Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Zgled. ① Ta žival ima krila ali pa ni ptič.
③ Ta žival nima kril. ② Če je ta žival ptič, potem leže jajca.

Torej ta žival ne leže jajc.

p ... ta žival ima krila
q ... ta žival je ptič
r ... ta žival leže jajca

$p \vee \neg q,\ q \Rightarrow r,\ \neg p \models \neg r$?

Iščemo protiprimer:

p	q	r	$p \vee \neg q$	$q \Rightarrow r$	$\neg p$	$\neg r$
?	?	?	1	1	1	0 ✓
0	0	1				

$v(\neg p) = 1 \rightarrow v(p) = 0$
$v(\neg r) = 0 \rightarrow v(r) = 1$

$v(p \vee \neg q) = v(\neg q) = 1 \rightarrow v(q) = 0$

Ta sklep ni pravilen.

„konkreten" protiprimer: žival, ki
- nima kril,
- ni ptič,
- leže jajca.

Npr. kača.

Izrek. $A_1, \ldots, A_k \models B$ ntk. tedaj, ko je $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$ tavtologija.

Dokaz: Naj velja $A_1, \ldots, A_k \models B$. (*) Če je $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$ res, so vse predp. $A_1, \ldots, A_k$ res. Torej je zaradi * B resničen. Sledi: $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$ tavtologija.

Torej je zaradi * B resničen. Sledi:
$A_1 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$ tavtologija.
Obratno: Naj bo $A_1 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$ tavtologija.
Če so $A_1, \dots, A_k$ res, je res tudi $A_1 \wedge \dots \wedge A_k$
in zato tudi B. Torej je sklep pravilen. ✓

Pogojni sklep (PS)

Uporabimo ga lahko, kadar ima zaključek obliko implikacije.

Izrek o PS. $A_1, \dots, A_k \models B \Rightarrow C$ ntk. tedaj, ko $A_1, \dots, A_k, B \models C$.

Dokaz: Naj bo $A = A_1 \wedge \dots \wedge A_k$. Po prejšnjem izr. zadošča pokazati:
izraz $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ je tavtologija ntk. tedaj, ko je izraz $A \wedge B \Rightarrow C$ *.

Velja: $\underbrace{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)} \sim \neg A \vee (\neg B \vee C)$
$\sim (\neg A \vee \neg B) \vee C \sim \neg (A \wedge B) \vee C$
$\sim \overbrace{A \wedge B \Rightarrow C}$

Torej sta ta izraza bodisi oba tavtologiji bodisi nobeden. ✓

Zgled.
Pokažimo: $p \Rightarrow q \vee r, \neg r \models p \Rightarrow q$

1.	$p \Rightarrow q \vee r$		predp.
2.	$\neg r$		"
3.1.		p	predp. PS
3.2.		$q \vee r$	MP (3.1, 1)
3.3.		q	DS (3.2, 2)
3.	$p \Rightarrow q$		PS (3.1 – 3.3)

✓

Sklep s protislovjem

(RA, reductio ad absurdum)

Uporabimo ga lahko kadarkoli.

Izrek o RA. $A_1, \dots, A_k \vdash B$ ntk. tedaj, ko iz $A_1, \dots, A_k, \neg B \vDash 0$.

Dokaz: Naj bo $A = A_1 \wedge \dots \wedge A_k$. Zadošča pokazati: $A \Rightarrow B$ je tavtologija ntk. tedaj, ko je $A \wedge \neg B \Rightarrow 0$ ". Velja:

$$A \wedge \neg B \Rightarrow 0 \sim \neg(A \wedge \neg B) \vee 0$$
$$\sim \neg A \vee \neg\neg B \vee 0 \sim \neg A \vee B$$
$$\sim A \Rightarrow B \checkmark$$

Zgled. Pokažimo:

$$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r),\ q \wedge s \Rightarrow r,\ s \vDash \neg p$$

1.	$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$	predp.
2.	$q \wedge s \Rightarrow r$	"
3.	s	"
4.1.	$\neg\neg p$	predp. RA
4.2.	p	$\sim$ 4.1
4.3.	$\neg(q \Rightarrow r)$	MP(4.2, 1)
4.4.	$q \wedge \neg r$	$\sim$ 4.3
4.5.	q	Po 4.4
4.6.	$q \wedge s$	Zd(4.5, 3)
4.7.	r	MP(4.6, 2)
4.8.	$\neg r \wedge q$	$\sim$ 4.4
4.9	$\neg r$	Po 4.8
4.10	$r \wedge \neg r$	Zd(4.7, 4.9)
4.11	0	$\sim$ 4.10
4.	$\neg p$	RA(4.1 – 4.11) $\checkmark$

1.6 Polni nabori izjavnih veznikov

1.6. Polni nabori izj. veznikov

Def. Množica M izj. veznikov je poln nabor, če za vsak izj. izraz A obstaja enakovreden izj. izraz B, ki vsebuje le veznike iz M.

Trditev. Množica $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor.

Dokaz: A izj. izraz

$$B = \begin{cases} DNO(A), & \text{če } A \text{ kontingenten} \\ p \vee \neg p, & \text{če } A \text{ tavtologija} \\ p \wedge \neg p, & \text{če } A \text{ protislovje} \end{cases}$$

Potem: $B \sim A$ ✓

Recept za dokazovanje polnosti nabora M:

1. Izberemo neki znan poln nabor P.
2. Vsak veznik iz P izrazimo le z vezniki iz M.

Trditev. Množice $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \Rightarrow\}$, $\{0, \Rightarrow\}$ so polni nabori.

Dokaz:

1. $M = \{\neg, \wedge\}$, $P = \{\neg, \wedge, \vee\}$

$$p \vee q \sim \neg\neg(p \vee q) \sim \neg(\neg p \wedge \neg q) \checkmark$$

3. $M = \{\neg, \Rightarrow\}$, $P = \{\neg, \vee\}$

$$p \vee q \sim \neg\neg p \vee q \sim \neg p \Rightarrow q \checkmark$$

4. $M = \{0, \Rightarrow\}$, $P = \{\neg, \Rightarrow\}$

$$\neg p \sim \neg p \vee 0 \sim p \Rightarrow 0 \checkmark$$

Def. $p + q \sim \neg(p \Leftrightarrow q)$ stroga disjunkcija
bodisi p bodisi q

$p \uparrow q \sim \neg(p \wedge q)$ Shefferjev veznik
ne pali nog

$p \downarrow q \sim \neg(p \vee q)$ Łukasiewiczev veznik
niti p niti q

p	q	p + q	p ↑ q	p ↓ q
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

$A + 0 \sim A$ $\qquad A \uparrow A \sim \neg A$

$A + 1 \sim \neg A$

$A + A \sim 0$ $\qquad A \downarrow A \sim \neg A$

$A+B \sim B+A$ komutativnost +

$A \uparrow B \sim B \uparrow A$ " ↑

$A \downarrow B \sim B \downarrow A$ " ↓

$(A+B)+C \sim A+(B+C)$ asociativnost +

Trditev. Množice $\{1, +, \wedge\}$, $\{0, \Leftrightarrow, \vee\}$, $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$ so polni nabori.

Dokaz: 1. $M = \{1, +, \wedge\}$, $P = \{\neg, \wedge\}$

$\neg A \sim A + 1$ ✓

3. $M = \{\uparrow\}$, $P = \{\neg, \wedge\}$

$\neg A \sim A \uparrow A$

$A \wedge B \sim \neg\neg(A \wedge B) \sim \neg(A \uparrow B)$

$\sim (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$ ✓

Kako pokazati, da mn. veznikov M ni poln nabor?

Kako pokazati, da mn. veznikov M <u>ni</u> poln nabor?

<u>Recept</u>: Poiščemo neko lastnost izj. veznikov, ki jo imajo vsi vezniki iz M in se pri komponiranju veznikov ohranja, obstajajo pa vezniki, ki te lastnosti nimajo.

<u>Def.</u> Naj f neki n-mestni veznik.

1. f <u>ohranja 1</u>, če $f(1,1,\dots,1)=1$.
2. f <u>ohranja 0</u>, če $f(0,0,\dots,0)=0$.

<u>Trditev.</u> Množici $\{\overbrace{1, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow}^{\text{ohranjajo 1}}\}$ in $\{\underbrace{0, \wedge, \vee, +}_{\text{ohranjajo 0}}\}$ <u>nista</u> polna nabora. ✓