sreda, 23. december 2020 10:11

Izrek. Naj bo $f: A \to B$ in $g: B \to A$.
Potem: Če $f \circ g = id_B$ in $g \circ f = id_A$,
sta f in g bijekciji in je $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$!

Dokaz: $f \circ g = id_B \Rightarrow$ g injektivna, f surjektivna
$g \circ f = id_A \Rightarrow$ f injektivna, g surjektivna

$\Rightarrow$ f bijekcija, g bijekcija ✓

$$g = id_A \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g)$$
$$= f^{-1} \circ id_B = f^{-1} \checkmark$$

$$f = (f^T)^T = (f^{-1})^T = g^T = g^{-1} \checkmark$$

4.5.3. Družine množic

Def. Naj bo M množica množic in J poljubna množica. Surjektivna preslikava $\mathcal{A}: J \to M$ je *družina množic* z *indeksno množico* J.

Pisava: Za $\lambda \in J$ namesto $\mathcal{A}(\lambda)$ pišemo A_λ, družino pa označujemo tudi z $(A_\lambda)_{\lambda \in J}$.

Zgledi. 1. Družino množic $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ imenujemo *zaporedje*.

2. Naj bo A poljubna mn. Preslikava $id_A: A \to A$ je surjekcija, torej je to družina množic z indeksno mn. A. Pišemo lahko:
$$id_A = (x)_{x \in A}.$$

3. Družina $(A_\lambda)_{\lambda \in J}$ je *prazna*,

3. Družina $(A_\lambda)_{\lambda \in J}$ je <u>prazna</u>, če je $J = \emptyset$.

<u>Def.</u> 1. $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in J}$ družina množic.

$$\bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda = \{x;\ \exists \lambda \in J : x \in A_\lambda\}$$

je <u>unija</u> $\mathcal{A}$

2. $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in J}$ neprazna družina mn.

$$\bigcap_{\lambda \in J} A_\lambda = \{x;\ \underline{\forall \lambda \in J} : x \in A_\lambda\}$$

je <u>presek</u> $\mathcal{A}$

Kako posplošiti kart. produkt n množic

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n);\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : x_i \in A_i\}$$

na polj. družino množic?

Urejeno n-terico lahko identificiramo z množico urejenih parov $\{(1, x_1), (2, x_2), \dots, (n, x_n)\}$, torej s preslikavo

$$\underline{f : \overbrace{\{1, 2, \dots, n\}}^{J} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

kjer za <u>vse $i \in J$</u> velja: <u>$f(i)$</u> $= x_i$ <u>$\in A_i$</u>.

<u>Def.</u> Naj bo $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in J}$ družina množic. Preslikava

$$f : J \to \bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda,$$

pri kateri <u>za vse $\lambda \in J$</u> velja: <u>$f(\lambda) \in A_\lambda$</u>, je funkcija izbire za družino $\mathcal{A}$.

je funkcija izbire za družino $\mathcal{A}$.

Def. Kartezični produkt družine $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in J}$ je množica vseh funkcij izbire za $\mathcal{A}$, oziroma:

$$\prod_{\lambda \in J} A_\lambda = \{ f : J \to \bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda ; \quad \forall \lambda \in J : f(\lambda) \in A_\lambda \}.$$

Očitno: $\exists \lambda \in J : A_\lambda = \emptyset \implies \prod_{\lambda \in J} A_\lambda = \emptyset$.

Kaj pa obratno? Ali velja:

$$\forall \lambda \in J : A_\lambda \neq \emptyset \implies \prod_{\lambda \in J} A_\lambda \neq \emptyset \ ?$$

Aksiom izbire (AC). Kart. produkt polj. družine nepraznih množic je neprazen, oz.:

$$\forall \lambda \in J : A_\lambda \neq \emptyset \implies \prod_{\lambda \in J} A_\lambda \neq \emptyset.$$

Zgled: zaporedje $a : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$,

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ sod} \\ 1, & n \text{ lih} \end{cases}$$

To je družina množic $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, kjer je $0 = \emptyset$, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$

$$a = \{ (0,0), (1,1), (2,0), (3,1), (4,0), \dots \}$$

$M = \{0, 1\}$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{matrix}$$

$$M = \{ a_0, a_1, a_2, \dots \}$$

$0 = \emptyset$

$n+1 = n \cup \{n\}$

$1 = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$

$2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$

$\vdots$

$n+1 = \{0, 1, \dots, n\}$

Zgled. $\prod A_\lambda = ?$

Zgled. $\prod_{\lambda \in \emptyset} A_\lambda = ?$

Naj bo f funkcija izbire za $(A_\lambda)_{\lambda \in \emptyset}$. Potem:

$$f : \emptyset \to \bigcup_{\lambda \in \emptyset} A_\lambda = \emptyset,$$

torej: $f = \emptyset$. Ali velja $\forall \lambda \in \emptyset : f(\lambda) \in A_\lambda$,

oz.: $\underbrace{\forall \lambda : (\underbrace{\lambda \in \emptyset}_{0} \Rightarrow f(\lambda) \in A_\lambda)}_{1}$ ✓

Odg.: $\prod_{\lambda \in \emptyset} A_\lambda = \{\emptyset\}$. ✓

4.5.4. Slike in praslike

Def. Naj bo $f : A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$.

1. $f_*(A_1) = \{y \in B;\ \exists x \in A_1 : y = f(x)\}$ <u>slika</u> A_1 pri f

2. $f^*(B_1) = \{x \in A;\ f(x) \in B_1\}$ <u>praslika</u> B_1 pri f

Velja: $f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$,
$f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$.

Trditev. $f : A \to B$, $A_1, A_2 \subseteq A$, $B_1, B_2 \subseteq B$.

1. $A_1 \subseteq f^*(f_*(A_1))$
   Če f injektivna, velja enačaj.
2. $f_*(f^*(B_1)) \subseteq B_1$
   Če f surjektivna, velja enačaj.
3. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f_*(A_1) \subseteq f_*(A_2)$
4. $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^*(B_1) \subseteq f^*(B_2)$

3. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f_*(A_1) \subseteq f_*(A_2)$
4. $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^*(B_1) \subseteq f^*(B_2)$

<u>Trditev.</u> Naj bo $f: X \to Y$, $(A_\lambda)_{\lambda \in J}$ neka družina podmnožic mn. X, $(B_\mu)_{\mu \in \mathcal{J}}$ neka
″ ″ mn. Y.

1. $f_*\left(\bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in J} f_*(A_\lambda)$

2. $J \neq \emptyset \Rightarrow f_*\left(\bigcap_{\lambda \in J} A_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in J} f_*(A_\lambda)$

   Če f inj, velja enač.

3. $f^*\left(\bigcup_{\mu \in \mathcal{J}} B_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in \mathcal{J}} f^*(B_\mu)$

4. $\mathcal{J} \neq \emptyset \Rightarrow f^*\left(\bigcap_{\mu \in \mathcal{J}} B_\mu\right) = \bigcap_{\mu \in \mathcal{J}} f^*(B_\mu)$

<u>Dokaz</u> 2. $J \neq \emptyset$

$y \in \underbrace{f_*\left(\bigcap_{\lambda \in J} A_\lambda\right)} \Leftrightarrow \exists x \in \bigcap_{\lambda \in J} A_\lambda : y = f(x)$

$\Leftrightarrow \underline{\exists x}\ \underline{\forall \lambda \in J} : (x \in A_\lambda \wedge y = f(x))$

$\Rightarrow \forall \lambda \in J\ \exists x : (x \in A_\lambda \wedge y = f(x))$

$\Leftrightarrow \forall \lambda \in J\ \exists x \in A_\lambda : y = f(x)$

$\Leftrightarrow \forall \lambda \in J : y \in \underbrace{f_*(A_\lambda)} \Leftrightarrow \underbrace{y \in \bigcap_{\lambda \in J} f_*(A_\lambda)}$ ✓

5. Strukture urejenosti

5.1. Delna in linearna urejenost

<u>Def.</u> $R \subseteq A \times A$.

1. R <u>delno ureja</u> A, če je:
   - refleksivna,
   - antisimetrična,
   - tranzitivna.
2. R linearno ureja A, če je

— antisimetrična,
— tranzitivna.

2. R <u>linearno ureja</u> A, če je
— relacija delne urejenosti,
— sovisna.

<u>Zgledi</u>. 1. $\subseteq$ delno ureja vsako množico množic.

2. Relacija deljivosti $|$ v $\mathbb{N}$, def. takole:
$$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{N} : b = ka,$$
delno ureja $\mathbb{N}$.

3. Relacija $\leqslant$ linearno ureja vsako podmnožico mn. $\mathbb{R}$.

<u>Pisava</u>. Za splošno relacijo delne urejenosti namesto oznake R pišemo $\leqslant$.
Formulo $x \leq y$ beremo: <u>x je pod y</u>.