3. Množice

Osnovni pojmi matematike nekdaj:

točka, premica, ravnina, število, funkcija, ...

Teorija množic: Georg Cantor

edini osnovni pojem: množica

vse mat. objekte definiramo kot neke množice.

Zgled: definicija nar. števil

$0 = \{\}$ prazna množica $\emptyset$

$1 = \{0\}$

$2 = \{0, 1\}$

$\vdots$

$n+1 = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$\vdots$

3.1. Podajanje množic

osnovna relacija: pripadnost $\in$

$x \in y$ ... x je element y-a, x pripada y-u

Aksiom ekstenzionalnosti (AE).

$$\forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$$

Če imata množici iste elte, sta enaki.
elemente

Majhne končne množice podamo z naštetjem eltov.

Npr.: $A = \{1, 4, 9\}$

Sicer množice podamo z neko izj. formulo $\varphi(x)$, kjer prosto nastopa le x.

Rečemo: $A = \{x; \varphi(x)\}$

To je okrajšava za formulo:

$$\forall x : (x \in A \Leftrightarrow \varphi(x))$$

$$\forall x : (x \in A \Leftrightarrow \varphi(x))$$

oziroma : $a \in A \Leftrightarrow \varphi(a)$.

Zgledi.

$$A = \{x;\ \overbrace{x=1 \vee x=4 \vee x=9}^{\varphi(x)}\}$$

$$B = \{x;\ x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$$ mn. pozitivnih realnih št.

$$C = \{x;\ \exists y : (y \in \mathbb{N} \wedge x = 2y+1)\}$$ mn. lihih nar. št.

$$D' = \{x;\ \underbrace{x \neq x}_{\varphi(x)}\} = \emptyset$$

$$E = \{x;\ \overbrace{x \notin x}^{\varphi(x)}\}$$ Russellova množica

množice, ki so (?) same svoj element:
- množica vseh množic
- množica vseh nepraznih mn.
- " " množic z vsaj 3 elti

Russellovo vprašanje:

Ali $E \in E$? Russellova antinomija

? Po def. mn. E velja:

$$E \in E \Leftrightarrow \varphi(E) \Leftrightarrow E \notin E$$

Naj bo ψ:

$$\underbrace{\exists y \forall x : (R(x,y) \Leftrightarrow \neg R(x,x))}_{\text{protislovna formula}}$$

Interpretacija I: $D = \{x;\ x = x\} \ldots$ razred vseh mn.

$x R y \ \ldots \ x \in y$

$$\psi : \exists y \forall x : (x \in y \Leftrightarrow x \notin x)$$

$y = E$

ψ protislovna $\Rightarrow$ $\neg\psi$ logično veljavna $\Rightarrow$ resnična v I

$\Rightarrow$ Russellova množica ne obstaja.

Kako „popraviti" način podajanja množic?

A) NBG (von Neumann – Bernays – K. Gödel)

osnovni pojem razred,

nekateri razredi so množice,

drugi so pravi razredi.

Def. Razred A je množica, če $\exists B: A \in B$.

Oznaka: $M(x)$ ... x je množica

Mn. A podamo:

$$A = \{x;\ \underbrace{\varphi(x) \wedge M(x)}_{\varphi(x)}\}$$

Def. $R = \{x;\ x \notin x \wedge M(x)\}$

Ali $R \in R$? NE.

Velja: $R \in R \iff R \notin R \wedge M(R)$ ✓

$$\sim (\underbrace{R \in R \wedge R \notin R}_{0} \wedge M(R)) \vee (R \notin R \wedge (R \in R \vee \neg M(R)))$$

$$\sim (\underbrace{R \notin R \wedge R \in R}_{0}) \vee (R \notin R \wedge \neg M(R))$$

$$\sim R \notin R \wedge \neg M(R)$$

R ni množica

$\Rightarrow$ R je pravi razred.

B) Teorija ZFC (Zermelo–Fraenklova teorija z aksiomom izbire)

edini osn. pojem: množica

Privzamemo eksistenčne aksiome, ki

Privzamemo <u>eksistenčne aksiome</u>, ki zagotavljajo obstoj dovolj „majhnih" množic.

<u>Standardna interpretacija</u>:

$D = V = \{ x;\ x = x \}$ ... razred vseh množic

$x \in y$ ... relacija pripadnosti

$x = y$ ... " enakosti

3.2. Relacije med množicami

Enakost v matematiki pojmujemo kot istost.

<u>Načelo zamenljivosti enakega z enakim</u>

<u>(EE)</u>: Če je $A = B$, potem vse tisto, kar velja za A, velja tudi za B in obratno.

<u>Trditev 1.</u> $\underline{A = B} \iff \forall x : (x \in A \iff x \in B)$.

<u>Dokaz</u>: $(\Leftarrow)$ To je AE. ✓

$(\Rightarrow)$ $x \in A \overset{EE}{\Longrightarrow} x \in B$

$x \in B \overset{EE}{\Longrightarrow} x \in A$

Torej: $\forall x : (x \in A \iff x \in B)$ ✓

<u>Zgled.</u> 1. $\{b, a\} = \{a, b\}$ (neurejen) par

2. $\{a, a, a\} = \{a\}$ enojček (singleton)

3. $\{b, c, a, a, c, b, b\} = \{a, b, c\}$

<u>Posledica.</u> (i) $A = A$ (refleksivnost)

(ii) $A = B \Rightarrow B = A$ (simetričnost)

(iii) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$ (tranzitivnost)

(ii) $A = B \Rightarrow B = A$ (simetričnost)

(iii) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$ (tranzitivnost)

Dokaz (iii):

$$A = B \wedge B = C \overset{\text{trditev}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\forall x: (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \wedge \forall x: (x \in B \Leftrightarrow x \in C)}$$

$$\overset{PR}{\Longleftrightarrow} \forall x: ((\underbrace{x \in A \Leftrightarrow x \in B}) \wedge (\underbrace{x \in B \Leftrightarrow x \in C}))$$

$x \in A \Rightarrow x \in B$,
$x \in B \Rightarrow x \in C$
$\overset{HS}{\models} x \in A \Rightarrow x \in C$

$$\overset{2\times HS}{\Longrightarrow} \forall x: (x \in A \Leftrightarrow x \in C)$$

$$\Longleftrightarrow A = C \checkmark$$

Relacija inkluzije $\subseteq$

Def. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)$

beremo: A je podmnožica B, A je vsebovana v B

Okrajšava: Namesto $\neg(A \subseteq B)$ pišemo $A \not\subseteq B$.

Trditev 2. $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

Dokaz: $A = B \overset{\text{trd.1.}}{\Longleftrightarrow} \forall x: (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$\overset{IR}{\Longleftrightarrow} \forall x: ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$

$\overset{PR}{\Longleftrightarrow} \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x: (x \in B \Rightarrow x \in A)$

$\Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A. \checkmark$

Aksiomska shema o podmnožicah (ASP)

Če B obstaja in je $\varphi(x)$ izj. formula, v kateri prosto nastopa le x, obstaja množica

$$A = \{x;\ \overbrace{x \in B \wedge \varphi(x)}\}$$

oz.:

$$\forall B\ \exists A\ \forall x: (x \in A \Leftrightarrow x \in B \wedge \varphi(x)).$$

Def. Mn. A je prazna, če $\forall x: x \notin A$.

Posledica. V ASP za $\varphi(x)$ vzamemo $x \neq x$.
Potem: $\forall B \exists A \forall x: (x \in A \Leftrightarrow x \in B \wedge \underbrace{\underbrace{x \neq x}_{0}}_{0})$

$\Leftrightarrow \forall B \exists A \forall x: (x \in A \Leftrightarrow 0)$
$\overset{IR}{\Leftrightarrow} \forall B \exists A \forall x: x \notin A$
$\overset{PR}{\Leftrightarrow} \exists A \forall x: x \notin A$

Z besedami: Prazna mn. obstaja. ✓

Posledica. Razred vseh množic $V = \{x;\ x = x\}$ je pravi razred.

Dokaz: Recimo: V množica. Potem po ASP obstaja
$$A = \{x;\ \underbrace{x \in V}_{1} \wedge x \notin x\} = \{x;\ x \notin x\} = E,$$
ki ne obstaja. Torej: V je pravi razred. ✓

Aksiom o paru (AP).
Če obstajata u in v, obstaja $A = \{u, v\}$
$$= \{x;\ x = u \vee x = v\}.$$

Posledica. Če obstaja u, obstaja $A = \{u\}$.

Dokaz: V AP vzamemo $v = u$. ✓

Zgled. $0 = \emptyset$ obstaja ✓
Potem: $1 = \{0\}$ # po posledici
$2 = \{0, 1\}$ obstaja po AP.

Izrek. Za vse A, B, C velja:
(i) $A \subseteq A$ (refleksivnost)
(ii) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (antisimetričnost)

(iii) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$

(tranzitivnost)

(iv) $\emptyset \subseteq A$

(v) $A \subseteq \emptyset \iff A = \emptyset$.