2. Predikatni račun

2.1. Motivacija

Zgled: Vsak zajec ljubi korenje.
Feliks je zajec.
Torej Feliks ljubi korenje.

Formaliziramo v IR:
p ... vsak zajec ljubi korenje
q ... Feliks je zajec.
r ... Feliks ljubi korenje.

Ali $p, q \models r$?

Vzemimo $v(p) = v(q) = 1$, $v(r) = 0$:
Ta sklep ni pravilen.

V PR razširimo jezik IR z dodatnimi simboli, npr.:

$Z(x)$ ... x je zajec
$K(x)$ ... x ljubi korenje
a ... Feliks
$\forall x$ ... za vsak x

Formalizacija sklepa v PR:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x : (Z(x) \Rightarrow K(x)) \\ Z(a)\end{array}}{K(a)}$$

simboli: x ... indiv. spremenljivka
a ... individualna konstanta
Z, K ... enomestna predikata
$\forall x$ ... univerzalni kvantifikator
$:$ ( ) ... ločila

Zgledi prevajanja:

1. a) Vsi gasilci so hrabri.
b) Nekateri gasilci so hrabri.
c) Nekateri gasilci niso hrabri.
d) Noben gasilec ni hraber.

$G(x)$ ... x je gasilec
$H(x)$ ... x je hraber
$\exists x$ ... eksistenčni kvantifikator

a) $\forall x : (G(x) \Rightarrow H(x))$
b) $\exists x : (G(x) \wedge H(x))$
c) $\exists x : (G(x) \wedge \neg H(x))$
d) $\forall x : (G(x) \Rightarrow \neg H(x))$

2. Prevedimo v PR
Evklidov izrek: Praštevil je neskončno mnogo.

Prepišimo drugače: Obstajajo poljubno velika praštevila.

Še drugače: Za vsako nar. število obstaja praštevila.

še drugače: Za vsako nar. število obstaja večje nar. št., ki je praštevilo.

$P(x)$ ... x je praštevilo

$V(x,y)$ ... $x > y$

Dogovorimo se o <u>domeni</u> ali <u>področju pogovora</u> ki je tu $\mathbb{N}$.

$$\forall x\, \exists y: (V(y,x) \wedge P(y))$$

simboli: $\exists y$ ... eksistenčni kvantifikator
V ... dvomestni predikat

3. <u>Definicija</u>. Naravno število n je praštevilo, če in samo če ima natanko dva naravna delitelja.

$E(x,y)$ ... $x = y$

$f(x,y)$ ... $x \cdot y$ (x krat y)

$$\forall x: (P(x) \Leftrightarrow V(x,1) \wedge \forall u \forall v: (E(x, f(u,v)) \Rightarrow E(u,1) \vee E(v,1))$$

oziroma:

$$\forall x: (P(x) \Leftrightarrow x > 1 \wedge \forall u \forall v: (x = u \cdot v \Rightarrow u = 1 \vee v = 1)$$

2.2. Sintaksa (skladnja) PR

A) Simboli PR

1. individualne konstante: $a, b, c, \ldots,$ $a_1, a_2, a_3, \ldots$
2. individualne spremenljivke: $x, y, z, \ldots,$ $x_1, x_2, x_3, \ldots$
3. predikati: $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, P_3, \ldots$ sa eno-, dvo-, ..., n-mestni
4. funkcijski simboli: $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, f_3, \ldots$ so eno-, dvo-, ..., n-mestni
5. izjavni vezniki iz IR
6. simbola kvantifikacije: $\forall$, $\exists$
7. : ( ),

B. Termi PR

<u>Def.</u> w_1. Vsaka indiv. konstanta je term.
w_2. " " spremenljivka je term.
K. Naj bo f neki n-mesten funkcijski simbol in $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termi. Potem je $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ term.

<u>Def.</u> Term t je <u>zaprt</u>, če ne vsebuje indiv. sprem.

<u>Zgled.</u> Naj bo f enomesten in g dvomesten funkc. simbol. Potem so

Zgled. Naj bo f enomesten in g dvomesten funkc. simbol. Potem so

$x, y, a, f(x), f(a), f(f(a)), g(x, f(f(y)))$

termi. Od teh so $a, f(a), f(f(a))$ zaprti.

C) Izjavne formule PR

Def. φ: Naj bo P neki n-mesten predikat in $t_1, t_2, \dots, t_n$ termi. Potem je $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ izj. formula (atomarna).

K1. Če je F neki n-mesten izj. veznik in so $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ izj. formule, je $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ izj. formula.

K2. Če je φ izj. formula in x individualna sprem., sta $(\forall x: \varphi)$ in $(\exists x: \varphi)$ izjavni formuli.

Pri tem je:

$\forall x$ ... univerzalni kvantifikator

$\exists x$ ... eksistenčni "

φ ... doseg kvantifikatorja.

Zgled. $\underbrace{Z(x), K(x), Z(a), K(a)}_{\text{atomarne}}, \neg H(x),$

$\forall x: (G(x) \Rightarrow H(x)),$

$\forall x: \exists y: (V(y, x) \wedge P(y)))$

Dogovor o prednostnem redu in opuščanju ločil:

1. Za izj. veznike in zun. oklepaje še vedno velja dogovor iz IR.
2. Kvantifikatorji imajo prednost pred izj. vezniki.
3. Ločila med zaporednimi kvantifikatorji opuščamo.

Def. Nastop indiv. spr. v izj. formuli je vezan, če je del kvantifikatorja ali leži v dosegu kvantifikatorja, ki vsebuje to sprem. Sicer je prost.

Izj. formula je zaprta, če so vsi nastopi indiv. spremenljivk v njej vezani.

Zgled. 1. $P(a)$, $\forall x: P(x)$, $\forall x \exists y: R(x,y)$ so zaprte izj. formule.

2. $P(x)$, $\exists y: R(x,y)$, $\forall x: (R(x,y) \Rightarrow \exists y: P(y))$

prosti nastopi

niso zaprte.

Substitucija (zamenjava)

- Izj. formulo φ lahko zapišemo v obliki $\varphi(x)$, kjer je x indiv. sprem. Če je t term, s $\varphi(t)$ označimo izj. formulo, ki jo dobimo iz φ, če vse proste nastope x v φ zamenjamo s termom t.
- Izj. formulo φ lahko zapišemo kot $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, kjer so $x_1, \dots, x_n$ različne indiv. sprem. Če so $t_1, \dots, t_n$ termi, je $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ izj. formula, ki jo dobimo, če v φ zamenjamo vse proste nastope x_i s termom t_i in za $i = 1, 2, \dots, n$.

Zgled.
$$\varphi(x) = \exists y: R(x,y)$$
$$\varphi(z) = \exists y: R(z,y)$$
$$\varphi(y) = \exists y: R(y,y)$$
$$\varphi(g(f(a), f(a))) = \exists y: R(g(f(a), f(a)), y)$$

2.3. Semantika (pomenoslovje) PR

Def: Naj bo $\mathcal{F}$ množica izj. formul, ki nas zanimajo. Interpretacijo I formul iz $\mathcal{F}$ podamo tako, da:

1. izberemo neprazen razred objektov D (domena ali področje pogovora),
2. vsaki indiv. konstanti a iz $\mathcal{F}$ priredimo neki $\bar{a} \in D$,
3. vsakemu n-mestnemu predikatu P iz $\mathcal{F}$ priredimo neko n-mestno relacijo $\bar{P}$ v D,
4. vsakemu n-mestnemu funkc. simbolu f priredimo preslikavo $\bar{f}$, ki vsako urejeno n-terico elementov D preslika v točno določen element D.

Izjavne veznike interpretiramo kot v IR.
$\forall x$ interpretiramo kot „za vsak x iz D",
$\exists x$ " " „obstaja x iz D".

Nekateri gasilci so hrabri.
$$\exists x: (G(x) \wedge H(x))$$

$$\exists x: (G(x) \Rightarrow H(x))$$

Ta izjava je resnična tudi v primeru, ko noben gasilec ni hraber, obstaja pa nekdo, ki ni gasilec.
↑
Peter