Poglavje 1

Moč množic

1.1 Množica naravnih števil

Izrek 1 (o indukciji) *Naj bo* $L \subseteq \mathbb{N}$*. Če velja:*

1. $0 \in L$,
2. $\forall n \in \mathbb{N} \colon (n \in L \implies n' \in L)$,

potem je $L = \mathbb{N}$.

Dokaz: Po predpostavkah izreka je množica L induktivna, torej je $\mathbb{N} \subseteq L$. Ker pa je tudi $L \subseteq \mathbb{N}$, je $L = \mathbb{N}$. $\square$

1.2 Relaciji $\sim$ in $\preceq$

Definicija 1 *Množici* A *in* B *imata* enako moč *oziroma sta* ekvipolentni*, če obstaja bijekcija* $f \colon A \to B$*. V tem primeru pišemo:* $A \sim B$.

Trditev 1 *Za vse množice* A, B, C *velja:*

1. $A \sim A$ *(refleksivnost),*
2. $A \sim B \implies B \sim A$ *(simetričnost),*
3. $A \sim B \land B \sim C \implies A \sim C$ *(tranzitivnost).*

Dokaz:

1. Identična preslikava $\mathrm{id}_A \colon A \to A$ je bijekcija.

2. Če je $f\colon A \to B$ bijekcija, je tudi $f^{-1}\colon B \to A$ bijekcija.

3. Če sta $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ bijekciji, je tudi $g \circ f\colon A \to C$ bijekcija.

$\square$

Relacija ekvipolence je torej ekvivalenčna relacija v razredu V vseh množic.

Definicija 2 *Množica A ima* manjšo ali enako moč *kot B, če obstaja injekcija $f\colon A \to B$. V tem primeru pišemo: $A \preceq B$.*

Trditev 2 *Za vse množice A, B, C velja:*

1. $A \subseteq B \implies A \preceq B$,

2. $A \preceq B \iff \exists C \subseteq B\colon A \sim C$,

3. $A \preceq A$ *(refleksivnost)*,

4. $A \preceq B \wedge B \preceq C \implies A \preceq C$ *(tranzitivnost)*,

Dokaz:

1. Vložitev $i\colon A \hookrightarrow B$ je injekcija.

2. Naj bo $f : A \to B$ injekcija in $C = f_*(A)$. Potem je preslikava $g\colon A \to C$, kjer za vse $x \in A$ velja: $g(x) = f(x)$, bijekcija.

   Obratno: Če je $C \subseteq B$ in $g\colon A \to C$ bijekcija, je preslikava $f : A \to B$, kjer za vse $x \in A$ velja: $f(x) = g(x)$, injekcija.

3. Identična preslikava $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ je injekcija.

4. Če sta $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ injekciji, je tudi $g \circ f\colon A \to C$ injekcija.

$\square$

Izrek 2 (Schroeder-Bernsteinov izrek, SBI)

$$A \preceq B \wedge B \preceq A \implies A \sim B$$

Dokaz: Naj bosta $f: A \to B$ in $g: B \to A$ injekciji. Če kodomeno preslikave $g: B \to A$ skrčimo na $g_*(B)$, dobimo bijekcijo $B \to g_*(B)$, torej je $B \sim g_*(B)$. Zadošča torej pokazati, da je $A \sim g_*(B)$.

To bomo storili tako, da bomo konstruirali bijekcijo $h\colon A \to g_*(B)$. V ta namen vzemimo kompozitum $g \circ f: A \to g_*(B)$, ki je injekcija, in definirajmo zaporedje množic $A_1, A_2, A_3, \dots \subseteq A$ takole:

$$\begin{aligned} A_1 &= A \setminus g_*(B), \\ n \geq 1\colon\ A_{n+1} &= (g \circ f)_*(A_n). \end{aligned}$$

Naj bo $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A$. Definirajmo preslikavo $h\colon A \to g_*(B)$ s formulo

$$h(x) = \begin{cases} (g \circ f)(x), & x \in C, \\ x, & x \notin C. \end{cases}$$

Če $x \in C$, je $h(x) = g(f(x)) \in g_*(B)$. Če $x \notin C$, je $h(x) = x \notin A_1 = A \setminus g_*(B)$, torej $h(x) \in g_*(B)$. Res za vse $x \in A$ velja: $h(x) \in g_*(B)$.

Nadalje velja:

$$x \in C \implies \exists n \geq 1\colon x \in A_n \implies h(x) \in A_{n+1} \subseteq C,$$

torej je $h(x) \in C$ za vse $x \in C$. Pokažimo, da je h injekcija. Ločimo štiri primere:

a) $x, y \in C\colon\ h(x) = h(y) \implies (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \implies x = y \checkmark$

b) $x, y \notin C\colon\ h(x) = h(y) \implies x = y \checkmark$

c) $x \in C, y \notin C\colon\ h(x) \in C, h(y) = y \notin C \implies h(x) \neq h(y) \checkmark$

d) $x \notin C, y \in C\colon\ h(y) \in C, h(x) = x \notin C \implies h(x) \neq h(y) \checkmark$

Pokažimo še, da je h surjekcija. Naj bo $y \in g_*(B)$. Ločimo dva primera:

a) $y \in C \implies y \in C \bigcap g_*(B) \implies \exists n \geq 2\colon y \in A_n$
$\implies \exists x \in A_{n-1}\colon\ y = (g \circ f)(x) = h(x) \checkmark$

b) $y \notin C \implies y = h(y) \checkmark$

Torej je h bijekcija in velja: $A \sim g_*(B)$, zato tudi $A \sim B$. $\square$

Izrek 3 *Če obstaja surjekcija $f\colon A \to B$, je $A \succeq B$.*

Dokaz: Zadošča pokazati, da obstaja injekcija $g\colon B \to A$, saj je potem $B \preceq A$ oziroma $A \succeq B$. – Ker je $f\colon A \to B$ surjekcija, velja

$$\forall y \in B\colon f^*(\{y\}) \;\neq\; \emptyset,$$

torej je $(f^*(\{y\}))_{y\in B}$ družina nepraznih podmnožic množice A. Po AC zato obstaja funkcija izbire

$$g\colon\, B \;\longrightarrow\; \bigcup_{y\in B} f^*(\{y\}) \;=\; f^*\left(\bigcup_{y\in B}\{y\}\right) \;=\; f^*(B) \;=\; A,$$

tako da za vsak $y \in B$ velja: $g(y) \in f^*(\{y\})$. Za vsak $y \in B$ je torej $f(g(y)) \in \{y\}$ oziroma $f(g(y)) = y$. Sledi $f \circ g = \mathrm{id}_B$, kar pomeni, da je $g\colon B \to A$ injekcija. $\square$

Zdaj imamo na razpolago veliko načinov, kako pokazati, da imata množici A in B enako moč oziroma da je $A \sim B$, npr.:

- poiščemo bijekcijo v eni ali v drugi smeri, ali
- poiščemo injekciji v obeh smereh, ali
- poiščemo surjekciji v obeh smereh, ali
- poiščemo injekcijo in surjekcijo v isti smeri, ali
- pokažemo, da je $A \sim C$ in $B \sim C$ za neko množico C itd.

Zgled 1 A. Pokažimo: $[0,1] \sim \mathbb{R}$.

a) $[0,1] \subseteq \mathbb{R} \implies [0,1] \preceq \mathbb{R}$

b) Naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana s predpisom

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}.$$

Potem je $f_*(\mathbb{R}) = (0,1)$. Ker je $f'(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)} > 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$, je f strogo naraščajoča na $\mathbb{R}$ in zato injektivna. Torej je $\mathbb{R} \preceq [0,1]$.

Po SBI je torej $[0,1] \sim \mathbb{R}$.

B. Pokažimo: $\mathcal{P}\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$.

a) Definirajmo $f\colon \mathcal{P}\mathbb{N} \to [0,1]$ takole:

$$\forall A \subseteq \mathcal{P}\mathbb{N}\colon f(A) \;=\; \sum_{i\in A} 10^{-(i+1)}$$

Velja npr.: $f(\emptyset) = 0$, $f(\mathbb{N}) = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \cdots = 0.111\ldots_{(10)} = \frac{1}{9}$, $f(\{k \in \mathbb{N};\ k \text{ liho število}\}) = 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + \cdots = 0.010101\ldots_{(10)} = \frac{1}{99}$. Ker števka 9 v desetiškem zapisu realnega števila $f(A)$ ne nastopa, je f injekcija, torej je $\mathcal{P}\mathbb{N} \preceq [0,1]$.

b) Definirajmo $g\colon \mathcal{P}\mathbb{N} \to [0,1]$ takole:

$$\forall A \subseteq \mathcal{P}\mathbb{N}\colon g(A) \;=\; \sum_{i \in A} 2^{-(i+1)}$$

Velja npr.: $g(\emptyset) = 0$, $g(\mathbb{N}) = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots = 0.111\ldots_{(2)} = 1$, $f(\{k \in \mathbb{N};\ k \text{ liho število}\}) = 2^{-2}+2^{-4}+2^{-6}+\cdots = 0.010101\ldots_{(2)} = \frac{1}{3}$. Ker ima vsako realno število $x \in [0,1]$ dvojiški zapis oblike $0.c_1c_2c_3\ldots$, kjer so $c_1, c_2, c_3, \dots \in \{0,1\}$, je g surjekcija, torej je $\mathcal{P}\mathbb{N} \succeq [0,1]$.

Po SBI je torej $\mathcal{P}\mathbb{N} \sim [0,1]$. Iz točke A zdaj sledi: $\mathcal{P}\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$.

Definicija 3 *Množica A ima* strogo manjšo moč *kot množica B, če velja:*

$$A \preceq B \;\wedge\; A \not\sim B.$$

Pišemo: $A \prec B$.

Izrek 4 (o trihotomiji) *Za vse A, B velja natanko ena od treh možnosti:*

1. *$A \prec B$, ali*
2. *$A \sim B$, ali*
3. *$A \succ B$.*

Dokaz: S pomočjo DU (dolg). □

Posledica 1 *Za vse A, B velja $A \preceq B \vee B \preceq A$. Relacija $\preceq$ je torej strogo sovisna v razredu V vseh množic.*

1.3 Končne in neskončne množice

Definicija 4 (Dedekindova definicija neskončne množice) *Množica A je* neskončna *natanko tedaj, ko $\exists B \subset A\colon A \sim B$. V nasprotnem primeru je A* končna.

Z besedami: množica A je neskončna natanko tedaj, ko je ekvipolentna neki svoji *pravi* podmnožici; in končna natanko tedaj, ko ni ekvipolentna nobeni svoji *pravi* podmnožici.

Zgled 2 *1. Množica $\mathbb{R}$ je neskončna, ker je $\mathbb{R} \sim [0,1]$.*

2. Množica $\mathbb{N}$ je neskončna, ker je $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Preslikava $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definirana s formulo

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon f(n) \;=\; n',$$

kjer je n' (neposredni) naslednik števila n, je namreč bijekcija.

Izrek 5 *Množica A je neskončna natanko tedaj, ko je $A \succeq \mathbb{N}$.*

Dokaz:

($\Longrightarrow$) Naj bo A neskončna. Potem obstaja $B \subset A$, tako da je $A \sim B$. Naj bo $f\colon A \to B$ bijekcija in $a \in A \setminus B$. Definirajmo $g\colon \mathbb{N} \to A$ s formulo

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon g(n) \;=\; f^n(a) \;=\; (\overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n})(a).$$

Trdimo, da je g injekcija. Predpostavimo, da je $\underline{g(n) = g(k) \text{ in } n \neq k}$. Brez škode za splošnost vzemimo, da je $n > k$, torej $n \geq k+1$. Zaradi injektivnosti f velja:

$$\begin{aligned} g(n) = g(k) \;&\Longrightarrow\; f^n(a) = f^k(a) \;\Longrightarrow\; f^{n-1}(a) = f^{k-1}(a) \;\Longrightarrow\; \cdots \\ &\Longrightarrow\; f^{n-k}(a) = a \;\Longrightarrow\; a = f\left(f^{n-k-1}(a)\right) \;\in\; \mathcal{Z}_f \;=\; B, \end{aligned}$$

v protislovju z izbiro $a \in A \setminus B$. Torej podčrtana predpostavka ne drži in iz $g(n) = g(k)$ sledi $n = k$. Ker sta bila $n, k \in \mathbb{N}$ poljubna, je g injektivna in $\mathbb{N} \preceq A$.

($\Longleftarrow$) Naj bo $A \succeq \mathbb{N}$. Potem obstaja injekcija $g : \mathbb{N} \to A$. Definirajmo $f\colon A \to A \setminus \{g(0)\}$ s formulo

$$\forall x \in A\colon\;\; f(x) \;=\; \begin{cases} g(n+1), & \text{če } x = g(n), \\ x, & \text{če } x \notin \mathcal{Z}_g. \end{cases}$$

Trdimo, da je f bijekcija. Definirajmo $h\colon A \setminus \{g(0)\} \to A$ s formulo

$$\forall x \in A \setminus \{g(0)\}\colon\;\; h(x) \;=\; \begin{cases} g(n-1), & \text{če } x \in \mathcal{Z}_g \setminus \{g(0)\} \text{ in } x = g(n), \\ x, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Naj bo $x \in A$. Če je $x = g(n)$ za neki $n \in \mathbb{N}$, je $f(x) = f(g(n)) = g(n+1)$ in $h(f(x)) = h(g(n+1)) = g((n+1)-1) = g(n) = x$. Če $x \notin \mathcal{Z}_g$, je $f(x) = x$ in $h(f(x)) = h(x) = x$. Torej je $h(f(x)) = x$ za vse $x \in A$ in je $h \circ f = \mathrm{id}_A$.

Naj bo $x \in A \setminus \{g(0)\}$. Če je $x = g(n)$ za neki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, je $h(x) = g(n-1)$ in $f(h(x)) = f(g(n-1)) = g((n-1)+1) = g(n) = x$. Če $x \notin \mathcal{Z}_g$, je $h(x) = x$ in $f(h(x)) = f(x) = x$. Torej je $f(h(x)) = x$ za vse $x \in A \setminus \{g(0)\}$ in je $f \circ h = \mathrm{id}_{A \setminus \{g(0)\}}$. – Zaključimo, da je f bijekcija in je množica A neskončna. $\square$

Definicija 5 *1. Množica A je* števno neskončna*, če je $A \sim \mathbb{N}$.*
2. Množica A je števna*, če je končna ali števno neskončna.*
3. Množica A je neštevna*, če ni števna.*

Izrek 6 *Za vsako množico A velja:*

1. A *končna* $\iff A \prec \mathbb{N}$
2. A *števna* $\iff A \preceq \mathbb{N}$
3. A *števno neskončna* $\iff A \sim \mathbb{N}$
4. A *neskončna* $\iff A \succeq \mathbb{N}$
5. A *neštevna* $\iff A \succ \mathbb{N}$

Dokaz: Uporabimo definicije ter izreka 4 in 5. Dokažimo npr. točko 1:

1. A končna $\overset{\text{def. 4}}{\iff}$ A ni neskončna $\overset{\text{izr. 5}}{\iff}$ $A \not\succeq \mathbb{N}$ $\overset{\text{izr. 4}}{\iff}$ $A \prec \mathbb{N}$. □

V ekvivalenčnih razredih relacije ekvipolence $\sim$, ki vsebujejo vse množice enake moči, izberemo predstavnike, ki jih imenujemo *kardinalna števila.* Za predstavnika razreda vseh množic z n elementi izberemo naravno število n, za predstavnika razreda vseh števno neskončnih množic pa množico $\mathbb{N}$, ki jo v tej vlogi označujemo z $\aleph_0$ (beri *alef nič*; $\aleph$ je prva črka hebrejske abecede). Rečemo, da imajo števno neskončne množice moč $\aleph_0$.

1.4 Lastnosti števnih množic

Pri dokazovanju števnosti množice nam pogosto pomaga naslednja trditev.

Trditev 3 *Če obstaja surjekcija $g\colon \mathbb{N} \to A$, je množica A števna.*

Dokaz: Če je $g\colon \mathbb{N} \to A$ surjekcija, po izreku 3 velja $\mathbb{N} \succeq A$ oziroma $A \preceq \mathbb{N}$, torej je po izreku 6.2 množica A števna. □

Trditev 3 lahko povemo tudi takole:

Če lahko elemente množice A razvrstimo v zaporedje tako, da pride vsak od njih vsaj enkrat na vrsto, je množica A števna.

Zgled 3 1. Ali je množica celih števil

$$\mathbb{Z} \;=\; \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \;\ldots\}$$

števna? Razvrstimo elemente v zaporedje

$$(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \;\ldots)$$

Vsako celo število pride v tem zaporedju na vrsto vsaj enkrat, torej je *množica* $\mathbb{Z}$ *po trditvi 3 števna.* Eksplicitna definicija surjekcije $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ je v tem primeru

$$g(n) \;=\; \begin{cases} -\frac{n}{2}, & n \text{ sodo število,} \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ liho število.} \end{cases}$$

V resnici vsako celo število nastopi v gornjem zaporedju natanko enkrat (torej je g bijekcija), a to za dokaz števnosti množice A po trditvi 3 niti ni pomembno.

2. Podobno pokažemo, da je unija števnih množic A in B števna. Če je katera od njiju prazna, to drži. Sicer pa lahko njune elemente razvrstimo v zaporedji

$$\begin{aligned} A:&\ (a_0, a_1, a_2, \ \ldots), \\ B:&\ (b_0, b_1, b_2, \ \ldots), \end{aligned}$$

kjer elemente ponavljamo, če je katera od A, B končna. Zaloga vrednosti zaporedja

$$(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ \ldots)$$

je potem ravno njuna unija $A \cup B$, ki je po trditvi 3 torej števna.

Definicija 6 *Za družino množic* $(A_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{I}}$ *rečemo, da je* števna (neštevna, končna, neskončna, števno neskončna) *natanko tedaj, ko je takšna indeksna množica* $\mathcal{I}$.

Izrek 7 *Unija vsake števno neskončne družine števno neskončnih množic je števno neskončna.*

Dokaz: Naj bo $(A_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{I}}$ števno neskončna družina števno neskončnih množic. Ker je množica $\mathcal{I}$ števno neskončna, lahko njene elemente razvrstimo v zaporedje

$$\mathcal{I}:\ (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots),$$

kjer so vsi elementi λ_i različni med seboj. Podobno lahko razvrstimo v zaporedja elemente vsake od množic A_λ, saj so prav tako števno neskončne:[1]

$$\begin{aligned} A_{\lambda_0}&: (a_{0,0},\ a_{0,1},\ a_{0,2},\ \ldots) \\ A_{\lambda_1}&: (a_{1,0},\ a_{1,1},\ a_{1,2},\ \ldots) \\ A_{\lambda_2}&: (a_{2,0},\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ \ldots) \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

[1]tu uporabimo aksiom izbire na družini $(B_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{I}}$, kjer je B_λ množica vseh bijekcij $\mathbb{N} \to A_\lambda$

Zdaj vse elemente množice $\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda$ oziroma zgornje tabele razvrstimo v eno samo zaporedje – npr. v *diagonalni urejenosti* množice $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, torej po naraščajoči vsoti indeksov, tiste z enako vsoto indeksov pa po naraščajočem prvem indeksu:

$$\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda : \ (\underbrace{a_{0,0}}_{i+j=0}, \underbrace{a_{0,1}, a_{1,0}}_{i+j=1}, \underbrace{a_{0,2}, a_{1,1}, a_{2,0}}_{i+j=2}, \ \ldots)$$

V tem zaporedju pride vsak element množice $\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda$ vsaj enkrat na vrsto (lahko tudi večkrat, saj si množice A_λ v splošnem niso tuje), torej je po trditvi 3 množica $\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda$ števna. Ker je vsaka od množic A_λ neskončna, pa je tudi njihova unija neskončna, torej je $\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda$ števno neskončna. □

Posledica 2 *Unija vsake števne družine števnih množic je števna.*

Dokaz: Naj bo $(A_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{I}}$ števna družina števnih množic. Dopolnimo jo do števno neskončne družine števno neskončnih množic $(B_\mu)_{\mu\in\mathcal{J}}$, npr. takole:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathcal{I}\cup\mathbb{N}, \\ \forall\mu\in\mathcal{J}:\ \ B_\mu &= \begin{cases} A_\mu\cup\mathbb{N}, & \text{če } \mu\in\mathcal{I}, \\ \mathbb{N}, & \text{sicer.} \end{cases} \end{aligned}$$

Po izreku 7 je $\bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu \preceq \mathbb{N}$. Ker je očitno

$$\bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu = \left(\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda\right)\cup\mathbb{N},$$

je $\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda \subseteq \bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu$, torej $\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda \preceq \bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu \preceq \mathbb{N}$. □

Izrek 7 oziroma posledica 2 sta močni orodji za dokazovanje števnosti množic.

Trditev 4 *1. Množica vseh racionalnih števil $\mathbb{Q}$ je števna.*

2. Množica vseh urejenih parov naravnih števil $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ je števna.

Dokaz: 1. Množico $\mathbb{Q}$ lahko zapišemo v obliki unije $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kjer je

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\ A_n = \left\{\frac{k}{n};\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

množica vseh ulomkov z imenovalcem n. Očitno za vsak $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ velja: $A_n \sim \mathbb{Z}$, torej je $\mathbb{Q}$ števna unija števnih množic in je po posledici 2 števna.

2. Množico $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ lahko zapišemo v obliki unije $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, kjer je

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ A_n = \{n\} \times \mathbb{N} = \{(n,k);\ k \in \mathbb{N}\}$$

množica vseh urejenih parov naravnih števil s prvo komponento enako n. Očitno za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $A_n \sim \mathbb{N}$, torej je $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ števna unija števnih množic in je po posledici 2 števna. □

1.5 Neštevne množice

Izrek 8 (Cantorjev izrek) *Za vsako množico A je $\mathcal{P}A \succ A$.*

Dokaz: Pokazati moramo, da je $A \preceq \mathcal{P}A$ in $A \not\sim \mathcal{P}A$.

1. Naj bo $f\colon A \to \mathcal{P}A$ preslikava, definirana s formulo $\forall x \in A\colon f(x) = \{x\}$. Očitno je f injekcija, torej velja: $A \preceq \mathcal{P}A$.

2. Predpostavimo, da obstaja surjekcija $g : A \to \mathcal{P}A$. Za vsak $x \in A$ je $g(x) \in \mathcal{P}A$, torej $g(x) \subseteq A$. Za vsak $x \in A$ velja: $x \in g(x)$ ali $x \notin g(x)$. Naj bo

$$C = \{x \in A;\ x \notin g(x)\}.$$

Velja: $C \subseteq A$, torej je $C \in \mathcal{P}A$. Ker je $g\colon A \to \mathcal{P}A$ surjekcija, obstaja $x_0 \in A$, tako da je $g(x_0) = C$. Ali je $x_0 \in C$? Velja:

$$x_0 \in C \overset{\text{def. } C}{\iff} x_0 \notin g(x_0) \overset{\text{def. } x_0}{\iff} x_0 \notin C,$$

kar je protislovje. Torej ni nobene surjekcije $g\colon A \to \mathcal{P}A$ in zato $A \not\sim \mathcal{P}A$. □

Posledica 3 *1. Množica $\mathcal{P}\,\mathbb{N}$ je neštevna.*

2. Množica $\mathbb{R}$ je neštevna.

3. Množica vseh iracionalnih števil je neštevna.

4. Za vse $a, b \in \mathbb{R}$, kjer je $a < b$, so intervali $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ neštevni.

5. Množica $\mathbb{C}$ je neštevna.

6. Vse množice $\mathbb{R}^n$ za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ so neštevne.

7. Kartezični produkt števno neskončne družine množic moči vsaj 2 je nešteven.

8. *Obstajajo neskončna zaporedja neskončnih množic različnih moči, npr.*

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}\,\mathbb{N} \prec \mathcal{P}\mathcal{P}\,\mathbb{N} \prec \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\,\mathbb{N} \prec \cdots$$

Dokaz: 7. Naj bo $(A_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ družina množic, pri kateri za vse $\lambda \in \mathbb{N}$ velja: $A_\lambda = \{0,1\}$. Potem je $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{N}} A_\lambda = \{0,1\}$ in so funkcije izbire za družino $(A_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ natanko vse preslikave $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$. To pa so ravno karakteristične funkcije vseh podmnožic množice $\mathbb{N}$, torej obstaja bijekcija med $\prod_{\lambda\in\mathbb{N}} A_\lambda = \prod_{\lambda\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ in $\mathcal{P}\mathbb{N}$. Zato je kartezični produkt $\prod_{\lambda\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ neštevna množica, enako pa potem velja za vse števno neskončne družine množic moči vsaj 2. $\square$

Za množice, ki so ekvipolentne množici realnih števil $\mathbb{R}$, rečemo, da imajo *moč kontinuuma* (s simbolom: moč $\mathfrak{c}$ ali moč $2^{\aleph_0}$).