Zgled. $\text{otrok}^{\text{tranz.}} = \text{otrok}^{+} = \text{potomec} \cup \text{potomka}$

4.5. Funkcije ali preslikave

Def. Funkcija ali preslikava je enolična dvamestna relacija.

Def. Urejena trojica (f, A, B) je funkcija ali preslikava mn. A v mn. B, če velja:

1. f je enolična relacija v $A \cup B$, $(f \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B))$
2. $\mathcal{D}_f = A$,
3. $\mathcal{Z}_f \subseteq B$.

Tu je B kodomena te funkcije.

Vidimo: $f \subseteq \mathcal{D}_f \times \mathcal{Z}_f \subseteq A \times B$.

Namesto (f, A, B) pišemo $f : A \to B$ ali $A \xrightarrow{f} B$.

Funkcijska pisava.

Namesto $(x, y) \in f$ ali $x f y$ pišemo

$y = f(x)$ ali $f(x) = y$ oziroma

$f : x \mapsto y$ ali $x \overset{f}{\longmapsto} y$ in beremo:

y je vrednost f pri argumentu x,

ali: y je f-slika originala x.

Formula $f(x) = f(y)$ je okrajšava za

$\exists z : (x f z \wedge y f z)$.

4.5.1. Lastnosti funkcij

Def. $f : A \to B$.

1. f je injektivna $\iff$

Def. $f: A \to B$.

1. f je injektivna $\iff$
$$\forall x, y \in A: \left(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \right)$$
2. f je surjektivna $\iff$ $Z_f = B$.
3. f je bijektivna $\iff$ f injektivna in surjektivna

Zgledi: 1. $\emptyset$ je ~~prazna funkcija~~,

$\emptyset : \emptyset \to A$ prazna preslikava v A

2. $id_A : A \to A$, $\forall x \in A: \ id_A(x) = x$

identična preslikava na A

3. Naj bo $A \subseteq B$. Preslikava $i: A \hookrightarrow B$, kjer $\forall x \in A: i(x) = x$, je vložitev A v B.

4. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$p_i : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \to A_i,$$
$$p_i((a_1, a_2, \dots, a_n)) = a_i$$

projekcija na i-to komponento

5. $R \subseteq A \times A$ ekvivalenca

$$p: A \to A/R,$$
$\forall x \in A: \ p(x) = R[x]$ je ~~naravna~~ kvocientna projekcija

6. Naj bo $A \subseteq S$.

$$\chi_A : S \to \{0, 1\},$$
$$\forall x \in S: \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{če } x \in A \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

karakteristična funkcija mn. A (glede na S)

Prazna preslikava in vložitev sta injektivni.

Prazna preslikava in vložitev sta injektivni.

Projekcije nepraznega kart. produkta na posamezne komponente so surjektivne, naravna kv. projekcija je surjektivna, χ_A je surjektivna, če $A \neq \emptyset, S$.

Def. Preslikavo $f: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to B$ imenujemo funkcija <u>n spremenljivk</u>.

Namesto $f((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ pišemo
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

4.5.2. Operacije s funkcijami

Def. $f: A \to B$, $C \subseteq A$.

Preslikava $g: C \to B$, kjer
$$\forall x \in C: \; g(x) = f(x),$$
je <u>zožitev</u> f na C. Pišemo: $g = f|_C$.

Trditev. $\mathcal{D}_{f^T} = \mathcal{Z}_f$, $\mathcal{Z}_{f^T} = \mathcal{D}_f$. ✓

Trditev.

1. Naj bo f funkcija. Potem:
$$f^T \text{ funkcija} \iff f \text{ injektivna}.$$

2. Naj bo $f: A \to B$. Potem:
$$f^T : B \to A \iff f \text{ bijektivna}.$$

f^T enolična

Dokaz:

1. f^T funkcija $\iff \forall x, y, z: (\boxed{x f^T y \wedge x f^T z \Rightarrow y = z})$

$\iff \forall x, y, z: (y f x \wedge z f x \Rightarrow y = z)$

$\iff \forall y, z, x: (\neg(y f x \wedge z f x) \vee y = z)$

$\iff \forall y, z: (\forall x: \neg(y f x \wedge z f x) \vee y = z)$

$$\Leftrightarrow \forall y,z: (\forall x: \neg(y f x \wedge z f x) \vee y = z)$$
$$\Leftrightarrow \forall y,z: (\neg \underbrace{\exists x: (y f x \wedge z f x)} \vee y = z)$$
$$\Leftrightarrow \forall y,z: (\neg (f(y) = f(z)) \vee y = z)$$
$$\Leftrightarrow \forall y,z: (f(y) = f(z) \Rightarrow y = z)$$
$\Leftrightarrow f$ injektivna ✓

2. $f^T: B \to A \Rightarrow f^T$ funkcija $\wedge\ \mathcal{D}_{f^T} = B$

$\Rightarrow f$ injektivna $\wedge\ \mathcal{Z}_f = B$ (where $\mathcal{D}_{f^T} = \mathcal{Z}_f$)

$\Rightarrow$ " $\wedge\ f$ surjektivna

$\Rightarrow f$ bijektivna ✓

f bijektivna $\Rightarrow f$ injektivna $\wedge\ \mathcal{D}_f = A \wedge \mathcal{Z}_f = B$

$\Rightarrow f^T$ funkcija $\wedge\ \mathcal{Z}_{f^T} = A \wedge \mathcal{D}_{f^T} = B$

$\Rightarrow f^T : B \to A$ ✓

Če je f injektivna, je f^T tudi funkcija, ki jo v tem primeru imenujemo <u>inverzna funkcija</u> funkcije f in označimo $\underline{\underline{f^{-1}}}$.

<u>Def.</u> Preslikavi $f: A \to B$ priredimo relacijo $K_f \subseteq A \times A$ takole:

$$\forall x,y \in A: \quad x K_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

To je ekvival. relacija v A (<u>kongruenca</u> funkcije f).

$$\forall x \in A: \quad K_f[x] = \{y \in A;\ f(y) = f(x)\}.$$

Trditev. $f: A \to B$.

1. $f^T \circ f = K_f$
2. $f \circ f^T = id_{Z_f}$
3. f injektivna $\Rightarrow f^T \circ f = id_A$
4. f surjektivna $\Rightarrow f \circ f^T = id_B$

Dokaz:

1. $$x\, \underline{f^T \circ f}\, y \iff \exists u: (x f u \wedge u f^T y)$$
$$\iff \exists u: (x f u \wedge y f u)$$
$$\iff \exists u: (u = f(x) \wedge u = f(y))$$
$$\iff f(x) = f(y) \iff x\, \underline{K_f}\, y \checkmark$$

2. $$x\, \underline{f \circ f^T}\, y \iff \exists u: (x f^T u \wedge u f y)$$
$$\iff \exists u: (u f x \wedge u f y)$$
$$\iff \exists u: (x = f(u) \wedge y = f(u))$$
$$\iff x = y \wedge x \in Z_f \wedge y \in Z_f$$
$$\iff x\, \underline{id_{Z_f}}\, y \checkmark$$

3. $$f \text{ injektivna} \iff \forall x, y \in A: (f(x) = f(y) \iff x = y)$$
$$\iff \forall x, y \in A: (x K_f y \iff x = y)$$
$$\iff K_f = id_A$$
$$\iff f^T \circ f = id_A \checkmark$$

4. $$f \text{ surjektivna} \iff Z_f = B \iff id_{Z_f} = id_B$$
$$\iff f \circ f^T = id_B \checkmark$$

Posledica. Naj bo $f: A \to B$ bijekcija.
Potem je $f^{-1} \circ f = id_A$ in $f \circ f^{-1} = id_B$. $\checkmark$

Izrek. 1. Če sta f in g funkciji, je tudi $f\circ g$ funkcija in
$$\underbrace{\forall x\in \mathcal{D}_{f\circ g}: (f\circ g)(x) = f(g(x)).}$$

2. Naj bo $g: A \to \underline{B}$ in $f: \underline{B}\to C$. Potem $f\circ g: A\to C$.

Dokaz: 1. Naj bo $\underline{x\,(f\circ g)\,y}$ in $x\,(f\circ g)\,z$.

Potem $\exists u,v: \underline{x g u} \wedge u f y \wedge \underline{x g v} \wedge v f z$.

$$\xRightarrow{g \text{ funkcija}} u=v \implies \exists u: u f y \wedge u f z$$

$$\xRightarrow{f \text{ funkcija}} y = z$$

Torej je $f\circ g$ funkcija. ✓

2. $\mathcal{Z}_g \subseteq B = \mathcal{D}_f \implies \underline{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathcal{D}_g = A}$

$f\subseteq B\times \underline{C}$, $g \subseteq \underline{A}\times B \implies f\circ g \subseteq A\times C$

$$\implies \underline{\mathcal{Z}_{f\circ g} \subseteq C}$$

Torej: $f\circ g: A\to C$. ✓

Drugi del 1. točke:

$x\in \mathcal{D}_{f\circ g}$ in $y = (f\circ g)(x)$ oziroma

$$x\, f\circ g\, y \implies \exists u: x g u \wedge u f y$$
$$\implies \exists u: u = g(x) \wedge y = f(u)$$
$$\implies \underline{y = f(g(x))}. ✓$$

Trditev. Naj bo $f: A\to B$. Potem:
$$f\circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Trditev. $f: B \to C$, $g: A \to B$.

1. f, g injektivni $\Rightarrow$ $f \circ g$ inj.
2. f, g surjektivni $\Rightarrow$ $f \circ g$ surj.
3. $f \circ g$ injektivna $\Rightarrow$ g injektivna
4. $f \circ g$ surjektivna $\Rightarrow$ f surjektivna. ✓