1.4. DNO in KNO

Dana je resn. tabela nekega izj. izraza A. Samo z uporabo $\neg, \wedge, \vee$ sestavi izj. izraz D, tako da bo $A \sim D$!

Zgled. Naj bo T tabela:

p	q	r	A
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

D mora biti resničen ntk. v 2., 6. in 8. vrstici.
To pa je res ntk. tedaj, ko:
- sta p in q resnični, r pa ne, ali
- sta p in r lažni, q pa resnična, ali
- so vse tri lažne.

$$D = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

Za vajo D poenostavimo:

$$D \sim (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$
$$\sim ((p \vee \neg p) \wedge q \wedge \neg r) \vee ((q \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge \neg r)$$
$$\sim (1 \wedge q \wedge \neg r) \vee (1 \wedge \neg p \wedge \neg r)$$
$$\sim (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \sim (q \vee \neg p) \wedge \neg r$$
$$\sim (p \Rightarrow q) \wedge \neg r \sim \neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$$
$$\sim \neg(p \Rightarrow q \Rightarrow r)$$

Def. Naj bo A kontingenten izraz in T njegova resn. tabela. Disjunktivna normalna oblika izraza A (ali: DNO(A)) je:

disjunkcija osnovnih konjunkcij tistih vrstic, disjunkcija osnovnih konjunkcij tistih vrstic, kjer je A resničen.

Osnovna konjunkcija i-te vrstice je konjunkcija tistih izj. spr., ki so tu resn., in negacij tistih izj. spr., ki so tu lažne.

Trditev. A kontingenten izraz. Potem: $A \sim DNO(A)$.

Dokaz: Naj bo T resn. tabela izr. A, v kateri nastopa n izj. sprem. Za $i = 1, 2, \dots, 2^n$ velja:

(*) $\left\{\begin{array}{l}\text{osn. konjunkcija vrstice } i \text{ je v tej vrstici} \\ \text{resnična, v vseh drugih pa lažna.}\end{array}\right.$

Recimo: A je resničen v vrstici i. Potem osn. konjunkcija vrstice i nastopa kot člen v $DNO(A)$. Iz (*) sledi, da je vsaj en člen $DNO(A)$ resničen, torej je $DNO(A)$ res. v vrst. i.

Recimo: $DNO(A)$ je resničen v vrstici i. Potem je resničen vsaj en člen. Zaradi (*) je to lahko le osn. konj. vrstice i. Torej $DNO(A)$ vsebuje osn. konj. vrstice i in je A resničen v vrstici i.

Ker i poljuben, je $A \sim DNO(A)$. ✓

Zgled. Vzemimo T iz prejšnjega zgleda.

p	q	r	A
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Sestavimo izj. izraz K z enako tabelo.

K je lažen v vrsticah 1, 3, 4, 5 in 7.

K je resničen ntk. tedaj, ko nismo ne v 1 ne v 3. ne v 4. ne v 5. ne v 7. vrstici.

To je ntk. tedaj, ko:

je vsaj ena od p, q, r lažna, in

je vsaj ena od p, r lažna ali q res., in

- - - -

je vsaj ena od p, q, r resn.

Torej je

$$K = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r).$$

To je KNO(A).

1.5. Sklepanje v IR

Sklep je končno zaporedje izjav

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, z,$$

kjer so $p_1, \ldots, p_k$ predpostavke sklepa, z pa zaključek.

Zgled. Če je ta žival ptič, potem ima krila.
Ta žival nima kril.

Torej ta žival ni ptič.

Formalizirajmo: p ... ta žival je ptič
q ... ta žival ima krila

sklep:
$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Def. Zaporedje izj. izrazov $A_1, \ldots, A_k, B$ je pravilen ali veljaven sklep, če je zaključek B resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izj. spr., pri katerih so resnične vse predpostavke $A_1, \ldots, A_k$. Pišemo: $A_1, \ldots, A_k \models B$.

Nekaj osnovnih pravil sklepanja:

Nekaj osnovnih pravil sklepanja:

1. $A,\ A \Rightarrow B \vdash B$ modus ponens (MP)
2. $A \Rightarrow B,\ \neg B \models \neg A$ modus tollens (MT)
3. $A \vee B,\ \neg B \models A$ disjunktivni silogizem (DS)
4. $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$ hipotetični silogizem (HS)
5. $A \wedge B \models A$ poenostavitev (Po)
6. $A, B \models A \wedge B$ združitev (Zd)
7. $A \models A \vee B$ pridružitev (Pr)

Dokaz:

2.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$ ✓

4.

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
1	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
0	1	0	1	0	1
0	0	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
0	0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$ ✓

Zgled. Ali $p \Rightarrow q,\ p \vee r,\ q \Rightarrow s,\ r \Rightarrow t,\ \neg s \models t$?

Izrek o naravni dedukciji. Naj bodo $A_1, \dots, A_k$ izj. izrazi.

Če obstaja zaporedje izj. izrazov $B_1, B_2, \dots, B_n$, tako da za $i = 1, 2, \dots, n$ velja vsaj ena od možnosti:

a) B_i je eden od $A_1, \dots, A_k$

b) B_i je tavtologija

c) $B_i \sim B_j$ za neki $j \in \{1, 2, \dots, i-1\}$

c) $B_i \sim B_j$ za neki $j \in \{1,2,\dots,i-1\}$

d) B_i logično sledi iz $B_1, \dots, B_{i-1}$ po enem od 7 osn. pravil sklepanja,

potem $A_1, \dots, A_k \models B_n$.

Dokaz s popolno indukcijo po n.

osnova: $n=1$

B_1 je lahko le eden od $A_1, \dots, A_k$ ali je tavtologija. Velja:

$A_1, \dots, A_k \models B_1$. ✓

korak: $n \geq 2$

Ind. predp.: $A_1, \dots, A_k \models B_j$ za $j = 1, 2, \dots, n-1$.

a) B_n je eden od $A_1, \dots, A_k$: ✓

b) B_n je tavtologija: ✓

c) $B_n \sim B_j$ za $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$:
po I.P. $A_1, \dots, A_k \models B_j$,
torej tudi $\quad$ ″ $\quad \models B_n$.

d) B_n logično sledi iz $B_1, \dots, B_{n-1}$ po enem od osnovnih pravil sklepanja.
Po I.P. $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ logično sledijo iz $A_1, \dots, A_k$. Torej $A_1, \dots, A_k \models B_n$. ✓

Zgled.

i	B_i	utemeljitev
1.	$p \Rightarrow q$	predp.
2.	$p \vee r$	″
3.	$q \Rightarrow s$	″
4.	$r \Rightarrow t$	″
5.	$\neg s$	″
6.	$p \Rightarrow s$	HS(1, 3)
7.	$\neg p$	MT(6, 5)
8.	$r \vee p$	$\sim$ 2
9.	r	DS(8, 7)
10.	$\underline{\underline{t}}$	MP(9, 4)

10. $\underline{\underline{t}}$ MP(9, 4)

t logično sledi iz predp.