Poglavje 2

Predikatni račun

2.3 Semantika (pomenoslovje) predikat. računa

Zgled 1 A) Naj bo $\mathcal{F} = \{P(a),\ P(x),\ \forall x : P(x),\ P(f(a,b))\}$. Vzemimo interpretacijo I, podano takole:

1. $D = \mathbb{N}$,
2. $\bar{a} = 2$, $\bar{b} = 3$,
3. $\bar{P}(x)$ ... x je praštevilo,
4. $\bar{f}(x,y) = 2x + y$.

Kakšno vrednost ima term $f(a,b)$ v interpretaciji I? Izračunajmo:

$$\overline{f(a,b)} \;=\; \bar{f}(\bar{a},\bar{b}) \;=\; 2\bar{a} + \bar{b} \;=\; 2 \cdot 2 + 3 \;=\; 7,$$

torej term $f(a,b)$ v interpretaciji I predstavlja naravno število 7. Oglejmo si zdaj še interpretacije izjavnih formul iz množice $\mathcal{F}$.

izjavna formula φ	poved $\bar{\varphi}$	komentar
$P(a)$	2 je praštevilo	resnična izjava
$P(x)$	x je praštevilo	ni izjava
$\forall x\colon P(x)$	vsako naravno število je praštevilo	lažna izjava
$P(f(a,b))$	7 je praštevilo	resnična izjava

Poved "*x je praštevilo*" ni izjava, saj ni mogoče določiti, ali je resnična ali ne, dokler x ne zavzame številske vrednosti.

Opazimo, da v izbrani interpretaciji I:

1. vsakemu *zaprtemu* termu t ustreza neki element $\bar{t} \in D$,

2. vsaki izjavni formuli φ ustreza neka poved $\bar{\varphi}$,
3. vsaki *zaprti* izjavni formuli φ ustreza neka izjava $\bar{\varphi}$ (bodisi resnična bodisi lažna) o elementih domene D.

B) Vzemimo zdaj eno sámo zaprto izjavno formulo

$$\varphi \;=\; \forall x\, \exists y\colon R(x,y)$$

in si oglejmo njen pomen v več različnih interpretacijah.

interpretacija	poved $\bar{\varphi}$	komentar
$I_1:\ D=\mathbb{N}$, $\bar{R}(x,y)\ \ldots\ x<y$	za vsako naravno število obstaja večje naravno število	resnična izjava
$I_2:\ D=\mathbb{N}$, $\bar{R}(x,y)\ \ldots\ x>y$	za vsako naravno število obstaja manjše naravno število	lažna izjava
$I_3:\ D=\mathbb{Z}$, $\bar{R}(x,y)\ \ldots\ x>y$	za vsako celo število obstaja manjše celo število	resnična izjava
$I_4:\ D=\{\text{vsi ljudje}\}$, $\bar{R}(x,y)\ \ldots\ x$ ima rad y-a	vsakdo ima nekoga rad	resnična izjava?[1]

Opazimo, da isti zaprti izjavni formuli lahko v nekaterih interpretacijah ustrezajo resnične formule, v drugih pa lažne.

V matematiki zaradi krajšega pisanja pogosto opuščamo univerzalne kvantifikatorje, ki stojijo na začetku izjavne formule in delujejo na ves preostanek. Tako npr. trditev, da je seštevanje komutativno, zapišemo v obliki

$$x+y \;=\; y+x,$$

pri čemer razumemo, da to velja za vsak x in y. Torej imamo v mislih pravzaprav zaprto izjavno formulo

$$\forall x \forall y\colon x+y \;=\; y+x.$$

Tudi pri dokazovanju izrekov v formalnih teorijah se izkaže, da je koristno izjavnim formulam, ki niso zaprte, v izbrani interpretaciji pripisati resničnostno vrednost. V ta namen definiramo pojem univerzalnega zaprtja izjavne formule.

Definicija 1 *Naj bo φ izjavna formula in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vse individualne spremenljivke, ki prosto nastopajo v φ. Potem imenujemo zaprto izjavno formulo*

$$z(\varphi) \;=\; \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\colon \varphi$$

univerzalno zaprtje *formule φ.*

[1] V formuli $\forall x\, \exists y\colon R(x,y)$ lahko seveda vzamemo tudi $y=x$. Ali ima vsakdo vsaj sebe rad? Kaže, da je življenje bolj zapleteno od matematike ...

Pripomba 1 *Če je formula φ zaprta, je $z(\varphi) = \varphi$.*

Definicija 2 *Izjavna formula φ je* resnična v interpretaciji I, *če je resnična izjava $\overline{z(\varphi)}$, ki v interpretaciji I ustreza univerzalnemu zaprtju formule φ. V tem primeru pišemo: $I \models \varphi$.*

2.4 Logično veljavne formule; enakovrednosti

Definicija 3 *Izjavna formula φ je:*

1. logično veljavna, *če je resnična v vseh interpretacijah,*
2. protislovna, *če je lažna v vseh interpretacijah.*

Zgled 2 **A)** Naj bosta P in Q enomestna predikata in naj bo φ izjavna formula

$$\forall x\colon P(x) \ \vee\ \forall x\colon Q(x) \quad \Longrightarrow \quad \forall x\colon (P(x) \ \vee\ Q(x)).$$

Dokažimo, da je formula φ logično veljavna.

Pokazati moramo, da je φ resnična v vsaki interpretaciji. Naj bo I poljubna interpretacija formule φ, z domeno D. Predpostavimo, da velja

$$I \ \models\ \forall x\colon P(x) \ \vee\ \forall x\colon Q(x), \tag{2.1}$$

in vzemimo poljuben $x_0 \in D$. Ločimo dva primera:

a) $I \models \forall x\colon P(x)$: V tem primeru velja: $I \models P(x_0)$.

b) $I \models \forall x\colon Q(x)$: V tem primeru velja: $I \models Q(x_0)$.

V obeh primerih torej velja: $I \models P(x_0) \vee Q(x_0)$. Ker je bil $x_0 \in D$ poljuben, sledi

$$I \ \models\ \forall x\colon (P(x) \ \vee\ Q(x)). \tag{2.2}$$

Po pravilu PS iz (2.1) in (2.2) dobimo: $I \models \varphi$. Ker je bila interpretacija I poljubna, je torej formula φ logično veljavna.

B) Naj bosta P in Q enomestna predikata in naj bo ψ izjavna formula

$$\forall x\colon (P(x) \ \vee\ Q(x)) \quad \Longrightarrow \quad \forall x\colon P(x) \ \vee\ \forall x\colon Q(x).$$

Pokažimo, da formula ψ *ni* logično veljavna. To storimo tako, da poiščemo *protiprimer*, t.j. neko interpretacijo I, v kateri formula ψ ni resnična. Vzemimo npr. $D = \mathbb{N}$ in lastnosti

$$\begin{aligned} \bar{P}(x) &\quad \ldots \quad x \text{ je sodo število,} \\ \bar{Q}(x) &\quad \ldots \quad x \text{ je liho število.} \end{aligned}$$

Naj bo ψ_1 antecedens formule ψ in ψ_2 njen konsekvens. Potem je

$\overline{\psi_1}$ ... izjava *"vsako naravno število je sodo ali liho"*,
$\overline{\psi_2}$ ... izjava *"vsa naravna števila so soda ali pa so vsa naravna števila liha"*.

Antecedens implikacije ψ je v interpretaciji I resničen, konsekvens pa ne, torej je formula ψ v interpretaciji I lažna. Zato izjavna formula ψ ni logično veljavna.

C) Naj bo R dvomesten predikat in naj bo χ izjavna formula

$$\exists y\, \forall x\colon (R(x,y) \iff \neg R(x,x)).$$

Dokažimo, da je formula χ protislovna.

Pokazati moramo, da je φ lažna v vsaki interpretaciji. Naj bo I poljubna interpretacija formule χ, z domeno D. Recimo, da je formula χ v tej interpretaciji resnična. Potem obstaja $y_0 \in D$, tako da je

$$I \models \forall x\colon (R(x,y_0) \iff \neg R(x,x)).$$

Ekvivalenca $R(x,y_0) \iff \neg R(x,x)$ velja za vse $x \in D$, tudi za $x = y_0$. Torej je resnična tudi ekvivalenca $R(y_0,y_0) \iff \neg R(y_0,y_0)$. Toda ta ekvivalenca je protislovna, torej formula χ v interpretaciji I ni resnična. Ker je bila interpretacija I poljubna, je formula χ protislovna.

Definicija 4 *Izjavni formuli φ in ψ sta* enakovredni*, če je izjavna formula $\varphi \Leftrightarrow \psi$ logično veljavna. Tedaj pišemo: $\varphi \sim \psi$.*

Naštejmo nekaj pomembnih enakovrednosti predikatnega računa, ki nam omogočajo preoblikovanje in poenostavljanje izjavnih formul. Žal v PR za dokazovanje nimamo na razpolago resničnostnih tabel kot v IR, saj je treba dokazati resničnost ekvivalence $\varphi \Leftrightarrow \psi$ v vseh interpretacijah, teh pa je neskončno mnogo.

Izrek 1 *Naj bosta φ in ψ poljubni izjavni formuli ter x in y poljubni individualni spremenljivki. Potem veljajo naslednje enakovrednosti:*

Negacija kvantificirane formule:

1. $\neg\forall x : \varphi \;\sim\; \exists x : \neg\varphi$

2. $\neg\exists x : \varphi \;\sim\; \forall x : \neg\varphi$

Komutativnost istovrstnih kvantifikatorjev:

3. $\forall x \forall y : \varphi \;\sim\; \forall y \forall x : \varphi$

4. $\exists x \exists y : \varphi \ \sim\ \exists y \exists x : \varphi$

Distributivnost kvantifikatorjev glede na $\wedge$ in $\vee$:

5. $\forall x : (\varphi \wedge \psi) \ \sim\ \forall x : \varphi \ \wedge\ \forall x : \psi$

6. $\exists x : (\varphi \vee \psi) \ \sim\ \exists x : \varphi \ \vee\ \exists x : \psi$

7. $\forall x : (\varphi \vee \psi) \ \sim\ \forall x : \varphi \ \vee\ \psi$, *če* x *ne nastopa prosto v* ψ

8. $\exists x : (\varphi \wedge \psi) \ \sim\ \exists x : \varphi \ \wedge\ \psi$, *če* x *ne nastopa prosto v* ψ

Opuščanje odvečnih kvantifikatorjev:

9. $\forall x : \varphi \ \sim\ \varphi$, *če* x *ne nastopa prosto v* φ

10. $\exists x : \varphi \ \sim\ \varphi$, *če* x *ne nastopa prosto v* φ

Preimenovanje vezanih spremenljivk:

11. $\forall x : \varphi(x) \ \sim\ \forall y : \varphi(y)$, *če* y *ne nastopa v* $\varphi(x)$ *(niti prosto niti vezano)*

12. $\exists x : \varphi(x) \ \sim\ \exists y : \varphi(y)$, *če* y *ne nastopa v* $\varphi(x)$ *(niti prosto niti vezano)*

Dokaz: Dokažimo le 1. točko.

Po definiciji enakovrednosti moramo pokazati, da je izjavna formula

$$\neg \forall x : \varphi \iff \exists x : \neg \varphi \tag{2.3}$$

logično veljavna, po definiciji logične veljavnosti torej, da je univerzalno zaprtje formule (2.3) resnično v vsaki interpretaciji.

Naj bodo $y_1, y_2, \ldots, y_k$ vse individualne spremenljivke, ki prosto nastopajo v izjavni formuli (2.3). Pišimo $\varphi = \varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$. Naj bo ζ univerzalno zaprtje izjavne formule (2.3):

$$\zeta \quad = \quad \forall y_1 \ldots \forall y_k : (\neg \forall x : \varphi(x, y_1, \ldots, y_k) \iff \exists x : \neg \varphi(x, y_1, \ldots, y_k)).$$

Ker moramo dokazati resničnost formule ζ v *vsaki* interpretaciji, vzemimo katero koli interpretacijo I formule ζ. Ker se ζ začne s k univerzalnimi kvantifikatorji, izberimo poljubne elemente $b_1, \ldots, b_k \in D$. Potem velja:

- formula $\neg \forall x \colon \varphi(x, b_1, \ldots, b_k)$ je resnična v I natanko tedaj, ko
- formula $\forall x \colon \varphi(x, b_1, \ldots, b_k)$ ni resnična v I; to je natanko tedaj, ko

- obstaja $a \in D$, tako da formula $\varphi(a, b_1, \ldots, b_k)$ ni resnična v I; to je natanko tedaj, ko
- obstaja $a \in D$, tako da je formula $\neg\varphi(a, b_1, \ldots, b_k)$ resnična v I; to je natanko tedaj, ko
- je formula $\exists x \colon \neg\varphi(x, b_1, \ldots, b_k)$ resnična v I.

Potemtakem je v I resnična ekvivalenca

$$\neg\forall x \colon \varphi(x, b_1, \ldots, b_k) \iff \exists x \colon \neg\varphi(x, b_1, \ldots, b_k).$$

Ker so bili $b_1, \ldots, b_k \in D$ poljubni, je v interpretaciji I resnična tudi formula

$$\forall y_1 \ldots \forall y_k : (\neg\forall x \colon \varphi(x, y_1, \ldots, y_k) \iff \exists x \colon \neg\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)) ,$$

ki pa je enaka univerzalnemu zaprtju ζ formule (2.3). Ker je bila interpretacija I poljubna, je torej formula ζ resnična v vsaki interpretaciji. S tem je dokaz 1. točke izreka končan. $\square$

Zgled 3 **D)** Iz primerov A) in B) v zgledu 2 zaključimo, da

$$\forall x \colon P(x) \ \vee \ \forall x \colon Q(x) \quad \not\sim \quad \forall x \colon (P(x) \ \vee \ Q(x)).$$

E) Naj bo $R(x, y)$ poljuben dvomestni predikat. Dokažimo, da

$$\forall x \, \exists y \colon R(x, y) \ \not\sim \ \exists y \, \forall x \colon R(x, y). \tag{2.4}$$

Vzemimo npr. interpretacijo I z domeno $D = \mathbb{N}$ in dvomestno relacijo

$$\bar{R}(x, y) \quad \ldots \quad x < y.$$

Ker je izjava $\forall x \in \mathbb{N} \, \exists y \in \mathbb{N} \colon x < y$ *(za vsako naravno število obstaja večje naravno število)* resnična, izjava $\exists y \in \mathbb{N} \, \forall x \in \mathbb{N} \colon x < y$ *(obstaja naravno število, ki je večje od vsakega naravnega števila)* pa ne, je dokaz trditve (2.4) končan.

Zgled 4 Za vsako izjavno formulo φ obstaja enakovredna formula ψ, pri kateri stojijo vsi kvantifikatorji na začetku in delujejo na ves preostanek formule. Za formulo ψ rečemo, da je v ***preneksni obliki***. Oglejmo si nekaj primerov, kako prepisati dano izjavno formulo v preneksni obliki. Vsak korak utemeljimo z ustrezno točko izreka 1 ali s sklicem na izjavni račun.

$$\begin{aligned} \neg\forall x \, \exists y \colon R(x, y) &\sim \exists x \colon (\neg\exists y \colon R(x, y)) && \text{(točka 1)} \\ &\sim \underline{\exists x \, \forall y \colon \neg R(x, y)} && \text{(točka 2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\exists x\colon P(x) \wedge \exists x\colon Q(x) &\sim \exists x\colon P(x) \wedge \exists y\colon Q(y) && \text{(točka 12)}\\
&\sim \exists x\colon (P(x) \wedge \exists y\colon Q(y)) && \text{(točka 8)}\\
&\sim \exists x\colon (\exists y\colon Q(y) \wedge P(x)) && \text{(IR)}\\
&\sim \exists x\,\exists y\colon (Q(y) \wedge P(x)) && \text{(točka 8)}\\
&\sim \underline{\exists x\,\exists y\colon (P(x) \wedge Q(y))} && \text{(IR)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall x\colon P(x) \Rightarrow \forall x\colon Q(x) &\sim \neg\forall x\colon P(x) \vee \forall x\colon Q(x) && \text{(IR)}\\
&\sim \exists x\colon \neg P(x) \vee \forall x\colon Q(x) && \text{(točka 1)}\\
&\sim \exists x\colon \neg P(x) \vee \forall y\colon Q(y) && \text{(točka 11)}\\
&\sim \exists x\colon \neg P(x) \vee \exists x\,\forall y\colon Q(y) && \text{(točka 10)}\\
&\sim \exists x\colon (\neg P(x) \vee \forall y\colon Q(y)) && \text{(točka 6)}\\
&\sim \exists x\colon (\forall y\colon Q(y) \vee \neg P(x)) && \text{(IR)}\\
&\sim \exists x\colon (\forall y\colon (Q(y) \vee \neg P(x))) && \text{(točka 7)}\\
&\sim \exists x\,\forall y\colon (P(x) \Rightarrow Q(y)) && \text{(IR)}
\end{aligned}
$$

Zgled 5 Naj bo

$$\chi \;=\; \exists y\,\forall x\colon (R(x,y) \iff \neg R(x,x))$$

izjavna formula, za katero smo v zgledu 2.C pokazali, da je protislovna. To lahko storimo še drugače – tako, da pokažemo logično veljavnost preneksne oblike njene negacije $\neg\chi$. Najprej formulo $\neg\chi$ postavimo v preneksno obliko:

$$
\begin{aligned}
\neg\exists y\,\forall x\colon (R(x,y) \iff \neg R(x,x)) &\sim \forall y\,\exists x\colon \neg(R(x,y) \iff \neg R(x,x))\\
&\sim \underline{\forall y\,\exists x\colon (R(x,y) \iff R(x,x))}
\end{aligned}
$$

Naj bo I neka interpretacija formule $\neg\chi$ in D njena domena. Vzemimo $y_0 \in D$ in naj bo $x_0 \in D$ kar enak y_0. Potem seveda velja: $I \models R(x_0,y_0) \iff R(x_0,x_0)$, torej tudi $I \models \exists x : (R(x,y_0) \iff R(x,x))$. Ker je bil $y_0 \in D$ poljuben, velja $I \models \forall y\,\exists x\colon (R(x,y) \iff R(x,x))$ oziroma $I \models \neg\chi$. Ker je bila tudi interpretacija I poljubna, je formula $\neg\chi$ logično veljavna.

2.5 Sklepanje in dokazovanje v predikatnem računu

Definicija 5 *Končno zaporedje izjavnih formul $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \psi$ je* pravilen *ali* veljaven sklep *s* predpostavkami $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ *in* zaključkom ψ*, če je izj. formula*

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \implies \psi$$

logično veljavna. Tedaj pišemo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \models \psi$ in beremo: iz predpostavk $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ logično sledi *zaključek ψ.*

Zgled 6 Dokažimo pravilnost sklepa

$$P(a),\ \forall x\colon (P(x) \Rightarrow Q(x)) \models Q(a). \tag{2.5}$$

Naj bo I neka interpretacija z domeno D. Pokazati moramo

$$I \models P(a) \wedge \forall x\colon (P(x) \Rightarrow Q(x)) \implies Q(a). \tag{2.6}$$

Uporabimo pravilo PS in privzemimo, da je v I resničen antecedens implikacije 2.6, torej $I \models P(a) \wedge \forall x\colon (P(x) \Rightarrow Q(x))$. Potem po pravilu poenostavitve velja $I \models P(a)$ in $I \models \forall x: (P(x) \Rightarrow Q(x))$, torej tudi $I \models P(a) \Rightarrow Q(a)$. Po pravilu MP sledi $I \models Q(a)$, s čimer je pogojni sklep končan. Implikacija (2.6) je potemtakem resnična v interpretaciji I. Ker je bila I poljubna, je implikacija (2.6) logično veljavna in je sklep (2.5) pravilen.

Dokazovanje izrekov (pa tudi lem, posledic in drugih trditev) je prav gotovo ena od glavnih dejavnosti v matematiki. Izrek ima običajno obliko implikacije, ki trdi, da pri določenih predpostavkah velja določen zaključek. Poleg eksplicitno navedenih predpostavk lahko pri dokazovanju kot implicitne predpostavke uporabljamo tudi druge, že dokazane trditve in izreke ter aksiome (*vse*, če izrek, ki ga dokazujemo, doslej še ni bil dokazan; ali pa le nekatere, če npr. želimo že dokazan izrek dokazati drugače in določenih aksiomov ali izrekov načrtno ne uporabljamo). Dokazujemo tako, da z uporabo pravilnih sklepov izjavnega in predikatnega računa iz predpostavk in iz že izpeljanih posledic izpeljujemo nove in nove posledice, dokler ne izpeljemo želenega zaključka. V spodnji tabeli je navedenih nekaj možnih napotkov za dokazovanje glede na obliko zaključka, ki ga želimo izpeljati.

OBLIKA ZAKLJUČKA	NEKAJ NAPOTKOV ZA NAČIN DOKAZOVANJA
$\varphi \wedge \psi$	a) izpeljemo φ, nato izpeljemo še ψ b) privzamemo $\neg\varphi$ in izpeljemo protislovje, nato privzamemo $\neg\psi$ in izpeljemo protislovje
$\varphi \vee \psi$	a) izpeljemo φ ali izpeljemo ψ b) privzamemo $\neg\varphi$ in izpeljemo ψ c) privzamemo $\neg\psi$ in izpeljemo φ d) privzamemo $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ in izpeljemo protislovje
$\varphi \Rightarrow \psi$	a) izpeljemo $\neg\varphi$ ali izpeljemo ψ b) privzamemo φ in izpeljemo ψ c) privzamemo $\neg\psi$ in izpeljemo $\neg\varphi$ d) privzamemo $\varphi \wedge \neg\psi$ in izpeljemo protislovje
$\varphi \Leftrightarrow \psi$	a) izpeljemo $\varphi \Rightarrow \psi$, nato izpeljemo še $\psi \Rightarrow \varphi$ b) za $i = 1, 2, \ldots, k-1$ izpeljemo $\varphi_i \Leftrightarrow \varphi_{i+1}$, kjer je $\varphi_1 = \varphi$ in $\varphi_k = \psi$
$\neg\varphi$	privzamemo φ in izpeljemo protislovje

OBLIKA ZAKLJUČKA	NEKAJ NAPOTKOV ZA NAČIN DOKAZOVANJA
$\forall x\colon \varphi(x)$	a) vzamemo poljuben $x_0 \in D$ in izpeljemo $\varphi(x_0)$ b) privzamemo, da za neki $a \in D$ velja $\neg\varphi(a)$, in izpeljemo protislovje
$\exists x\colon \varphi(x)$	a) konstruiramo $a \in D$, tako da velja $\varphi(a)$ b) privzamemo, da za vse $x_0 \in D$ velja $\neg\varphi(x_0)$, in izpeljemo protislovje