + f(a) \leq f(x)$.

($\Leftarrow$) Dokažimo sedaj izrek še v nasprotno smer. Denimo, da za $\forall a, x \in I$ velja

$$f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a).$$

Naj bosta $a, b \in I$ in $a < b$. Izberemo poljubno točko $a < x < b$. Iz predpostavke sledi, da graf funkcije f leži nad tangento T na graf f v točki $(x, f(x))$. Torej točki $(a, f(a))$ ter $(b, f(b))$ ležita nad to tangento T. Ker je zaprta polravnina nad tangento T konveksna množica, tudi daljica, ki povezuje točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$, leži v tej polravnini. Torej za $a < x < b$ točka $\left(x, \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$ leži v tej polravnini in je zato

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \geq f(x),$$

ker je $f(x)$ vrednost funkcije tangente na f v točki x. Torej smo dokazali konveksnost. □

Izrek 5.23.

Naj bo f odvedljiva na intervalu I. Potem je f konveksna na I natanko tedaj, ko je odvod f' naraščajoča funkcija na I.

Opomba. Iz tega izreka sledi, da je f na I konkavna natanko tedaj, ko je f' padajoča funkcija na I.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Dokažimo implikacijo v desno. Naj bo f konveksna na I. Naj bosta $a, b \in I$ in $a < b$. Sedaj za vsak $a < x < b$ uporabimo neenakost

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(1)}{\leq} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \overset{(2)}{\leq} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}. \tag{$*$}$$

Sedaj v (1) $x \downarrow a$ naredimo desno limito in dobimo $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Podobno v (2) $x \uparrow b$ naredimo levo limito in dobimo $f'(b) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Torej je $f'(b) \geq f'(a)$ in f' je naraščajoča na I.

($\Leftarrow$) Dokažimo sedaj implikacijo v obratno smer. Naj bo f' naraščajoča na I in naj bosta $x, a \in I$. Po Lagrangevem izreku obstaja tak c na intervalu od x do a, da velja

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Če je $x > a$, potem je $a < c < x$ in zato $f'(c) \geq f'(a)$. Torej je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq f'(a)$ in od tod $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$, kar je ekvivalentno konveksnosti. Če pa je $x < a$, potem je $x < c < a$ in zato $f'(c) \leq f'(a)$. Torej je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'(a)$ in od tod $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$, kar je ponovno ekvivalentno konveksnosti. □

Posledica 5.24. *Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva:*

1. *f je konveksna na I natanko tedaj, ko je $f^{(2)}(x) \geq 0$ na I.*

2. *f je konkavna na I natanko tedaj, ko je $f^{(2)}(x) \leq 0$ na I.*

Definicija 5.10. Dvakrat odvedljiva funkcija f na intervalu I je strogo konveksna na I, če je $f''(x) > 0$ na I, in strogo konkavna na I, če je $f''(x) < 0$ na I.

Definicija 5.11. Prevoj je točka na grafu funkcije f, kjer f preide iz konveksnosti v konkavnost ali obratno.

Posledica 5.25. *Naj bo $f \in C^2(I)$. Če ima graf f prevoj v $(a, f(a))$, je $f''(a) = 0$. To sledi iz tega, da če je $f''(a) > 0$, potem je $f''(x) > 0$ v neki okolici a, saj je $f \in C^2(I)$. Tako bi bila f v okolici a konveksna. Podobno lahko izločimo tudi možnost $f''(a) > 0$, torej preostane le še $f''(a) = 0$.*

Zgled 5.18. *Ponovno vzemimo funkcijo $f(x) = xe^{-x}$. Njena prva dva odvoda sta $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ in $f''(x) = (x-2)e^{-x}$. Za $x < 2$ velja $f''(x) < 0$, zato je tam f konkavna, za $x > 2$ pa velja $f''(x) < 0$, zato je tam f konveksna. Funkcija f ima torej prevoj v točki $(2, 2e^{-2})$.*

Posledica 5.26. *Naj bo f dvakrat odvedljiva v okolici točke $c \in \mathbb{R}$. Naj bo c stacionarna točka za f, torej $f'(c) = 0$.*

1. *Če je $f''(c) > 0$, ima f v c strogi lokalni minimum.*

2. *Če je $f''(c) < 0$, ima f v c strogi lokalni maksimum.*

Dokaz. Dokažimo le prvo točko. Če je $f''(c) > 0$, f' v c narašča. Potem obstaja $\delta > 0$, da za $c - \delta < x < c$ velja $f'(x) < f'(c) = 0$ in za $c < x < c + \delta$ velja $f'(x) > f'(c) = 0$. Torej f na $(c - \delta, c)$ strogo pada in na $(c, c + \delta)$ strogo narašča. Od tod pa sledi, da ima f v c strogi lokalni minimum. □

Dodatek pri poglavju o konveksnosti.

Izrek 5.27.

Naj bo f funkcija, ki je konveksna na odprtem intervalu (a, b). Potem je f tudi zvezna na (a, b).

Dokaz. Naj bo f konveksna na (a, b). Za $x \in (a, b)$ lahko izberemo tak $\delta > 0$, da je $(x - \delta, x + \delta) \subseteq (a, b)$. Potem lahko zaradi konveksnosti uporabimo neenačbo $(*)$ s strani 71 in dobimo

$$\frac{f(x+h_1) - f(x)}{h_1} \leq \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} \leq \frac{f(x+k_1) - f(x)}{k_1} \leq \frac{f(x+k_2) - f(x)}{k_2}$$

za $-\delta < h_1 < h_2 < 0 < k_1 < k_2 < \delta$. Od tod sledi, da je funkcija $F(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

- naraščajoča in navzdol omejena na intervalu $(0, \delta)$, torej obstaja $\lim_{h \downarrow 0} F(x) = f'(0+)$.

- naraščajoča in navzgor omejena na intervalu $(-\delta, 0)$, torej obstaja $\lim_{h \uparrow 0} F(x) = f'(0-)$.

Torej za vsak $x \in (a, b)$ obstajata levi in desni odvod $f'(x-) \leq f'(x+)$. Sedaj pa uporabimo pogost sklep: če ima funkcija na odprtem intervalu v vsaki točki levi in desni odvod, je na tem intervalu zvezna:

- $\lim\limits_{h \downarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim\limits_{h \downarrow 0} \dfrac{(f(x+h) - f(x))}{h} \lim\limits_{h \downarrow 0} h = f'(0+) \lim\limits_{h \downarrow 0} h = 0$

- $\lim_{h\uparrow 0}(f(x+h)-f(x)) = \lim_{h\uparrow 0}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\lim_{h\uparrow 0} h = f'(0-)\lim_{h\uparrow 0} h = 0$

Od tod sledi, da velja $\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x)) = 0$, torej je f zvezna. $\square$

Opomba. Zgornji izrek lahko posplošimo na množico $\mathbb{R}^n$, vendar pa ni nujno, da je f zvezna tudi na zaprtem ali polzaprtem intervalu.

Zgled 5.19. *Vzemimo funkcijo*

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & ; x > 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

Očitno je, da je f konveksna, a nezvezna na intervalu $[0,1)$.

5.6 L'Hôpitalovi izreki

L'Hôpitalovi izreki so izjemno učinkovita pravila za računanje limit funkcij oblike $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, kjer je bodisi $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ bodisi $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ in $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. Pri tem je a element razširjenega sistema realnih števil oziroma $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

Izrek 5.28 (Posplošeni Lagrangev izrek)**.**

Naj bosta $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji. Naj bosta f, g odvedljivi na (a,b) in naj velja $g'(x) \neq 0$ na (a,b). Tedaj obstaja tak $c \in (a,b)$, da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Opomba. To je posplošitev Lagrangevega izreka (tega dobimo, če preprosto vstavimo $g(x) = x$.)

Dokaz. Ker je $g'(x) \neq 0$ za $\forall x \in (a,b)$, je po Lagrangevem izreku

$$g(b)-g(a) = g'(d)(b-a) \neq 0$$

za nek $d \in (a,b)$. Definirajmo funkcijo

$$h(x) = (f(x)-f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Ta funkcija ustreza pogojem Rollejevega izreka, zato obstaja tak $c \in (a,b)$, da je

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0.$$

Od tod pa sledi

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$\square$

Izrek 5.29 (L'Hôpital)**.**

Naj bosta f, g odvedljivi na (a,b) in naj velja:

- *$g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a,b)$,*

- $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} g(x) = 0.$

Če obstaja limita $\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *potem obstaja tudi limita* $\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *in sta enaki.*

Opomba. Podoben razmislek velja tudi za leve limita na intervalu (b, a), kjer je $b < a$. Od tod pa sledi, da podoben izrek velja tudi za dvostranske limite.

Dokaz. Definirajmo $f(a) = g(a) = 0$. Potem sta f in g zvezni na $[a, b]$. Naj bo $x \in (a, b)$. Na $[a, x]$ so izpolnjeni pogoji posplošenega Lagrangevega izreka. Torej obstaja tak $c_x \in (a, x)$, da je

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ko gre $x \downarrow a$, gre $c_x \downarrow a$. Od tod sledi

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

□

Zgled 5.20. *Oglejmo si uporabo L'Hôpitalovega izreka na nekaterih preprostih limitah:*

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1 + 2x} = \frac{\cos 0}{1} = 1$, *v tem primeru ne moremo uporabiti L'Hôpitalovega izreka.*

Izrek 5.30 (L'Hôpital)**.**

Naj bosta f, g *odvedljivi na* (a, b) *in naj velja:*

- $g(x) \neq 0$ *in* $g'(x) \neq 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$,
- $\lim_{x\downarrow a} g(x) = \pm\infty.$

Če obstaja limita $\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *potem obstaja tudi limita* $\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *in sta enaki.*

Opomba.

1. Enak izrek velja tudi za leve in obojestranske limite.
2. Ker je $\lim_{x\downarrow a} g(x) = \pm\infty$, obstaja $\delta > 0$, da je $g(x) \neq 0$ za $x \in (a, a + \delta)$
3. Če je f omejena v okolici a, je $\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Dokaz. Denimo, da obstaja $\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (a, a + \delta)$ velja

$$B - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < B + \varepsilon.$$

Naj bo $x \in (a, a + \delta)$. Tedaj velja $\frac{f(x) - f(a+\delta)}{g(x) - g(a+\delta)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ za nek $c \in (x, a + \delta) \subseteq (a, a + \delta)$. Torej je

$$B - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a + \delta)}{g(x) - g(a + \delta)} < B + \varepsilon$$

za vsak $x \in (a, a+\delta)$. Torej je za vse take x

$$B - \varepsilon < \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a+\delta)}{g(x)}}{1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}} < B + \varepsilon.$$

Ker je $\lim_{x \downarrow a} g(x) = \pm\infty$, obstaja $0 < \delta_1 < \delta$, da je $\left|\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right| < 1$ za vse $x \in (a, a+\delta_1)$. Torej je

$$(B - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right) + \frac{f(a+\delta)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < (B + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right) + \frac{f(a+\delta)}{g(x)}.$$

za vsak $x \in (a, a+\delta_1) \subseteq (a, a+\delta)$. Sedaj pa ponovno zaradi $\lim_{x \downarrow a} g(x) = \pm\infty$ obstaja tak $0 < \delta_2 < \delta_1$, da je

$$B - 2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < B + 2\varepsilon$$

za vse $x \in (a, a+\delta_2)$. Ker je bil ε poljuben, to pomeni, da velja $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = B = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

Zgled 5.21. *Primeri uporabe drugega L'Hôpitalovega izreka.*

1. $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{(-n)\frac{1}{x^{n+1}}} = \lim\limits_{x \to 0} -\frac{x^n}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$
3. $\lim\limits_{x \to 0} x^x = e^{\lim_{x \to 0} x \ln x} = e^0 = 1$

Posledica 5.31. *Naj bosta f, g odvedljivi na (a, ∞) in naj velja:*

- $g(x) \neq 0$ *in* $g'(x) \neq 0$ *za vsak* $x \in (a, \infty)$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ *ali* $\lim_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$.

Če obstaja limita $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja tudi limita $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ in sta enaki (podobno velja tudi za limite v $x \to -\infty$).

Dokaz.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ □

Zgled 5.22. *Primeri računanja posplošenih limit z L'Hôpitalovimi izreki*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

5.7 Uporaba odvoda v geometriji

V tem podpoglavju se bomo ukvarjali s skiciranjem in analiziranjem gladkih krivulj v $\mathbb{R}^2$.

Opomba. Veliko snovi iz tega podpoglavja se lahko neposredno razširi na prostor $\mathbb{R}^n$. Analiza v $\mathbb{R}^n$ za $n \in \mathbb{N}$ je osrednja tema predmetov Analiza 2.a in Analiza 2.b.

Definicija 5.12. Pot v $\mathbb{R}^2$ je zvezna preslikava $\vec{r} : t \to (x(t), y(t))$ iz intervala I v $\mathbb{R}^2$.

Zveznost $\vec{r}(t)$ je ekvivalentna zveznosti funkcij $x : I \to \mathbb{R}$ in $y : I \to \mathbb{R}$. Predstavljamo si lahko, da neodvisna spremenljivka t pomeni čas, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ pa je lega delca, ki ga opazujemo v ravnini ob času t.

Zgled 5.23. *Naj bo $\vec{r}(t) = (t, t)$, kjer je $t \in \mathbb{R}$. Lega delca ob času $t = 0$ je $(0, 0)$, lega delca ob času $t = 1$ pa $(1, 1)$. Če narišemo lego za vsak $t \in I$, dobimo premico $y = x$.*

Definicija 5.13. Tir ali sled poti je množica $\vec{r}(I) = \Gamma = \{\vec{r}(t), t \in I\}$. oziroma zaloga preslikave $\vec{r}(t)$. To množico pogosto imenujemo krivulja v $\mathbb{R}^2$.

Krivulja je geometrijski objekt v $\mathbb{R}^2$ (natančneje, njegova podmnožica), pot pa je preslikava, ki parametrizira krivuljo. Dana krivulja ima neskončno mnogo parametrizacij.

Zgled 5.24. *Tako $\vec{r_1}(t) = (2t, 2t)$ kot tudi $\vec{r_2}(t) = (t+1, t+1)$ sta parametrizaciji premice $x = y$.*

Definicija 5.14. Pot $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ je odvedljiva v $t_0 \in I$, če sta v t_0 odvedljivi funkciji x in y. Tedaj je odvod $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ (odvod je označen s piko).

Pot $\dot{\vec{r}}$ je odvedljiva na I, če sta na I odvedljivi x in y.

Zgled 5.25. *Oglejmo si pot, podano s predpisoma*

$$x(t) = \begin{cases} t^2; & t > 0 \\ 0; & t \le 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad y(t) = \begin{cases} 0; & t > 0 \\ t^2; & t \le 0 \end{cases}$$

Pot $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ in $\vec{r}$ je odvedljiva na $\mathbb{R}$ (tudi v $t_0 = 0$.) Čeprav sta x in y odvedljivi, tir $\vec{r}$ ni gladek, ampak ima „vogal“ v točki $(0, 0)$. Zakaj se je to lahko zgodilo?

V točkah, v katerih je $\dot{\vec{r}}(t) = (0, 0)$, se mora gibanje ustaviti. Če velja $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$ za $\forall t \in I$, govorimo o regularni parametrizaciji gladke krivulje. Krivulja pa je lahko gladka, tudi če njena parametrizacija ni regularna (na primer $\vec{r}(t) = (t^3, t^3)$). Dovolj je le, da zanjo obstaja ena regularna parametrizacija.

Če je $\vec{r}(t)$ odvedljiva pot, je $\dot{\vec{r}}(t)$ tangentni vektor (oz. vektor hitrosti) na njen tir v točki $\vec{r}(t)$. Točke $\vec{r}(t)$, v katerih je $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0$, so kritične točke. V takih točkah ima $\vec{r}$ lahko singularnost oz. negladkost.

Zgled 5.26. *Oglejmo si implicitno podano krivuljo $y^2 = x^3$. Možna parametrizacija je $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$. Odvod poti je $\vec{r}(t) = (2t, 3t^2)$. V točki $t = 0$ sta oba odvoda ničelna in tam imamo tudi singularnost.*

Če $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$, potem je $\dot{\vec{r}}(t)$ tangentni vektor na krivulji v točki $\vec{r}(t)$. Če je $\dot{x}(t) \neq 0$, je smerni koeficient tangente na tir v točki $\vec{r}(t)$ enak $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$. Če pa je $\dot{x}(t) = 0$ in $\vec{y}(t) \neq 0$, jetangenta na tir v točki $\vec{r}(t)$ navpična. Vektorska enačba tangente na tir v točki $\vec{r}(t)$, je pri pogoju $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$:

$$\vec{\rho} = \vec{r}(t) + \lambda\dot{\vec{r}}(t); \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zgled 5.27. *Elipsa, katere polosi so vzporedne x- in y-osi, je implicitno podana z enačbo*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \ a, b > 0.$$

Če je $a = b$, je to enačba krožnice. Parametrizacija te krivulje je $x(t) = a\cos t$ in $y(t) = b\sin t$. Njen odvod je $\dot{\vec{r}}(t) = (-a\sin t, b\cos t) \neq \vec{0}$ za $\forall t$. Za to krivuljo velja:

$$\dot{x} = 0 \iff t = k\pi, \quad \dot{y} = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Za graf elipse je dovolj, da vzememo $t \in [0, 2\pi]$.

Zgled 5.28. *Hiperbola, katere polosi so vzporedne x- in y-osi, je implicitno podana z enačbo*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Parametrizacija te krivulje je $\vec{r}(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$ in $\vec{r}(t) = (-a\cosh t, b\sinh t)$ za desno in levo vejo hiperbole. Njen odvod je $\dot{\vec{r}}(t) = (a\sinh t, b\cosh t) \neq \vec{0}$ za $\forall t \in \mathbb{R}$.

Zgled 5.29. *Cikloida je krivulja, ki jo opiše točka na obodu kolesa, ki se kotali po ravnini. Pri tem je polmer kolesa $a > 0$ in hitrost kotaljenja $v > 0$. Ob času t se središče kolesa nahaja v točki (vt, a). Točka T se je glede na kolo dvignila na višino $a - a\cos\phi$ ter zaostaja za središčem za $a\sin\phi$. Torej ima koordinati $(vt - a\sin\phi, a - a\cos\phi)$. Če vstavimo enačbo $a\phi = vt$, dobimo parametrizacijo cikloide:*

$$x(t) = vt - a\sin\left(\frac{v}{a}t\right), \quad y(t) = a - a\cos\left(\frac{v}{a}t\right)$$

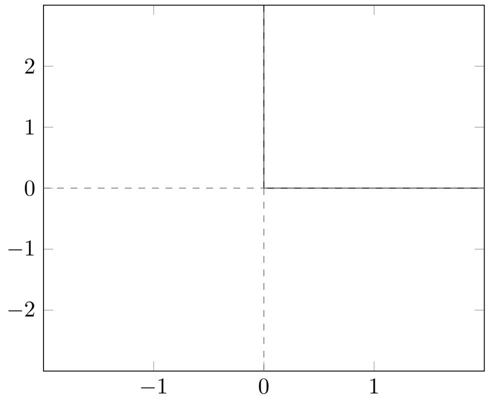
Ta se nekoliko razlikuje od standardne cikloide $\vec{r}(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)))$. Če se vrnemo nazaj na našo cikloido, lahko izračunamo njen odvod in dobimo $\dot{\vec{r}} = (v(1 - \cos\left(\frac{v}{a}t\right)), v\sin\left(\frac{v}{a}t\right))$. Naša cikloida ima torej singularnosti za $t_k = 2\pi k\frac{a}{v}$, in sicer v točkah $(2\pi a, 0)$.

Vemo že, da lahko tangentno premico zapišemo kot $\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda\dot{\vec{r}}(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oziroma

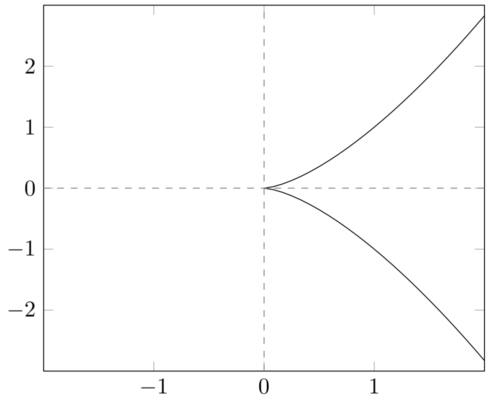
$$\vec{\rho} = (x(t) + \lambda\dot{\vec{x}}(t), y(t) + \lambda\dot{\vec{y}}(t)).$$

V ravnini lahko zlahka poiščemo normalo na λ v točki $\vec{r}(t)$. Vektor $\overrightarrow{N} = (-\dot{y}, \dot{x})$ je pravokoten na vektor $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$, saj je njun skalarni produkt enak 0. Torej je enačba normalne premice ne $\Gamma(t)$ v točki $\vec{r}(t)$ enaka

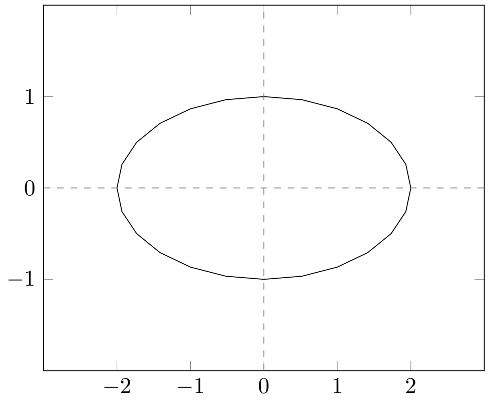
$$\overrightarrow{\rho_N}(\lambda) = \vec{r}(t) + \lambda\overrightarrow{N}(t) = (x(t) - \lambda\dot{y}(t), y(t) + \lambda\dot{x}(t)).$$



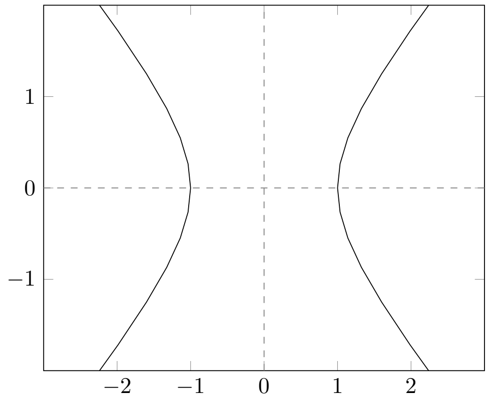
Slika 18: Pot $\vec{r}(t)$ iz zgleda 5.25.



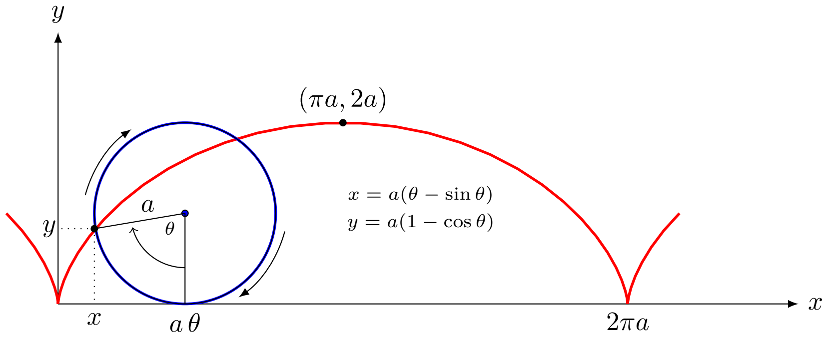
Slika 19: Pot $\vec{r}(t)$ iz zgleda 5.26.



Slika 20: Graf elipse iz zgleda 5.27.



Slika 21: Graf hiperbole iz zgleda 5.28.



Slika 22: Graf cikloide iz zgleda 5.29.

Izrek 5.32.

Naj bo $\vec{r}(t) = (\vec{x}(t), \vec{y}(t))$ zvezno odvedljiva pot v $\mathbb{R}^2$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Naj bo za $t_0 \in I$ odvod poti enak $\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq \vec{0}$. Potem obstaja okolica $t_0 \in U \subseteq I$ točke t_0, da lahko množico $\vec{r}(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ predstavimo ali kot graf neke funkcije $f(x)$ na x-osi ali kot graf neke C^1 funkcije $g(y)$ na y-osi.

- *če je $\dot{x}(t_0) \neq 0$, je $\vec{r}(U) = \{(x, f(x)); x \in J_x\}$*
- *če je $\dot{y}(t_0) \neq 0$, je $\vec{r}(U) = \{(g(y), y); y \in J_y\}$*

Opomba. Pri zgornjem izreku smo z J_x in J_y označili zaporedoma okolici $x(t_0)$ in $y(t_0)$.

Dokaz. Naj bo $\dot{x}(t_0) \neq 0$. Denimo, da je $\dot{x}(t_0) > 0$. Potem je $\dot{x}(t) > 0$ v okolici U točke t_0 v I (to velja zato, ker je $x \in C^1(I)$ in je odvod zvezen). Torej je x na U strogo naraščajoča in ima $X : U \to X(U) = J_x$ inverz $\tau : J_x \to U$, da je $\tau \in C^1(J_x)$ in posledično $\tau'(x) = \frac{1}{\dot{x}(\tau(x))}$ zvezna na J_x. Sedaj definirajmo $f : J_x \to \mathbb{R}$ kot $f(x) = y(\tau(x))$. Potem je

$$\vec{r} = \{(x(t), y(t)); t \in U\} = \{(x, f(x)); x \in J_x\}$$

□

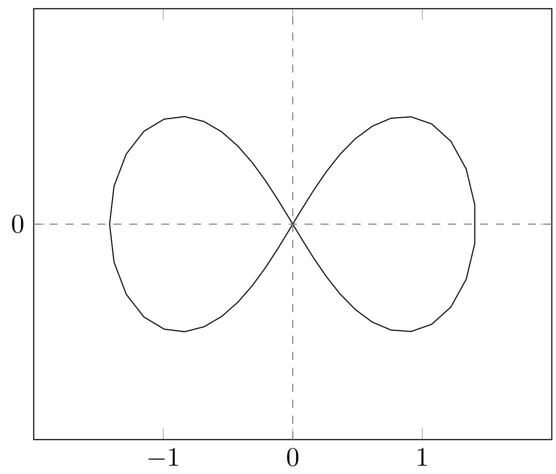
Zgled 5.30. *Z implicitno enačbo $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ je podana krivulje lemniskate, ki ima parametrizacijo*

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}\cos t}{1 + \sin^2(t)}, \quad y(t) = \frac{\sqrt{2}\sin t \cos t}{1 + \sin^2(t)}.$$

Oglejmo si sedaj odvoda:

- $\dot{x} = \sqrt{2}\frac{(-\sin t)(2+\cos^2(t))}{(1+\sin^2(t))^2}, \quad \dot{x} = 0 \iff t = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
- $\dot{y} = \sqrt{2}\frac{\cos^2(t) - 2\sin^2(t)}{(1+\sin^2(t))^2}, \quad \dot{y} = 0 \iff \tan^2(t) = \frac{1}{2}$

Torej je $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$ za vse t. Velja pa tudi $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{r}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, 0)$, vendar pa $\dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ in $\dot{\vec{r}}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Torej lemniskata v $(0, 0)$ seka samo sebe.



Slika 23: Graf lemniskate.

6 INTEGRAL

6.1 Nedoločeni integral

Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija.

Definicija 6.1. Funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ je nedoločeni integral ali primitivna funkcija funkcije $f : I \to \mathbb{R}$, če je F odvedljiva na I in velja $F'(x) = f(x)$ za $\forall x \in I$.

Zgled 6.1. *Omenimo dva primera nedoločenega integrala.*

1. *Nedoločeni integral funkcije* $f(x) = \cos x$ *je* $F(x) = \sin x$*, saj je* $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$*.*
2. *Nedoločeni integral funkcije* $f(x) = x^n$*,* $n \neq -1$ *je* $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$*. Če pa je* $f(x) = \frac{1}{x}$*, potem je* $F(x) = \ln|x|$*.*

Trditev 6.1. *Naj bo* $F(x)$ *nedoločeni integral funkcije* f *na intervalu* $I \subseteq \mathbb{R}$*. Potem je vsak nedoločeni integral funkcije* f *na* I *oblike* $G(x) = F(x) + c;\ x \in I$ *za neko konstanto* $c \in \mathbb{R}$*.*

Opomba. Množica $\{F + c; c \in \mathbb{R}\}$ je množica vseh nedoločenih integralov funkcije f na I. Torej: če ima f en nedoločeni integral, je množica vseh nedoločenih integralov enoparametrična ($\sim \mathbb{R}$).

Dokaz. Če je F nedoločeni integral funkcije f na I, potem je očitno tudi $F + c,\ c \in \mathbb{R}$ nedoločeni integral sunkcije f na I. Dokazati moramo, da je vsak nedoločeni integral G funkcije f na I oblike $G(x) = F(x) + c$. Predpostavimo torej, da je G nedoločeni integral f na I. Potem velja $G' = f$ in $F' = f$ na I. Sedaj tvorimo funkcijo $H = G - F$. Potem za $\forall x \in I$ velja $H' = G' - F' = 0$, torej je $H' = 0$ na I. Zato je H konstantna funkcija na I in od tod sledi $G(x) = F(x) + c$. □

To označimo $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, kjer je F nek partikularen nedoločeni integral, $c \in \mathbb{R}$ pa poljubna konstanta. To pomeni

$$\int f(x)\,dx = \int dF_x = F(x) + c.$$

Od tod sledi, da je nedoločeni integral, če obstaja, nekkšna inverzna operacija od diferenciala d. Obstoj nedoločeneg integrala pa ni samoumeven – v splošnem ta ne obstaja.

Zgled 6.2. *Vzemimo funkcijo*

$$f(x) = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 1; & x \geq 0 \end{cases}$$

Dokazali bomo, da ta funkcija nima nedeločenega integrala na $\mathbb{R}$*. Predpostavimo nasprotno – naj bo* F *njen nedoločeni integral na* $\mathbb{R}$*. Potem mora biti za* $x < 0$ *nedoločeni integral oblike* $F(x) = -x + c_1$*, za* $x > 0$ *pa* $F(x) = x + c_2$*. Ker je* F *odvedljiva na* $\mathbb{R}$ *(*$F' = f$*), je* F *zvezna na* $\mathbb{R}$*. Torej velja*

$$F(0) = \lim_{x \uparrow 0} F(x) = c_1 = \lim_{x \downarrow 0} F(x) = c_2.$$

Zato je $F(x) = |x| + c$ *za nek* $c \in \mathbb{R}$ *in* F *ni odvedljiva v* $x = 0$*, kar pa je protislovje.*

Opomba. Kasneje bomo dokazali, da ima vsaka zvezna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ nedoločeni integral. Zveznost je torej zadostni pogoj za obstoj nedoločenega integrala, ni pa potreben.

Zgled 6.3. *Primer: funkcija*

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

je nedoločeni integral funkcije

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases},$$

ta pa ni zvezna v točki 0.

6.2 Osnovna pravila za iskanje nedoločenih integralov

Naslednja pravila izhajajo iz pravil za odvajanje. Naj bosta f, g funkciji, ki imata nedoločena integrala F, G. Potem veljajo naslednje trditve.

- Aditivnost: $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.
- Homogenost: $\int (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$ za poljuben $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Integracija per partes. Naj bosta u, v odvedljivi na I. Potem velja $\int uv' = uv - \int u'v$.

Razmislimo o vpeljavi nove spremenljivke v nedoločeni integral. Naj bo $\phi : J_t \to I$ odvedljiva, strogo monotona bijekcija z odvedljivim inverzom ($\phi'(t) \neq 0,\ \forall t$). Naj bo $G(t) = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$. Potem velja:

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(\phi^{-1}(x))(\phi^{-1})'(x) \\ &= f(\phi(\phi^{-1}(x))) \cdot \phi'(\phi^{-1}(x)) \cdot (\phi^{-1})'(x) \\ &= f(x) \cdot 1 = f(x). \end{aligned}$$

in $F(x) = G(\phi^{-1}(x))$ je nedoločeni integral f.

Opomba. Točki (1) in (2) izhajata iz linearnosti odvoda, točka (3) izhaja iz Leibnizovega pravila odvajanja in točka (4) izhaja iz verižnega pravila o odvajanju. Zadnji razmislek pa nam pove, da z ustrezno substitucijo $x = \phi(t),\ dx = \phi'(t)\,dt$ dobimo $\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$.

Zgled 6.4. *Oglejmo si primera odvajanja per partes in z uvedbo nove spremenljivke:*
- $\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \ln x - x + c$
- $\int xe^{x^2}\,dx = \int \sqrt{t} e^t \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t\,dt + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

Opomba. Hitro naletimo na elementarne funkcije, katerih nedoločeni integral ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami. Primer takega integrala je $\int e^{x^2}\,dx$.

Razred funkcij, ki ga bomo posebej obravnavali, so racionalne funkcije, saj imajo elementarne nedoločene integrale. To je seveda očitno za polinome. Pri funkcijah oblike $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta p, q realna polinoma, pa se moramo nekoliko bolj potruditi. Najprej delimo p s q, da pridemo do primera $st\ p < st\ q$, nato pa q razcepimo na linearne in kvadratne nerazcepne (nad $\mathbb{R}$) faktorje. Tako lahko $f = \frac{p}{q}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov oblike

$$\frac{A}{(x-\alpha)^m} \quad \text{in} \quad \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^m}.$$

Integrali sumandov 1. oblike so znani:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^m}\,dx = \begin{cases} A \ln|x-\alpha| + c; & m = 1 \\ -\frac{A}{(m+1)(x-\alpha)^{m-1}}; & m > 1 \end{cases},$$

integrali sumandov 2. oblike pa so:

- $E\ln(x^2+ax+b) + F\arctan\left(\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)$ za $m = 1$ in
- $\frac{r(x)}{(x^2+ax+b)^{m-1}} + F\arctan\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}$ za $m > 1$.

Pri tem sta E, F konstanti, $r(x)$ pa polinom stopnje $2m-3$. Te podatke dobimo z odvajanjem obeh strani enačbe in reševanjem dobljenega sistema linearnih enačb.

Zgled 6.5. *Obravnavajmo dva primera integralov racionalnih funkcij.*
- $\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + c$
- $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + D\arctan x + c$, *odvajamo in dobimo* $A = D = \frac{1}{2},\ B = 0$.

Opomba. Integral sode funkcije je liha funkcija (do konstante c natančno) in obratno.

6.3 Določeni integral

Nedoločeni integral, če obstaja, je taka funkcija $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, da je $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Določeni integral, če obstaja pa je število $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$. Motivacija za uvedbo določenega integrala je izračun ploščine lika pod grafom funkcije $f : [a,b] \to (0,\infty)$, ki leži nad intervalom $[a,b]$. Fizikalna interpretacija tega je naslednja: če je $x = t$ čas in $f(x) = v(t)$ hitrost, je $\int_0^T v(t)\,dt$ pot, opravljena v času od 0 do T.

Opomba. Če bo f predznačena, bo $\int_a^a f(x)\,dx$ razlika ploščin nad x-osjo in pod x-osjo. Z drugimi besedami, določeni integral izračuna „predznačeno ploščino oz. signed area under a graph".

Pri definiranju določenega integrala si bomo ogledali dva ekvivalentna pristopa: Darbouxjeve in Riemannove vsote. Naj bo $[a,b]$ končen zaprt interval na $\mathbb{R}$ in $a < b$. Delitev D intervala $[a,b]$ je izbor končno mnogo točk

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kjer je n poljubno naravno število. Sedaj definiramo še množico

$$\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_n;\ t_j \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

kjer je $[x_{j-1}, x_j]$ podinterval delitve D. Riemannova vsota, prirejena funkciji f, delitvi D in izboru točk $\mathcal{T}$ je

$$R(f, D, \mathcal{T}) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\Delta x_j.$$

To je vsota ploščin pravokotnikov z osnovo Δx_j in višino $f(t_j)$, s čimer aproksimiramo ploščino lika pod grafom funkcije $f(x)$.

Definicija 6.2. Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Funkcija f je Riemannovo integrabilna na $[a,b]$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev $D = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ intervala $[a,b]$, ki zadošča pogoju $\Delta x_j < \delta$, $\forall j = 1, \ldots, n$, in za poljuben izbor točk

$$\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_n;\ t_j \in [x_{j-1}, x_j],\ j = 1, \ldots, n\}$$

velja $|R(f, D, \mathcal{T}) - I| < \varepsilon$. To lahko zapišemo kot

$$\lim_{\max_j \Delta x_j \to 0} R(f, D, \mathcal{T}) = I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Opomba. Včasih se pri definiciji Riemannovih vsot poudari omejenost funkcije f, vendar pa se izkaže, da iz Riemannove integrabilnosti sledi omejenost na intervalu $[a,b]$. Če f ne bi bla omejena (denimo navzgor), potem obstaja zaporedje $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, $a_k \in [a,b]$, da je $f(a_k) > k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Brez škode za splošnost predpostavimo, da $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ konvergira k $\alpha \in [a,b]$. Za dani ε si izberemo $\delta > 0$ in delitev D

intervala $[a,b]$, ki ali vsebuje α v notranjosti enega od intervalov $[x_{j-1},x_j]$ ali pa je α eno izmed krajišč a,b. Potem obstaja tak k_0, da za vsak $k\geq k_0$ velja, da a_k leži v istem podintervalu kot α: $[x_{j_0-1},x_{j_0}]$. Sedaj pa točke $t_1,\ldots,t_{j_0-1},t_{j_0+1},\ldots,t_n$ fiksiramo, točko t_{j_0} pa izbiramo kot a_k. Velja, da gredo tako dobljene Riemannove vsote preko vsake meje in ne konvergirajo k nekemu I.

Zgled 6.6. *Vzemimo funkcijo*

$$f(x)=\begin{cases}1; & x\geq 0\\ -1; & x<0\end{cases}$$

in $a<0<b$. Naj bo $D=\{x_0<\cdots<x_n\}$ delitev $[a,b]$ in naj bodo

$$x_0<x_1<\cdots<x_{i_0}<0\leq x_{i_0+1}<\cdots<x_n.$$

Določimo še množico točk $\mathcal{T}=\{t_j;\ j=1,\ldots,n,\ t_j\in[x_{j-1}-x_j]\}$. Potem je

$$\begin{aligned}R(f,D,\mathcal{T})=\sum_1^n f(t_j)\Delta x_j&=\sum_1^{i_0} f(t_j)\Delta x_j+f(t_{i_0+1})\Delta x_{i_0+1}+\sum_{i_0+2}^n f(t_j)\Delta x_j\\ &=(-1)(x_{i_0}-a)+f(t_{i_0+1})\Delta x_{i_0+1}+(b-x_{i_0+1})\\ &=a+b-x_{i_0}-x_{i_0+1}+f(t_{t_0+1})(x_{i_0+1}-x_{i_0})\\ &=\begin{cases}a+b-2x_{i_0}; & f(t_{i_0+1})=1\\ a+b-2x_{i_0+1}; & f(t_{i_0+1})=-1\end{cases}.\end{aligned}$$

Trdimo, da je $I=\int_a^b f(x)\,dx=a+b$. Naj bo $\varepsilon>0$. Naj bo $\max\Delta x_j<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Potem je $x_{i_0}<0<x_{i_0+1}$ in $x_{i_0+1}-x_{i_0}<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ in od tod sledi $|x_{i_0+1}|<\frac{\varepsilon}{2}$ in $|x_{i_0}|<\frac{\varepsilon}{2}$. Od tod pa sledi

$$|R(f,D,\mathcal{T})-(a+b)|=\begin{cases}|2x_{i_0}|<\varepsilon\\ |2x_{i_0+1}|<\varepsilon\end{cases}$$

in smo dokazali.

Zgled 6.7. *Naj bo funkcija*

$$f(x)=\begin{cases}1; & x\in\mathbb{Q}\\ 0; & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$$

Potem za vsak $a<b$ integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ne obstaja. Naj bo D delitev $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Če za $\mathcal{T}$ izbiramo racionalne točke $t_j\in[x_{j-1},x_j]$, dobimo $R(f,D,\mathcal{T})=(b-a)$, če pa za $\mathcal{T}$ izbiramo iracionalne točke t_j', dobimo $R(f,D,\mathcal{T})=0$. To pomeni, da ne obstaja tak I, da velja $\lim_{\max\Delta x_j\to 0}R(f,D,\mathcal{T})=I$.

Drugi pristop k določenemu intervalu so Darbouxjeve vsote. Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ omejena in naj bo $D=\{x_0=a<\cdots<x_n=b\}$ delitev $[a,b]$. Naj bo $m=\inf_{[a,b]}f(x)$ in $M=\sup_{[a,b]}f(x)$. Označimo $m_j=\inf_{[x_{j-1},x_j]}f(x)$ in $M_j=\sup_{[x_{j-1},x_j]}f(x)$ za $j=1,\ldots,n$. Očitno velja $m\leq m_j\leq M_j\leq M$ za vsak $j=1,\ldots,n$. Sedaj definiramo:

- spodnja Darbouxjeva vsota za delitev D je $s(f,D)=\sum_1^n m_j\Delta x_j=s(D)$,
- zgornja Darbouxjeva vsota za delitev D je $S(f,D)=\sum_1^n M_j\Delta x_j=S(D)$.

Na liku, ki ga oklepa graf funkcije f z x-osjo, $s(D)$ aproksimira ploščino včrtanih pravokotnikov, $S(D)$ pa ploščino očrtanih pravokotnikov. Očitno velja:

- $m(b-a)\leq s(D)\leq S(D)\leq M(b-a)$

- $s(D) \leq R(f, D, \mathcal{T}) \leq S(D)$ za poljubne točke $\mathcal{T}$.

Definicija 6.3. Delitev D' je nadaljevanje delitve D intervala $[a, b]$, če je $D \subseteq D'$. To pomeni, da je vsaka delilna točka D tudi delilna točka D', D' pa lahko vsebuje tudi dodatne delilne točke. Pogosto rečemo, da je D' finejša kot delitev D.

Trditev 6.2. *Če je $D \subseteq D'$, je*

$$s(D) \leq s(D') \leq S(D') \leq S(D).$$

Dokaz. Dovolj je preveriti primer $D' = D \cup \{x'\}$, saj trditev v splošnem sledi s končno indukcijo. Naj bo $D = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ in $x' \in (x_{j-1}, x_j)$ za nek j. Potem velja $m_j \leq \inf_{[x_{j-1}, x']} f(x) = m_j'$ in $m_j \leq \inf_{[x', x_{j+1}]} f(x) = m_j''$. Podobno velja tudi $M_j' \leq M_j$ in $M_j'' \leq M_j$. Torej velja

$$\begin{aligned} m_j \Delta x_j &= m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= m_j((x_j - x') + (x' - x_{j-1})) \\ &= m_j(x_j - x') + m_j(x' - x_{j-1}) \\ &\leq m_j''(x_j - x') + m_j'(x' - x_{j-1}) \end{aligned}$$

Na ostalih intervalih ni sprememb, torej je res $s(D) \leq s(D')$ in podobno za zgornje vsote $S(D') \leq S(D)$. □

Trditev 6.3. *Naj bosta D_1, D_2 delitvi $[a, b]$. Potem je $s(D_1) \leq S(D_2)$.*

Dokaz. Naj bo $D = D_1 \cup D_2$. Potem je D nadaljevanje delitev D_1 in D_2. Torej:

$$s(D_1) \leq s(D) \leq S(D) \leq S(D_2).$$

□

Naj bo $S = \inf_D S(D)$ zgornji Darbouxjev integral in $s = \sup_D s(D)$ spodnji Darbouxjev integral. Očitno velja

$$m(b - a) \leq s \leq S \leq M(b - a).$$

Definicija 6.4. Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna v smislu Darboux-ja, če je $S = s$. To število je Darbouxjev integral funkcije f na $[a, b]$.

Trditev 6.4. *Omejena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je po Darbouxju integrabilna natanko tedaj, ko za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja delitev D intervala $[a, b]$, da je $S(D) - s(D) < \varepsilon$.*

Dokaz. Za vsako delitev D velja $s(D) \leq s \leq S \leq S(D)$. Torej če je izpolnjen epsilonski pogoj, mora biti $s = S$ in f je po Darbouxju integrabilna. Pokazati moramo še obratno trditev: denimo, da je $s = S$ in vzemimo poljuben ε. Ker je $s = \sup_D s(D)$, obstaja delitev D_1, da je

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < s(D_1) \leq s.$$

Podobno obstaja delitev D_2, da je

$$S \leq S(D_2) < S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sedaj izberemo $D = D_1 \cup D_2$. Potem je

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < s(D_1) \leq s(D) \leq S(D) \leq S(D_2) < S + \frac{\varepsilon}{2}$$

in zato $S(D) - s(D) < \varepsilon$. □

Izrek 6.5.

Omejena funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je integrabilna po Darbouxju. V tem primeru se njen Riemannov integral ujema z njenim Darbouxjevim integralom.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo f Riemannovo integrabilna na $[a,b]$. Naj bo I_R njen Riemannov integral. Potem za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|R(f,D,\mathcal{T}) - I_R| < \frac{\varepsilon}{3}$ za vsako delitev D s pogojem $\max_j \Delta x_j < \delta$ in za vsak izbor točk $\mathcal{T}$. Naj bo D delitev, ki zadošča temu pogoju. Če izbiramo točke $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tako, da je $f(t_j)$ poljubno blizu $M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]}$, bo $R(f,D,\mathcal{T})$ poljubno blizu $S(D)$, torej $|S(D) - I_R| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Podobno dobimo $|s(D) - I_R| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ in od tod sledi $S(D) - s(D) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Od tod pa sledi, da je f integrabilna po Darbouxju. Ker je za vsako delitev D $s(D) \leq R(f,D,\mathcal{T}) \leq S(D)$, sledi, da je I_R tudi Darbouxjev integral.

($\Leftarrow$) Naj bo f po Darbouxju integrabilna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja delitev D_0, da velja $S(D_0) - s(D_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Lema 6.6. *Naj bo D_0 delitev $[a,b]$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da je za vsako delitev, za katero je $\max_j \Delta x_j < \delta$, vsota dolžin delilnih intervalov, ki niso vsebovani v nobenem od delilnih intervalov D_0, pod ε.*

Sedaj za 'ε' v pomožni trditvi uporabimo $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ in uporabimo ustrezen $\delta > 0$. Naj bo D poljubna delitv, da je $\max_j \Delta x_j < \delta$. Sedaj zapišemo

$$\begin{aligned} S(D) - s(D) &= \sum_j M_j \Delta x_j - \sum_j m_j \Delta x_j \\ &= \sum_j (M_j - m_j)\Delta x_j \\ &= \sum{}' (M_j - m_j)\Delta x_j + \sum{}'' (M_j - m_j)\Delta_j \\ &\leq S(D_0) - s(D_0) + (M-m)\sum{}'' \Delta x_j \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pri tem smo vsoto delilnih intervalov D, ki so bili vsebovani v enam izmed delilnih intervalov D_0, označili z $\sum'$, preostale intervale pa smo seštevali po $\sum''$. Sedaj smo našli tak $\delta > 0$, da za $\max \Delta x_j < \delta$ velja $S(D) - s(D) < \varepsilon$. Ker je $s(D) \leq I_D \leq S(D)$ in $s(D) \leq R(f,D,\mathcal{T}) \leq S(D)$, velja $|R(f,D,\mathcal{T}) - I_D| < \varepsilon$ in f je po Riemannu integrabilna. □

Dokaz leme. Vzemimo delitev $D_0 = \{a = x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \cdots < x_n^{(0)} = b\}$ delitev intervala $[a,b]$. Sedaj definirajmo $\delta = \frac{\varepsilon}{n-1}$. Naj bo D delitev intervala $[a,b]$, da je $\max_j \Delta_j < \delta$. Intervalov delitve D, ki vsebujejo v notranjosti katero izmed točk $x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$, je največ $n-1$ in njihova skupna dolžina je manj kot $(n-1)\delta = \varepsilon$. □

Izrek 6.7.

Vsaka zvezna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna na $[a,b]$.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna na $[a,b]$, je na $[a,b]$ enakomerno zvezna in obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaka $x', x'' \in [a, b]$ velja

$$|x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Naj bo D delitev, da je $\max_j \Delta x_j < \delta$. Potem je za vsak j:

$$M_j - m_j = \max_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) - \min_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Od tod pa sledi

$$S(D) - s(D) = \sum_j (M_j - m_j)\Delta x_j < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_j \Delta x_j = \varepsilon$$

in f je integrabilna. □

Izrek 6.8.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona. Potem je f integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Naj bo f naraščajoča in D delitev $[a, b]$. Potem je $M_j = f(x_j)$ in $m_j = f(x_{j-1})$. Naj bo $\max_j \Delta x_j < \delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ Zato je

$$\begin{aligned} S(D) - s(D) &= \sum_j (M_j - m_j)\Delta x_j \\ &= \sum_j (f(x_j) - f(x_{j-1}))\Delta x_j \\ &< \delta \sum_j (f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(a) - f(b)) = \varepsilon \end{aligned}$$

in f je integrabilna. □

Opomba. Monotona funkcija f ima na zaprtem intervalu $[a, b]$ števno mnogo skokov oziroma točk nezveznosti.

Trditev 6.9. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena in zvezna na (a, b). Potem je f integrabilna na f.*

Dokaz. Naj bo $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ in $M = \sup_{[a,b]} f(x)$. Če je $M = m$, je trditev očitna. Naj bo torej $m < M$ in $\varepsilon > 0$. Naj bosta $a' = a + \frac{\varepsilon}{3(M-m)}$ in $b' = b - \frac{\varepsilon}{3(M-m)}$. Če je potrebno, ε zmanjšamo, da je $a < a' < b' < b$. Na $[a', b']$ je f enakomerno zvezna in najdemo delitev D', da je $S(D') - s(D') < \frac{\varepsilon}{3}$. Sedaj definiramo $D = D' \cup \{a, b\}$ in dobimo

$$\begin{aligned} S(D) - s(D) &= S(D') - s(D') + (M_1 - m_1)\Delta x_1 + (M_n - m_n)\Delta x_n \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + (M - m)\frac{\varepsilon}{3(M-m)} + (M - m)\frac{\varepsilon}{3(M-m)} = \varepsilon \end{aligned}$$ □

Izrek 6.10.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Naj bo $c \in (a, b)$. Potem je f integrabilna na $[a, b]$ natanko *tedaj, ko je integrabilna na* $[a, c]$ *in* $[c, b]$. *V tem primeru velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo f integrabilna na $[a, b]$ in naj bo D delitev $[a, b]$, da je $S(D) - s(D) < \varepsilon$. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je c v tej delitvi (sicer bi lahko vzeli njeno nadaljevanje). Naj bo $D = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c < x_{k+1} < \cdots < x_n\}$ in naj bo $D' = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_k\}$ delitev $[a, c]$ ter $D'' = \{x_k < \cdots < x_n\}$ delitev $[c, b]$ Sedaj pa velja

$$S(D') - s(D') + S(D'') - s(D'') = S(D) - s(D) < \varepsilon$$

in od tod $S(D') - s(D') < \varepsilon$ ter $S(D'') - s(D'') < \varepsilon$, torej je f integrabilna na $[a, c]$ in $[c, b]$.

($\Leftarrow$) Naj bo f integrabilna na intervalih $[a, c]$ in $[c, b]$ in naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja delitev D' intervala $[a, c]$ in D'' intervala $[c, b]$, da velja $S(D') - s(D') < \frac{\varepsilon}{2}$ in $S(D'') - s(D'') < \frac{\varepsilon}{2}$. Naj bo $D = D' \cup D''$. Potem je

$$S(D) - s(D) = S(D') - s(D') + S(D'') - s(D'') < \varepsilon$$

in f je integrabilna na $[a, b]$. Izraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

pa dobimo z limitiranjem Riemannovih vsot z delitvami D, ki vsebujejo c kot delilno točko:

$$R(f, D, \mathcal{T}) = R(f, D', \mathcal{T}') + R(f, D'', \mathcal{T}'')$$ □

Definicija 6.5. Če je f integrabilna na intervalu $[a, b]$, definiramo $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Posledica 6.11. *Naj bodo* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *in* f *integrabilna na največjem od zaprtih intervalov s krajišči v točkah* a, b, c. *Tedaj velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Posledica 6.12. *Naj bo* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omejena in naj obstajajo točke*

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b,$$

da je f *zvezna na* (c_{j-1}, c_j) *za* $\forall j$. *Potem je* f *integrabilna na* $[a, b]$.

Trditev 6.13. *Naj bosta* f, g *integrabilni na* $[a, b]$. *Tedaj so integrabilne funkcije* $f + g, f - g, cf, |f|$. *Pri tem velja:*

- $\int_a^b (f + g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b (cf)(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$
- $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Opomba. Iz prve in druge točke izhaja, da je določeni integral linearen funkcional na vektorskem prostoru integrabilnih funkcij na $[a, b]$ (nad $\mathbb{R}$). Tretja točka pa je integralska različica trikotniške neenakosti.

Dokaz. Prvi dve točki sledita direktno iz Riemannovih vsot. Dokažimo tretjo točko. Naj bo D delitev $[a,b]$. Naj bo $\overline{M}_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} |f|$ in $\overline{m}_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} |f|$. Sedaj za vsaka $x, x' \in [x_{j-1}, x_j]$ velja trikotniška neenakost

$$||f(x)| - |f(x')|| \leq |f(x) - f(x')| \leq M_j - m_j.$$

Od tod sledi $\overline{M}_j - \overline{m}_j \leq M_j - m_j$. Torej je

$$S(|f|, D) - s(|f|, D) \leq S(f, D) - s(f, D)$$

in $|f|$ je integrabilna na $[a,b]$. Neenakost sledi iz Riemannovih vsot $|R(f, D, \mathcal{T})| \leq R(|f|, D, \mathcal{T})$. □

Trditev 6.14. *Če sta f in g integrabilni na $[a,b]$ in je $f(x) \leq g(x)$ za $\forall x \in [a,b]$, potem je*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dokaz. Direktno sledi iz Riemannovih vsot: $R(f, D, \mathcal{T}) \leq R(f, D, \mathcal{T})$. □

Posledica 6.15. *Naj bo f integrabilna na $[a,b]$ in naj bosta $m = \inf_{[a,b]} f$ ter $M = \sup_{[a,b]} f$. Potem je*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

in vrednost $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ imenujemo povprečna vrednost f na $[a,b]$.

Posledica 6.16. *Naj bo f zvezna na $[a,b]$. Potem obstaja tak $c \in [a,b]$, da je $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.*

6.4 Osnovni izrek integralskega računa

Izrek 6.17 (Newton-Leibnizov izrek)**.**

Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, ki ima nedoločeni integral na $[a,b]$: $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F' = f$. Tedaj velja Newton-Leibnizova formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Dokaz. Naj bo $D = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ delitev integrala $[a,b]$. Potem z uporabo Lagrangevega izreka in ustrezno izbiro točk $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ dobimo

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_1) - F(x_0) \\ &= F'(t_n)\Delta x_n + F'(t_{n-1})\Delta x_{n-1} + \cdots + F'(t_1)\Delta_1 \\ &= f(t_n)\Delta x_n + f(t_{n-1})\Delta x_{n-1} + \cdots + f(t_1)\Delta_1 = R(f, D, \mathcal{T}). \end{aligned}$$

Ker je $\lim_{\max \Delta x_j \to \infty} R(f, D, \mathcal{T}) = \int_a^b f(x)\,dx$, mora veljati $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. □

Zgled 6.8. *Oglejmo si funkcijo*

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

na intervalu $[-3, 2]$. Vemo, da je ta funkcija integrabilna, nima pa nedoločenega integrala. Dolo-

čeni integral funkcije $f(x)$ na $[-3, 2]$ je

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = -3 + 2 = -1.$$

Pri katerih pogojih ima f zagotovo nedoločeni integral? Oglejmo si funkcijo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ – integral kot funkcija zgornje meje.

Izrek 6.18.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna. Potem je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ zvezna na $[a, b]$. Če je f v točki $x \in [a, b]$ zvezna, je F v x odvedljiva in velja $F'(x) = f(x)$.

Dokaz. Vemo, da je f omejena na $[a, b]$. Potem obstaja $M \geq 0$, da je $|f(x)| \leq M$ za $\forall x \in [a, b]$. Naj bo $x \in [a, b]$. Potem je

$$\begin{aligned}
|F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \\
&\leq \left| \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \right| \\
&\leq M \left| \int_x^{x+h} 1 \cdot dt \right| = M|h|,
\end{aligned}$$

torej je F zvezna v x, saj vzamemo $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ (če je $M = 0$, je trditev očitna). Naj bo sedaj f zvezna v x in $h \neq 0$. Potem je

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(x) + (f(t) - f(x)))\,dt \\
&= f(x) + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt.
\end{aligned}$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja $\delta > 0$, da za $|t - x| < \delta$ velja $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Naj bo $|h| < \delta$. Potem za vsak t med x in $x + h$ velja $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Torej je za $|h| < \delta$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right| &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt \right| \\
&< \frac{1}{|h|} \varepsilon \left| \int_x^{x+h} 1 \cdot dt \right| = \varepsilon,
\end{aligned}$$

zato je $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt = 0$ in velja $F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$. $\square$

Posledica 6.19. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ njen nedoločen integral na $[a, b]$.*

Trditev 6.20 (Integracija per partes za določene integrale)**.** *Naj bosta u, v zvezno odvedljivi. Potem velja*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Dokaz. Vemo, da velja $(uv)' = u'v + uv'$ in to so vse zvezne funkcije. Od tod hitro sledi

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx. \qquad \square$$

Zgled 6.9.

$$\int_0^1 \arctan x\,dx = x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

6.5 Vpeljava novih spremenljivk v določeni integral

Trditev 6.21. *Naj bo $\phi : [\alpha, \beta] = I_t \to [m, M] = I_x$ zvezno odveljiva. Tu je $m = \min_{I_t} \phi(t)$ in $M = \max_{I_t} \phi(t)$. Naj bo $f : [m, M] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

Dokaz. Vemo, da je f zvezna na $[m, M]$ in ima nedoločeni integral $F(x)$. Potem velja

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)).$$

Naj bo $F(\phi(t)) = G(t)$ za $t \in [\alpha, \beta]$. Potem je $G'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$, zato je

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx. \qquad \square$$

Opomba. Pri tem dokazu ni potrebno, da ima ϕ inverz.

Zgled 6.10. *Obravnavajmo dva primera določenih integralov z uvedbo nove spremenljivke.*

1. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(t)\,dt = \frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_0^\pi = 1$
2. f *zvezna na* $[0, 1]$: $\int_{-1}^1 f(t^2)t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^1 f(x)\,dx = 0$

Zgoraj imamo integral lihe funkcije po „sodem“ integralu. Sedaj pa zapišimo pomožni izrek, ki ga bomo potrebovali kasneje.

Izrek 6.22.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna in naj bo $g : [a, b] \to [0, \infty)$ zvezno odvedljiva ter padajoča. Potem obstaja tak $c \in [a, b]$, da je

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx.$$

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Ker je f zvezna, je $F'(x) = f(x)$ za $\forall x \in [a, b]$ in $F(a) = 0$. Prav tako je F zvezno odvedljiva. Z integracijo po delih dobimo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \int_a^b F'(x)g(x)\,dx\\ &= F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx\\ &= F(b)g(b) + \int_a^b F(x)(-g'(x))\,dx\end{aligned}$$

Naj bo $m = \min_{[a,b]} F(x)$ in $M = \max_{[a,b]} F(x)$. Potem je $m \leq F(x) \leq M$, $g(x) \geq 0$ in $g'(x) \leq 0$ za $\forall x \in [a,b]$. Zato je $mg(b) \leq F(b)g(b) \leq Mg(b)$ in $m(-g'(x)) \leq F(x)(-g'(x)) \leq M(-g'(x))$ za $\forall x \in [a,b]$. Od tod dobimo neenačbe:

$$\begin{aligned}-m\int_a^b g'(x)\,dx \leq \int_a^b F(x)(-g'(x))\,dx &\leq -M\int_a^b g'(x)\,dx\\ mg(b) - m(g(b)-g(a)) \leq \int_a^b (f(x)g(x))\,dx &\leq Mg(b) - M(g(b)-g(a))\\ mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx &\leq Mg(a)\end{aligned}$$

Če je $g(a) = 0$, je $g(x) = 0$ za $\forall x \in [a,b]$ in izrek je očiten. Predpostavimo torej, da je $g(a) > 0$ in dobimo

$$m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M.$$

To je torej število, ki leži med $\min_{[a,b]} F(x)$ in $\max_{[a,b]} F(x)$. Ker je F zvezna, zavzame vse vrednosti med m in M. Torej obstaja $c \in [a,b]$, da je

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) = \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,dx. \qquad \square$$

6.6 Posplošeni Riemannov integral

Za običajni Riemannov integral potrebujemo, da je integracijski interval omejen in da je funkcija, ki jo integriramo, omejena. Ča interval ni omejen ($\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$) ali funkcija ni omejena ($\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\,dx$) ali oboje, govorimo o posplošenem Riemannovem intervalu.

Definicija 6.6.

1. Naj bo $a < b$ in $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija z lastnostjo, da je za vsak $a' \in (a,b)$ integrabilna na $[a',b]$. Posplošeni integral funkcije f po $[a,b]$ obstaja, če obstaja limita $\lim_{a'\downarrow a}\int_{a'}^b f(x)\,dx$. Vrednost te limite proglasimo za vrednost posplošenega integrala:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a'\downarrow a}\int_{a'}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

2. Naj bo $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ funkcija z lastnostjo, da je za vsak $b' \in (a,b)$ integrabilna na $[a,b']$. Posplošeni integral funkcije f po $[a,b]$ obstaja, če obstaja limita $\lim_{b'\downarrow b}\int_a^{b'} f(x)\,dx$. Vrednost te limite proglasimo za vrednost posplošenega integrala:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\downarrow b}\int_a^{b'} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

3. Naj bo $f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je za vsaka $c' \in (a,c)$ in $c'' \in (c,b)$ integrabilna na $[a,c']$ in $[c'',b]$. Potem je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'\downarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx + \lim_{\varepsilon''\downarrow 0} \int_{c+\varepsilon''}^b f(x)\,dx,$$

če limiti na desni obstajata.

Opomba. Če je f integrabilna na $[a,b]$, posplošeni integral soovpada z običajnim zaradi zveznosti integrala kot funkcije zgornje meje.

Zgled 6.11. *Naj bo $s \in \mathbb{R}$. Potem velja*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^s} &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \begin{cases} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1; & s = 1 \\ \frac{1}{1-s} x^{1-s}\Big|_\varepsilon^1; & s \neq 1 \end{cases} \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \begin{cases} -\ln\varepsilon; & s = 1 \\ \frac{1}{1-s}(1-\varepsilon^{1-s}); & s \neq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

in ta limita obstaja natanko tedaj, ko je $s < 1$. Od tod sledi:

- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$,
- $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ *in*
- $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ *ne obstaja.*

Podobno definiramo še ostale posplošene integrale.

Definicija 6.7.

1. Naj bo $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ za vsak $b \in (a,\infty)$ integrabilna na $[a,b]$. Potem je posplošeni integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

če ta limita obstaja.

2. Naj bo $f : (-\infty,a] \to \mathbb{R}$ za vsak $b \in (-\infty,a)$ integrabilna na $[b,a]$. Potem je posplošeni integral

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\,dx,$$

če ta limita obstaja.

3. Integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ definiramo kot

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx,$$

če oba integrala na desni obstajata.

Izrek 6.23 (Primerjalni kriterij)**.**

Naj bosta $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ funkciji, ki sta za vsak $b' \in (a, b)$ integrabilni na $[a, b']$. Denimo, da za $\forall x \in [a, b)$ velja $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Če je $\int_a^b g(x)\, dx < \infty$ oz. integral konvergira, konvergira tudi $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$. Velja tudi obratno: če integral $\int_a^b f(x)$ divergira, divergira tudi integral $\int_a^b g(x)\, dx$.

Dokaz. Za vsak $b' \in [a, b)$ velja $0 \leq \int_a^{b'} f(x)\, dx \leq \int_a^{b'} g(x)\, dx$. Če $\int_a^b g(x)\, dx$ obstaja in je torej neko končno število, potem velja $F(b') = \int_a^{b'} f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$ za vsak $b' \in [a, b)$, zato obstaja $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$. Če pa funkcija $F(b')$ ni navzgor omejena, to velja tudi za $\int_a^{b'} g(x)\, dx$ in zato $\lim_{b' \uparrow b} \int_a^{b'} g(x)\, dx = \infty$. □

Trditev 6.24. *Naj bo $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna in naj bo $g(a) > 0$. Potem integral $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\, dx$ konvergira natanko tedaj, ko je $s < 1$.*

Dokaz. Vemo, da je $g(a) > 0$. Ker je g zvezna, obstaja $\tilde{b} \in (a, b]$, da je

$$\frac{g(a)}{2} \leq g(x) \leq 2g(a)$$

za vse $x \in [a, \tilde{b}]$. Zato

$$\frac{g(a)}{2(x-a)^2} \leq \frac{g(x)}{(x-a)^s} \leq \frac{2g(a)}{(x-a)^s}$$

za $\forall x \in [a, \tilde{b}]$. Iz primerjalnega kriterija vidimo, da integral $\int_a^{\tilde{b}} \frac{g(x)}{(x-a)^s}\, dx$ obstaja natanko tedaj, ko obstaja integral $\int_a^{\tilde{b}} \frac{dx}{(x-a)^s}$. To pa je natanko tedaj, ko je $s < 1$. Na $[\tilde{b}, b]$ pa je integrand zvezen in $\int_{\tilde{b}}^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\, dx$ obstaja. □

Opomba. Drugi možen pristop k tej trditvi je, da v ta integral vpeljemo novo sprmenljivko $t^n = x - a$ in dobimo, da integral obstaja, če je $s < 1$.

Zgled 6.12. *Oglejmo si obstoj nekaterih integralov.*

- $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ *obstaja,*
- $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{\frac{\sin x}{x}}{x}\, dx$ *ne obstaja, saj je* $s = 1$,
- $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ *obstaja in*
- $\int_0^1 \sin x \cdot x^{-\frac{3}{2}}\, dx = \int_0^1 \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}{x}\, dx$ *obstaja.*

Zgled 6.13. *Definirajmo Eulerjevo beta funkcijo kot $\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$. Ta integral obravnavamo v krajiščih in ugotovimo, da obstaja natanko tedaj, ko velja $p > 0$ in $q > 0$.*

Po naših definicijah integral funkcije $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ obstaja natanko tedaj, ko obstajata integrala

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\, dx.$$

Obstaja pa še pojem Cauchyjeve glavne vrednosti:

$$\text{N. P.} \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\, dx \right),$$

če limita obstaja. Če integral obstaja v prejšnjem smislu, obstaja tudi kot glavna vrednost. A po drugi strani integral $\int_a^b \frac{dx}{x}$ za $a < 0 < b$ ne obstaja, vendar pa je njegova Cauchyjeva glavna vrednost enaka $\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Trditev 6.25 (Cauchyjev test za limite funkcij)**.** *Limita* $\lim_{x\uparrow b} F(x)$ *obstaja natanko tedaj, ko za* $\forall\varepsilon > 0$ *obstaja* $\delta > 0$*, da za vsaka* $x, x' \in (b-\delta, b)$ *velja* $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$*.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ča $\lim_{x\uparrow b} F(x) = A$ obstaja, je to očitno, saj za $\forall\varepsilon$ obstaja $\delta > 0$, da iz $x \in (b-\delta, b)$ sledi $|F(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Torej za $x, x' \in (b-\delta, b)$ velja

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x')| &\leq |F(x) - A| + |A - F(x')| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Naj zaporedje $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergira k b in je iz definicijskega območja F. Potem je zaporedje slik $(F(x_n))_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo in ima limito $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = A$. Trdimo, da velja $\lim_{x\uparrow b} F(x) = A$. Če to ne bi bilo res, potem obstaja $\varepsilon > 0$, da za $\forall n \in \mathbb{N}$ obstaja $x_n' \in \left(b - \frac{1}{n}, b\right)$, da je $|F(x_n') - A| < 2\varepsilon$. Naj bo $\delta > 0$ in naj bo $n \in \mathbb{N}$ tak, da je $\frac{1}{n} < \delta$, torej $x_n' \in \left(b - \frac{1}{n}, b\right) \subseteq (b-\delta, b)$ in $|F(x_n) - A| < \varepsilon$ za $x_n \in (b-\delta, b)$. Tedaj je

$$\begin{aligned}|F(x_n') - F(x_n)| &\geq |F(x_n') - A| - |F(x_n) - A| \\ &> 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,\end{aligned}$$

kar je v nasprotju s predpostavko. □

Podobni Cauchyjevi pogoji veljajo tudi za druge limite funkcij:

1. limita $\lim_{x\downarrow a} F(x)$ obstaja natanko tedaj, ko za $\forall\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsaka $x, x' \in (a, a+\delta)$ velja $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$.

2. limita $\lim_{x\to\infty} F(x)$ obstaja natanko tedaj, ko za $\forall\varepsilon > 0$ obstaja M, da za vsaka $x, x' > M$ velja $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$.

Trditev 6.26.

1. *Naj bo* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *za vsak* $b' \in (a, b)$ *integrabilna na* $[a, b']$*. Če obstaja integral* $\int_a^b |f(x)|\, dx$*, obstaja tudi* $\int_a^b f(x)\, dx$ *in velja* $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$*.*

2. *Naj bo* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *za vsak* $b > a$ *integrabilna na* $[a, b]$*. Če obstaja integral* $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$*, obstaja tudi* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *in velja* $\left|\int_a^\infty f(x)\, dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\, dx$*.*

Opomba. Funkcijam, za katere obstaja integral $\int_a^b |f(x)|\, dx$, pravimo, da so absolutno integrabilne.

Zgled 6.14. *Oglejmo si integral* $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}$*. Definirajmo funkcijo*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{x^2}; & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases}.$$

Ta funkcija je zvezna v 0 *in omejena v okolici* 0*, zato integral* $\int_0^b f(x)\, dx$ *obstaja za nek* $b \in \mathbb{R}$*. Sedaj definirajmo funkcijo*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{x^2}; & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x^2}; & x > 1 \end{cases}$$

in ta funkcija ima integral

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx + 1 < \infty.$$

Ker velja $f(x) \leq g(x)$ na intervalu $(0, \infty)$, sledi

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \leq \int_0^\infty g(x)\,dx$$

in f je integrabilna na $[0, \infty)$.

Zgled 6.15. *Oglejmo si integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. Definirajmo*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}; & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases}.$$

Ponovno nas zanima obnašanje integrala v neskončnosti, zato lahko obravnavamo le $\int_1^\infty f(x)\,dx$. Naj bo $F(b) = \int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx$ za $b > 1$. Vzemimo poljubna $b' > b > 1$. Potem velja

$$\begin{aligned} F(b') - F(b) &= \int_b^{b'} \frac{\sin x}{x}\,dx \\ &= \int_b^{b'} \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g}\,dx \\ &= g(b) \int_b^c \sin x\,dx, \end{aligned}$$

kjer c leži med b in b',

$$= \frac{1}{b}(-\cos x)\Big|_b^c = \frac{\cos b - \cos c}{b}.$$

Od tod sledi $|F(b') - F(b)| \leq \frac{2}{b}$ in je izpolnjen Cauchyjev pogoj za konvergenco funkcij, zato integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ obstaja. Pri analizi 2 bomo pokazali, da je njegova vrednost enaka $\frac{\pi}{2}$. Lahko pa pokažemo, da integral $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ ne konvergira. To naredimo tako, da aproksimiramo ploščino posameznega „hriba“ ali „doline“ pod njenim grafom. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx &= \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \\ &\leq \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{2}{(k+1)\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty = \infty. \end{aligned}$$

Dobili smo eno najbolj znanih vrst – harmonično vrsto – ki pa divergira. Posledično integral $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ ne konvergira oziroma $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ni absolutno konvergentna na $[0, \infty)$.

Dokaz trditve. Dokažimo le prvo točko. Naj bo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ in naj bo $\tilde{F}(x) = \int_a^x |f(t)|\,dt$. Naj bosta $x, x' \in [a,b)$. Tedaj je

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x')| &= \left| \int_{x'}^{x} f(t)\,dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x'}^{x} |f(t)|\,dt \right| \\ &= |\tilde{F}(x) - \tilde{F}(x')|. \end{aligned}$$

Ker integral

$$\lim_{b' \uparrow b} \int_a^{b'} |f(t)|\,dt = \lim_{b' \to b} \tilde{F}(b') = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

obstaja, zadošča $\tilde{F}$ Cauchyjevemu pogoju, ko gre b' proti b. Zato temu pogoju zadošča tudi F in obstaja integral

$$\lim_{b' \uparrow b} \int_a^{b'} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Ker za vsak $b' \in (a,b)$ velja

$$\left| \int_a^{b'} f(t)\,dt \right| = |F(b')| \leq \int_a^{b'} |f(t)|\,dt = \tilde{F}(b'),$$

velja ta neenakost tudi v limiti $\lim_{b' \uparrow b} |F(b')| \leq \lim_{b' \uparrow b} \tilde{F}(b')$. Podobno dokažemo tudi drugo točko. $\square$

Trditev 6.27. *Naj bo $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ taka zvezna funkcija, da obstajajo $0 < a \leq b$ in $0 < m \leq M < \infty$, da za $\forall x \geq b$ velja $m \leq g(x) \leq M$. Tedaj integral $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^s}\,dx$ obstaja natanko tedaj, ko je $s > 1$.*

Dokaz. Vemo, da za $x \geq b$ velja $\frac{m}{x^s} \leq \frac{g(x)}{x^s} \leq \frac{M}{x^s}$. Integral $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^s}\,dx$ obstaja natanko tedaj, ko obstaja $\int_b^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$. Po primerjalnem kriteriju, ki velja tudi za neskončne poltrake, pa ta integral obstaja natanko tedaj, ko je $s > 1$. $\square$

Zgled 6.16. *Obravnavajmo integral $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$. Integrand $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ je neomejen v 0. Obravnavati moramo torej dva integrala: $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ in $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$. Pri prvem integralu dobimo*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\ln x}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\ln x + 1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx.$$

Pri integralu $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\ln x+1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx$ vzamemo funkcijo $g(x) = \frac{1+\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}$, ki je zvezna in velja $\lim_{x\downarrow 0} g(x) = 1$, saj je $\lim_{x\downarrow 0} \sqrt{x}\ln x = 0$. Potem je $s = \frac{1}{2} < 1$ in integral obstaja. Podobno utemeljimo obstoj integrala $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx$. Tako obstaja tudi $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$. Sedaj utemeljimo še obstoj drugega integrala:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx &= \int_1^\infty \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x^2)}\,dx \\ &= \int_1^\infty \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - 1}{x^{\frac{3}{2}}(1+\frac{1}{x^2})}\,dx \\ &= \int_1^\infty \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1}{x^{\frac{3}{2}}(1+\frac{1}{x^2})}\,dx - \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}(1+\frac{1}{x^2})}\,dx. \end{aligned}$$

Ponovno moramo utemeljiti obstoj obeh končnih integralov. Naj bo funkcija $g(x) = \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1}{(1+\frac{1}{x^2})}$. *Ker je* $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$ *in* $s = \frac{3}{2} > 1$, *ta integral konvergira. Podobno preverimo še za* $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}(1+\frac{1}{x^2})}\,dx$. *Sedaj smo dokazali, da integral* $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ *obstaja. Če v* $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ *vpeljemo novo spremenljivko* $x = \frac{1}{t}$, *dobimo*

$$\int_1^0 \frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t^2}}(-\frac{1}{t^2})\,dt = -\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt,$$

torej je $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$.

Zgled 6.17. *Vzemimo gama funkcijo* $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$. *Kot pri prejšnjem zgledu moramo obravnavati integrala* $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$ *in* $\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$. *Prvi integral obstaja natanko tedaj, ko je* $s > 0$. *Pri drugem integralu pa uporabimo dejstvo* $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}}{e^{\frac{x}{2}}}$ *in zato obstaja* b_0, *da za* $\forall x \geq b_0$ *velja* $x^{s-1}e^{-\frac{x}{2}} < 1$. *Tako dobimo*

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx &= \int_1^\infty x^{s-1}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\,dx \\ &= \int_1^{b_0} x^{s-1}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\,dx + \int_{b_0}^\infty x^{s-1}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\,dx \\ &\leq \int_1^{b_0} x^{s-1}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\,dx + \int_{b_0}^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx\end{aligned}$$

in vidimo, da integral $\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$ *konvergira za* $\forall s \in \mathbb{R}$. *To pomeni, da* $\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$ *za vse* $s > 0$.

6.7 Uporaba integrala v geometriji in fiziki

V tem sklopu bomo izpeljali nekatere uporabe integrala v praksi. Najprej si oglejmo ploščino ravninskih likov. Naj bosta $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilni. Naj bo $g(x) \leq f(x)$ za vsak $x \in [a,b]$. Potem je ploščina lika med grafoma funkcij f in g enaka $P(a) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$. Ta formula je seveda neodvisna od tega, ali se katera od teh dveh funkcij nahaja pod ali nad x-osjo.

Zgled 6.18. *Oglejmo si ploščino lika* A, *ki ga omejujeta sinusni in kosinusni graf med kotoma* $\frac{\pi}{4}$ *in* $\frac{5\pi}{4}$. *Dobimo*

$$P(A) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = -\cos x - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

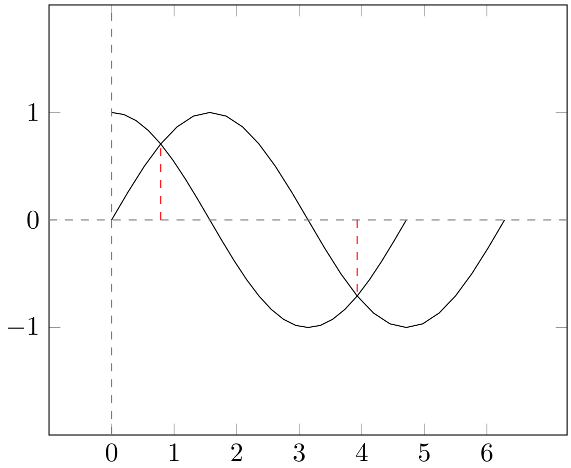
Podobno lahko izpeljemo formulo za dolžino poti krivulje. Naj bo $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ C^1 pot v $\mathbb{R}^2$. Naj bo D delitev intervala $[a,b]$. Pot aproksimiramo s poligonsko potjo, tako da točke $\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), \ldots, \vec{r}(t_n)$ povežemo z daljicami. Vsota dolžin teh dlajic je aproksimacija za dolžino poti γ:

$$\lambda(D) = \sum_1^n |\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1})|.$$

Če je $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, potem imamo

$$\lambda(D) = \sum_1^n \sqrt{(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2}.$$

Naj bo $D \subseteq D'$. Potem je po trikotniški neenakosti $\lambda(D) \leq \lambda(D')$.



Slika 24: Skica iz zgleda 6.18.

Definicija 6.8. Dolžina poti γ je $\lambda(\gamma) \in [0, \infty]$ s predpisom

$$\lambda(\gamma) = \sup\{\lambda(D);\ D \text{ delitev } [a, b]\}.$$

Če je $\lambda(\gamma) < \infty$, je pot rektifikabilna ali izmerljiva.

Izrek 6.28.

Če je $\vec{r} = (x(t), y(t))$ zvezno odvedljiva pot v $\mathbb{R}^2$, je

$$\lambda(\gamma) = \int_a^b \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| \, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \, dt,$$

kjer je $\gamma = \vec{r}([a, b])$.

Opomba. To je formula, ki odraža fizikalno povezavo $s = v \cdot t$ oziroma $\lambda = |\dot{\vec{r}}(t)| \cdot t$ za enakomerno gibanje. Če gibanje ni enakomerno, ga aproksimiramo s kratkimi odseki enakomernih gibanj (Riemannove vsote) in nato pošljemo časovne dolžine intervalov proti 0.

Dokaz. Naj bo D delitev intervala $[a, b]$. Potem je

$$\begin{aligned}
\lambda(D) &= \sum_1^n |\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1})| \\
&= \sum_1^n \sqrt{\left(x(t_j) - x(t_{j-1})\right)^2 + \left(y(t_j) - y(t_{j-1})\right)^2} \\
&= \sum_1^n \sqrt{\dot{x}^2(\mathcal{T}_j) + \dot{y}^2(\widetilde{\mathcal{T}}_j)} \, \Delta t_j,
\end{aligned}$$

kjer smo v zadnji vrstici uporabili Lagrangev izrek. Če bi veljalo $\mathcal{T}_j = \widetilde{\mathcal{T}}_j$, bi to bila Riemannova vsota za funkcijo $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = f(t)$, ki je zvezna in katere integral po $[a, b]$ obstaja. Prav tako velja $R(f, D, \mathcal{T}) = \int_a^b f(t) \, dt$. Pokazali bomo, da se z $\lambda(D)$ približujemo Riemannovi vsoti

$R(f, D, \mathcal{T})$, kjer je $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n\}$. Tako dobimo

$$
\begin{aligned}
|\lambda(D) - R(f, D, \mathcal{T})| &= \left|\sum_1^n \left(\sqrt{\dot{x}^2(\mathcal{T}_j) + \dot{y}^2(\widetilde{\mathcal{T}}_j)} - \sqrt{\dot{x}^2(\mathcal{T}_j) + \dot{y}^2(\mathcal{T}_j)}\right) \Delta\mathcal{T}_j\right| \\
&= \left|\sum_1^n \frac{\left(\dot{y}(\widetilde{\mathcal{T}}_j) - \dot{y}(\mathcal{T}_j)\right)\left(\dot{y}(\widetilde{\mathcal{T}}_j) + \dot{y}(\mathcal{T}_j)\right)}{\sqrt{\dot{x}^2(\mathcal{T}_j) + \dot{y}^2(\widetilde{\mathcal{T}}_j)} + \sqrt{\dot{x}^2(\mathcal{T}_j) + \dot{y}^2(\mathcal{T}_j)}} \Delta\mathcal{T}_j\right| \\
&\leq 2\sum_1^n \left|\left(\dot{y}(\widetilde{\mathcal{T}}_j) - \dot{y}(\mathcal{T}_j)\right)\right| \Delta\mathcal{T}_j.
\end{aligned}
$$

Ker je $t \mapsto \dot{y}(t)$ zvezna na $[a, b]$, je na tem intervalu tudi enakomerno zvezna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja $\delta > 0$, da za $|\widetilde{\mathcal{T}} - \mathcal{T}| < \delta$ velja

$$
\left|\dot{y}(\widetilde{\mathcal{T}}) - \dot{y}(\mathcal{T})\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.
$$

Če je delitev D taka, da je $\max \Delta x_j < \delta$. Potem je $|\lambda(D) - R(f, D, \mathcal{T})| < \varepsilon$. Od tod vidimo, da je $\lambda(\gamma) < \infty$ ter $\lambda(\gamma) = \int_a^b f(t)\, dt$. $\square$

Pravilnost izpreljane formule je očitna na naslednjem razmisleku: naj bosta $\vec{r} : [a, b] \to \gamma$ in $\vec{\rho} : [a, b] \to \gamma$ dve regularni parametrizaciji krivulje γ (obe sta bijekciji na γ). Potem je ena parametrizacija druge oziroma obstaja C^1 bijekcija $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, da je $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(h(\tau))$ (za h vzamemo $\vec{r}^{-1} \circ \vec{\rho}$). Naj bo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. Potem je $\vec{\rho}(\tau) = (x(h(\tau)), y(h(\tau)))$ in $\rho'(\tau) = (\dot{x}(h(\tau)), \dot{y}(h(\tau))) \cdot h'(\tau)$. Od tod dobimo

$$
\int_\alpha^\beta |\vec{\rho}'(\tau)|\, d\tau = \int_\alpha^\beta \left|\dot{\vec{r}}(h(\tau))\right| |h'(\tau)|\, d\tau
$$

in sedaj moramo obravnavati dve možnosti: ali je $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ naraščajoča ali padajoča: v obeh primerih pa na koncu dobimo

$$
= \int_a^b \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|\, dt.
$$

V vsakem primeru torej velja $\int_\alpha^\beta |\vec{\rho}'(\tau)|\, d\tau = \int_a^b \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|\, dt$ oziroma dolžina krivulje poti je neodvisna od parametrizacije.

Zgled 6.19. *Oglejmo si krivuljo $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ za $t \in [0, 2\pi)$. Ta krivulja je krožnica s središčem v $(0,0)$ in polmerom R. Potem je $\dot{\vec{r}}(t) = (-R\sin t, R\cos t)$ in $\left|\dot{\vec{r}}\right| = R$, zato je dolžina krivulje*

$$
\lambda(\gamma) = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R.
$$

Včasih pa imamo krivuljo podano v polarnih koordinatah kot $r = r(\phi)$, kjer je ϕ parameter. Takrat za izračun dolžine poti krivulje uporabimo formulo, ki jo izpeljemo iz prejšnje.

Zgled 6.20. *Naj bo $r = r(\phi)$, torej neka poljubna krivulja, podana v polarnih koordinatah. Potem je $x(\phi) = r(\phi)\cos\phi$ in $y(\phi) = r(\phi)\sin\phi$. Zato je $x' = r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi$ in $y'(\phi) = r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi$ ter od tod sledi $x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2$. Tako je formula za dolžino krivulje v polarnih koordinatah*

$$
\lambda(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\phi.
$$

Za primer vzemimo krivuljo $r(\phi) = \phi$, ki je kar običajna spirala. Sedaj lahko izračunamo dolžino loka spirale s formulo $\lambda(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\phi^2}\, d\phi$. Vpeljemo novo konstanto $\phi = \sinh(t)$, $t = \ln(\phi + \sqrt{1+\phi^2})$ in $d\phi = \cosh(t)\, dt$ ter dobimo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})} \cosh^2(t)\, dt &= \int_0^{\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})} \frac{\cosh(2t)+1}{2}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sinh(2t) + t\right)\Big|_0^{\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sinh\left(\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right) + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})^2 - (\sqrt{1+4\pi^2} - 2\pi)^2}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}) \\
&= \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}) \\
&= \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(2\pi)
\end{aligned}$$

Če je krivulja graf neke C^1 funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dobimo parametrizacijo $\vec{r}(x) = (x, f(x))$. Zato je $\vec{r}'(x) = (1, f'(x))$ in zato

$$\lambda(G(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Zgled 6.21. *Naj bo $f(x) = \cosh x$ in intervalu $[-1,1]$. Dolžina njenega grafa („verižnice“) je*

$$\begin{aligned}
\lambda = \int_{-1}^1 \sqrt{1+\sinh^2(Tx)}\, dx &= \int_{-1}^1 \cosh(x)\, dx \\
&= \sinh(x)\Big|_{-1}^1 \\
&= 2\sinh(1) = e - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Tako kot dolžino loka lahko v polarnih koordinatah izračunamo tudi ploščino lika. Naj bo $r = r(\phi)$ in $\phi \in [\alpha, \beta]$. Lik aproksimiramo z majhnimi krožnimi izseki s polmerom $r(\phi_j)$ in kotom $\Delta\phi$. Ploščino $\frac{1}{2}r^2(\phi_j)\Delta\phi$ kotov seštejemo in dobimo Riemannovo vsoto za funkcijo $\frac{1}{2}r^2(\phi)$. Torej je

$$P(A) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\phi)\, d\phi.$$

Zgled 6.22. *Oglejmo si ploščino enake spirale kot prej: naj bo $r(\phi) = \phi$. Potem je*

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\phi^2\, d\phi = \frac{1}{6}\phi^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3}{3}.$$

Sedaj si oglejmo prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije f zavrtimo okoli x-osi. Prostornina telesa pri koordinati x_j je približno $\pi f^2(x_j) \cdot \Delta x_j$. Ko take člene seštejemo, dobimo Riemannovo vsoto funkcije $\pi f^2(x)$ in ta vsota je aproksimacija za prostornino vrtenine. Od tod dobimo formulo

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

za volumen telesa v $\mathbb{R}^3$, ki ga opišemo z množico

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x \in [a, b],\ y = r\cos\phi,\ z = r\sin\phi;\ 0 \le r \le f(x),\ \phi \in [0, 2\pi)\right\}.$$

Zgled 6.23. *Oglejmo si vrtenino funkcije $f(x) = \sin x$ okoli x-osi na intervalu $[0, \pi]$. Njen volumen je podan s formulo*

$$V = \int_0^\pi \pi \sin^2 x\, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Opomba. Če vemo, da je to telo homogeno z masno gostoto ρ, potem je masa telesa $M = \rho \cdot V$.

Zgled 6.24. *Oglejmo si še prostornino krogle s polmerom R, kar pa je ravno prostornina vrtenine funkcije $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ okoli x-osi na intervalu $[-R, R]$. Volumen je podan s formulo*

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi(2R^3 - \frac{2}{3}R^3) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Na koncu si oglejmo še površino vrtenine funkcije $f : [a, b] \to [0, \infty)$. Površine enega zelo tankega odseka te vrtenine je približno $2\pi f(x_j) \cdot \Delta s_j$, kjer je

$$\Delta s_j = \sqrt{1 + f'^2(x_j)}\, \Delta x_j.$$

Od tod pa sledi, da je površina vrtenine funkcije f enaka

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Zgled 6.25. *S to formulo lahko sedaj v duhu prejšnjega zgleda izračunamo še površino krogle:*

$$P = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Ali lahko z orodji, ki smo jih spoznali v tem sklopu, izračunamo težišče homogene ploskve v $\mathbb{R}^2$? Naj bo D ploskev, ki jo omejujeta funkciji $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) \le f(x)$. Naj bo ρ ploščinska masna gostota (torej je masa ploskve D enaka $M = \rho \cdot P(D)$). Ploščina ploskve D pa je enaka $P(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$. Sedaj lahko kot pri Riemannovih vsotah ploskev D razdelimo ne tanke pravokotnike. Posamezen tak pravokotnik ima težišče v $\left(x_j, \frac{f(x_j)+g(x_j)}{2}\right)$ in maso $\rho(f(x_j) - g(x_j))\, \Delta x_j$. Sedaj pa dobimo

$$x_T = \frac{1}{P(D)} \int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx, \quad y_T = \frac{1}{2P(D)} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\, dx.$$

Ta rezultat se ujema z intuicijo, da težišče homogene ploskve ni odvisno od njene gostote.

Opomba. Za sistem točkastih teles s koordinatami (x_j, y_j) in masami m_j ima težišče koordinati

$$x_T = \frac{\sum_1^n x_j m_j}{\sum_1^n m_j}, \quad y_T = \frac{\sum_1^n y_j m_j}{\sum_1^n m_j}.$$

7 VRSTE

7.1 Številske vrste

Vrsta je definirana kot neskončna vsota. Za dano zaporedje realnih števil $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je pripadajoča številska vrsta

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Vsoto vrste definiramo tako, da tvorimo zaporedje njenih delnih vsot $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, kjer je $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$.

Definicija 7.1. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot. Tedaj je vsota vrste limita zaporedje njenih delnih vsot:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} a_j.$$

Če vrsta ne konvergira, pravimo, da divergira.

Opomba. Za vsako številsko vrsto dobimo zaporedje delnih vsot. Po drugi strani pa prav tako za vsako zaporedje $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ lahko tvorimo številsko vrsto, katere delne vsote so $(S_n)_{n=1}^{\infty}$.

Zgled 7.1. *Čeprav enostavna, je geometrijska vrsta ena najpomembnejših vrst. Členi te vrste tvorijo geometrijsko zaporedje $a_n = qa_{n-1}$, kjer sta $a, q \in \mathbb{R}$. Primer $q = 0$ ni preveč zanimiv, zato naj bo $q \neq 0$. Potem je*

$$S_n = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = \begin{cases} n \cdot a; & q = 1 \\ a\frac{1-q^n}{1-q}; & q \neq 1 \end{cases}$$

in sedaj lahko obravnavamo konvergenco geometrijske vrste v odvisnosti od parametra Q. ***Geometrijska vrsta konvergira natanko tedaj, ko velja $|q| < 1$.*** *V tem primeru je njena vsota enaka $S = \frac{q}{1-q}$.*

Zgled 7.2. *Harmonično vrsto*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

smo že spoznali v enem izmed zgledov v prejšnjem poglavju. Pokazali smo tudi, da ta vrsta divergira.

Izrek 7.1 (Cauchyjev pogoj za konvergenco vrst)**.**

Vrsta $a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, ko za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ in vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$.

Dokaz. Vrsta konvergira natanko tedaj, ko konvergira zaporedje delnih vsot $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, to pa konvergira natanko tedaj, ko zadošča Cauchyjevemu pogoju. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ in za $\forall k \in \mathbb{N}$ velja $|S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$. To pa je ekvivalentno $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$. $\square$

Posledica 7.2. *Če vrsta $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ konvergira, členi vrste konvergirajo proti 0. To pomeni, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ potrebni (a ne zadostni) pogoj za konvergenco vrste.*

Zgled 7.3. *Vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)$ *divergira, saj je* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\neq 0$.

Opomba.

- Če vrsta $\sum_1^\infty a_n$ konvergira, za vsak $m\in\mathbb{N}$ konvergira tudi vrsta $\sum_m^\infty a_n$.
- Če za nek $m\in\mathbb{N}$ konvergira vrsta $\sum_m^\infty$, konvergira tudi vrsta $\sum_1^\infty a_n$.
- Vrsto $\sum_m^\infty a_n$ imenujemo ostanek ali rep vrste $\int_1^\infty a_n$.

Trditev 7.3. *Naj konvergirata vrsti* $\sum_1^\infty a_n$ *in* $\sum_1^\infty b_n$. *Tedaj konvergirajo tudi vrste* $\sum_1^\infty(a_n\pm b_n)$ *in* $\sum_1^\infty ca_n$ *za poljuben* $c\in\mathbb{R}$. *Pri tem velja* $\sum_1^\infty(a_n\pm b_n)=\sum_1^\infty a_n\pm\sum_1^\infty b_n$ *in* $\sum_1^\infty ca_n=c\sum_1^\infty a_n$.

Dokaz. Dokaz je preprost in poteka z delnimi vsotami. □

7.2 Vrste z nenegativnimi členi

Naj bo $\sum_1^\infty a_n$ in $a_n\geq 0$, $\forall n$. Potem je zaporedje delnih vsot $(S_n)_{n=1}^\infty$ naraščajoče in imamo dve možnosti. Če je zaporedje delnih vsot navzgor omejeno, potem vrsta konvergira in velja

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sup_n S_n=S.$$

Če pa zaporedje delnih vsot ni navzgor omejeno, vrsta divergira in velja $S=\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$.

Trditev 7.4 (Primerjalni kriterij)**.** *Naj bo* $0\leq a_n\leq b_n$ *za* $\forall n\in\mathbb{N}$. *Potem veljata naslednji trditvi:*

1. *Če* $\sum_1^\infty b_n$ *konvergira, konvergira* $\sum_1^\infty a_n$ *in velja* $\sum_1^\infty a_n\leq\sum_1^\infty b_n$.
2. *Če* $\sum_1^\infty a_n$ *divergira, divergira* $\sum_1^\infty b_n$.

Dokaz. Dokaz poteka tako kot dokaz podobne trditve pri integralih. Naj bo $S_1=a_1+\cdots+a_n\leq T_n=b_1+\cdots+b_n$ za $\forall n\in\mathbb{N}$.

1. Če zaporedje $(T_n)_{n=1}^\infty$ konvergira, je omejeno in zato je omejeno tudi $(S_n)_{n=1}^\infty$, torej konvergira.
2. Če zaporedje $(S_n)_{n=1}^\infty$ divergira, je neomejeno, torej je tudi $(T_n)_{n=1}^\infty$ neomejeno in divergira.

□

Opomba. V tej trditvi je zaporedje $(b_n)_{n=1}^\infty$ majoranta za $(a_n)_{n=1}^\infty$ oziroma $(a_n)_{n=1}^\infty$ minoranta za $(b_n)_{n=1}^\infty$.

Izrek 7.5 (Kvocientni ali d'Alembertov kriterij)**.**

Naj bo $\sum_1^\infty a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi. Tvorimo zaporedje kvocientov* $q_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Tedaj velja:*

1. *Če obstaja tak* $q<1$ *in* $n_0\in\mathbb{N}$, *da za vsak* $n\geq n_0$ *velja* $q_n\leq q$, *tedaj vrsta* $\sum_1^\infty a_n$ *konvergira.*
2. *Če obstaja tak* $n_0\in\mathbb{N}$, *da za vsak* $n\geq n_0$ *velja* $q_n\geq 1$, *potem vrsta* $\sum_1^\infty a_n$ *divergira.*

Posledica 7.6.

1. *Če je* $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, *vrsta konvergira.*
2. *Če je* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, *vrsta konvergira.*
3. *Če je* $\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, *vrsta divergira.*
4. *Če je* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, *vrsta divergira.*

Dokaz. Dokaz temelji na primerjavi z geometrijsko vrsto. Denimo, da obstaja tak $q < 1$ in $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Torej je $a_{n+1} \leq q a_n$ za vse $n \geq n_0$. Torej je $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ minoranta za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q^{n-1}$, ki konvergira, saj $0 < q < 1$. Torej konvergira vrsta $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ in posledično tudi $\sum_1^{\infty} a_n$. Sedaj dokažimo še drugo točko: denimo, da obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $a_{n+1} \geq a_n$ in zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je od člena n_0 naprej naraščajoče. Torej ne more veljati $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ in vrsta divergira. □

Zgled 7.4. *Oglejmo si nekaj osnovnih vrst s nenegativnimi členi, katerih konvergenco lahko obravnavamo s kvocientnim kriterijem.*

1. *Vzemimo vrsto* $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n!}$, *torej* $a_n = \frac{1}{n!}$. *Potem je* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$ *in ta vrsta konvergira. Kaneje bomo pokazali, da je vsota te vrste število e.*
2. *Ponovno si oglejmo harmonično vrsto* $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$, *torej* $a_n = \frac{1}{n}$ *in* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. *Za vrste take oblike nam kvocientni kriterij ne da odgovora: lahko bodisi konvergirajo bodisi divergirajo.*
3. *Vrsta oblike* $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *je konvergentna (njene delne vsote so enake* $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$*), vendar pa zanjo velja* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$. *Torej si tudi v tem primeru ne bi mogli pomagati s kvocientnim kriterijem.*
4. *Na koncu si oglejmo še vrsto* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right)$. *Ta vrsta je očitno konvergentna, vendar pa zanjo velja* $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ *in* $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$. *Na vprašanje, ali ta vrsta konvergira, nam kvocientni kriterij ne bi mogel podati dokončnega odgovora.*

Izrek 7.7 (Korenski ali Cauchyjev kriterij)**.**

Naj bo $\sum_1^{\infty} a_n$ *vrsta z nenegativnimi členi. Naj bo* $q_n = \sqrt[n]{a_n}$ *za* $n \in \mathbb{N}$. *Tedaj veljata naslednji trditvi.*

1. *Če obstajata tak* $0 \leq q < 1$ *in* $n_0 \in \mathbb{N}$, *da za* $\forall n \geq n_0$ *velja* $q_n \leq q$, *tedaj vrsta konvergira.*
2. *Če obstaja podzaporedje* $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, *da za vsak* $j \in \mathbb{N}$ *velja* $q_{n_j} \geq 1$, *tedaj vrsta divergira.*

Posledica 7.8.

1. *Če je* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *vrsta konvergira.*
2. *Če je* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *vrsta konvergira.*
3. *Če je* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *vrsta divergira.*
4. *Če je* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *vrsta divergira.*

Opomba.

- Če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q_0 < 1$, je členov vrste večjih od $q = \frac{1+q_0}{2}$ največ končno mnogo.
- Če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q_0 > 1$, obstaja neskončno mnogo členov, večjih od 1.

Dokaz. Če obstajata $q < 1$ in $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, potem je za $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq q^n$. Vrsta $\sum_{n_0}^{\infty} q^n$ je majoranta za $\sum_{n_0}^{\infty} a_n$. Ker je $q < 1$, obe konvergirata. Sedaj pa še druga točka: če obstaja podzaporedje $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, da za vsak $j \in \mathbb{N}$ velja $q_{n_j} \geq 1$ in zato $a_{n_j} \geq 1$, $\forall j$, torej ne velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ in vrsta divergira. □

Izrek 7.9 (Integralski ali Cauchyjev kriterij)**.**

Naj bo $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *pozitivna, zvezna, padajoča funkcija. Tedaj vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konvergira natanko tedaj, ko obstaja posplošeni integral* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Dokaz. Očitno za vsak $N \in \mathbb{N}$ velja

$$\sum_{2}^{N+1} a_n \leq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{1}^{N} a_n$$

oziroma $S_N - a_1 \leq \int_1^\infty f(x)\,dx \leq S_N$. Če vrsta konvergira, so $(S_n)_{n=1}^\infty$ omejeni in so zato tudi integrali $\int_1^{N+1} f(x)\,dx$ omejeni. Od tod pa sledi, da posplošeni integral $\int_1^{N+1} f(x)\,dx$ obstaja. Enak sklep lahko naredimo tudi v obratni smeri. □

Zgled 7.5. *Vrsta* $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$, $s > 0$ *konvergira natanko tedaj, ko je* $s > 1$. *To sledi direktno iz uporabe integralskega kriterija (glej sklop posplošeni integrali).*

Zgled 7.6. *Oglejmo si nekaj primerov vrst zelo počasi padajočih funkcij.*

1. *Vzemimo vrsto* $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^s}$, $s > 0$. *Obravnavajmo integral* $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^s}$. *Če vstavimo* $t = \ln x$, *dobimo, da je ta integral enak integralu* $\int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^s}$ *in torej vrsta ponovno konvergira natanko tedaj, ko je* $s > 1$.
2. *Podobno dokažemo, da vrsta* $\sum_3^\infty \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^s}$ *obstaja natanko tedaj, ko velja* $s > 1$.

Izrek 7.10 (Raabejev kriterij)**.**

Naj bo $\sum_1^\infty a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo* $R = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.

1. *Če obstaja tak* $r > 1$ *in* $n_0 \in \mathbb{N}$, *da za* $\forall n \geq n_0$ *velja* $1 < r \leq R_n$, *vrsta konvergira.*
2. *Če obstaja tak* $n_0 \in \mathbb{N}$, *da za* $\forall n \geq n_0$ *velja* $R_n \leq 1$, *tedaj vrsta divergira.*

Posledica 7.11.

1. *Če je* $\liminf_{n\to\infty} R_n > 1$, *vrsta konvergira.*
2. *Če je* $\lim_{n\to\infty} R_n > 1$, *vrsta konvergira.*
3. *Če je* $\limsup_{n\to\infty} R_n < 1$, *vrsta divergira.*
4. *Če je* $\lim_{n\to\infty} R_n < 1$, *vrsta divergira.*

Opomba. Raabejev kriterij je pogosto koristen takrat, ko si ne moremo pomagati s kvocientnim.

Trditev 7.12. *Naj bo* $r > 0$ *in* $s = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, *da je* $s = \frac{p}{q} < r$. *Potem obstaja* $n_0 \in \mathbb{N}$, *da za* $\forall n \geq n_0$ *velja*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < \left(1 + \frac{r}{n}\right).$$

Dokaz. Zgornja neenačba je ekvivalentna

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p < \left(1 + \frac{r}{n}\right)^q \iff n\left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p\right) > 0$$

$$\iff (qr - p) + \frac{1}{n}(\cdots) > 0.$$

Limita tega izraza, ko gre n proti neskončnosti, je $qr - p > 0$. Torej obstaja tak n_0, da za $n \geq n_0$ velja ta neenakost. □

Raabe. Naj bo $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq r>1$ za vse $n\geq \tilde{n}_0$. To pa je ekvivalentno $\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq 1+\frac{r}{n}$. Naj bo $1<s=\frac{p}{q}<r$. Torej obstaja $n_0\in\mathbb{N}$, da za $\forall n\geq n_0$ velja

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq (1+\frac{1}{n})^s=\frac{(n+1)^s}{n^s}.$$

Hitro sledi, da je za $\sum_{n_0}^{\infty} a_n$ vrsta $\sum_{n_0}^{\infty}\frac{n_0^s}{n^s}a_{n_0}$ majoranta. Če je $s>1$, obe vrsti konvergirata. Pri drugi točki kriterija pa predpostavimo, da obstaja tak $n_0\in\mathbb{N}$, da za $\forall n\geq n_0$ velja $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\leq 1$. Hitro sledi, da je $\sum_{n_0}^{\infty} a_n$ majoranta za harmonično vrsto, zato divergira. □

7.3 Vrste s členi poljubnega predznaka

Definicija 7.2. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira absolutno oziroma je absolutno konvergentna, če konvergira vrsta $\sum_1^{\infty}|a_n|$.

Trditev 7.13. *Če vrsta $\sum_1^{\infty} a_n$ konvergira absolutno, je konvergentna.*

Dokaz. Naj bodo $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ delne vsote za $\sum_1^{\infty} a_n$ in $(\tilde{S}_n)_{n=1}^{\infty}$ delne vsote za $\sum_1^{\infty}|a_n|$. Uporabimo Cauchyjev pogoj: naj bo $\varepsilon>0$. Potem obstaja $n_0\in\mathbb{N}$, da za $\forall n\geq n_0$ in $\forall k\in\mathbb{N}$ velja $|\tilde{S}_{n+k}-\tilde{S}_n|<\varepsilon$ oziroma

$$|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+k}|<\varepsilon.$$

Zato velja

$$|S_{n+k}-S_n|=|a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}|<\varepsilon$$

za $\forall n\geq n_0$ in $\forall k\in\mathbb{N}$. Torej vrsta $\sum_1^{\infty}$ konvergira. □

Zgled 7.7. *Oglejmo si nekaj primerov lastnosti absolutne konvergence pri vrstah.*

1. *Vrsta $\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ je absolutno konvergentna, saj vrsta $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergira.*
2. *Vsaka konvergentna vrsta s členi $a_n\geq 0$, $\forall n$ je absolutno konvergentna.*
3. *Vrsta $\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je konvergentna, a ni absolutno konvergentna.*

Izrek 7.14 (Leibnizov kriterij za alternirajoče vrste)**.**

Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ padajoče zaporedje nenegativnih števil, za katerega velja $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. Tedaj vrsta $\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konvergira.

Dokaz. Poglejmo si sode delne vsote

$$S_{2n}=a_1-a_2+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}.$$

Ker je $S_{2n+2}=S_{2n}+a_{2n-1}-a_{2n+2}$, je zaporedje $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ naraščajoče. Hkrati pa velja

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_2n$$

in zato $S_{2n}\leq a_1$, $\forall n$. Torej je zaporedje sodih delnih vsot naraščajoče in omejeno, zato ima limito $\lim_{n\to\infty} S_{2n}=S''$. Na enak način dokažemo, da ima zaporedje lihih delnih vsot limito $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=S'$. Ker je $S_{2n+1}-S_{2n}=a_{2n+1}$, je $\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1}-S_{2n})=0$, zato je $S'=S''$ in vrsta konvergira. □

Opomba. Opazimo, da je razlika med vsoto vrste S in n-to delno vsoto manjša ali enaka prvemu izpuščenemu členu:

$$\begin{aligned} |S - S_n| &= |a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \dots| \\ &= |a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \dots| \\ &\le a_{n+1}. \end{aligned}$$

Definicija 7.3. Če je naša vrsta $\sum_1^\infty a_n$ konvergentna, a ni absolutno konvergentna, rečemo, da je pogojno konvergentna.

Zgled 7.8. *V prejšnjem zgledu smo naredili sklep, da je*

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

pogojno konvergentna vrsta.

Opomba. Tudi za vrsto s poljubno predznačenimi členi lahko uporabljamo konvergenčne kriterije. Naj bo $\sum_1^\infty a_n$ vrsta.

1. Če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, vrsta absolutno konvergira.
2. Če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, vrsta divergira.
3. Naj bo $a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Če je $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, vrsta konvergira.
4. Naj bo $a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Če obstaja tak n_0, da za vsak $n \ge n_0$ velja $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ge 1$, vrsta divergira.
5. Naj bo $a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Če je $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, vrsta divergira (če obstajajo limite, $\limsup_{n\to\infty}$ in $\liminf_{n\to\infty}$ nadomestimo z limito).
6. Naj bo $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ pozitivna, zvezna, padajoča in $\sum_1^\infty a_n$ taka vrsta, da je $|a_n| = f(n)$. Če obstaja $\int_1^\infty f(x)\,dx$ obstaja, vrsta absolutno konvergira.
7. Naj bo $a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Če je $\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) > 1$, vrsta absolutno konvergira.

Zgled 7.9. *Drugi del Raabejevega kriterija nima posplošitve na vrste s poljubnimi členi. Primer tega je vrsta $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, ki konvergira kljub temu, da ji po Raabejevem kriteriju lahko priredimo vrednost $R_n = 1$. Še en primer je vrsta $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, ki prav tako konvergira pogojno in pri kateri velja $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{2} < 1$.*

7.4 Preureditev vrste

Naj bo $a_1 + a_2 + \dots$ dana vrsta in naj bo $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcija. Vrsto $a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \dots$ imenujemo preureditev vrste $\sum_1^\infty a_j$. Ob tej definiciji se poraja vprašanje, če je vsota vrste, če ta obstaja, odvisna od preureditve vrste? V splošnem je odgovor da, za absolutno konvergentne vrste pa je odgovor ne.

Izrek 7.15.

Če vsota $\sum_1^\infty a_n$ konvergira absolutno, potem konvergira vsaka preureditev te vrste $\sum_1^\infty a_{\pi(n)}$ in vsota je neodvisna od preslikave π.

Izrek 7.16 (Riemann).

Če vrsta $\sum_1^\infty a_n$ konvergira pogojno, potem za vsako število $A \in \mathbb{R}$ obstaja bijektivna preslikava $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da je $\sum_1^\infty a_{\pi(n)} = A$.

Prvi izrek. Naj bo $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker vrsta $\sum_1^\infty |a_n|$ konvergira, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $\sum_{n=n_0+1}^\infty |a_n| < \varepsilon$. Sedaj vzamemo dovolj velik $n_1 \in \mathbb{N}$, da je

$$\{a_1, \ldots, a_{n_0}\} \subseteq \{\pi(1), \ldots, \pi(n_1)\}.$$

Naj bo $N \geq n_1$ in $S = \sum_1^\infty a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$. Sedaj velja

$$\begin{aligned} \left| S - \sum_1^N a_\pi(n) \right| &= \left| \sum_{m \notin \{\pi(1),\ldots,\pi(N)\}} a_m \right| \\ &\leq \sum_{m \notin \{\pi(1),\ldots,\pi(N)\}} |a_m| \\ &\leq \sum_{m \notin \{\pi(1),\ldots,\pi(n_1)\}} |a_m| \\ &\leq \sum_{n_0+1}^\infty |a_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $n_1 \in \mathbb{N}$, da za $\forall N \geq n_1$ velja $\left| S - \sum_1^N a_{\pi(n)} \right| < \varepsilon$ in $\lim_{N\to\infty} \sum_1^N a_{\pi(n)} = S$. $\square$

Riemann. Vemo, da $\sum_1^\infty a_n$ konvergira in $\sum_1^\infty |a_n|$ divergira. Naj bodo $p_1, p_2, \ldots$ nenegativni členi vrste $\sum_1^\infty a_n$ in $q_1, q_2, \ldots$ absolutne vrednosti negativnih členov vrste $\sum_1^\infty a_n$ (v enakem vrstnem redu, kot so v vrsti). Če je $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, potem definiramo $P_k = P_{k(n)} = p_1 + \cdots + p_k$ kot vsoto nenegativnih členov od $a_1, \ldots, a_n$ in $Q_m = Q_{m(n)} = q_1 + \cdots + q_m$ kot vsoto absolutnih vrednosti negativnih členov od $a_1, \ldots, a_n$. Potem velja $S_n = P_k - Q_m$, hkrati pa $P_k + Q_m$ gre proti neskončnosti. Zaporedje $(P_{k(n)})_{n=1}^\infty$ in $(Q_{m(n)})_{n=1}^\infty$ sta naraščajoči, hkrati pa je vsaj eno izmed njiju neomejeno. Ker je $\lim_{n\to\infty} P_{k(n)} - Q_{m(n)} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$, lahko sklepamo, da sta neomejeni kar obe. Ker je vrsta $\sum_1^\infty a_n$ konvergentna, velja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = 0.$$

Naj bo $A \in \mathbb{R}$ poljubno realno pozitivno število (brez škode za splošnost). Potem iz vrste $\sum_1^\infty p_n$ vzamemo toliko prvih členov, da vsota ravno preraste A:

$$\sum_1^{N-1} p_n \leq A < \sum_1^N p_n.$$

Nato še iz vrste $\sum_1^\infty q_n$ odštejemo toliko prvih členov, da pridemo ravno pod A:

$$\sum_1^N p_n + \sum_1^M (-q_n) < A \leq \sum_1^N p_n + \sum_1^{M-1} (-q_n).$$

Ker je $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} p_n = 0$, limitiramo tako dobljene delne vsote proti A: veljata neenačbi

$$\left| A - \sum_1^N p_n \right| < p_N, \quad \left| A - \left(\sum_1^N p_n + \sum_1^M (-q_n) \right) \right| < q_M.$$

Prva neenakost pa velja tudi za vse vmesne delne vsote pri $k = 1, 2, \dots, M-1$:

$$\left| A - \left(\sum_1^N p_n + \sum_1^k (-q_n) \right) \right| < p_N. \qquad \square$$

7.5 Dvojne vrste

Dvojne vrste si lahko predstavljamo kot neskončno matriko v obe smeri,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

kjer so vrste $A_1 = \sum_1^\infty a_{1j}, A_2 = \sum_1^\infty a_{2j}, \dots$ in $B_1 = \sum_1^\infty b_{i1}, B_2 = \sum_1^\infty b_{i2}, \dots$. Zanima nas, kdaj je $A = \sum_1^\infty A_i = \sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty a_{ij} \right)$ enako $B = \sum_1^\infty B_j = \sum_{j=1}^\infty (\sum_{i=1}^\infty a_{ij})$ in ali je dovoljena menjava vrstnega reda seštevanja. Vemo, da velja

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^M a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^M \left(\sum_{i=1}^\infty a_{ij} \right),$$

če vsote $\sum_{i=1} a_{ij}$ za $j = 1, 2, \dots, N$ obstajajo.

Izrek 7.17 (Fubini)**.**

Denimo, da vrsta $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}|$ konvergira. Potem konvergirata tudi vrsti $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij}$ in $\sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_{ij}$ in sta enaki. Seveda velja enako, če konvergira vrsta $\sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |a_{ij}|$.

Dokaz. Najprej si poglejmo primer $a_{ij} \geq 0,\ \forall i, j$. Denimo, da vrsta $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij}$ konvergira. Potem za $\forall m, n$ velja

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^\infty a_{ij} \leq A.$$

In ko pošljemo $m \to \infty$ in $n \to \infty$, dobimo

$$B = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_{ij} \leq A.$$

Enak sklep lahko naredimo še v obratni smeri in dobimo $A \leq B$, torej smo dokazali $A = B$. Pri splošnem primeru ($a_{ij} \in \mathbb{R}$) pa definiramo $b_{ij} = \max\{a_{ij}, 0\}$ in $c_{ij} = \max\{-a_{ij}, 0\}$. Potem velja $a_{ij} = b_{ij} - c_{ij}$ in $|a_{ij}| = b_{ij} + c_{ij}$. Ker vrsta $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}| = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty (b_{ij} + c_{ij})$ konvergira, konvergirata tudi vrsti $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty b_{ij}$ in $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty c_{ij}$. Od tod pa hitro sledi želeni rezultat. $\square$

Izrek 7.18.

Naj bo $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijekcija. Če ena od vrst $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}|$, $\sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |a_{ij}|$ ali $\sum_{k=1}^\infty |a_{\pi(k)}|$ konvergira, konvergirata tudi drugi dve in velja

$$\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}| = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |a_{ij}| = \sum_{k=1}^\infty |a_{\pi(k)}|.$$

Dokaz. Naj bo $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<\infty$ in $\varepsilon>0$. Potem že vemo, da je $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|<\infty$ in velja $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|$. Sedaj obstaja tak $m\in\mathbb{N}$, da je

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Ker $\sum_{j=1}^{\infty}$ konvergira, za $\forall i\in\mathbb{N}$ obstaja $n\in\mathbb{N}$, da je $\sum_{j=n+1}^{\infty}|a_{ij}|<\frac{\varepsilon}{4m}$ in $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}|a_{ij}|<\frac{\varepsilon}{4}$. Torej je

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right|=\left|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{ij}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Naj bo $S_l=a_{\pi(1)}+\cdots+a_{\pi(l)}$ l-ta delna vsota vrste $\sum_{1}^{\infty}a_{\pi(k)}$. Če je $l\geq l_0$ dovolj velik, S_l v vsoti vsebuje vsa števila a_{ij} za $1\leq i\leq m$ in $1\leq j\leq n$. Torej je $S_l-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$ vsota členov a_{ij}, ki ležijo bodisi v $\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{ij}\right|<\frac{\varepsilon}{4}$ ali pa v $\left|\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\right|<\frac{\varepsilon}{4}$. Torej je $\left|S-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ in če upoštevamo še zgornjo enačbo, dobimo

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}-S\right|<\varepsilon.$$

Od tod pa sledi

$$\lim_{l\to\infty}S_l=\sum_{k=1}^{\infty}a_{\pi(k)}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}.$$

Če pa konvergira $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{\pi(k)}|<\infty$, potem za vsak $m,n\in\mathbb{N}$ velja

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|a_{\pi(k)}|.$$

Sedaj pa pošljemo m,n proti neskončnosti in dobimo

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|a_{\pi(k)}|<\infty.$$ □

Izrek 7.19.

Naj bosta $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ in $\sum_{j=1}^{\infty}b_j$ absolutno konvergentni vrsti. Tedaj je $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_ib_j$ absolutno konvergentna in enaka $\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}b_j\right)$.

Dokaz. To enakost dokažemo tako, da seštevamo člene a_ib_j v različnem vrstnem redu.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_i||b_j|&=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|\right)\\&=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|\right)\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|<\infty\end{aligned}$$ □

7.6 Funkcijska zaporedja in vrste

Kot vemo, je zaporedje v množici A preslikava $a : \mathbb{N} \to A$. Naj bo D množica in A množica realnih funkcij na D. Naj bo $(f_n)_{n=1}^{\infty} = f_1, f_2, \ldots$ zaporedje funkcij na D, $f : D \to \mathbb{R}$.

Opomba. Obstaja več definicij, kako lahko zaporedje funkcij na D konvergira. Za nas prideta v poštev dve.

Definicija 7.4. Naj bo $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje funkcij na D. To zaporedje konvergira po točkah proti funkciji $f : D \to \mathbb{R}$, če za vsak $x \in D$ velja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Zgled 7.10. *Oglejmo si zaporedje funkcij $f_n = x^n$ na intervalu $D = [0, 1]$. To zaporedje konvergira po točkah k funkciji*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0; & 0 \le x < 1 \\ 1; & x = 1 \end{cases}.$$

Definicija 7.5. Zaporedje funkcij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ na D konvergira enakomerno na D k funkciji $f : D \to \mathbb{R}$, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \ge n_0$ in $\forall x \in D$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Opomba. Če zaporedje $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira enakomerno k f, potem konvergira po točkah k f.

Zgled 7.11. *Vzemimo zaporedje $f_n(x) = \frac{x}{n}$ na $D = [0, 1]$. Potem konvergira enakomerno k $f(x) = 0$, saj za $\varepsilon > 0$ velja $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n}\right| \le \frac{1}{n}$ za vse $x \in [0, 1]$. Potem lahko enostavno izberemo $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ in to funkcijsko zaporedje konvergira enakomerno k $f(x) = 0$.*

Zgled 7.12. *Zaporedje $f_n(x) = x^n$ iz zgornjega zgleda ne konvergira enakomerno k svoji limitni funkciji na intervalu $[0, 1]$, vendar pa konvergira enakomerno na intervalu $[0, 1)$.*

Definicija 7.6. Funkcijska vrsta $\sum_1^{\infty} f_n$ konvergira po točkah na D, če po točkah konvergira zaporedje njenih delnih vsot. Podobno ta funkcijska vrsta konvergira enakomerno na D, če konvergira enakomerno zaporedje njenih delnih vsot na D.

Izrek 7.20.

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ in naj zaporedje $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira enakomerno na D k funkciji $f : D \to \mathbb{R}$. Če so vse funkcije $f_n, n \in \mathbb{N}$ zvezne v točki $a \in D$, je tudi f zvezna v a.

Posledica 7.21. *Če so vse f_n, $n \in \mathbb{N}$ zvezne na D, je f zvezna na D.*

Posledica 7.22. *Če funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ zveznih funkcij na D konvergira enakomerno na D, je njena vsota zvezna funkcija na f.*

Dokaz. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f(x) - f(a)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Zaradi enakomerne konvergence na D obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \ge n_0$ in $\forall x \in D$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ker je f_{n_0} zvezna v a, obstaja $\delta > 0$, da za $\forall x \in D$ velja

$$|x - a| < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tako iz $|x-a|<\delta, x\in D$ dobimo $|f(x)-f(a)| \leq 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. $\square$

Izrek 7.23.

Zaporedje $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcij je na D enakomerno konvergentno natanko tedaj, ko je na D enakomerno Cauchyjevo: za $\forall\varepsilon>0$ obstaja $n_0\in\mathbb{N}$, da za $m,n\geq n_0$ in za $\forall x\in D$ velja $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

Dokaz. Dokaz implikacije v levo ($\Leftarrow$) je očiten, saj smo podoben sklep naredili že pri številskih zaporedjih. Dokažimo torej trditev v drugo smer ($\Rightarrow$). Naj bo zaporedje $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ na D enakomerno Cauchyjevo. Za vsak $x\in D$ je Cauchyjevo tudi zaporedje števil $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ in ima torej limito. Naj bo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za $\forall x\in D$. Naj bo $\varepsilon>0$. Potem obstaja $n_0\in\mathbb{N}$, da za $\forall n,m\geq n_0$ in za $\forall x\in D$ velja $|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Ko pošljemo $m\to\infty$, dobimo $|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ za $\forall n\geq n_0$ in $\forall x\in D$. Torej res velja $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ enakomerno na D. $\square$

Posledica 7.24. *Funkcijska vrsta $\sum_1^{\infty} f_n$ funkcij na D konvergira enakomerno na D natanko tedaj, ko za $\forall\varepsilon>0$ obstaja tak $n_0\in\mathbb{N}$, da za $\forall m\geq n_0$ in $\forall k\in\mathbb{N}$ ter $\forall x\in D$ velja $\left|\sum_{n=m+1}^{n=m+k} f_n(x)\right|<\varepsilon$.*

Zgled 7.13. *Oglejmo si vrednost in konvergenco funkcijske vrste $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ za $x\in[0,1]$. Očitno je, da velja $f(0)=f(1)=0$. Če pa je $0<x<1$, pa lahko uporabimo kvocientni kriterij in dobimo*

$$q_n = \frac{x^{n+1}(1-x^{n+1})}{x^n(1-x^n)} = x\frac{1-x^{n+1}}{1-x^n}$$

ter od tod sledi $\lim_{n\to\infty} q_n = x\in(0,1)$. Vrsta torej konvergira na intervalu $[0,1]$. Sedaj poskusimo vrsto na tem območju tudi evaluirati:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_1^{\infty} x^n(1-x^n) \\ &= \sum_1^{\infty} (x^n - x^{2n}) \\ &= \sum_1^{\infty} x^n - \sum_1^{\infty} x^{2n} \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} \\ &= \begin{cases} \frac{x}{1-x^2}; & 0\leq x<1 \\ 0; & x=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ker f ni zvezna na $[0,1]$, konvergenca ni enakomerna, saj so vsi členi zvezni.

Izrek 7.25 (Weierstrassov M-test)**.**

Naj bo $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje funkcij na D. Če obstajajo taka števila $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, da $\forall n\in\mathbb{N}$ velja:

- $|f_n(x)|\leq a_n$, $\forall x\in D$ *in*
- $\sum_1^{\infty} a_n$ *konvergira ,*

potem funkcijska vrsta $\sum_1^{\infty} f_n(x)$ konvergira enakomerno na D.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Vrsta $\sum_1^\infty a_n$ konvergira enakomerno na D, zato zadošča Cauchyjevemu pogoju: obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall k \in \mathbb{N}$ velja $\sum_{n=n_0+1}^{n_0+k} a_n < \varepsilon$. Od tod pa sledi

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{n_0+k} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{n_0+k} |f_n(x)| \leq \sum_{n=n_0+1}^{n_0+k} a_n < \varepsilon$$

za vsak $x \in D$ in funkcijska vrsta konvergira enakomerno Cauchyjevo na D, torej enakomerno na D. □

7.7 Integriranje in odvajanje zaporedij in funkcijsih vrst

Izrek 7.26.

Naj bodo $(f_n)_{n=1}^\infty$ zvezne funkcije na intervalu $[a, b]$. Naj enakomerno konvergirajo k funkciji f na intervalu $[a, b]$. Tedaj je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Posledica 7.27. *Naj bodo $(f_n)_{n=1}^\infty$ zvezne funkcije na $[a, b]$ in naj funkcijska vrsta $\sum_1^\infty f_n$ enakomerno konvergira na $[a, b]$.*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n(x)\,dx$$

in vrsto lahko členoma integriramo.

Dokaz. Vemo, da je f zvezna na $[a, b]$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker $(f_n)_{n=1}^\infty$ enakomerno konvergirajo na $[a, b]$ k f, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ in $\forall x \in [a, b]$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Sedaj pa za $\forall n \geq n_0$ velja

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon.\end{aligned}$$

Torej je res $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ enakomerno na $[a, b]$. □

Izrek 7.28.

Naj bodo $(f_n)_{n=1}^\infty$ zvezno odvedljive na $[a, b]$. Naj po točkah konvergirajo k funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in naj $(f_n')_{n=1}^\infty$ konvergira enakomerno na $[a, b]$. Tedaj je f zvezno odvedljiva na $[a, b]$ in velja $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ enakomerno na $[a, b]$.

Opomba. Pri zgoraj omenjenih pogojih velja $\lim_{n\to\infty} f_n' = (\lim_{n\to\infty} f_n)'$.

Posledica 7.29. *Naj bodo $(f_n)_{n=1}^\infty$ zvezno odvedljive na $[a, b]$ in naj funkcijska vrsta $\sum_1^\infty f_n$ po točkah konvergira k $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in naj $\sum_{n=1}^\infty f_n'$ konvergira enakomerno na $[a, b]$. Tedaj je f zvezno odvedljiva na $[a, b]$ in velja $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$, torej lahko vrsto členoma odvajamo.*

Dokaz. Naj bo $g = \lim_{n\to\infty} f_n'$. Ker je konvergenca enakomerna na $[a, b]$ in so $f_n' \in C([a, b])$, je

$g \in C([a,b])$. Po prejšnjem izreku je za $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}(f_n(x)-f_n(a)) \\ &= f(x)-f(a).\end{aligned}$$

Od tod dobimo $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$. Ker je g zvezna, je desna stran odvedljiva in velja $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$. □

7.8 Potenčne vrste

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. To je potenčna vrsta s središčem v točki a. Poseben primer je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kjer $x-a$ nadomestimo z x oziroma središče potenčne vrste premaknemo v točko 0.

Zanima nas, za katere x konvergira vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Ta vrsta seveda konvergira za $x=a$. Ali konvergira še kje drugje?

Zgled 7.14. *Oglejmo si nekaj primerov konvergenc potenčnih vrst.*

1. *Vrsta* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ *konvergira natanko tedaj, ko je* $|x| < 1$.
2. *Za vrsto* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2} + \dots$ *uporabimo kvocientni kriterij in dobimo, da vrsta konvergira za* $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. *Vrsta* $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + \dots$ *po kvocientnem kriteriju divergira za vse* $x \neq 0$.

Izrek 7.30 (Konvergenčni polmer)**.**

Naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *potenčna vrsta. Obstaja tak* $R \in [0,\infty]$, *da je vrsta absolutno konvergentna za vsak* $|x-a| < R$ *in divergentna za* $|x-a| > R$. *Za vsak* $0 \le r < R$ *vrsta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *konvergira enakomerno na* $|x-a| \le r$.

Opomba. Vrednosti R pravimo konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Za točki $|x-a| = R$ je potrebno konvergenco posebej preveriti.

Dokaz. Naj vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za $x_0 \neq 0$. Naj bo $0 < r < |x_0|$ in naj bo $|x| \le r < |x_0|$. Ker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konvergira, je $\lim_{n\to\infty} |a_n||x_0|^n = 0$, torej obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je $|a_n||x_0|^n \le M$ za $\forall n$. Sedaj vzamemo $|x| \le r < |x_0|$ in velja

$$|a_n x^n| \le |a_n| r^n = |a_n||x_0|^n \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n \le M\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n.$$

Torej je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$, $0 < \frac{r}{|x_0|} < 1$, majoranta za $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ za vsak $|x| \le r$. Po Weierstrassovem kriteriju je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ enakomerno (in seveda tudi absolutno) konvergira na $[-r,r]$. Torej vrsta konvergira absolutno za $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$ in enakomerno na $[-r,r]$ za vsak $0 < r < |x_0|$. Naj bo sedaj $R = \sup\left\{|x_0|;\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^2 < \infty\right\}$ in to število ima vse zahtevane lastnosti. □

Posledica 7.31. *Vsota potenčne vrste s konvergenčnim polmerom* $R > 0$ *je zvezna funckija na* $(a-R, a+R)$.

Izrek 7.32 (Cauchy-Hadamardova formula)**.**

Naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *potenčna vrsta. Tedaj je*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dokaz. Pri dokazu uporabimo korenski kriterij: če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} < 1$ oziroma drugače $|x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, vrsta konvergira.

1. Če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, konvergira za $\forall x \in \mathbb{R}$ in je konvergenčni polmer enak $R = \infty$.

2. Če je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, konvergira le za $x = 0$ in je konvergenčni polmer enak $R = 0$.

3. Če je $0 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, vrsta konvergira za $|x| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$.

Po drugi strani vrsta divergira, če je $|x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Podobni trije razmisleki kot v prejšnjem dokazu pokažejo, da je R, določen z $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, res konvergenčni polmer vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. □

Trditev 7.33. *Naj bo* $a_n \neq 0$ *za* $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Za konvergenčni polmer vrste* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *velja*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

če limita obstaja.

Dokaz. Dokaz je skoraj popolnoma enak kot v prejšnjem izreku, le da tokrat uporabimo kvocientni kriterij. □

Posledica 7.34. *Naj bo* $0 < R \leq \infty$ *konvergenčni polmer vrste* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$*. Tedaj je:*

1. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ *za* $|x-a| < R$.

2. $\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-a)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ *za* $|x-a| < R$.

Vrsto lahko torej členoma odvajamo in integriramo.

Dokaz. Druga točka velja, ker za vsak $0 < r < R$ vrsta konvergira enakomerno na $|x-a| \leq r$. Prva točka pa bo sledila, ko pokažemo, da je konvergenčni polmer vrste $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ tudi R. □

Trditev 7.35. *Naj bo* R *konvergenčni polmer* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$*. Tedaj je konvergenčni polmer vrst* $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ *in* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ *tudi* R.

Dokaz.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n} \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

in podobno za drugo vrsto. □

Posledica 7.36. *Potenčna vrsta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *s konvergenčnim polmerom* $R > 0$ *je gladka funkcija na* $(a-R, a+R)$.

Zgled 7.15. *Oglejmo si vrsto* $f(x) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$. *Njen konvergenčni polmer je* $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, *torej je* $R = 1$. *Vrsta konvergira za* $|x| < 1$ *in* $x = -1$ *ter divergira za* $|x| > 1$ *in* $x = 1$. *Če to vrsto odvajamo, dobimo*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

za $|x| < 1$. *Torej je* $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} + C = -\ln(1-x) + C$ *in ker je* $f(0) = 0$, *je tudi* $C = 0$. *Torej je* $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}$ *za* $|x| < 1$. *Kasneje bomo dokazali, da ta enakost velja tudi za* $x = -1$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Zgled 7.16. *Oglejmo si vrsto* $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{1}{n}\left(x - \frac{2}{3}\right)^n$. *Podobno kot vprejšnjem zgledu izračunamo njen konvergenčni polmer in dobimo* $R = \frac{5}{2}$, *torej vrsta konvergira na* $(-1, 4)$ *in divergira na* $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$. *Za* $x = 4$ *dobimo harmonično vrsto, ki divergira, za* $x = -1$ *pa dobimo alternirajočo harmonično vrsto, ki konvergira po Leibnizovem kriteriju. Ta funkcijska vrsta konvergira enakomerno na vsakem intervalu* $[\frac{3}{2} - q, \frac{3}{2} + q]$ *za*

$$0 < q < \frac{5}{2}$$

in jo lahko členoma odvajamo ter členoma integriramo. Zato je na $(-1, 4)$ *njen odvod*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n \left(x - \frac{3}{2}\right)^n = \frac{2}{5} \frac{1}{1 - \frac{2}{5}(x - \frac{3}{2})} = \frac{1}{1-4x}.$$

Od tod pa sledi $f(x) = -\ln(4-x) + \ln\frac{5}{2} = -\ln(\frac{2}{5}(4-x))$.

7.9 Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta

Motivacija za vpeljavo Taylorjeve formula je aproksimacija funkcij s polinomi.

Definicija 7.7. Naj bo f n-krat odvedljiva funkcija v točki a. Polinom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

imenujemo $n - ti$ Taylorjev polinom funkcije f v točki a.

Zgled 7.17. *Če vzamemo funkcijo* $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$, *potem velja* $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ *in to za vsak* $x \in (a - R, a + R)$.

Želeli bi oceniti napako $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, da bomo imeli informacijo, kako dobro T_n aproksimira f v okolici a.

Izrek 7.37 (Taylor)**.**

Naj bo f $(N+1)$*-krat odvedljiva na odprtem intervalu* I, *ki vsebuje točke* a. *Tedaj za vsak* $n \in$

$\{0, 1, \ldots, N\}$, za $\forall x \in I$ in za vse $p \in \mathbb{N}$ obstaja taka točka $\xi \in I$ med a in x, da velja

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!}(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}.$$

Posebna primera: najpogosteje bomo obravnavali primera, ko je $p = n+1$ ali $p = 1$. Pri tem običajmo zapišemo $h = x - a$ in $\theta = \frac{\xi - a}{h} \in (0,1)$. Tako dobimo formuli:

- $p = n+1$: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$,
- $p = 1$: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!}h^{n+1}(1-\theta)^n$.

Dokaz. Zopet bomo uporabili Rolleov oziroma Lagrangev izrek. Fiksiramo n, p ter $b \in I$. Definiramo funkcijo

$$F(x) = f(x) + \frac{(b-x)}{1!}f'(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p R_n(b),$$

kjer je $R_n(b) = f(b) - T_n(b)$. Sedaj vemo, da je $F(x)$ zvezna in odvedljiva na I, saj je f $(n+1)$-krat zvezna na I. Ker velja $F(a) = F(b) = f(b)$, lahko na F na intervalu uporabimo Rolleov izrek, torej obstaja $\xi \in I$, da je $F'(\xi) = 0$. Od tod pa sledi želena formula. □

Posledica 7.38. *Če je f $(n+1)$-krat odvedjiva na odprtem intervalu I, ki vsebuje točko a, za vsak $x \in I$ obstaja tak ξ med x in a, da je*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Opomba. Za $n = 0$ dobimo $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$, kar je Lagrangev izrek.

Zgled 7.18. *Izračunajmo število e z napako manjšo od 10^{-3}: naj bo $a = 0$ in $f(x) = e^x$. Potem je*

$$f(1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot 1 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1},$$

kjer je $\xi \in (0,1)$. Želimo, da je $\left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}\right| \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$. Iščemo torej najmanjši tak $n \in \mathbb{N}$, da je $3000 < (n+1)!$, kar pa je $n = 6$.

Če lahko za neko gladko C^∞ funkcijo v okolici a uspe dokazati, da $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (po točkah ali enakomerno), potem $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$ v okolici a.

7.10 Taylorjeva vrsta

Definicija 7.8. Naj bo $f \in C^\infty$ v okolici a. Vrsto $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ imenujemo Taylorjeva vrsta za f v točlki a.

Vprašanja: ali ta vrsta sploh konvergira za kakžen $x \neq a$? To je po definiciji potenčna vrsta in ima polmer $R \in [0, \infty]$. Drugo vprašanje pa je: če ta vrsta konvergira za nek $x \neq a$, ali je njena vsota enaka $f(x)$? Kot bomo videli, je v splošnem odgovor na ti dve vprašanji „ne“.

Zgled 7.19. *Naj bo*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}; & x > 0 \\ 0; & x \leq 0 \end{cases}.$$

To funkcijo smo že obravnavali v poglavju o odvodu in smo dokazali, da je gladka. Njena Taylorjeva vrsta je $T(x) = 0$, $\forall x$, vendar pa je $T(x) \neq f(x)$ za $x > 0$. To je torej primer Taylorjeve vrste, ki povsod konvergira, a ni povsod enaka $f(x)$.

Izrek 7.39 (Borel)**.**

Za vsako zaporedje realnih števil $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ obstaja $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, da je $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$ za $\forall n$.

7.11 Taylorjeve vrste elementarnih funkcij

V tem razdelku si bomo ogledali Taylorjeve vrste nekaterih bolj pogostih funkcij. Vzemimo najprej eksponentno funkcijo $f(x) = e^x$ okoli točke $a = 0$. Njena Taylorjeva formula je

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

za nek $\theta \in (0, 1)$. Ocenimo ostanek $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. Glede na spremenljivko x ločimo tri primere. Če je $x = 0$, potem je $R_n(0) = 0$. Če je $x < 0$, potem je $0 < e^{\theta x} < 1$, zato je $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Naj bo sedaj $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $\frac{|x|}{n_0+1} < \frac{1}{2}$. Potem je za $n \geq n_0$

$$|R_n(x)| \leq \left(1 \cdots \frac{|x|}{n_0}\right)\left(\frac{|x|}{n_0+1} \cdots \frac{|x|}{n+1}\right) \leq M\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1},$$

kjer je $M = \left(1 \cdots \frac{|x|}{n_0}\right)$. Od tod pa sledi $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Podobno lahko naredimo za $x > 0$, saj je tedaj $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x$ in lahko po enakem sklepu kot prej dokažemo $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Torej smo izpeljali naslednjo trditev.

Izrek 7.40.

Taylorjeva vrste eksponentne funkcije je

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

za $\forall x \in \mathbb{R}$.

Od tod pa sledi pomembna posledica, ki pa smo jo že dokazali na vajah.

Posledica 7.41. *Število e je iracionalno.*

Sedaj si oglejmo še sinusno in kosinusno funkcijo. Ostanek $R_n(x)$ Taylorjevega razvoja $f(x) = \sin x$ okoli $a = 0$ je $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^n$ za $\theta \in (0, 1)$. Potem velja $|R_n(x)| \leq \frac{x^n}{(n+1)!}$. Po enakem argumentu kot pri eksponentni funkciji lahko torej zaključimo $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ za $\forall x \in \mathbb{R}$.

Izrek 7.42.

Taylorjeva vrste sinusne funkcije je $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \cdots$, kosinusne pa $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots$ za $\forall x \in \mathbb{R}$.

Opomba. Sinusna funkcija je liha, zato v njeni Taylorjevi vrsti nastopajo le lihe potence. Obratno velja za kosinusno funkcijo, ki je soda.

Zgled 7.20. *V fiziki pogosto aproksimiramo* $\sin x$ *s funkcijo* x*, če so odmiki majhni. Izračunali bomo, za kako velike premike* x *bo napaka manjša od* 10^{-3}*. Sinus lahko razvijemo kot* $\sin = x - 0 \cdot x^2 + R_2(x)$*. Ker vemo, da je drugi Taylorjev koeficient* 0*, vzamemo* $R_2(x)$*. Želimo rešiti neenačbo* $|R_2(x)| \leq \frac{1}{10^3}$*. Od tod dobimo* $\frac{|\sin^{(3)}(\theta x)}{3!}|x|^3 \leq \frac{|x|^3}{3!} \leq \frac{1}{10^3}$*. in rezultat je* $|x| \leq \frac{\sqrt[3]{6}}{10} \approx 0.18 \approx 10°$.

Iz razvoja že znanih funkcij dobimo tudi razvoj hiperboličnih funkcij, ki sta

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

Opazimo podobnost med vrstama $\cos x$ in $\sin x$. Sedaj si oglejmo potenčne vrste v $\mathbb{C}$. Tako vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergira za vsak $x \in \mathbb{C}$. Potem vstavimo $z = ix$, kjer je $x \in \mathbb{R}$, v Taylorjev razvoj eksponentne funkcije in dobimo Eulerjevo formulo $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Od tod pa sledi Eulerjeva enačba $e^{\pi i} + 1 = 0$. Podobno dobimo naslednje enačbe: $\sin(ix) = i\sinh(x)$, $\sinh(ix) = i\sin(x)$, $\cos(ix) = \cosh(x)$ in $\cosh(ix) = \cos(x)$.

Sedaj si oglejmo Taylorjev razvoj funkcije $f(x) = \ln(1+x)$ v okolici $a = 0$. Z indukcijo lahko pokažemo, da velja $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n+1}}$ in $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Ostanek te vrste je $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}x^{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(\theta x+1)^{n+1}}$ za $\theta \in (0,1)$. Ponovno moramo obravnavati več primerov glede na x. Če vzamemo $x \geq 0$, potem je $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ in za $0 \leq x \leq 1$ je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Če pa je $x < 0$, moramo vzeti drugo obliko ostanka. Uporabimo formulo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} = \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n x^n$$

za $-1 < x < 0$ je $\frac{|x|}{1+\theta x} \leq \frac{|x|}{1+x}$ in $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| \leq 1$, zato je $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1+x}$ in za $-1 < x < 0$ je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Izrek 7.43.

Taylorjeva vrsta logaritemske funkcije je

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

za $-1 < x \leq 1$.

Opomba. Gladke funkcije, ki se v okolici vsake točke, kjer so definirane, enake vsoti konvergenčnih potenčnih vrst, so (realno) analitične funkcije.

Končno izpeljimo še binomsko vrsto. Definirajmo posplošen binomski simbol $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Potem dobimo

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \\ &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \frac{\alpha}{n}x^n + R_n(x).\end{aligned}$$

Ponovno lahko za $0 < x < 1$ ocenimo ostanek $R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$, kjer je $\theta \in (0,1)$, in dobimo $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Prav tako lahko za $-1 < x < 0$ ocenimo ostanek, dan z drugo formulo:

$R_n(x) = (n+1)\binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}$. Pri tem uporabimo enak argument[2] kot pri logaritmu in znova dokažemo, da velja $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Trditev 7.44. *Taylorjev razvoj binomske vrste je*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

za $|x| < 1$.

Zgled 7.21. *Oglejmo si nekaj primerov razvoja binomske vrste:*

- $\alpha = -1$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \cdots$
- $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \pm \cdots$

Zgled 7.22. *Z uporabo izpeljanih vrst lahko hitreje izračunamo tudi nekatere limite, ki bi jih sicer izračunali z večkratno uporabo L'Hôpitalovega pravila. Oglejmo si na primer limito* $\lim_{x\to0} \frac{x-\frac{x^3}{6}-\sin x}{x^5}$. *Vstavimo Taylorjevo vrsto* $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \cdots$ *in dobimo* $\lim_{x\to0} \frac{x-\frac{x^3}{6}-\sin x}{x^5} = -\frac{1}{5!} = -\frac{1}{120}$.

[2]Za natančen dokaz glej: predavanje 53.

8 METRIČNI PROSTORI

8.1 Metrični prostor

Definicija 8.1. Metrični prostor (M, d) je neprazna množica M skupaj s preslikavo (metriko, razdaljo) $d : M \times M \to \mathbb{R}$ z naslednjimi lastnostmi:

1. pozitivna definitnost: za $\forall x, y \in M$ velja $d(x, y) \geq 0$ in $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. simetričnost: za $x, y \in M$ je $d(x, y) = d(y, x)$,
3. trikotniška neenakost: za $\forall x, y, z \in M$ velja $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Opomba. Iz druge in tretje točke sledi $d(x, y) \geq |d(x, y) - d(z, y)|$.

Zgled 8.1. *Navedimo nekaj primerov metričnih prostorov in njihovih metrik.*
1. $M = \mathbb{R}$ *z metriko* $d(x, y) = |x - y|$.
2. $M = \mathbb{C}$ *z metriko* $d(z, w) = |z - w|$.
3. $M = \mathbb{R}^n$ *z metriko* $d_1 = (x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$, *pri čemer je* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *in* $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
4. $M = \mathbb{R}^n$ *z metriko* $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.
5. $M = \mathbb{R}^n$ *z metriko* $d_\infty(x, y) = \max |x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|$.

Če je (M, d) metrični prostor in $N \leq M$, potem je (N, d) prav tako metrični prostor. Pogosto metriko na vektorskih prostorih dobimo iz norme.

Definicija 8.2. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Norma na V je funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, za katero velja:

1. pozitivna definitnost: $\|x\| \geq 0$ in $\|x\| = 0 \iff x = 0$ za $\forall x \in V$.
2. homogenost: $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ za $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}$.
3. trikotniška neenakost: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za $\forall x, y \in V$

Trditev 8.1. *Če je* $(V, \|\cdot\|)$ *normiran vektorski prostor, potem je* $d(x, y) = \|x - y\|$ *metrika na* V.

Zgled 8.2. *Oglejmo si nekaj primerov normiranih vektorskih prostorov.*
- $\mathbb{R}$ *z normo* $|x|$
- $\mathbb{R}^n$ *z normo* $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$,
- $\mathbb{R}^n$ *z normo* $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$,
- $\mathbb{R}^n$ *z normo* $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|\}$,
- $C([a, b])$ *z maksimum-normo* $\max_{[a,b]} |f(x)|$ *in*
- $C([a, b])$ *z normo* $\int_a^b |f(x)|\, dx$.

Včasih pa normo dobimo iz skalarnega produkta.

Definicija 8.3. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Skalarni produkt na V je funkcija $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

1. pozitivna definitnost: $(x, x) \geq 0$ in $(x, x) = 0 \iff x = 0$

2. simetričnost: $(x, y) = (y, x)$

3. linearnost v prvem faktorju: $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

Opomba. 1. Druga in tretja lastnost skalarnega produkta implicirata linearnost v drugem faktorju.

2. Če je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, zahtevamo poševno simetričnost oziroma $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

3. Cauchy-Schwartzeva neenakost: za $\forall x, y \in V$ velja $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$, kjer smo uporabili oznako $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Cauchy-Schwartz. Za $\forall t \in \mathbb{R}$ je $0 \leq (x+yt, x+yt) = \|x\|^2 + 2t(x, y) + t^2\|y\|^2$. Torej je diskriminanta te kvadratne funkcije manjša ali enaka 0 in torej velja $4(x, y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \geq 0$, od koder pa sledi začetna neenakost. Prav tako velja, da v C-S neenakosti velja enačaj natanko tedaj, ko sta x, y linearno odvisna. □

Posledica 8.2. *Preslikava $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ je norma na V.*

Dokaz. Dokažimo trikotniško neenakost:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

□

Zgled 8.3. *Navedimo še nekaj zgledov vektorskih prostorov s skalarnim produktom.*
1. $\mathbb{R}^n$ *s skalarnim produktom* $(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ *in*
2. $C([a, b])$ *s skalarnim produktom* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$.

Opomba. Naj bo M poljubna množica. Potem je

$$d(x, y) = \begin{cases} 0; & x = y \\ 1; & x \neq y \end{cases}$$

metrika na M in jo poimenujemo diskretna metrika.

Sedaj bomo definirali okolice (topologijo) na (M, d).

Definicija 8.4. Naj bo (M, d) metrični prostor. Naj bo $a \in M$ in $r > 0$. Odprta krogla s središčem v a in polmerom $r > 0$ je $K(a, r) = \{x \in M,\ d(x, a) < r\}$. Zaprta krogla s središčem v a in polmerom $r > 0$ pa je $\overline{K}(a, r) = \{x \in M,\ d(x, a) \leq r\}$.

Definicija 8.5. Okolica točke $a \in M$ je vsaka taka množica $a \in U$, da je $K(a, r) \subseteq U$.

Definicija 8.6. Naj bo A podmnožica v metričnem prostoru.

- Točka $a \in M$ je notranja točka množice A, če obstaja $r > 0$, da je $K(a, r) > 0$. Notranjost množice A, označena z $Int(A)$, je množica vseh notranjih točk A.

- Točka $b \in M$ je zunanja točka za A, če je notranja za A^c. To pomeni, da obstaja $r > 0$, da je $K(b, r) \cap A = \emptyset$.

- Točka $c \in M$ je robna (ali mejna) točka za A, če za $\forall r > 0$ velja $K(c,r) \cap A \neq \emptyset$ in $K(c,r) \cap A^{\mathsf{c}} \neq \emptyset$. To pomeni, da vsaka okolica c seka tako A kot tudi A^{c}. Vse robne točke tvorijo rob množice A, ki ga označimo kot ∂A.

Opomba. $Int(A)$, $Int(A^{\mathsf{c}})$ in ∂A so medsebojno disjunktne množice, za katere velja $Int(A) \cup Int(A^{\mathsf{c}}) \cup \partial A$. Prav tako po definiciji velja $\partial A = \partial(A^{\mathsf{c}})$.

Zgled 8.4. *Oglejmo si okolice metrik d_1, d_2 in d_∞ v prostoru $\mathbb{R}^2$. Opazimo, da vsaka odprta krogla v d_1 vsebuje odprti krogli v metrikah d_2 in d_∞ pri primernih polmerih. Od tod sledi, da so vse okolice v teh treh metrikah enake.*

Zgled 8.5. *Oglejmo si metrični prostor $M = \overline{K}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ z običajno metriko[a]. Potem je vsaka točka v M odprta. Sedaj naj bo $M = \mathbb{R}^2$. Potem za $A = \overline{K}(0,1) \subseteq M$ velja $Int(A) = K(0,1)$, $\partial A = S(0,1) = \{(x,y);\ x^2 + y^2 = 1\}$ in $Int(A^{\mathsf{c}}) = A^{\mathsf{c}}$.*

[a] Za običajno metriko v $\mathbb{R}^2$ vzamemo $d_{st}(x,y) = |x - y|$.

Zgled 8.6. *Naj bo $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Potem je $Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$ in $Int(\mathbb{Q}^{\mathsf{c}}) = \emptyset$, torej velja $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.*

Zgled 8.7. *Naj bo (M, d_{disk}) in $A \subseteq M$. Potem je $Int(A) = A$, saj za poljuben $a \in A$ velja $K(a, \frac{1}{2}) = \{a\}$. Od tod sledi, da je $\partial A = \emptyset$.*

Definicija 8.7. Podmnožica O metričnega prostora (M,d) je odprta, če je vsaka njena točka notranja: $Int(O) = O$. Prav tako je podmnožica Z v (M,d) zaprta, če je njen komplement odprt.

Opomba. Z je zaprta natanko tedaj, ko velja $\partial Z \subseteq Z$ oziroma Z vsebuje vse svoje robne elemente. To sledi iz tega, ker je $M = Int(Z) \cup \partial Z \cup Int(Z^{\mathsf{c}}) = Int(Z) \cup \partial Z \cup Z^{\mathsf{c}}$. Torej je $Int(Z) \cup \partial Z = Z$ in torej $\partial Z \subseteq Z$. Seveda velja tudi obratno: če je $\partial Z \subseteq Z$, potem je $Int(Z^{\mathsf{c}}) = Z^{\mathsf{c}}$.

Zgled 8.8. *Navedimo nekaj primerov odprtih oziroma zaprtih množic.*
1. *Interval $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ z metriko d_{st} je odprta podmnožica-*
2. *Interval $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ je zaprta podmnožica.*
3. *Interval $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ ni ne odprta ne zaprta.*
4. *Za metrični prostor (M,d) je sta podmnožici M in $\emptyset$ obe odprti in zaprti hkrati.*

Zgled 8.9. *Vzemimo metrični prostor $M = \overline{K}(0,1) \cup K(3,1)$ z metriko d_2 iz prostora $\mathbb{R}^2$. Potem sta tako $\overline{K}(0,1)$ kot tudi $K(3,1)$ hkrati odprti in zaprti podmnožici v M.*

Trditev 8.3. *Vsaka odprta krogla je odprta podmnožica v (M,d).*

Dokaz. Naj bo $A = K(a,r)$ za $a \in M$ in $r > 0$. Naj bo $b \in A$ in $\rho = r - d(a,b)$. Oglejmo si odprto kroglo $K(b,\rho)$. Potem za vsak $x \in K(b,\rho)$ velja $d(b,x) < \rho$. Potem pa je $d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) < d(a,b) + \rho = r$ in zato $x \in K(a,b)$,torej je $K(b,\rho) \subseteq K(a,b)$. Vsaka točka iz $K(a,r)$ je notranja. □

Trditev 8.4. *Zaprta krogla je zaprta podmnožica (M,d).*

Dokaz. Dokaz je skoraj popolnoma enak kot pri prejšnji trditvi. □

Opomba. 1. Za $\forall A \subseteq M$ je $Int(A)$ odprta podmnožica.

2. Rob $\partial A = M \setminus (Int(A) \cup Int(A^c))$ je zaprta podmnožica.

3. $Int(A)$ je največja odprta podmnožica vsebovana v A, saj za $\forall O \subseteq A$ odprto podmnožico velja $O \subseteq Int(A)$.

Dokaz 3. točke. Če je $O \subseteq A$ odprta, za $\forall x \in O$ obstaja $r > 0$, da je $K(x, r) \subseteq O \subseteq A$. Torej je $x \in Int(A)$ in $O \subseteq Int(A)$. Vemo pa že, da je $Int(A)$ odprta podmnožica. □

Izrek 8.5 (Topologija)**.**

Naj bo $\mathcal{T}$ družina vseh odprtih podmnožic v (M, d). Potem velja:

- $\emptyset, M \in \mathcal{T}$,
- *unija poljubne družine odprtih množic je odprta množica: za $O_\alpha \in \mathcal{T}; \alpha \in A$ velja $\bigcup_\alpha O_\alpha \in \mathcal{T}$,*
- *presek končnega števila odprtih podmnožic je odprta podmnožica: če so $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$, potem je $\bigcap_1^n =_j \in \mathcal{T}$.*

Dokaz. Dokažimo 1. in 2. točko. Naj bodo $O_\alpha \in \mathcal{T}$ in $O = \bigcup_\alpha O_\alpha$. Naj bo $x \in O = O = \bigcup_\alpha O_\alpha$, torej obstaja tak $\alpha_0 \in \alpha$, da je $K(x, r) \subseteq O_{\alpha_0} \subseteq O$ in O je odprta.

Sedaj pa še tretja točka. Če je $X \in O_1 \cap \cdots \cap O_n$ in $O_j \in \mathcal{T}$, potem obstajajo pozitivni $r_1, \ldots, r_n$, da je $K(a, r_j) \subseteq O_j$. Naj bo $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Potem je $K(x, r) \subseteq O_j$ za $\forall j$ in zato $K(a, r) \subseteq O_1 \cap \cdots \cap O_n \subseteq \mathcal{T}$. □

Zgled 8.10. *Neskončen presek odprtih množic ni nujno odprt. Primer: v metričnem prostoru $\mathbb{R}$ je $\bigcap_{n=1}^\infty \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$.*

Opomba. Vsako družino podmnožic $\mathcal{T}$, ki zadošča lastnostim (1), (2) in (3), imenujemo topologija na M.

Zgled 8.11. *Naj bo M metrični prostor z diskretno metriko. Potem je $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$, saj so vse te množice odprte.*

Posledica 8.6. *Naj bo $\mathcal{Z}$ množica vseh zaprtih podmnožic (M, d). Potem velja:*

- $\emptyset, M \in \mathcal{Z}$,
- *presek poljubne družine zaprtih množic je zaprta množica: za $Z_\alpha \in \mathcal{Z}, \alpha \in A$ velja $\bigcap_\alpha Z_\alpha \in \mathcal{Z}$.*
- *presek končnega števila zaprtih podmnožic je zaprta podmnožica: če so $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathcal{Z}$, potem je $\bigcup_1^n = Z_j \in \mathcal{Z}$.*

Zgled 8.12. *V duhu prejšnjega zgleda lahko pokažemo, da je neskončna unija zaprtih množic lahko odprta: $\bigcup_{n=1}^\infty [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (-1, 1)$.*

Definicija 8.8. Naj bo $A \subseteq M$ za metrični prostor (M, d). Zaprtje množice A (označimo ga s $\overline{A}$) je najmanjša zaprta množica, ki vsebuje A:

1. $\overline{A}$ je zaprta,
2. $A \subseteq \overline{A}$ in
3. če je F zaprta množica, da je $A \subseteq F$, je $\overline{A} \subseteq F$.

Tak $\overline{A}$ obstaja in je $\overline{A} = \bigcap_{\mathcal{F}} F$, kjer je $\mathcal{F}$ množica vseh zaprtih podmnožic F, da je $A \subseteq F$. Ta družina je neprazna, d+saj $M \in \mathcal{F}$.

Trditev 8.7. $\overline{A} = A \cup \partial A = Int(A) \cup \partial A$.

Dokaz. Vemo, da je $Int(A) \subseteq A$, zato je $Int(A) \cup \partial A \subseteq A \cup \partial A$. Hkrati pa je $Int(A) \cup \partial A = (Int(A^c))^c$, torej je to zaprta množica. Sedaj pa iz $Int(A^c) \subseteq A^c$ sledi $A \subseteq (Int(A^c))^c = Int(A) \cup \partial A$, torej tudi $A \cup \partial A \subseteq Int(A) \cup \partial A$. Torej je $A \cup \partial A = Int(A) \cup \partial A$ in to je zaprta množica, ki vsebuje A. Če je F zaprta, $A \subseteq F$, je $F^c \subseteq A^c$ in zato $F^c \subseteq Int(A^c)$. Torej je $Int(A) \cup \partial A = (Int(A^c))^c \subseteq F$. □

Definicija 8.9. Podmnožica metričnega prostora (M, d) je omejena, če leži v neki dovolj veliki odprti krogli. To pomeni, da obstaja $a \in M$ in $r > 0$, da je $A \subseteq K(a, r)$.

8.2 Zaporedja točk v metričnih prostorih

Naj bo (M, d) metrični prostor. Zaporedje v (M, d) je preslikava $a : \mathbb{N} \to M$ in to zaporedje označimo z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definicija 8.10. Točka $a \in M$ je stekališče zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, če $\forall \varepsilon > 0$ in $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ obstaja $n \geq n_0$, da je $a_n \in K(a, \varepsilon)$. Ekvivalentno: vsaka okolica točke a vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definicija 8.11. Točka $a \in M$ je limita zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $a_n \in K(a, \varepsilon)$. Ekvivalentno: vsaka okolica a vsebuje vse razen končno mnogo členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Tedaj pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Trditev 8.8. *Če je $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, je a edino stekališče zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Dokaz. Limita $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je očitno stekališče $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Denimo, da je $b \neq a$. Naj bo $r = d(a, b)$ in $\varepsilon = \frac{r}{2}$. Potem obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $d(a_n, a) < \varepsilon = \frac{r}{2}$. Zato za $n \geq n_0$ velja $d(a_n, b) \geq d(a, b) - d(a_n, a) > \frac{r}{2}$, torej v $K(b, \varepsilon)$ ni neskončno mnogo členov $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Zgled 8.13. *Vzemimo metrični prostor (M, d_{disk}) Denimo, da je $\lim_{n\to\infty} a = a$. Sedaj vzemimo $\varepsilon = 1$. Potem obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $n \geq n_0$ velja $d(a_n, a) < 1$. To pa je možno le tedaj, ko je za $\forall n \geq n_0$ kar $a_n = a$. Torej zaporedje v tem metričnem prostoru konvergira natanko tedaj, ko je od nekod naprej konstantno.*

Trditev 8.9. *Zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyjevo, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n, m \geq n_0$ velja $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.*

Trditev 8.10. *Vsako konvergentno zaporedje je Cauchyjevo.*

Dokaz. Naj bo $\lim_{n\to\infty} a = a$ in naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Torej za $\forall n, m \geq n_0$ velja $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a_m, a) < \varepsilon$. Obrat te trditve pa v splošnem ne velja. $\square$

Zgled 8.14. *Naj bo $M = (0, 1]$ z metriko $d(x, y) = |x - y|$. Zaporedje $a_n = \frac{1}{n}$ je Cauchyjevo, a nima limite v M.*

Definicija 8.12. Metrični prostor je poln, če je v njem vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno. V takih prostorih je Cauchyjev pogoj potreben in zadosten za konvergenco.

Zgled 8.15. *Oglejmo si nekaj primerov polnih metričnih prostorov.*

1. *$(\mathbb{R}, d)$ in $(\mathbb{C}, d)$ sta polna metrična prostora za metriko $d(x, y) = |x - y|$.*
2. *$(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ in $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ so polni metrični prostori.*
3. *$C([a, b])$ z metriko $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ je poln metrični prostor.*
4. *$C([-1, 1])$ z metriko $d(f, g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx$ ni poln.*

Dokaz 3. točke. Naj bo $(f_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo zaporedje. Torej je enakomerno Cauchyjevo in že vemo, da ima limito. Konvergenca v tem prostoru je enakomerna konvergenca na $[a, b]$. $\square$

Dokaz 4. točke. Vzamemo funkcijsko zaporedje

$$f_n = \begin{cases} 0; & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}(x + \frac{1}{n}); & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1; & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

in pokažemo lahko, da njegova limita ni zvezna na intervalu $[-1, 1]$. $\square$

Trditev 8.11. *Naj bo (M, d) metrični prostor. Podmnožica $A \subseteq M$ je zaprta natanko tedaj, ko za vsako konvergentno zaporedje $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$ velja, da A vsebuje njeno limito:* $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$.

Posledica 8.12. *Naj bo (M, d) poln metrični prostor. Naj bo A zaprta podmnožica M. Potem je tudi (A, d) poln metrični prostor.*

Zgled 8.16. *Oglejmo si nekaj primerov prejšnje posledice.*

1. *$[a, b]$, $[a, \infty)$ in $(-\infty, b]$ so polni metrični prostori za $d(x, y) = |x - y|$.*
2. *Če je (M, d) poln metrični prostor, je $(\overline{K}(a, r), d)$ poln metrični prostor.*
3. *(M, d_{disk}) je poln metrični prostor.*

Dokaz trditve. Dokažimo najprej v levo ($\Rightarrow$). Naj bo A zaprta podmnožica in naj bo $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$ zaporedje, ki konvergira: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Če je $a \notin A$, potem obstaja tak $r > 0$, da je $K(a, r) \cap A = \emptyset$. To pa pomeni, da $K(a, r)$ ne vsebuje nobenega člena $(a_n)_{n=1}^\infty$ in torej ne more biti limita.

Dokažimo trditev še v drugo smer ($\Leftarrow$). Naj bo $a \in \partial A$. Potem za $\forall n \in \mathbb{N}$ obstaja $a_n \in A \cap K(a, \frac{1}{n})$. Torej je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Po predpostavki je zato $a \in A$, torej je $\partial A \subseteq A$ in A je zaprta podmnožica. $\square$

8.3 Preslikave med metričnimi prostori

Definicija 8.13. Naj bosta (M, d) in (N, ρ) metrična prostora. Preslikava $f : M \to N$ je zvezna v točki $x_0 \in M$, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $d(x, x_0) < \delta$ sledi $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Ekvivalentno: f je zvezna v x_0, če za vsako okolico V točke $f(x_0)$ v (N, ρ) obstaja taka okolica U točke x_0 v (M, d), da je $f(U) \subseteq V$.

Definicija 8.14. Preslikave f je zvezna na (M, d), če je zvezna v vsaki točki $x_0 \in M$.

Opomba. Če je $N \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, potem preslikavi f rečemo funkcija.

Trditev 8.13. *Funkcija $f : (M, d) \to (N, \rho)$ je zvezna v $x_0 \in M$ natanko tedaj, ko vsako zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq (M, d)$, ki konvergira k x_0, velja, da zaporedje $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ konvergira k $f(x_0)$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ in $\varepsilon > 0$. Potem obstaja $\delta > 0$, da iz $d(x, x_0) < \delta$ sledi $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Ker je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $d(x_n, x_0) < \delta$. Torej za $\forall n \geq n_0$ velja $\rho(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ in zato $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Denimo, da f ni zvezna v x_0. Potem obstaja $\varepsilon > 0$, da za $\forall n \in \mathbb{N}$ obstaja tak x_n, da je $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ in $\rho(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Iz prvega pogoja sledi, da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, iz drugega pogoja pa, da limita zaporedja $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$, če obstaja, ne konvergira k $f(x_0)$. S tem smo prišli v protislovje s predpostavko. $\square$

Izrek 8.14.

Preslikava $f : (M, d) \to (N, \rho)$ je zvezna natanko tedaj, ko je za vsako odprto podmnožico $V \subseteq (N, \rho)$ praslika $f^{-1}(V)$ odprta v (M, d).

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo $f : (M, d) \to (N, \rho)$ zvezna in naj bo V odprta v (N, ρ). Označimo $U = f^{-1}(V)$ in naj bo $x \in U$. Potem je seveda $f(x) \in V$, ki je odprta, zato obstaja $\varepsilon > 0$, da je $K(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Ker je f zvezna v x, obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(K(x, \delta)) \subseteq K(f(x), \varepsilon) \subseteq V$, torej je $K(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V) = U$ in U je odprta v (M, d).

($\Leftarrow$) Naj bo praslika vsake odprte množice v (N, ρ) z f odprta v (M, d). Naj bo $x \in M$, $f(x) \in N$ in $\varepsilon > 0$. Potem je $f^{-1}(K(f(x), \varepsilon)) = U$ odprta množica v (M, d) in obstaja $\delta > 0$, da je $K(x, \delta) \subseteq U$. Torej je $f(K(x, \delta)) \subseteq K(f(x), \varepsilon)$ in f je zvezna v x. $\square$

Posledica 8.15. *Preslikava $f : (M, d) \to (N, \rho)$ je zvezna natanko tedaj, ko je za vsako zaprto podmnožico $F \subseteq (N, \rho)$ praslika $f^{-1}(F)$ zaprta v (M, d).*

Dokaz. Komplement zaprte množice je odprta množica in $f^{-1}(F^{\mathsf{c}}) = \big(f^{-1}(F)\big)^{\mathsf{c}}$. $\square$

Zgled 8.17. *Vzemimo $M = \mathbb{R}$ z metriko $d(x, y) = |x - y|$ in $N = \mathbb{R}$ z metriko $d_{disk} = \rho$. Naj bo funkcija $f : (M; d) \to (N, \rho)$ zvezna. V množici (N, ρ) je vsaka podmnožica odprta. Naj bo b v sliki f in naj bo $a \in M$, da je $f(a) = b$. Naj bo $\varepsilon = 1$. Potem obstaja $\delta > 0$, da je $f((a - \delta, a + \delta)) \subseteq K(b, 1) = \{b\}$. Torej je f na $(a - \delta, q + \delta)$ konstantno enaka b. Sedaj definirajmo množico*

$$A = \{a' \in \mathbb{R};\ a' > a,\ f(x) = b,\ \forall x \in [a, a']\}$$

in s hitrim razmislekom lahko pokažemo, da A ni prazna in je navzgor ter navzdol neomejena. Od *tod pa sledi, da je f konstantna funkcija. Podobno velja, da so vse funkcije $g : (N, \rho) \to (M, d)$ zvezne, saj so vse podmnožice $(\mathbb{R}, d_{disk})$ odprte.*

8.4 Banachovo skrčitveno načelo v polnih metričnih prostorih.

Definicija 8.15. Naj bo (M, d) metrični prostor. Preslikava $f : (M, d) \to (M, d)$ je skrčitev, če obstaja tak $0 \leq q < 1$, da za vsak $x, y \in M$ velja $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$.

Opomba. Vsaka skrčitev je zvezna preslikava, saj velja $f(K(x, \frac{\varepsilon}{q})) \subseteq K(f(x), \varepsilon)$ (če je $q = 0$, je konstantna.)

Izrek 8.16 (Banachovo skrčitveno načelo)**.**

Naj bo (M, d) poln metrični prostor in naj bo $f : (M, d) \to (M, d)$ skrčitev. Potem obstaja natanko ena fiksna točka preslikave f na M: $f(a) = a$.

Negibno točko dobimo kot limito rekurzivno podanega zaporedja $a_{n+1} = f(a_n)$, kjer je a_1 poljubna točka M.

Dokaz. Dokazati moramo enoličnost, konvergenco našega rekurzivnega zaporedja k negibni točki in preveriti, da za to zaporedje velja Cauchyjev pogoj.

1. Dokažimo enoličnost: naj bosta a, b negibni točki,tako da je $a = f(a)$ in $b = f(b)$. Potem je $d(f(a), f(b)) \leq qd(a, b)$, od koder sledi $d(a, b) \leq qd(a, b)$ in ker je $0 \leq q < 1$, sledi $d(a, b) = 0$ in torej $a = b$.

2. Cauchyjev pogoj: naj bo $D = d(a_1, a_2)$. Potem je $d(a_2, a_3) = d(f(a_1), f(a_2)) \leq qd(a_1, a_2) = qD$. Z indukcijo dobimo $d(a_{n+1}, a_{n+2}) \leq q^n D$ za $\forall n \in N$. Naj bosta $n, p \in \mathbb{N}$. Potem imamo

$$\begin{aligned} d(a_{n+1}, a_{n+p}) &\leq d(a_{n+1}, a_{n+1}) + \cdots + d(a_{n+p-1}, a_{n+p}) \\ &\leq D(q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{n+p-2}) \\ &\leq D\frac{q^n}{1-q} \end{aligned}$$

   in torej $d(a_{n+1}, a_{n+p}) \leq D\frac{q^n}{1-q}$. Od tod pa je že očitno, da zaporedje ustreza Cauchyjevemu pogoju.

3. Sedaj vemo, da zaporedje $a_{n+1} = f(a_n)$ konvergira. Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ker je f zvezna, je $a = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(a)$ in zaporedje konvergira k negibni točki. □

Zgled 8.18. *Dokažimo, da ima sistem enačb*

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{4}\sin(x+y) - \frac{1}{2} &= 0 \\ y - \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

natanko eno rešitev na $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Naj bo $F(x, y) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin(x + y), \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{4}\right)$. Naj prej moramo preveriti, če F slika $[0, 1]^n$ samega vase. To je res, saj velja $0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin(x+y) \leq$

$\frac{3}{4}$ in $0 \leq \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}$. Torej f slika $F : \left([0,1]^2, d_1\right) \to \left([0,1]^2, d_1\right)$. Sedaj je

$$
\begin{aligned}
d_1(F(x,y),F(x',y')) &= \frac{1}{4}\left|\sin(x+y)-\sin(x'+y')\right| + \frac{1}{4}\left|x^2-x'^2+y^2-y'^2\right| \\
&\overset{Lagrange}{\leq} \frac{1}{4}\left(|x-x'|+|y-y'|\right)+\frac{1}{2}\left(|x-x'|+|y-y'|\right) \\
&= \frac{3}{4}d_1((x,y),(x',y')).
\end{aligned}
$$

Torej je F skrčitev in ima natanko eno negibno točko, ki reši ta sistem.

Zgled 8.19. *Oglejmo si funkcijo $F : \left(C\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right), d_\infty\right) \to \left(C\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right), d_\infty\right)$ s predpisom $f \mapsto \int_0^x f(t)\,dt + 1$. Očitno F slika iz prostora $\left(C\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right), d_\infty\right)$ vase. Dokazati moramo še, da je to skrčitev:*

$$
\begin{aligned}
d_\infty(F(f),F(g)) &= \max_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt\right| \\
&\leq \max_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\int_0^x |f(t)-g(t)|\,dt \\
&\leq \frac{1}{2}d_\infty(f,g).
\end{aligned}
$$

Sedaj vemo, da ima F natanko eno negibno točko: $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 1$. Sklepamo lahko, da je $f(0) = 1$, po drugi strani pa je f odvedljiva in velja $f' = f$. Torej lahko zaključimo, da je negibna točka skrčitve F kar eksponentna funkcija $f(x) = e^x$. Če pa sedaj iterativno uporabimo zaporedje $f_{n+1} = F(f_n)$, kjer je $f_0 = 1$, dobimo, da je f_n kar n-ti Taylorjev polinom za e^x.

8.5 Kompaktnost

Definicija 8.16. Naj bo (M,d) metrični prostor in $K \subseteq M$. Družina podmnožic $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je pokritje množice K, če je $K \subseteq \bigcup_\gamma A_\gamma$.

- Če so vse množice A_γ, $\gamma \in \Gamma$ odprte podmnožice (M,d), rečemo, da je to odprto pokritje množice K.
- Če je Γ končna množica, je to končno pokritje.
- Če je $\widetilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ in še vedno velja $K \subseteq \bigcup_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} A_\gamma$, je $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}}$ podpokritje pokritja $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Definicija 8.17. Množica K metričnega prostora (M,d) je kompakten, če vsako odprto pokritje $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ množice K vsebuje končno podpokritje množice K.

Opomba. Vsaka končna množica je kompaktna. V prostoru (M, d_{disk}) pa velja še več: tam je množica kompaktna natanko tedaj, ko je končna.

Trditev 8.17. *Naj bo $[a,b] \subseteq (\mathbb{R}, d_{st})$ končen zaprt interval. Potem je $[a,b]$ kompaktna podmnožica $(\mathbb{R}, d_{st})$.*

Dokaz. Naj bo $[a,b] \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} O_\gamma$, kjer so O_γ odprte v $(\mathbb{R}, d_{st})$. Definirajmo množico

$$A = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b,\ \text{interval } [a,x] \text{ lahko pokrijemo s končno mnogo množicami } O_\gamma\}.$$

Ker je $a \in [a,b] \subseteq \bigcup_\gamma O_\gamma$, obstaja tak γ_0, da je $a \in O_{\gamma_0}$. Ker je O_{γ_0} odprta, obstaja $\delta > 0$, da je $(a-\delta, a+\delta) \subseteq O_{\gamma_0}$. Torej vsak $x \in (a, a+\delta)$ pripada množici A in $A \neq \emptyset$. Po definiciji je A navzgor omejena z b, torej ima natančno zgornjo mejo $\alpha = \sup A$. Denimo, da je $\alpha < b$. Potem je $\alpha \in [a,b] \subseteq \bigcup_\gamma O_\gamma$ in obstaja tak $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, da je $\alpha \in O_{\tilde{\gamma}}$. Ker pa je $O_{\tilde{\gamma}}$ odprta, obstaja tak $\delta > 0$, da je $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subseteq O_{\tilde{\gamma}}$. Ker je $\alpha = \sup A$, obstaja $x \in A$, da je $\alpha - \delta < x \leq \alpha$. Potem obstajajo $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, da je $[a, x] \subseteq O_{\gamma_1} \cup \dots \cup O_{\gamma_n}$. Od tod pa sledi $[a, \alpha + \frac{\delta}{2}] \subseteq O_{\gamma_1} \cup \dots \cup O_{\gamma_n} \cup O_{\tilde{\gamma}}$. Torej je $\alpha + \frac{\delta}{2} \in A$ in α ni zgornja meja za A. Torej mora biti $\alpha = b$. $\square$

Zgled 8.20. *Nekompaktne množice.*

- *Naj bo $M = \mathbb{R} = K$. Definirajmo pokritje $O_n = (-n, n)$. Potem je $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_1^\infty O_n$, a nima končnega podpokritja. $\mathbb{R}$ torej ni kompaktna množica.*
- *Naj bo $K = (a,b)$ in pokritje $O_n = \left(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right)$. Potem je $(a,b) = \bigcup_{n=1}^\infty \left(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right)$, a nima končnega podpokritja.*

Opomba. Če je $K = M$ kompaktna v (M,d), govorimo o metričnem prostoru.

Trditev 8.18. *Naj bo $K \subseteq (M,d)$ kompaktna. Potem je zaprta in omejena.*

Dokaz. Najprej dokažimo omejenost K. Naj bo $a \in K$ in naj bo $O_n = K(a,n)$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Potem je $K \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty O_n$, saj je vsaka točka na neki razdalji od a. Ker je K kompaktna, obstaja končno podpokritje $K \subseteq O_{n_1} \cup \dots \cup O_{n_m}$. Naj bo $N = \max\{n_1, \dots, n_m\}$. Potem je $K \subseteq K(a,N)$ in K je omejena.

Sedaj dokažimo še zaprtost K. Naj bo $a \notin K$ in naj bo $O_n = M \setminus \overline{K}(a, \frac{1}{n})$ odprta podmnožica M. Potem je $K \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty O_n$. Ker je K kompaktna, ponovno obstaja končno podpokritje $K \subseteq O_{n_1} \cup \dots \cup O_{n_m}$. Naj bo $N = \max\{n_1, \dots, n_m\}$. Tedaj je $K \subseteq O_N$ in zato $K\left(a, \frac{1}{N}\right) \cap K = \emptyset$. Torej je K zaprta podmnožica. $\square$

Trditev 8.19. *Naj bo Z zaprta podmnožica kompaktne množice K. Potem je Z kompaktna.*

Dokaz. Naj bo $\{O_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ odprto pokritje Z, tako da je $Z \subseteq \bigcup_\gamma O_\gamma$. Potem je $K \subseteq \left(\bigcup_\gamma O_\gamma\right) \cup Z^c$ odprto podpokritje K, saj je Z zaprta podmnožica. Ker je K kompaktna, obstaja končno podpokritja $Z \subseteq K \subseteq O_{\gamma_1} \cup \dots \cup O_{\gamma_n} \cup Z^c$ in Z je kompaktna. $\square$

Posledica 8.20. *Množica $K \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.*

Dokaz. Če je K kompaktna, je vedno zaprta in omejena. Če pa je omejena in zaprta, potem obstaja $M > 0$, da je $K \subseteq [-M, M]$. Ker je $[-M, M]$ kompaktna in K zaprta, je tudi K kompaktna. $\square$

Opomba. V splošnem ta obrat ne velja. Če je M neskončna in $K = (M, d_{disk})$, potem je $K = M$ omejena in zaprta, a ni kompaktna.

Izrek 8.21.

Podmnožica $K \subseteq (\mathbb{R}^n, d_2)$ je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta.

Trditev 8.22. *Naj bo K kompaktna množica (M,d). Naj bo $(a_n)_{n=1}^\infty$ zaporedje v K. Tedaj ima stekališče v K.*

Dokaz. Če nobena točka iz K ni stekališče za $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, za vsak $x \in K$ obstaja $r_x > 0$, da je v $K(x, r_x)$ le končno mnogo členov $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Ker je $K \subseteq \bigcup_{x \in K} K(x, r_x)$ odprto pokritje za K, obstaja končno podpokritje $K \subseteq K(x_1, r_{x_1}) \cdots \subseteq K(x_n, r_{x_n})$. in vsaka izmer krogel $K(x_j, r_{x_j})$ vsebuje največ končno mnogo členov $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Pridemo v protislovje in $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ima stekališče v K. □

Posledica 8.23. *Vsako zaporedje $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ v kompaktni množici $K \subseteq (M, d)$ ima konvergentno podzaporedje.*

Posledica 8.24. *Vsak kompakten metrični prostor je poln.*

Dokaz. Naj bo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo zaporedje v kompaktnem prostoru (M, d). Potem ima stekališče $a \in M$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall m, n \geq n_0$ velja $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ in za $K\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ obstaja $n_1 \geq n_0$, da je $a_{n_1} \in K(a, \frac{\varepsilon}{2})$. Potem je

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{n_1}) + d(a_{n_1}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Torej je $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. □

Opomba. V metričnih prostorih sta naslednji lastnosti ekvivalentni:

1. K je kompaktna podmnožica,
2. vsako zaporedje v K ima stekališče v K.

Na predavanjih smo naredili dokaz v obratno smer v posebnem primeru, kjer je Γ števna: $K \subseteq \bigcup_1^{\infty} O_\gamma$. Če ne obstaja tak n, da je $K \subseteq \bigcup_1^n O_\gamma$, potem obstaja tak a_n, da velja $a_n \in K \setminus \bigcup_1^n O_\gamma$. Po predpostavki ima $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ stekališče $a \in K$ in zato obstaja γ_0, da je $a \in O_{\gamma_0}$. Ker je a stekališče, v O_{γ_0} ležijo členi s poljubno visokimi indeksi, kar ni možno po konstrukciji.

Izrek 8.25.

Naj bo $f : (M, d) \to (N, \rho)$ zvezna in naj bo $K \subseteq (M, d)$ kompaktna. Potem je $f(K)$ kompaktna podmnožica v (N, ρ).

Dokaz. Naj bo $K \subseteq (M, d)$ kompaktna. Naj bo $(O_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ odprto pokritje $f(K)$ v (N, ρ), torej $f(K) \subseteq \bigcup_\gamma O_\gamma$. Torej je $K \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_\gamma O_\gamma\right) = \bigcup_\gamma f^{-1}(O_\gamma)$. Ker je f zvezna, so $f^{-1}(O_\gamma)$ odprte v (M, d) za $\gamma \in \Gamma$. Ker je K kompaktna, obstaja končno podpokritje $K \subseteq f^{-1}(O_{\gamma_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_{\gamma_n})$. Zato je $f(K) \subseteq O_{\gamma_1} \cup \cdots \cup O_{\gamma_n}$ in $f(K)$ je kompaktna v N, ρ. □

Posledica 8.26. *Naj bo $f : (M, d) \to (\mathbb{R}, d_2)$ zvezna. Naj bo $K \subseteq (M, d)$ kompaktna podmnožica. Potem je $f\big|_K$ omejena in doseže maksimum ter minimum.*

Dokaz. Množica $f(K)$ je omejena in zaprta v $(\mathbb{R}^2, d_2)$, torej je $f\big|_K$ omejena. Naj bo $M = \sup\{f(x);\ x \in K\}$. Denimo, da $M \notin f(K)$, ki je zaprta množica. Potem obstaja $\varepsilon > 0$, da je $(M - \varepsilon, M + \varepsilon) \cap f(K) = \emptyset$. To pa ni možno, saj je $M = \sup\{f(x),\ x \in K\}$. Torej je $M \in f(K)$ in ta množica ima maksimum in minimum. □

Opomba. Ni nujno, da f zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom. Protiprimer je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0; & 0 \leq x \leq 1 \\ 1; & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

na kompaktni množici $K = [0,1] \cup [2,3]$.

Definicija 8.18. Naj bo $f : (M,d) \to (N,\rho)$ preslikava. Preslikava f je enakomerno zvezna na $D \subseteq M$, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $d(x_1, x_2) < \delta$, $x_1, x_2 \in D$, sledi $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Opomba. Vsaka enakomerno zvezna preslikava $f : (D,d) \to (N,\rho)$ je zvezna na (D,d). Obrat seveda v splošnem ne velja.

Izrek 8.27.

Če je $K \subseteq (M,d)$ kompaktna in $f : K \to (N,\rho)$ zvezna, je f enakomerno zvezna na K.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vsak $x \in K$ obstaja $\delta_x > 0$, da je $f(K(x,\delta_x)) \subseteq K\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Iz odprtega pokritja $K \subseteq \bigcup_{x \in K} K\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$ lahko izberemo končno podpokritje

$$K \subseteq K\left(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}\right) \cup \cdots \cup K\left(x_n, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right).$$

Naj bo $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right\}$. Naj za $x, x' \in K$ velja $d(x,x') < \delta$. Ker je $x \in K$, obstaja $j_0 \in \{q, \ldots, n\}$, da je $x \in K\left(x_{j_0}, \frac{\delta_{x_{j_0}}}{2}\right)$. Torej je $d(x, x_{j_0}) < \delta_{x_{j_0}}$ in posledično $\rho(f(x), f(x_{j_0})) < \frac{\varepsilon}{2}$. Hkrati pa velja

$$d(x', x_{j_0}) \leq d(x,x') + d(x, x_{j_0}) < \delta + \frac{\delta_{x_{j_0}}}{2} < \delta_{x_{j_0}}$$

in zato $\rho(f(x'), f(x_{j_0})) < \frac{\varepsilon}{2}$. Od tod pa sledi

$$\rho(f(x), f(x')) \leq \rho(f(x), f(x_{j_0})) + \rho(f(x_{j_0}), f(x')) = \varepsilon.$$

□