Poglavje 4

Relacije in funkcije

4.5 Funkcije

Izrek 1 *Naj bo $f : A \to B$ in $g : B \to A$. Potem velja:*

$$f \circ g = \mathrm{id}_B \wedge g \circ f = \mathrm{id}_A \implies f \textit{ in } g \textit{ sta bijekciji } \wedge g = f^{-1} \wedge f = g^{-1}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} f \circ g &= \mathrm{id}_B \implies g \text{ injekcija, } f \text{ surjekcija} \\ g \circ f &= \mathrm{id}_A \implies f \text{ injekcija, } g \text{ surjekcija} \end{aligned}$$

Torej sta f in g bijekciji in velja:

$$\begin{aligned} g &= \mathrm{id}_A \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \mathrm{id}_B = f^{-1}, \\ f &= f \circ \mathrm{id}_A = f \circ (g \circ g^{-1}) = (f \circ g) \circ g^{-1} = \mathrm{id}_B \circ g^{-1} = g^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

4.5.3 Družine množic

Definicija 1 *Naj bo M množica množic in $\mathcal{I}$ poljubna množica. Surjektivno preslikavo $\mathcal{A}\colon \mathcal{I} \to M$ imenujemo tudi* družina množic z indeksno množico $\mathcal{I}$*.*

Pisava: Za $\lambda \in \mathcal{I}$ namesto $\mathcal{A}(\lambda)$ pišemo A_λ, družino pa namesto z $\mathcal{A}$ ponavadi označujemo z $(A_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{I}}$.

Zgled 1 1. Družino množic $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ imenujemo *zaporedje množic*.

2. Identična preslikava $\mathrm{id}_A : A \to A$ je surjektivna, torej je to tudi družina množic z indeksno množico A. Če namesto spremenljivke λ uporabimo spremenljivko x, lahko zapišemo: $\mathrm{id}_A = (x)_{x \in A}$.

3. Družina $(A_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{I}}$ je *prazna*, če je $\mathcal{I} = \emptyset$.

Definicija 2 *1. Naj bo $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{I}}$ družina množic. Množica*

$$\bigcup_{\lambda \in \mathcal{I}} A_\lambda = \{x;\ \exists \lambda \in \mathcal{I}\colon\ x \in A_\lambda\}$$

je unija družine *$\mathcal{A}$.*

2. Naj bo $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{I}}$ neprazna[1] družina množic. Množica

$$\bigcap_{\lambda \in \mathcal{I}} A_\lambda = \{x;\ \forall \lambda \in \mathcal{I}\colon\ x \in A_\lambda\}$$

je presek družine *$\mathcal{A}$.*

Kako posplošiti kartezični produkt n množic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\colon x_i \in A_i\}$$

na poljubno družino množic? Urejeno n-terico $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lahko identificiramo z množico urejenih parov $\{(1, x_1), (2, x_2), \ldots, (n, x_n)\}$, torej s preslikavo

$$f\colon\ \{1, 2, \ldots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

kjer za vse $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ velja: $f(i) = x_i \in A_i$.

Definicija 3 *Naj bo $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{I}}$ družina množic. Preslikava*

$$f\colon\ \mathcal{I} \to \bigcup_{\lambda \in \mathcal{I}} A_\lambda$$

pri kateri za vse $\lambda \in \mathcal{I}$ velja: $\underline{f(\lambda) \in A_\lambda}$, je funkcija izbire *za $\mathcal{A}$.*

Definicija 4 Kartezični produkt družine množic $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{I}}$ *je množica vseh funkcij izbire za družino $\mathcal{A}$, torej*

$$\prod_{\lambda \in \mathcal{I}} A_\lambda = \{f\colon\ \mathcal{I} \to \bigcup_{\lambda \in \mathcal{I}} A_\lambda;\ \forall \lambda \in \mathcal{I}\colon f(\lambda) \in A_\lambda\}.$$

[1]Kot za presek prazne množice množic tudi za presek prazne družine množic velja, da je enak razredu vseh množic V in torej v teoriji ZFC ne obstaja, saj je pogoj $\forall \lambda \in \emptyset :\ x \in A_\lambda$ oziroma $\forall \lambda\colon (\lambda \in \emptyset \Rightarrow\ x \in A_\lambda)$ "na prazno" izpolnjen za vsako množico x.

Kartezični produkt končno mnogo množic je neprazen natanko tedaj, ko so vsi faktorji neprazni. Ali velja to tudi za kartezični produkt poljubne družine množic?

Če je katera od množic A_λ prazna, je očitno prazen tudi kartezični produkt $\prod_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda$, saj tedaj funkcije izbire za družino $A = (A_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{I}}$ ne obstajajo. Ali velja tudi obratno – ali je torej kartezični produkt družine *nepraznih množic* vedno neprazen? Izkaže se, da iz aksiomov teorije ZF (ob predpostavki, da so neprotislovni) ne sledi niti pozitiven niti negativen odgovor na to vprašanje. V skladu s prevladujočo prakso v matematiki se odločimo za teorijo ZFC, v kateri je odgovor pozitiven zaradi naslednjega aksioma.

Aksiom izbire (AC). Kartezični produkt poljubne družine *nepraznih množic* je neprazen, ali s formulo:

$$\forall\lambda\in\mathcal{I}\colon A_\lambda \neq \emptyset \implies \prod_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda \;\neq\; \emptyset.$$

Zgled 2 V skladu z AC mora biti tudi kartezični produkt prazne družine množic neprazen, saj je pri prazni družini pogoj nepraznosti vseh njenih članov "na prazno" izpolnjen. Poglejmo, če to drži.

Naj bo f funkcija izbire za prazno družino $(A_\lambda)_{\lambda\in\emptyset}$. Potem $f\colon \emptyset \to \bigcup_{\lambda\in\emptyset} = \emptyset$, torej je f prazna funkcija $f = \emptyset$ in je

$$\prod_{\lambda\in\emptyset} A_\lambda \;=\; \{\emptyset\} \;\neq\; \emptyset.\ \surd$$

Aksiom izbire ima nekatere presenetljive posledice, zaradi katerih so se logiki bali, da bi utegnil voditi v protislovje. Ena takih posledic je npr. obstoj *nemerljivih podmnožic* v evklidskem prostoru, t.j. množic, ki nimajo določene prostornine: s pomočjo AC lahko recimo dokažemo, da je mogoče *eno* polno trirazsežno kroglo s polmerom r razdeliti na pet (nemerljivih) podmnožic, iz katerih lahko z vzporednimi premiki in zasuki sestavimo *dve* polni trirazsežni krogli s polmerom r (t. im. *paradoks Banacha in Tarskega*). Vendar je Kurt Goedel ob predpostavki, da teorija ZF ni protislovna, dokazal, da tudi teorija ZFC ni protislovna, zato je ta pomislek odpadel. Drugi pomislek, ki ostaja še danes, pa je nekonstruktivnost aksioma izbire, saj nam ne nakazuje nobenega postopka, s katerim bi lahko poiskali oziroma konstruirali funkcijo izbire, katere obstoj zagotavlja. Ker pa v teoriji ZF nekaterih trditev, ki se nam po občutku zdijo resnične, brez AC ne moremo dokazati, pri nekaterih drugih, ki so sicer dokazljive v ZF, pa lahko z uporabo AC močno skrajšamo dokaze, ga večina matematikov sprejema.

4.5.4 Slike in praslike

Vsaka preslikava $f\colon A\to B$ na naraven način porodi preslikavi $f_*\colon \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ in $f^*\colon \mathcal{P}B \to \mathcal{P}A$ (imenovani *f-slika* oziroma *f-praslika*) takole:

Definicija 5 *Naj bo $f\colon A \to B$, $A_1 \subseteq A$ in $B_1 \subseteq B$.*

1. *Množico*

$$f_*(A_1) \;=\; \{y \in B;\ \exists x \in A_1 \colon y = f(x)\} \;=\; \{f(x);\ x \in A_1\}$$

imenujemo slika množice A_1 *pri preslikavi* f.

2. *Množico*

$$f^*(B_1) \;=\; \{x \in A;\ f(x) \in B_1\}$$

imenujemo praslika množice B_1 *pri preslikavi* f.

Trditev 1 *Naj bo $f\colon A \to B$, $A_1, A_2 \subseteq A$ in $B_1, B_2 \subseteq B$. Velja:*

1. $A_1 \subseteq f^*(f_*(A_1))$
   Če je f injektivna, velja enačaj.
2. $f_*(f^*(B_1)) \subseteq B_1$
   Če je f surjektivna, velja enačaj.
3. $A_1 \subseteq A_2 \implies f_*(A_1) \subseteq f_*(A_2)$
4. $B_1 \subseteq B_2 \implies f^*(B_1) \subseteq f^*(B_2)$

Dokaz: 1. $x \in A_1 \implies f(x) \in f_*(A_1) \iff x \in f^*(f_*(A_1))$
Če je f injekcija, velja prva implikacija tudi v obratni smeri:
$f(x) \in f_*(A_1) \implies \exists y \in A_1 \colon f(x) = f(y) \implies \exists y \in A_1 \colon x = y \implies x \in A_1$

2. $y \in f_*(f^*(B_1)) \iff \exists x \in f^*(B_1) \colon y = f(x)$
$\iff \exists x : (f(x) \in B_1 \wedge y = f(x)) \implies y \in B_1$

Če je f surjekcija, velja zadnja implikacija tudi v obratni smeri:
$y \in B_1 \implies \exists x \in A \colon (y = f(x) \wedge y \in B_1) \implies \exists x : (f(x) \in B_1 \wedge y = f(x))$

3. $y \in f_*(A_1) \implies \exists x \in A_1 \colon y = f(x) \implies \exists x \in A_2 \colon y = f(x)$
$\implies y \in f_*(A_2)$

4. $x \in f^*(B_1) \implies f(x) \in B_1 \implies f(x) \in B_2 \implies x \in f^*(B_2)$ $\square$

Trditev 2 *Naj bo $f : X \to Y$, $(A_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{I}}$ neka družina podmnožic množice X in $(B_\mu)_{\mu\in\mathcal{J}}$ neka družina podmnožic množice Y. Velja:*

1. $f_*\left(\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda\right) \;=\; \bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} f_*(A_\lambda)$

2. $\mathcal{I} \neq \emptyset \implies f_*\left(\bigcap_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\mathcal{I}} f_*(A_\lambda)$

   Če je f injektivna, velja enačaj.

3. $f^*\left(\bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu\right) = \bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} f^*(B_\mu)$

4. $\mathcal{J} \neq \emptyset \implies f^*\left(\bigcap_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu\right) = \bigcap_{\mu\in\mathcal{J}} f^*(B_\mu)$

Dokaz: 1. $y \in f_*(\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda) \iff \exists x \in \bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda : y = f(x)$

$\iff \exists x\, \exists\lambda \in \mathcal{I} \colon (x \in A_\lambda \wedge y = f(x)) \iff \exists\lambda \in \mathcal{I}\, \exists x \colon (x \in A_\lambda \wedge y = f(x))$

$\iff \exists\lambda \in \mathcal{I} \colon y \in f_*(A_\lambda) \iff y \in \bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} f_*(A_\lambda)$

2. $y \in f_*(\bigcap_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda) \iff \exists x \in \bigcap_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda : y = f(x)$

$\iff \exists x\, \forall\lambda \in \mathcal{I} \colon (x \in A_\lambda \wedge y = f(x)) \implies \forall\lambda \in \mathcal{I}\, \exists x \colon (x \in A_\lambda \wedge y = f(x))$

$\iff \forall\lambda \in \mathcal{I}\, \exists x \in A_\lambda : y = f(x) \iff \forall\lambda \in \mathcal{I} \colon y \in f_*(A_\lambda)$

$\iff y \in \bigcap_{\lambda\in\mathcal{I}} f_*(A_\lambda)$

Če je f injekcija, velja implikacija v drugi vrstici tudi v obratni smeri: predpostavimo, da velja $\forall\lambda \in \mathcal{I}\, \exists x : (x \in A_\lambda \wedge y = f(x))$. Vzemimo poljuben $\lambda_0 \in \mathcal{I} \neq \emptyset$ in naj bo torej $x_0 \in A_{\lambda_0}$ tak, da je $y = f(x_0)$. Naj bo $\lambda \in \mathcal{I}$ poljuben in naj bo $x \in A_\lambda$ tak, da je $y = f(x)$. Potem je $f(x) = y = f(x_0)$, od tod pa zaradi injektivnosti f sledi $x = x_0$. Zato za vse $\lambda \in \mathcal{I}$ velja: $x_0 \in A_\lambda$ in $y = f(x_0)$, torej $\exists x\, \forall\lambda \in \mathcal{I} \colon (x \in A_\lambda \wedge y = f(x))$.

3. $x \in f^*(\bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu) \iff f(x) \in \bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu \iff \exists\mu \in \mathcal{J} : f(x) \in B_\mu$

$\iff \exists\mu \in \mathcal{J} : x \in f^*(B_\mu) \iff x \in \bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} f^*(B_\mu)$

4. $x \in f^*(\bigcap_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu) \iff f(x) \in \bigcap_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu \iff \forall\mu \in \mathcal{J} : f(x) \in B_\mu$

$\iff \forall\mu \in \mathcal{J} : x \in f^*(B_\mu) \iff x \in \bigcap_{\mu\in\mathcal{J}} f^*(B_\mu)$ $\square$

Trditev 3 *Naj bo $f \colon A \to B$ in $B_1 \subseteq B$. Potem je $f^*(B \setminus B_1) = A \setminus f^*(B_1)$.*

Dokaz: Naj bo $x \in A$. Potem je $f(x) \in B$ in velja:

$$\begin{aligned} x \in f^*(B \setminus B_1) &\iff f(x) \in B \setminus B_1 \iff f(x) \notin B_1 \\ &\iff x \notin f^*(B_1) \iff x \in A \setminus f^*(B_1). \end{aligned}$$

Ker je bil $x \in A$ poljuben, je trditev dokazana. $\square$

Poglavje 5

Strukture urejenosti

Struktura urejenosti je urejen par (A, R), kjer je A množica in R dvomestna relacija v A. Glede na lastnosti relacije R razlikujemo več tipov struktur urejenosti.

5.1 Delna in linearna urejenost

Definicija 6 *Naj bo $R \subseteq A \times A$.*

1. *Relacija R* delno ureja *množico A, če je*
   (a) *refleksivna,*
   (b) *antisimetrična in*
   (c) *tranzitivna.*
2. *Relacija R* linearno ureja *množico A, če je*
   (a) *refleksivna,*
   (b) *antisimetrična,*
   (c) *tranzitivna in*
   (d) *sovisna.*

Zgled 3 1. Relacija inkluzije $\subseteq$ delno ureja vsako množico množic.

2. Relacija deljivosti $|$, definirana za vse $a, b \in \mathbb{N}$ s formulo

$$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{N} \colon b = ka,$$

delno ureja vsako podmnožico množice naravnih števil $\mathbb{N}$.

3. Relacija $\leq$ linearno ureja vsako podmnožico množice realnih števil $\mathbb{R}$.

Pisava. Za splošno relacijo delne urejenosti v množici A namesto oznake R pogosto uporabljamo simbol $\leq$ in izjavno formulo $x \leq y$ beremo: *x je pod y*.