sreda, 04. november 2020 09:47

Zgled. $\mathcal{F} = \{ P(a), P(x), \forall x: P(x), P(f(a,b)) \}$

interpretacija I:

$D = \mathbb{N}$, $\bar{a} = 2$, $\bar{b} = 3$, $\bar{P}(x)$ … x je praštevilo,

$\bar{f}(x,y) = 2x + y$

$\overline{f(a,b)} = \bar{f}(\bar{a},\bar{b}) = 2\bar{a} + \bar{b} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

izj. formula φ	prevod $\bar{\varphi}$	komentar
$P(a)$	2 je praštevilo	resnična izjava
$P(x)$	x je praštevilo	ni izjava
$\forall x: P(x)$	vsako nar. št. je praštevilo	lažna izjava
$P(f(a,b))$	7 je praštevilo	resn. izjava

Opazimo: 1. zaprtim termom ustrezajo elementi D
2. vsaki zaprti izj. formuli φ ustreza izjava $\bar{\varphi}$ (resnična ali lažna)

Zgled. $\varphi = \forall x \exists y: R(x,y)$

interpretacija	izjava $\bar{\varphi}$	komentar
I_1: $D = \mathbb{N}$, $\bar{R}(x,y)$ … $x < y$	za vsako nar. št. obstaja večje nar. št.	resnična izjava
I_2: $D = \mathbb{N}$, $\bar{R}(x,y)$ … $x > y$	za vsako nar. št. obstaja manjše nar. št.	lažna izjava
I_3: $D = \mathbb{Z}$, $\bar{R}(x,y)$ … $x > y$	za vsako celo št. obstaja manjše celo št.	resnična izjava
I_4: $D = \{\text{vsi ljudje}\}$, $\bar{R}(x,y)$ … x ima rad y-a	vsakdo ima nekoga rad	resnična izjava (sam sebe?)

Pogosto uporabljamo izj. formule, ki

Pogosto uporabljamo izj. formule, ki niso zaprte, npr.:

seštevanje je komutativno: $x+y = y+x$

tihi privzetek: to je pravzaprav izj. formula:

$$\forall x \forall y : (x+y = y+x).$$

Def. φ izj. formula, $x_1, \dots, x_n$ vse indiv. sprem., ki prosto nastopajo v φ. Potem je

$$Z(\varphi) = \forall x_1 \cdots \forall x_n : \varphi$$

univerzalno zaprtje formule φ.

Def. Izj. formula φ je resnična v interpr. I, če je resnična izjava $\overline{Z(\varphi)}$.

Pišemo: $I \models \varphi$.

2.4. Logično veljavne formule in enakovrednosti

Def. Izj. formula φ je:

1. logično veljavna, če je resnična v vseh interpretacijah;
2. protislovna, če je lažna v vseh int.

Zgled. P, Q enomestna predikata

$$\varphi = (\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x) \Rightarrow \forall x : (P(x) \vee Q(x)))$$

Trdimo: φ je logično veljavna.

Naj bo I poljubna int. φ.

Predpostavimo: $I \models \forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x)$

Předpostavimo: $I \models \forall x: P(x) \vee \forall x: Q(x)$

Vzemimo poljuben $x_0 \in D$. Ločimo dva primera:

a) $I \models \forall x: P(x)$: potem $I \models P(x_0)$

b) $I \models \forall x: Q(x)$: potem $I \models Q(x_0)$

Torej $I \models P(x_0) \vee Q(x_0)$

Ker $x_0 \in D$ poljuben, velja

$$I \models \forall x: (P(x) \vee Q(x))$$

Po PS zaključimo: $I \models \forall x: P(x) \vee \forall x: Q(x) \Rightarrow \forall x: (P(x) \vee Q(x))$

oziroma $I \models \varphi$.

Ker je I poljubna int., je φ logično veljavna. ✓

Zgled. Naj bo

$$\psi = \overbrace{\forall x: (P(x) \vee Q(x))}^{\psi_1} \Rightarrow \overbrace{\forall x: P(x) \vee \forall x: Q(x)}^{\psi_2}$$

Trdimo: ψ ni logično veljavna.

Zadošča poiskati int. I, v kateri ψ ni resnična.

I: $D = \mathbb{N}$, $P(x) \ldots$ x je sodo št.,

$Q(x) \ldots$ x je liho št.

$\overline{\psi_1}$: Vsako nar. št. je sodo ali liho. RES

$\overline{\psi_2}$: Vsa nar. števila so soda ali pa so vsa nar. števila liha. NI RES

Torej: ψ je v I lažna. $\psi = \psi_1 \Rightarrow \psi_2$

$\Rightarrow \psi$ ni logično veljavna.

Zgled. $\chi = \exists y \forall x: (R(x,y) \Leftrightarrow \neg R(x,x))$

Trdimo: χ protislovna

Naj bo I polj. int.

Recimo: $I \models \chi$. Torej obstaja $y_0 \in D$, Recimo: $I \models \chi$. Torej obstaja $y_0 \in D$,

tako da velja: $\forall x: (R(x,y_0) \Leftrightarrow \neg R(x,x))$.

Sledi: velja $R(y_0,y_0) \Leftrightarrow \neg R(y_0,y_0)$.

To je protislovje, torej χ ni res. v I.

Ker I poljubna, je χ protislovna. ✓

Def. Izj. formuli φ in ψ sta enakovredni, če je formula $\varphi \Leftrightarrow \psi$ logično veljavna.

Pišemo: $\varphi \sim \psi$.

Izrek. φ, ψ poljubni izj. formuli,

x, y ‖ indiv. spremenljivki.

Potem:

1. $\neg \forall x: \varphi \sim \exists x: \neg\varphi$
2. $\neg \exists x: \varphi \sim \forall x: \neg\varphi$
3. $\forall x \forall y: \varphi \sim \forall y \forall x: \varphi$
4. $\exists x \exists y: \varphi \sim \exists y \exists x: \varphi$
5. $\forall x: (\varphi \wedge \psi) \sim \forall x: \varphi \wedge \forall x: \psi$
6. $\exists x: (\varphi \vee \psi) \sim \exists x: \varphi \vee \exists x: \psi$
7. $\forall x: (\varphi \vee \psi) \sim \forall x: \varphi \vee \psi$, če x ne nastopa prosto v ψ
8. $\exists x: (\varphi \wedge \psi) \sim \exists x: \varphi \wedge \psi$, če x ne nastopa prosto v ψ
9. $\forall x: \varphi \sim \varphi$, če x ne nastopa prosto v φ
10. $\exists x: \varphi \sim \varphi$, ‖
11. $\forall x: \varphi(x) \sim \forall y: \varphi(y)$, če y <u>ne nastopa</u> v $\varphi(x)$
12. $\exists x: \varphi(x) \sim \exists y: \varphi(y)$, ‖

Zgled. Za vsako izj. formulo φ obstaja enakovr. formula ψ, pri kateri stojijo vsi kvantifikatorji na začetku formule. Rečemo, da je ψ v **preneksni obliki**.

a) $\neg(\forall x\, \exists y: R(x,y)) \sim \underline{\exists x\, \forall y: \neg R(x,y)}$

b) $\exists x: P(x) \wedge \exists x: Q(x) \sim \exists x: P(x) \wedge \exists y: Q(y)$

$\sim \exists x: (P(x) \wedge \exists y: Q(y))$

$\sim \underline{\exists x\, \exists y: (P(x) \wedge Q(y))}$

2.5. Sklepanje in dokazovanje v PR

Def. Končno zaporedje izj. formul $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi$ je **pravilen** ali **veljaven sklep**, če je izj. formula

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \Rightarrow \psi$$

logično veljavna. ($\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ... predpostavke, ψ ... zaključek)

Pišemo: $\varphi_1, \dots, \varphi_k \models \psi$ (iz predp. $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ logično sledi z. ψ).

Zgled. Dokažimo:

$$P(a),\ \forall x: (P(x) \Rightarrow Q(x)) \models Q(a).$$

Dokaz: Naj bo I polj. interpr.

Dokažimo: $P(a) \wedge \forall x: (P(x) \Rightarrow Q(x)) \overset{(*)}{\Rightarrow} Q(a)$ je resnična v I.

Privzemimo: $I \models P(a) \wedge \forall x: (P(x) \Rightarrow Q(x))$

torej: $I \models P(a)$, $I \models \forall x: (P(x) \Rightarrow Q(x))$

torej: $I \models \underbrace{P(a)}$, $I \models \forall x: (P(x) \Rightarrow Q(x))$

sledi: $I \models \underbrace{P(a) \Rightarrow Q(a)}$,

MP: $I \models Q(a)$

Po PS je $(*)$ resnična v I. ✓