Poglavje 5

Strukture urejenosti

5.1 Delna in linearna urejenost

Definicija 1 *Relaciji delne urejenosti $\leq$ v množici A priredimo relaciji $<$ in $\lessdot$ v množici A takole:*

1. $\forall x, y \in A\colon (x < y \iff x \leq y \land x \neq y)$,
2. $\forall x, y \in A\colon (x \lessdot y \iff x < y \land \neg\exists z \in A\colon (x < z \land z < y))$.

Relacija $<$ je stroga delna urejenost, prirejena relaciji $\leq$. Formulo $x < y$ beremo: x je strogo pod y.

Relacija $\lessdot$ je relacija neposrednega predhodnika, prirejena relaciji delne urejenosti $\leq$. Formulo $x \lessdot y$ beremo: x je neposredni predhodnik y-a, *ali:* y je neposredni naslednik x-a.

Trditev 1 *Naj bo $\leq$ relacija delne urejenosti v A.*

1. *Relacija $<$ je irefleksivna, asimetrična ter tranzitivna v A.*
2. *Relacija $\lessdot$ je irefleksivna, asimetrična ter intranzitivna v A.*

Dokaz: Naj bodo $x, y, z \in A$ poljubni.

1. (a) $x < x \;\Rightarrow\; x \leq x \land x \neq x \;\Rightarrow\; 1 \land 0 \;\Rightarrow\; 0$, torej je $<$ irefleksivna.

   (b) $x < y \land y < x \;\Rightarrow\; x \leq y \land y \leq x \land x \neq y \;\Rightarrow\; x = y \land x \neq y \;\Rightarrow\; 0$, torej je $<$ asimetrična.

   (c) Iz $x < y \land y < z$ sledi $x \leq y \land y \leq z$, od tod pa $x \leq z$. Če je $x = z$, iz $x \leq y$ dobimo $z \leq y$ in zaradi antisimetričnosti relacije $\leq$ tudi $y = z$. To pa je v protislovju z $y < z$, torej je $x \neq z$ in je relacija $<$ tranzitivna.

2. Ker iz $x \lessdot y$ sledi $x < y$ in je relacija $<$ irefleksivna in asimetrična, je takšna tudi relacija $\lessdot$. Naj bo $x \lessdot y$ in $y \lessdot z$. Potem je $x < y$ in $y < z$, po definiciji relacije $\lessdot$ torej $\neg(x \lessdot z)$, kar pomeni, da je relacija $\lessdot$ intranzitivna.

$\square$

Grafična predstavitev končne delno urejene množice s Hassejevim diagramom

Definicija 2 *Naj bo A končna množica, delno urejena z relacijo $\leq$. Grafično jo predstavimo s* Hassejevim diagramom *takole:*

- *elemente A narišemo kot točke v ravnini,*
- *če je $x < y$, narišemo x niže kot y,*
- *če je $x \lessdot y$, x in y povežemo z vzpenjajočo se črto.*

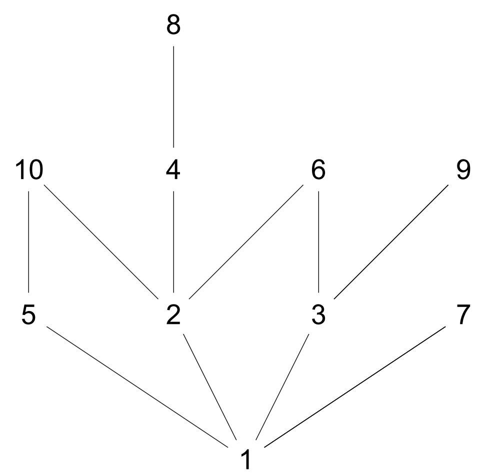
Pripomba 1 *Naj bo končna množica A delno urejena z relacijo $\leq$ in naj bo H njen Hassejev diagram. Potem za vse $x, y \in A$ velja:*

$$x \leq y \iff \text{v diagramu } H \text{ obstaja vzpenjajoča se pot od } x \text{ do } y.$$

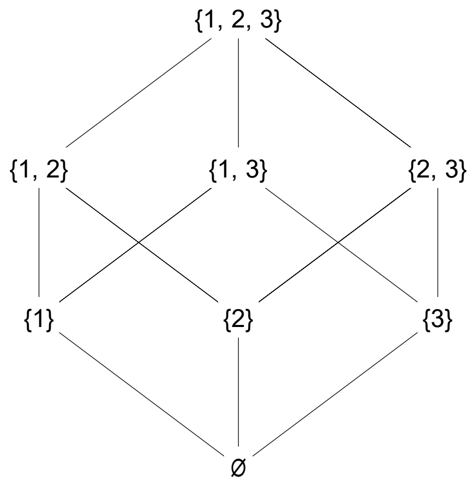
Pri tem med vzpenjajoče se poti uvrščamo tudi prazne poti*, ki se začnejo in končajo v isti točki in imajo dolžino 0.*

Zgled 1 Oglejmo si nekaj Hassejevih diagramov.

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, relacija deljivosti $|$

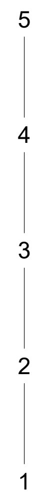


2. $A = \mathcal{P}\{1,2,3\}$, relacija inkluzije $\subseteq$



3. $A = \{1,2,3,4,5\}$, relacija $\leq$ (manjši ali enak)

   Hassejev diagram končne linearno urejene množice lahko pregledno narišemo na (navpični) premici – od tod izvira ime "*linearna urejenost*":



5.2 Posebni elementi v delno urejenih množicah

Definicija 3 *Naj bo množica A delno urejena z relacijo $\leq$ in $a \in A$.*

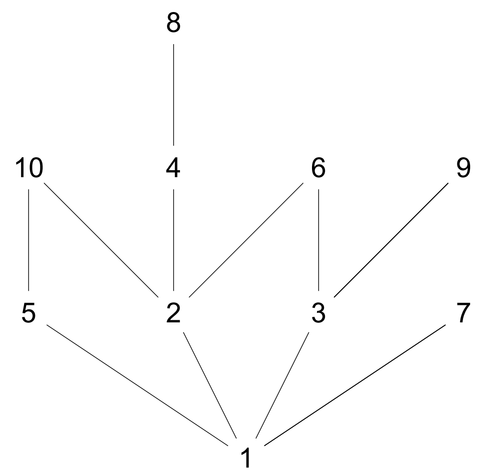
1. *element a je* minimalen *v A* $\iff \forall x \in A\colon (x \leq a \Rightarrow x = a)$

2. *element a je* maksimalen *v A* $\iff \forall x \in A\colon (x \geq a \Rightarrow x = a)$

3. *element a je* prvi *ali* najmanjši *v A* $\iff \forall x \in A\colon a \leq x$

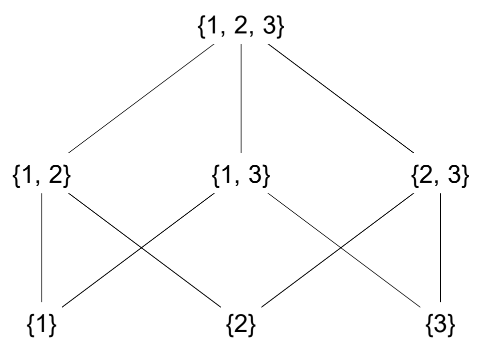
4. *element a je* zadnji *ali* največji *v A* $\iff \forall x \in A\colon x \leq a$

Zgled 2 1. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, relacija deljivosti $|$



minimalni = prvi = 1
maksimalni: 6, 7, 8, 9, 10
zadnji: /

2. $A = \mathcal{P}\{1,2,3\} \setminus \{\emptyset\}$, relacija inkluzije $\subseteq$



minimalni: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$
prvi: /
maksimalni = zadnji: $\{1,2,3\}$

3. A poljubna množica, relacija enakosti id_A

   minimalni: vsi

   maksimalni: vsi

   Če je $A = \emptyset$ ali če ima A vsaj dva elementa, prvih in zadnjih elementov ni.

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, relacija $\leq$ (manjši ali enak)

   minimalni = prvi = 1

   maksimalni = zadnji = 5

5. $A = \mathbb{N}$, relacija deljivosti $|$

   minimalni = prvi = 1 $(\forall n \in \mathbb{N}\colon 1 \,|\, n)$
   maksimalni = zadnji = 0 $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \,|\, 0)$

6. $A = \mathbb{Z}$, relacija $\leq$

   posebnih elementov ni

Trditev 2 *Naj bo množica A delno urejena.*

1. *Vsak prvi element A je minimalen.*
2. *Vsak zadnji element A je maksimalen.*
3. *Če v A obstaja prvi element, je en sam.*
4. *Če v A obstaja zadnji element, je en sam.*

Dokaz: 1. Naj bo $a \in A$ prvi element in $x \in A$ poljuben. Potem je $a \leq x$. Če je tudi $x \leq a$, je zaradi antisimetričnosti $x = a$, torej je a minimalen.

3. Naj bosta $a_1, a_2 \in A$ oba prva elementa. Ker je a_1 prvi, je $a_1 \leq a_2$. Ker je a_2 prvi, je tudi $a_2 \leq a_1$, torej je zaradi antisimetričnosti $a_1 = a_2$. $\square$

Trditev 3 *Naj bo množica A linearno urejena.*

1. *Element $a \in A$ je prvi natanko tedaj, ko je minimalen.*
2. *Element $a \in A$ je zadnji natanko tedaj, ko je maksimalen.*

Dokaz: 1. Naj bo a prvi element A. Po trditvi 2 je a minimalen.

Pokažimo še obratno: Naj bo $a \in A$ minimalen in $x \in A$. Ker je relacija linearne urejenosti strogo sovisna, je $a \leq x$ ali $x \leq a$. Ker je a minimalen, iz $x \leq a$ sledi $x = a$. Torej v obeh primerih velja $a \leq x$ in je a prvi element A. $\square$

Pripomba 2 *Naj bo množica A delno urejena z relacijo R in naj bo $B \subseteq A$. Potem je množica B delno urejena z relacijo $R|_B = R \cap (B \times B)$, ki jo imenujemo* zožitev *relacije R na podmnožico B. Zato lahko govorimo o minimalnih, maksimalnih, prvih, zadnjih elementih poljubne podmnožice $B \subseteq A$.*

Oznake.
1. Če ima $B \subseteq A$ prvi element, ga imenujemo tudi *minimum* množice B in ga označimo z $\min B$.
2. Če ima $B \subseteq A$ zadnji element, ga imenujemo tudi *maksimum* množice B in ga označimo z $\max B$.

Definicija 4 *Naj bo A delno urejena in naj bo $B \subseteq A$.*

1. *Element $a \in A$ je* zgornja meja za B v množici A*, če $\forall x \in B \colon x \leq a$.*
2. *Element $a \in A$ je* spodnja meja za B v množici A*, če $\forall x \in B \colon a \leq x$.*

Zgled 3 1. $A = \mathbb{R}$, relacija $\leq$ (manjši ali enak), $B =$ odprti interval $(0, 1)$
Zgornje meje za B so vsi $a \geq 1$.
Spodnje meje za B so vsi $a \leq 0$.

2. $A = \mathbb{N}$, relacija deljivosti $|$, $B = \{12, 18, 24\}$
Zgornje meje za B so vsi skupni večkratniki števil 12, 18 in 24.
Spodnje meje za B so vsi skupni delitelji števil 12, 18 in 24, torej 1, 2, 3 in 6.

Definicija 5 *Naj bo A delno urejena in naj bo $B \subseteq A$.*

1. *Naj bo $M = \{a \in A;\ a$ je zgornja meja za $B\}$. Če M ima prvi element, je to* supremum *ali* najmanjša *(ali* natančna*)* zgornja meja *za B v množici A.*
2. *Naj bo $m = \{a \in A;\ a$ je spodnja meja za $B\}$. Če m ima zadnji element, je to* infimum *ali* največja *(ali* natančna*)* spodnja meja *za B v množici A.*

Oznake. Supremum množice B označimo s $\sup B$, infimum množice B pa z $\inf B$.

Zgled 4 1. $A = \mathbb{R}$, relacija $\leq$ (manjši ali enak), $B =$ odprti interval $(0, 1)$:
$\inf B = \underline{0}$, $\sup B = \underline{1}$

2. $A = \mathbb{N}$, relacija deljivosti $|$, $B = \{12, 18, 24\}$:
$\inf B = \underline{D(12, 18, 24) = 6}$, $\sup B = \underline{v(12, 18, 24) = 72}$

3. $A = \mathcal{P}S$, relacija inkluzije $\subseteq$, $B = \{A_1, A_2\}$ za poljubni $A_1, A_2 \subseteq S$:
$\inf B = \underline{A_1 \cap A_2}$, $\sup B = \underline{A_1 \cup A_2}$

Pripomba 3 *Naj bo A delno urejena in naj bo $B \subseteq A$.*

1. *Če B ima zadnji element* $\max B$*, je to tudi* $\sup B$*.*
2. *Če B ima prvi element* $\min B$*, je to tudi* $\inf B$*.*

Zgled 5 $A = \mathbb{R}$, relacija $\leq$ (manjši ali enak)

1. $B =$ zaprti interval $[0, 1]$

   $\max B = \sup B = 1$
   $\min B = \inf B = 0$

2. $B =$ odprti interval $(0, 1)$

   $\max B$ ne obstaja, $\sup B = 1$
   $\min B$ ne obstaja, $\inf B = 0$

5.3 Dobra urejenost in Zornova lema

Definicija 6 *Naj bo $R \subseteq A \times A$.*

Relacija R dobro ureja *množico A, če*

1. *R delno ureja A,*
2. *vsaka neprazna podmnožica $B \subseteq A$ ima prvi element glede na $R|_B$.*

Trditev 4 *Če R dobro ureja A, potem R linearno ureja A.*

Dokaz: Zadošča dokazati, da je relacija dobre urejenosti sovisna. Naj bo A z R dobro urejena in naj bosta $x, y \in A$. Potem je $\{x, y\}$ neprazna podmnožica množice A, torej ima prvi element. Če je to x, velja xRy. Če je to y, velja yRx. V vsakem primeru torej velja: $xRy \vee yRx$. $\square$