Poglavje 3

Množice

3.2 Relacije med množicami

3.2.3 Relacija stroge inkluzije ($\subset$)

Definicija 1

$$A \subset B \iff A \subseteq B \;\wedge\; A \neq B$$

Beremo: *A je prava podmnožica B*, ali tudi: *A je strogo vsebovana v B*. Namesto $\neg(A \subset B)$ pišemo $A \not\subset B$.

Trditev 1

$$A \subset B \iff A \subseteq B \;\wedge\; \exists x\colon (x \in B \wedge x \notin A).$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
A \subset B &\overset{\text{def. 1}}{\iff} A \subseteq B \;\wedge\; A \neq B \\
&\iff A \subseteq B \;\wedge\; \neg(A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A) \\
&\overset{\text{IR}}{\Longrightarrow} A \subseteq B \;\wedge\; (A \nsubseteq B \;\vee\; B \nsubseteq A) \\
&\overset{\text{IR}}{\Longrightarrow} 0 \;\vee\; (A \subseteq B \;\wedge\; B \nsubseteq A) \\
&\overset{\text{def. 1}}{\iff} A \subseteq B \;\wedge\; \neg\forall x\colon (x \in B \Rightarrow x \in A) \\
&\overset{\text{PR}}{\iff} A \subseteq B \;\wedge\; \exists x\colon \neg(x \in B \Rightarrow x \in A) \\
&\overset{\text{IR}}{\iff} A \subseteq B \;\wedge\; \exists x\colon (x \in B \wedge x \notin A) \;\checkmark
\end{aligned}$$

$\square$

Izrek 1 (lastnosti stroge inkluzije) *Za vse množice A, B, C velja:*

(i) $A \not\subset A$ *(irefleksivnost stroge inkluzije)*

(ii) $A \subset B \implies B \not\subset A$ *(asimetričnost stroge inkluzije)*

(iii) $A \subset B \ \wedge \ B \subset C \implies A \subset C$ *(tranzitivnost stroge inkluzije)*

Dokaz: (iii): Iz $A \subset B \ \wedge \ B \subset C$ po definiciji 1 sledi

$$A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C \ \wedge \ A \neq B \ \wedge \ B \neq C, \tag{3.1}$$

torej zaradi tranzitivnosti inkluzije velja $A \subseteq C$. Predpostavimo, da je $A = C$. Potem je

$$C \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C,$$

torej velja $B = C$. To pa je v protislovju s trditvijo (3.1). Zaključimo, da predpostavka $A = C$ ni resnična in je $A \subset C$. □

3.3 Operacije z množicami

3.3.1 Unija, presek, razlika, Boolova vsota

Definicija 2

$$\begin{array}{rcll} A \cup B &=& \{x;\ x \in A \ \vee \ x \in B\} & \textit{unija} \text{ množic } A \text{ in } B \\ A \cap B &=& \{x;\ x \in A \ \wedge \ x \in B\} & \textit{presek} \text{ množic } A \text{ in } B \\ A \setminus B &=& \{x;\ x \in A \ \wedge \ x \notin B\} & A \text{ brez } B;\ \textit{razlika} \text{ množic } A \text{ in } B \\ A \oplus B &=& \{x;\ x \in A \ + \ x \in B\} & \textit{Boolova vsota} \text{ ali } \textit{simetrična razlika} \\ &&& \text{množic } A \text{ in } B \end{array}$$

Trditev 2 *Za poljubni množici A in B obstajata množici $A \cap B$ in $A \setminus B$.*

Dokaz: Ker množica A obstaja, po ASP obstajata tudi množici

$$\begin{array}{l} A \cap B = \{x;\ x \in A \wedge \varphi(x)\} \quad \text{in} \\ A \setminus B = \{x;\ x \in A \wedge \psi(x)\}, \end{array}$$

kjer je $\varphi(x) \ = x \in B$ in $\psi(x) \ = x \notin B$. □

Obstoj unije in Boolove vsote bomo dokazali malo kasneje.

Izrek 2 *Za vse množice A, B, C velja:*

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A & A \setminus \emptyset &= A & A \oplus \emptyset &= A \\ A \cap \emptyset &= \emptyset & \emptyset \setminus A &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup A &= A && \textit{idempotenca unije} \\ A \cap A &= A && \textit{idempotenca preseka} \\ A \setminus A &= \emptyset \\ A \oplus A &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A && \textit{komutativnost unije} \\ A \cap B &= B \cap A && \textit{komutativnost preseka} \\ A \oplus B &= B \oplus A && \textit{komutativnost Boolove vsote} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C && \textit{asociativnost unije} \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C && \textit{asociativnost preseka} \\ A \oplus (B \oplus C) &= (A \oplus B) \oplus C && \textit{asociativnost Boolove vsote} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= A && \textit{absorpcija unije glede na presek} \\ A \cap (A \cup B) &= A && \textit{absorpcija preseka glede na unijo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) && \textit{distributivnost unije glede na presek} \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) && \textit{distributivnost preseka glede na unijo} \\ A \cap (B \oplus C) &= (A \cap B) \oplus (A \cap C) && \textit{distributivnost preseka glede na Boolovo vsoto} \end{aligned}$$

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$\begin{aligned} A \cap B &\subseteq A \subseteq A \cup B \\ A \cap B &\subseteq B \subseteq A \cup B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\implies A \cup C \subseteq B \cup C && \textit{monotonost unije glede na inkluzijo} \\ A \subseteq B &\implies A \cap C \subseteq B \cap C && \textit{monotonost preseka glede na inkluzijo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\iff A \cup B = B \\ A \subseteq B &\iff A \cap B = A \\ A \subseteq B &\iff A \setminus B = \emptyset \end{aligned}$$

Dokaz: Naštete trditve sledijo iz ustreznih lastnosti izjavnih veznikov, s katerimi so definirane operacije in relacije, ki v njih nastopajo. Dokažimo le zadnjo ekvivalenco:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\overset{\text{def.} \subseteq}{\iff} \forall x\colon (x \in A \implies x \in B) \\ &\overset{\text{IR}}{\iff} \forall x\colon \neg\neg(x \in A \implies x \in B) \\ &\overset{\text{IR}}{\iff} \forall x\colon \neg(x \in A \land x \notin B) \\ &\overset{\text{def.} \setminus}{\iff} \forall x\colon \neg(x \in A \setminus B) \\ &\overset{\text{def.} \emptyset}{\iff} A \setminus B = \emptyset \ \surd \end{aligned}$$

□

Zdaj ko imamo na razpolago množice, lahko za krajše pisanje izjavnih formul definiramo *omejene kvantifikatorje*, ki smo jih neformalno sicer že uporabljali.

Definicija 3 *Naj bo A množica in φ neka izjavna formula. Potem je*

$$\begin{array}{lll} \forall x \in A\colon \varphi & \text{okrajšava za izjavno formulo} & \forall x\colon (x \in A \;\Rightarrow\; \varphi), \quad \textit{in} \\ \exists x \in A\colon \varphi & \text{okrajšava za izjavno formulo} & \exists x\colon (x \in A \;\wedge\; \varphi). \end{array}$$

Pripomba 1 *Če $A \neq \emptyset$, za kvantifikatorje, omejene na množico A, veljajo enaki zakoni kot za neomejene kvantifikatorje, npr.:*

$$\begin{aligned} \neg\forall x \in A\colon \varphi &\sim \neg\forall x\colon (x \in A \;\Rightarrow\; \varphi) \\ &\sim \exists x\colon \neg(x \in A \;\Rightarrow\; \varphi) \\ &\sim \exists x\colon (x \in A \;\wedge\; \neg\varphi) \\ &\sim \exists x \in A\colon \neg\varphi \end{aligned}$$

Če je $A = \emptyset$, pa to ni več nujno res. Ker smo privzeli, da je domena interpretacije vselej neprazna, je npr. izjavna formula

$$\forall x\colon \varphi \;\Rightarrow\; \exists x\colon \varphi$$

logično veljavna, medtem ko v primeru $A = \emptyset$ izjavna formula

$$\forall x \in A : \varphi \;\Rightarrow\; \exists x \in A\colon \varphi$$

ni resnična, saj je njen antecedens $\forall x\colon (x \in \emptyset \;\Rightarrow\; \varphi) \sim \forall x\colon (0 \;\Rightarrow\; \varphi)$ resničen, njen konsekvens $\exists x\colon (x \in \emptyset \;\wedge\; \varphi) \sim \exists x\colon (0 \;\wedge\; \varphi)$ pa ne.

Pogosto potrebujemo unijo in/ali presek ne le dveh, ampak treh, štirih, ... ali celo neskončno mnogo množic. Definirajmo torej unijo poljubne množice množic in presek poljubne neprazne množice množic.

Definicija 4 *1. Naj bo A poljubna množica. Potem je*

$$\bigcup A \;=\; \{x;\; \exists y \in A\colon x \in y\}$$

unija množice množic A.

2. Naj bo $A \neq \emptyset$. Potem je

$$\bigcap A \;=\; \{x;\; \forall y \in A\colon x \in y\}$$

presek množice množic A.

Zgled 1 (i) Naj bo $A = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}$. Potem je

$$\bigcup A = \{1,2,3,4,5\}, \quad \bigcap A = \{3\}.$$

(ii) Naj bo $A = \{[\frac{1}{n},1];\ n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\} \ = \ \{[1,1],[\frac{1}{2},1],[\frac{1}{3},1],\ldots$ množica zaprtih intervalov na realni osi. Potem je

$$\bigcup A = (0,1], \quad \bigcap A = \{1\}.$$

Trditev 3 (i) *Naj bo A poljubna množica. Potem*

$$\forall y \in A\colon\ y \subseteq \bigcup A.$$

(ii) *Naj bo $A \neq \emptyset$. Potem*

$$\forall y \in A\colon\ \bigcap A \subseteq y.$$

Dokaz: (ii) Naj bo $y_0 \in A$ in $x \in \bigcap A$. Po definiciji preseka velja $\forall y \in A\colon x \in y$, torej $x \in y_0$. Ker je bil $x \in \bigcap A$ poljuben, je torej $\bigcap A \subseteq y_0$. Ker je bil tudi $y_0 \in A$ poljuben, velja $\forall y \in A\colon\ \bigcap A \subseteq y$. □

Aksiom o uniji (AU). Za vsako množico A obstaja množica $\bigcup A$, ali s formulo:

$$\forall A\, \exists B\, \forall x\colon (x \in B \iff \exists y \in A\colon x \in y).$$

Posledica 1 *Za poljubni množici A in B obstajata množici $A \cup B$ in $A \oplus B$.*

Dokaz: 1. Po aksiomu o paru obstaja množica $C = \{A,B\}$. Po aksiomu o uniji potem obstaja množica $\bigcup C = A \cup B$.

2. Kot že vemo, obstajata množici $A \setminus B$ in $B \setminus A$. Po prvem delu trditve obstaja tudi njuna unija $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \ = \ A \oplus B$. □

Trditev 4 *Naj bo $A \neq \emptyset$. Potem obstaja množica $\bigcap A$.*

Dokaz: Ker je $A \neq \emptyset$, obstaja množica $y_0 \in A$. Po ASP obstaja množica

$$P \ = \ \{x;\ x \in y_0 \wedge \forall y \in A\colon x \in y\}.$$

Ker je $y_0 \in A$, velja implikacija $\forall y \in A\colon x \in y \implies x \in y_0$ in zato tudi ekvivalenca

$$x \in y_0 \wedge \forall y \in A\colon x \in y \iff \forall y \in A\colon x \in y,$$

torej je

$$P \ = \ \{x;\ \forall y \in A\colon x \in y\} \ = \ \bigcap A.$$

□

Pripomba 2 *Če je $A = \emptyset$, dobimo po definiciji 4, da je*

$$\bigcap A \ = \ \bigcap \emptyset \ = \ \{x;\ \forall y \in \emptyset\colon x \in y\} \ = \ \{x;\ \forall y\colon (y \in \emptyset \ \Rightarrow \ x \in y)\} \ = \ V,$$

torej razred vseh množic, ki pa ni množica, ampak pravi razred.

3.3.2 Komplement množice

Pogosto si izberemo neko *univerzalno množico* ali *svet* S in opazujemo samo njene podmnožice.

Definicija 5 *Naj bo* $A \subseteq S$. *Potem je*

$$A^C \;=\; \{x \in S;\; x \notin A\} \;=\; \{x;\; x \in S \;\wedge\; x \notin A\}$$

komplement množice A glede na S.

Očitno za vse $x \in S$ velja: $x \in A^C \iff x \notin A$. Obstoj množice A^C sledi iz obstoja množic S in $A \subseteq S$, saj je $A^C = S \setminus A$.

Izrek 3 *Za vse množice* $A, B \subseteq S$ *velja:*

1. $(A^C)^C \;=\; A$
2. (a) $(A \cup B)^C \;=\; A^C \cap B^C$
   (b) $(A \cap B)^C \;=\; A^C \cup B^C$
3. $A \setminus B \;=\; A \cap B^C$
4. $A \subseteq B \iff B^C \subseteq A^C$
5. $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^C \iff B \subseteq A^C$
6. $A \cup A^C \;=\; S,\;\; A \cap A^C \;=\; \emptyset$
7. $A \cup S \;=\; S,\;\; A \cap S \;=\; A$

Dokaz: Naštete enačbe in ekvivalence sledijo iz ustreznih lastnosti izjavnih veznikov, s katerimi so definirane operacije in relacije, ki v njih nastopajo. Dokažimo npr. prvo ekvivalenco v točki 5:

$$\begin{aligned}
A \cap B \;=\; \emptyset &\overset{\text{def.}\,\emptyset}{\iff} \forall x\colon x \notin A \cap B \\
&\overset{\text{def.}\,\cap}{\iff} \forall x\colon \neg(x \in A \;\wedge\; x \in B) \\
&\overset{\text{IR}}{\iff} \forall x\colon (x \notin A \;\vee\; x \notin B) \\
&\overset{\text{IR}}{\iff} \forall x\colon (x \in A \;\Rightarrow\; x \notin B) \\
&\overset{\text{def.}\,C}{\iff} \forall x\colon (x \in A \;\Rightarrow\; x \in B^C) \\
&\overset{\text{def.}\,\subseteq}{\iff} A \subseteq B^C \;\surd
\end{aligned}$$

$\square$

Definicija 6 *Množici A in B sta* tuji *ali* disjunktni*, če je $A \cap B = 0$.*

Pripomba 3 *Naj bo A poljubna množica podmnožic univerzalne množice S. Potem definiramo*

$$\begin{aligned} \bigcup A &= \{x \in S;\ \exists y \in A \colon x \in y\}, \\ \bigcap A &= \{x \in S;\ \forall y \in A \colon x \in y\}. \end{aligned}$$

V tem primeru obstaja tudi presek prazne množice množic, saj je po tej definiciji

$$\begin{aligned} \bigcap \emptyset &= \{x \in S;\ \forall y \in \emptyset \colon x \in y\} = \{x;\ x \in S \ \wedge\ \forall y \colon (y \in \emptyset \ \Rightarrow\ x \in y)\} \\ &= \{x;\ x \in S \ \wedge\ 1\} = \{x;\ x \in S\} = S. \end{aligned}$$

3.3.3 Potenčna množica

Definicija 7 *Množico*

$$\mathcal{P}A = \{x;\ x \subseteq A\}$$

imenujemo potenčna množica *ali* množica vseh podmnožic *množice A.*

Velja: $x \in \mathcal{P}A \iff x \subseteq A$.

Zgled 2 a) $\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\}$

b) $\mathcal{P}\mathcal{P}\emptyset = \mathcal{P}\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

c) $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\emptyset = \mathcal{P}\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

d) Koliko elementov ima potenčna množica končne množice z n elementi? Podmnožico lahko konstruiramo tako, da gremo od elementa do elementa in se pri vsakem odločimo, ali ga vzamemo v podmnožico ali ne. Ker imamo na vsakem koraku dve možnosti, korakov pa je n in so med seboj neodvisni, lahko podmnožico konstruiramo na

$$\overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{n} = 2^n$$

različnih načinov, to pa je tudi število vseh pomnožic množice z n elementi. Če operacijo $\mathcal{P}$ uporabimo večkrat zapored, hitro dobimo zelo velike množice, tudi če začnemo s prazno množico:

$$\begin{array}{rl} \emptyset & \text{ima } 0 \text{ elementov} \\ \mathcal{P}\emptyset & \text{ima } 2^0 = 1 \text{ element} \\ \mathcal{P}\mathcal{P}\emptyset & \text{ima } 2^1 = 2 \text{ elementa} \\ \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\emptyset & \text{ima } 2^2 = 4 \text{ elemente} \\ \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\emptyset & \text{ima } 2^4 = 16 \text{ elementov} \\ \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\emptyset & \text{ima } 2^{16} = 65536 \text{ elementov} \\ \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\emptyset & \text{ima } 2^{65536} \text{ elementov} \end{array}$$