sreda, 30. december 2020 09:56

Def. Naj $\leq$ delno ureja A. Priredimo ji relaciji $<$ (stroga delna urejenost) in $\lessdot$ (relacija neposrednega predhodnika) v A takole:

1. $\forall x, y \in A : (x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y)$
2. $\forall x, y \in A : (x \lessdot y \Leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z \in A : (x < z \wedge z < y))$

Trditev. Naj $\leq$ delno ureja A.

1. $<$ je irefleksivna, asimetrična ter tranzitivna
2. $\lessdot$ je irefleksivna, asimetrična ter intranzitivna.

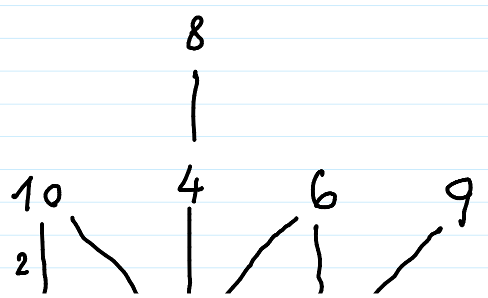
Končno delno urejeno množico A grafično predstavimo s Hassejevim diagramom takole:

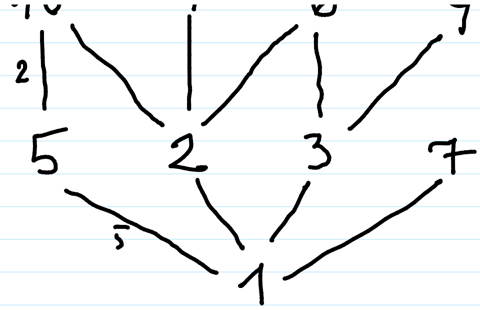
1. elemente A narišemo kot točke v ravnini
2. če je $x < y$, narišemo x niže od točke y
3. če je $x \lessdot y$, ju povežemo s črto, ki se vzpenja od x proti y

Velja: $x \leq y \Longleftrightarrow$ v H. diagramu relacije $\leq$ obstaja vzpenjajoča se pot od x do y

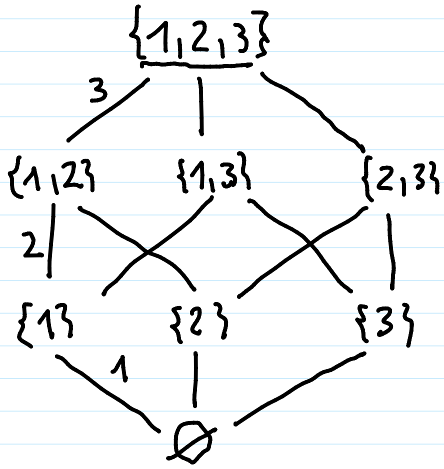
Zgledi.

1. $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$, rel. deljivosti $|$

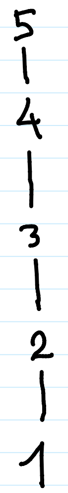




2. $A = \mathcal{P}\{1,2,3\}$, relacija $\subseteq$



3. $A = \{1,2,3,4,5\}$, relacija $\leq$ (manjši ali enak)



5.2. Posebni elementi v delno urejenih množicah

Def. Naj $\leq$ delno ureja A in $a \in A$.

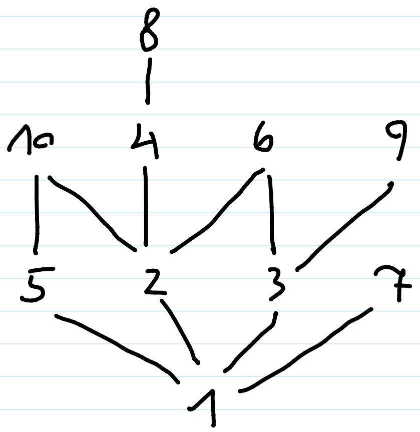
1. a je minimalen v $A \iff \forall x \in A: (x \leq a \Rightarrow x = a)$.
2. a je maksimalen v $A \iff \forall x \in A: (a \leq x \Rightarrow x = a)$.
3. a je prvi ali najmanjši v $A \iff$

3. a je prvi ali najmanjši v $A \iff$
$$\forall x \in A: \ a \leq x.$$

4. a je zadnji ali največji v $A \iff$
$$\forall x \in A: \ x \leq a.$$

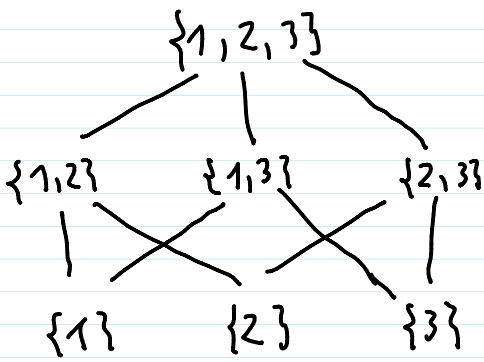
Zgled.

1. $A = \{1, 2, \ldots, 10\}, \ |$



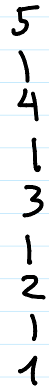
minimalni: 1
prvi: 1
maksimalni: $10, 8, 6, 9, 7$
zadnji: /

2. $A = \mathcal{P}\{1,2,3\} \setminus \{\emptyset\}, \quad \subseteq$



minimalni: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
prvi: /
maksimalni: $\{1,2,3\}$
zadnji: $\{1,2,3\}$

3. $A = \{1,2,3,4,5\}, \quad \leq$ (manjši ali enak)



minimalni = prvi = 1
maksimalni = zadnji = 5

4. $A = \mathbb{Z}$, $\leq$ (manjši ali enak)

ni posebnih elementov

5. $A = \mathbb{N}$, $\mid$

minimalni = prvi = 1 $(\forall n \in \mathbb{N}: 1 \mid n)$
maksimalni = zadnji = 0 $(\forall n \in \mathbb{N}: n \mid 0)$
$0 = 0 \cdot n$

6. A poljubna, id_A

vsi so minimalni
vsi so maksimalni

<u>Trditev.</u> A delno urejena z $\leq$.

1. Vsak prvi element A je minimalen.
2. ″ zadnji ″ ″ maksimalen.
3. Če v A obstaja prvi elt, je en sam.
4. ″ ″ zadnji ″, ″ .

<u>Dokaz:</u> 1. Naj bo a prvi v A in $x \leq a$.
a prvi $\Rightarrow a \leq x$

$\left.\begin{matrix} x \leq a \\ a \leq x \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{antisim.}} x = a$

$\Rightarrow a$ minimalen ✓

3. Naj bosta a, b prva v A.

$\left.\begin{matrix} a \text{ prvi} \Rightarrow a \leq b \\ b \text{ prvi} \Rightarrow b \leq a \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{antisim.}} a = b$ ✓

<u>Trditev.</u> Naj bo A linearno urejena z $\leq$.

Trditev. Naj bo A linearno urejena z $\leq$.

1. $a \in A$ je prvi $\Leftrightarrow$ a je minimalen
2. $a \in A$ je zadnji $\Leftrightarrow$ a je maksimalen

Dokaz 1. ($\Leftarrow$) $a \in A$ minimalen, $x \in A$

lin. ur. je strogo sovisna

$$\Rightarrow \underline{a \leq x} \vee x \leq a$$

$\checkmark$ $\Downarrow$ a minimalen

$x = a$

$\Downarrow$

$\underline{a \leq x}$ $\checkmark$

Torej: a je prvi v A. $\checkmark$

Pripomba. Naj R delno ureja A in naj bo $B \subseteq A$. Potem je množica B delno urejena z zožitvijo $R|_B = R \cap (B \times B)$ relacije R na B. Zato lahko govorimo o minim., maks., prvih, zadnjih eltih podmnožice B.

Oznake.

1. Če ima $B \subseteq A$ prvi elt, ga imenujemo tudi minimum mn. B, oznaka: $\min B$.
2. Če ima $B \subseteq A$ zadnji elt, ga " " maksimum mn. B, oznaka: $\max B$.

Zgled. $A = \mathbb{R}$, $\leq$ (manjši ali enak)

$B = (0,1)$

zg. meje za B: vsi $m \geq 1$

sp. meje " : vsi $m \leq 0$

Def. A delno ur. z $\leq$, $B \subseteq A$.

1. $a \in A$ je zg. meja za B, če $\forall x \in B: x \leq a$.

Def. A delno ur. z ≤, $B \subseteq A$.

1. $a \in A$ je <u>zg. meja</u> za B, če $\forall x \in B: x \leq a$.
2. $a \in A$ je <u>sp. meja</u> za B, če $\forall x \in B: a \leq x$.

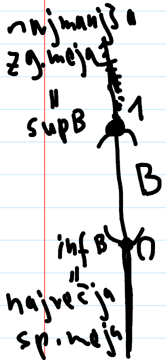
Zgled. $A = \mathbb{N}$, relacija $|$, $B = \{12, 18, 24\}$

zg. meje B: vsi skupni večkratniki števil 12, 18 in 24

sp. meje B: vsi skupni delitelji —"—,

torej: 1, 2, 3, 6.

Def. A delno urejena z ≤, $B \subseteq A$.



1. Naj bo $M = \{a \in A;\ a \text{ je zg. meja za } B\}$. Če M ima prvi elt, je to <u>supremum</u> ali <u>najmanjša</u> (<u>natančna</u>) <u>zg. meja</u> za B, oznaka:

   $\sup B$.

2. Naj bo $m = \{a \in A;\ a \text{ je sp. meja za } B\}$. Če m ima zadnji elt, je to <u>infimum</u> ali <u>največja</u> (<u>natančna</u>) <u>sp. meja</u> za B, oznaka:

   $\inf B$.

Zgledi.

1. $A = \mathbb{R}$, $\leq$, $B = (0,1)$ ali $B = [0,1]$:

   $\inf B = 0$, $\sup B = 1$

2. $A = \mathbb{N}$, $|$, $B = \{12, 18, 24\}$

   $\inf B = D(12, 18, 24) = 6$,
   $\sup B = v(12, 18, 24) = 72$

3. $A = \mathcal{P}S$, relacija $\subseteq$, $B = \{A_1, A_2\}$, kjer sta $A_1, A_2 \subseteq S$.

   $\inf B = A_1 \cap A_2$, $\sup B = A_1 \cup A_2$

kjer sta $A_1, A_2 \subseteq S$.

$$\inf B = A_1 \cap A_2, \quad \sup B = A_1 \cup A_2$$

Pripomba. $B \subseteq A$ delno ur.

1. Če ima B zadnji elt $\max B$, je to tudi $\sup B$.
2. " prvi " $\min B$, " $\inf B$.

Zgled. $A = \mathbb{R}$, $\leq$

1. $B = [0,1]$: $\max B = \sup B = 1$,
   $\min B = \inf B = 0$
2. $B = (0,1)$ $\max B$, $\min B$ ne obstajata
   $\sup B = 1$, $\inf B = 0$

5.3. Dobra urejenost

Def. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

Relacija R dobro ureja A, če velja:

1. R delno ureja A,
2. vsaka neprazna podmn. $B \subseteq A$ ima prvi element glede na $R|_B$.

Trditev. Če R dobro ureja A, potem R linearno ureja A.

Dokaz: $x, y \in A$

$\emptyset \neq \underbrace{\{x,y\}} \subseteq A$ neprazna podmn. A

$\Rightarrow$ obstaja $\underline{\min\{x,y\}} \in \{x,y\}$

a) $\min\{x,y\} = x \Rightarrow x R y$
b) $\min\{x,y\} = y \Rightarrow y R x$

$\Bigg\} \Rightarrow R$ je sovisna ✓