

$$\int_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV = - \oint_{\partial V} \vec{j}_e \cdot d\vec{S}$$

Kontinuitetna enačba v integralni obliki:

Gaussov izrek (mat): $\oint \vec{j}_e \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{j}_e dV$

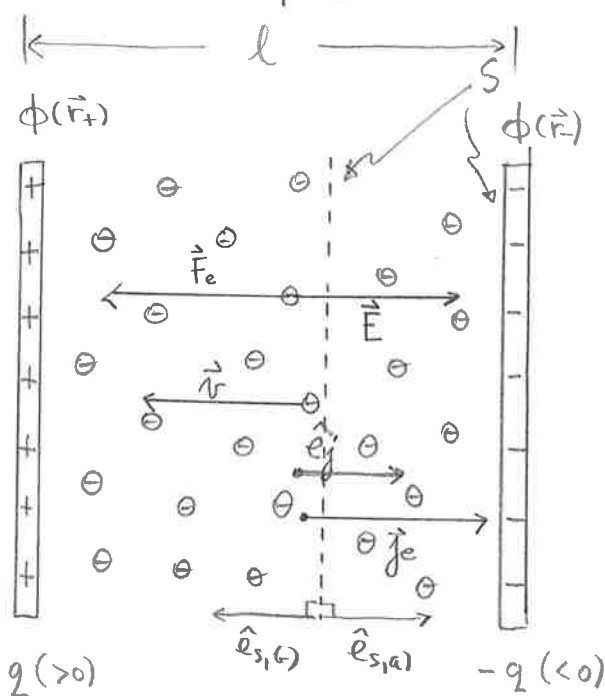
$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV = \int_V -\nabla \cdot \vec{j}_e dV ; \forall V$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_e}$$

Kontinuitetna enačba v diferencialni obliki:

② Električni tok po žicah, električna upornost

Preprost model: kondenzator s prostimi (nevezanimi) naboji med ploščama



- $q_1, -q_2$: naboj na ploščah
- $q_1 < 0$: naboj prostega nosilca
- n : gostota prostih nosilcev (homogena)
- \vec{v} : (povprečna) hitrost prostih nosilcev

• $\vec{E} \sim$ homogeno $\Rightarrow \vec{v} \sim$ homogeno
 $\Rightarrow \vec{j}_e = q_1 n \vec{v} \sim$ homogeno, $\perp S$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int_S \hat{e}_j \cdot \hat{e}_s}$$

a) $\hat{e}_s = \hat{e}_j$ (od \oplus proti \ominus , v smeri \vec{E}) $\Rightarrow I = \int_S = |I| (>0) =$

b) $\hat{e}_s = -\hat{e}_j$ (od \ominus proti \oplus , v nasprotni smeri \vec{E} , v smeri \vec{v}) $\Rightarrow I = -\int_S = -|I| (<0)$

Gomminio se: električno polje, napetost med ploščama kondenzatorja

začetna točka C (središče \oplus plošče)

a) $U(\vec{r}_-, \vec{r}_+) = - \int_C^{\vec{r}_-} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{r}_-) - \phi(\vec{r}_+) \approx - \frac{qL}{5\epsilon_0} = - \frac{q}{C} \quad (< 0, \text{ v smeri } \hat{e}_s = \hat{e}_j)$
(\hookrightarrow končna točka C (središče \ominus plošče))

b) $U(\vec{r}_+, \vec{r}_-) = -U(\vec{r}_-, \vec{r}_+) = \frac{qL}{5\epsilon_0} = \frac{q}{C} \quad (> 0, \text{ v smeri } \hat{e}_s = -\hat{e}_j)$

\Rightarrow katerikoli smer izberemo, napetost in tok bosta imela nasprotni predznak

$$\boxed{\frac{I}{|I|} = - \frac{U}{|U|}}$$

\Rightarrow Ohm: $|I| \propto |U|$; $|I| = \left(\frac{1}{R}\right) |U|$; $\frac{1}{R} \equiv$ električna prevodnost žice (materiala + prostornina naboji med ploščama kond.)

$$\Rightarrow |U| = R |I| ; R = \text{upornost} ; [R] = \frac{V}{A} = \Omega (\text{ohm})$$

$$\Rightarrow \frac{I}{|I|} = - \frac{U}{R |I|}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = - R I} \quad (\text{Ohmov zakon})$$

Preprost mehanški model: magnijska klop z žebli

- sila teže vzdolž klancu na kroglice priporočila za električno silo na proste (nevezane) naboje
- žebli priporočila za fikсне \oplus ione v kristalni mreži
- kljub konstantni sili: zaradi neprestanega trkanja s fiksnimi ioni (zaradi upora), prosti nosilci zelo hitro dosežejo (konstantno) končno hitrost

Primer: bakrena žica, $S = 1 \text{ mm}^2$, po kateri teče tok 1 A .

$$\rho_{\text{Cu}} = 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, M_{\text{Cu}} = 63,5 \text{ kg/kmol}, N_A = 6 \cdot 10^{26} / \text{kmol}$$

$$I = n S v_{\text{dr}}; n = \frac{m}{M_{\text{Cu}}} \frac{N_A}{V} = \rho_{\text{Cu}} \frac{N_A}{M_{\text{Cu}}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{I M_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Cu}} N_A S} = \frac{1 \text{ A} \cdot 63,5 \text{ kg/m}^3}{9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 6 \cdot 10^{26} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ A/s}}$$

$$= \frac{63,5}{9 \cdot 6 \cdot 1,6 \cdot 10^4} \text{ m} \approx 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = 0,07 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$= 0,07 \text{ mm/s} \approx 0,1 \text{ mm/s}$$

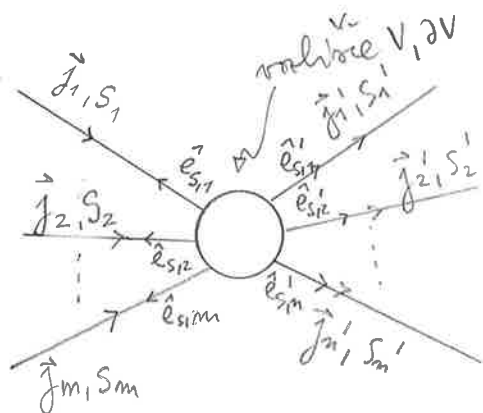
Specifična upornost

$$R \propto \frac{l}{S}$$

$$R = \xi \frac{l}{S}; \xi = \text{specifična upornost materiala, iz katerega je žica}; [\xi] = \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$$

snov	Cu	Fe	stana voda	vodovodna voda	steklo	SiO ₂
$\xi [\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}]$	0,0172	0,1	$8 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^7$	10^{16}	10^{23}

③ Kontinuitetna enačba se enkrat - 1. Kirchhoffov izrek



Vsi smerni vektorji kažejo izven vozlišča V

$$\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \left[\sum_{i=1}^m j_i S_i \hat{e}_{ji} \cdot \hat{e}_{si} + \sum_{i=1}^n j'_i S'_i \hat{e}_{ji} \cdot \hat{e}_{si} \right]$$

$$\text{Stacionarne razmere: } \frac{\partial q_v}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \text{kontinuitetna enačba: } \frac{\partial q_v}{\partial t} = - \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\sum_{i=1}^m j_i s_i \hat{e}_{ji} \cdot \hat{e}_{s,i} + \sum_{i=1}^m j'_i s'_i \hat{e}'_{ji} \cdot \hat{e}'_{s,i} = 0$$

$$\hat{e}_{ji} \cdot \hat{e}_{s,i} = -1, \hat{e}'_{ji} \cdot \hat{e}_{s,i} = +1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m j_i s_i = \sum_{i=1}^m j'_i s'_i$$

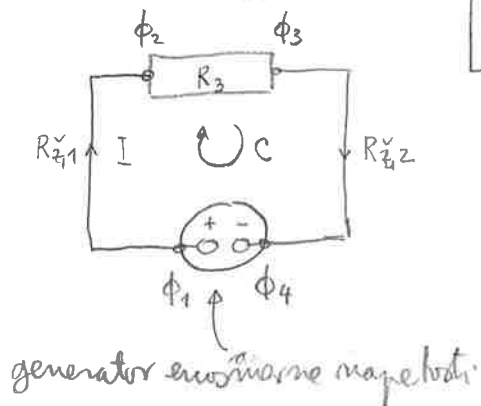
$j_i s_i = I_i$: tok po i -ti žici v smeri proti vozlišču (tok v V)

$j'_i s'_i = I'_i$: tok po i -ti žici iz V

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^m I_i = \sum_{i=1}^m I'_i} \quad \text{Prvi Kirchhoffov izrek}$$

④ Izrek o električni napetosti še enkrat - 2. Kirchhoffov izrek

Električni tokokrog:



$$\boxed{- \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \phi_2 - \phi_1 + \phi_3 - \phi_2 + \phi_4 - \phi_3 + \phi_1 - \phi_4 = 0} \quad \text{Izrek o el. napetosti}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_2 - \phi_1 &= U_{\check{1}1}' \\ \phi_3 - \phi_2 &= U_{R13}' \\ \phi_4 - \phi_3 &= U_{\check{2}2}' \\ \phi_1 - \phi_4 &= U_g \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{\check{1}1}' + U_{\check{1}2}' + U_{R13}' + U_g = 0$$

$$\text{Splošno: } \boxed{\sum_{i=1}^m U_i' + \sum_{i=1}^n U_{g'i} = 0} \quad \text{2. Kirchhoffov izrek}$$

$\left. \begin{aligned} &\text{napetosti porabnikov} \\ &\text{napetosti generatorjev} \end{aligned} \right\} \text{ v poljubnem sklenjenem tokokrogu}$

Natraf na primer:

$$\phi_1 > \phi_2 > \phi_3 > \phi_4 \Rightarrow U'_{\check{z}_{11}}, U'_{R_3}, U'_{\check{z}_{12}} < 0$$
$$U_g > 0$$

Hkrati: $I_{\check{z}_{11}}, I_{R_3}, I_{\check{z}_{12}}$ v izbrani smeri $C > 0$

(Mimogrede: $I_{\check{z}_{11}} = I_{R_3} = I_{\check{z}_{12}} = I$; zaradi?)

\Rightarrow Napetosti na pasivnih U' v smeri toka skozi pasivnik < 0

Napetosti U_g na generatorju od \oplus proti \ominus skozi generator > 0

\Rightarrow Napetosti U' v nasprotni smeri toka skozi pasivnik > 0

Napetosti U_g od \oplus proti \ominus skozi generator < 0

Nadalje: $U'_{\check{z}_{11}} = -IR_{\check{z}_{11}}, U'_{\check{z}_{12}} = -IR_{\check{z}_{12}}, U_{R_3} = -IR_3$ (Ohmov zakon)

$$\Rightarrow U_g + U'_{\check{z}_{11}} + U'_{R_3} + U'_{\check{z}_{12}} = U_g - I(R_{\check{z}_{11}} + R_{\check{z}_{12}} + R_3) = 0 \quad (2. \text{ Kirchhoffov izred})$$

$$\Rightarrow U_g = IR; R = R_{\check{z}_{11}} + R_{\check{z}_{12}} + R_3 = \text{upornost toka kroga}$$

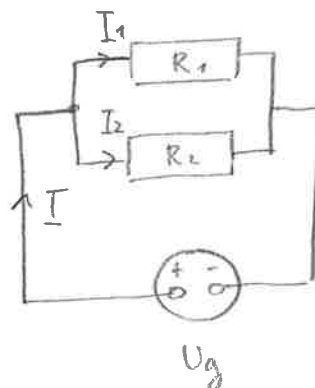
(nadomestna upornost)

- \check{z}_1, \check{z}_2 in R_3 vesani zaporedno (če hočemo narediti sklenjen krog, moramo nujno skozi vse tri)

\Rightarrow Nadomestna upornost zaporedno vesanih pasivnikov
dobimo s seštevanjem upornosti posameznih pasivnikov!

Vzporedna vezava pasivnikov

Upornosti se tako majhne,
da lahko podc napetosti
na njih zanemarimo.



1. Kirchhoffov izred:

$$I = I_1 + I_2$$

2. Kirchhoffov izred skozi R_1

$$U_g + U'_{R_1} = 0$$

2. Kirchhoffov izred skozi R_2

$$U_g + U'_{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow U_{R_1}' = U_{R_2}' = -U_g$$

$$\text{Ohmov zakon: } U_{R_1}' = -I_1 R_1$$

$$U_{R_2}' = -I_2 R_2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} I_1 = \frac{U_g}{R_1} \\ I_2 = \frac{U_g}{R_2} \end{array} \right\}$$

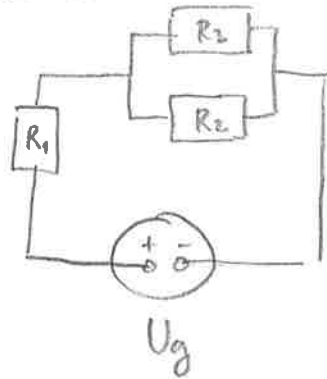
$$\Rightarrow I = \frac{U_g}{R_1} + \frac{U_g}{R_2} = U_g \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{R} \equiv \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow I = \frac{U_g}{R} \text{ oz. } \underline{U_g = RI} \checkmark$$

\Rightarrow Obratno vrednost nadomestne upornosti (nadomestna prevodnost) vzporedno uetanih posamičev dobimo s seštevanjem prevodnosti posameznih posamičev.

S postopnim računanjem nadomestnih upornosti lahko izračunamo bolj zapletene nadomestne upornosti (upornosti točkostrogov).

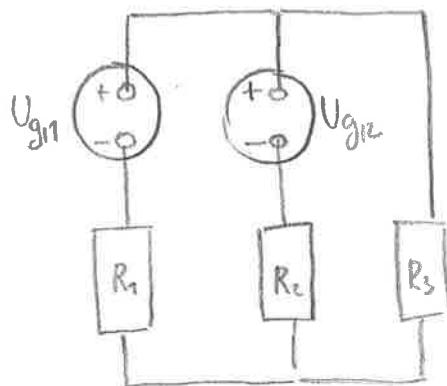
Primer:



Domaća naloga: Zolizšana je upornost tega točkostroga? (Upornost žic zanemari)

7 nadomestnimi upornostmi pa ne pridemo vedno do rešitve.

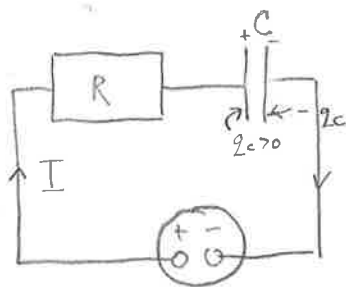
Primer:



Pri danih vrednostih $|U_{g11}|$, $|U_{g12}|$, R_1 , R_2 in R_3 izračunaj tokove I_1 , I_2 in I_3 skozi posamične R_1 , R_2 in R_3 !

Röntgen: na vajah (problem prevedemo na računanje inverzne vrednosti matrike).

Primer: vezje

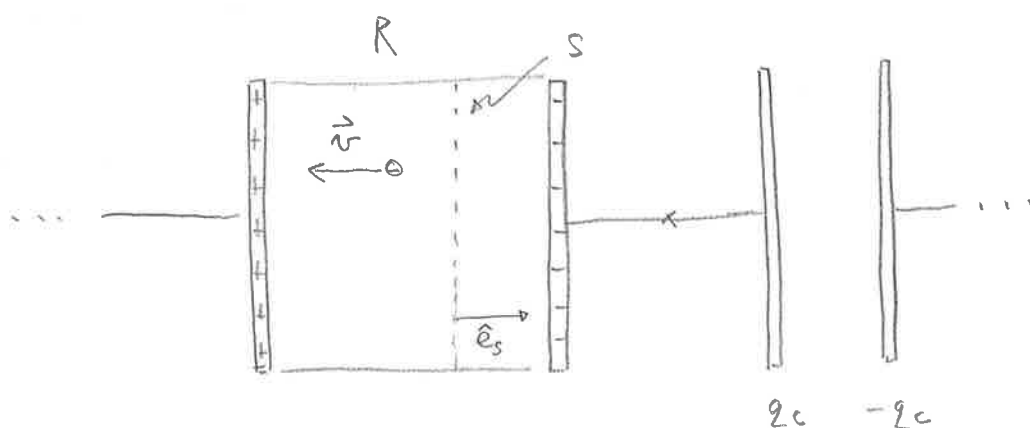


$$U_0 ; |U_0| = U_0 = \text{konst.}$$

$$q_c(t=0) = q_{c0}$$

2. Kirchhoff izred: v smeri urinega kazalca

$$U_0 - IR - \frac{q_c}{C} = 0$$



Smer urinega kazalca:

$$I = jS > 0$$

$\frac{\partial q}{\partial t}$: količina naboja, ki se na časovno enoto pretoku skozi S v smeri \vec{v}

$$\frac{\partial q}{\partial t} = q_1 n v S = -|q_1| n v S = -jS$$

Tak naboj tudi stече iz upornika na njegovem levem koncu.

Ker upornik ves čas ostaja el. nevtralen, mora enak naboj, $\frac{\partial q}{\partial t} = -jS$

pride na upornik z desne strani. Ta naboj pride iz plošče kondenzatorja, ki se zato naboji (na enotni interval) spremeni za

$$\boxed{\frac{\partial q_c}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial t} = +jS = I}$$

↳ naboj steče s plošče (negativni naboj $\frac{\partial q}{\partial t} = -jS$ steče s plošče, zato se plošči naboj poveča, $\frac{\partial q_c}{\partial t} = +jS > 0$)

$$\Rightarrow \boxed{q_c - q_\infty + \dot{q}_c \tau = 0} ; \boxed{q_\infty \equiv U_0 C} ; [q_\infty] = \frac{V A \epsilon}{V} = As$$

$$\boxed{\tau \equiv RC} ; [\tau] = \frac{V A \epsilon}{A V} = s$$

$$\Rightarrow q' \equiv q_c - q_\infty \Rightarrow \dot{q}' = \dot{q}_c$$

$$\Rightarrow \dot{q}' + q'/\tau = 0$$

$$\Rightarrow \dot{q}'/q' = -1/\tau$$

$$\Rightarrow (\ln q') = -1/\tau$$

$$\Rightarrow \int (\ln q') dt = -\frac{1}{\tau} \int dt$$

$$\Rightarrow \ln q' = -\frac{t}{\tau} + \ln K$$

$$\Rightarrow \ln q' - \ln K = -t/\tau$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{q'}{K}\right) = -t/\tau$$

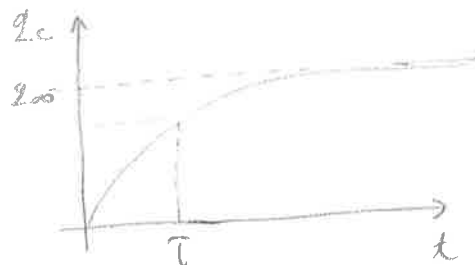
$$\Rightarrow q' = K \exp\{-t/\tau\}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_c - q_\infty = K \exp\{-t/\tau\}}$$

Primer: polnjenje kondenzatorja

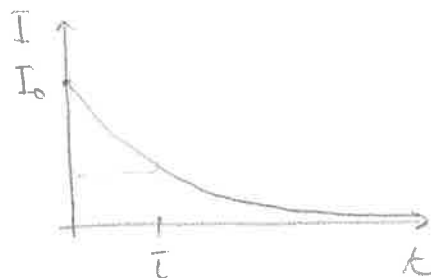
$$\left. \begin{aligned} q_c(t=0) &= 0, U_0 > 0 \\ q_c(t=0) - q_\infty &= K \end{aligned} \right\} \Rightarrow K = -q_\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{q_c = q_\infty (1 - \exp\{-t/\tau\})}$$



$$\Rightarrow \boxed{I = \dot{q}_c = \frac{q_\infty}{\tau} \exp\{-t/\tau\}}$$

$$= \boxed{I_0 \exp\{-t/\tau\}}$$



$$\boxed{I_0 = I(t=0) = \frac{q_\infty}{\tau} = \frac{U_0 C}{RC} = \frac{U_0}{R}}$$

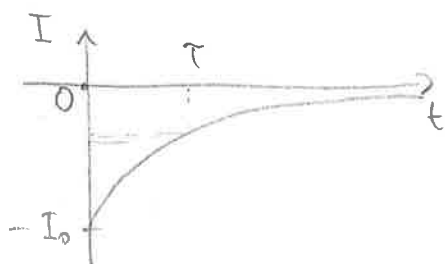
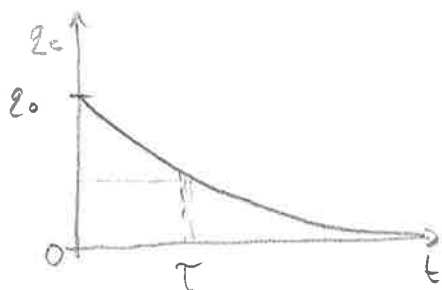
Primer: praznjenje kondenzatorja

$$q_c(t=0) = q_0 > 0, U_0 = 0 \Rightarrow q_\infty = U_0 C = 0$$

$$\Rightarrow q_c = K \exp\{-t/\tau\}$$

$$\Rightarrow t=0 : q_c(t=0) = q_0 = K$$

$$\Rightarrow \boxed{q_c = q_0 \exp\{-t/\tau\}}$$



$$\Rightarrow \boxed{I = \dot{q}_c = -\frac{q_0}{\tau} \exp\{-t/\tau\} = -I_0 \exp\{-t/\tau\} < 0}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{q_0}{\tau} > 0}$$

Torej $I < 0$: na začetku nismo uganili smeri toka (nič hudega).