Poglavje 4

Relacije in funkcije

4.5 Funkcije

Definicija 1 Funkcija *ali* preslikava *je enolična dvomestna relacija.*

Definicija 2 *Urejena trojica* (f, A, B) *je* funkcija *ali* preslikava množice A v množico B*, če je* f *enolična relacija v množici* $A \cup B$*,* $\mathcal{D}_f = A$ *in* $\mathcal{Z}_f \subseteq B$*.*

Trojico (f, A, B) *pišemo v obliki* $f: A \to B$ *ali* $A \xrightarrow{f} B$*. Množica* A *je* domena *ali* definicijsko območje*, množica* $\mathcal{Z}_f$ zaloga vrednosti*, množica* B *pa* kodomena *preslikave* $f\colon A \to B$*.*

Pripomba 1 *1. Podatek* A *v trojici* (f, A, B) *je sicer odveč, saj je* $A = \mathcal{D}_f$*, vendar je iz praktičnih razlogov dobro, da ga navajamo tudi eksplicitno.*

2. Kadar definiramo neko preslikavo $f\colon A \to B$*, moramo paziti na dvoje:*

1. vrednost $f(x) \in B$ *mora biti definirana* za vsak $x \in A$ *(celovitost),*

2. ta vrednost mora biti z $x \in A$ enolično določena *(enoličnost).*

3. Za vsako dvomestno relacijo R *je očitno* $R \subseteq \mathcal{D}_R \times \mathcal{Z}_R$*. Če je* $f\colon A \to B$*, je torej* $f \subseteq \mathcal{D}_f \times \mathcal{Z}_f \subseteq A \times B$*.*

Funkcijska pisava: Če je f funkcija, namesto relacijske pisave xfy uporabljamo *funkcijsko pisavo* $y = f(x)$ ali $f: x \mapsto y$ in preberemo:

- y je *vrednost* f pri *argumentu* x, ali:
- y je f*-slika originala* x.

Formulo $f(x) = f(y)$ uporabljamo kot okrajšavo za formulo

$$\exists z\colon (xfz \wedge yfz).$$

4.5.1 Lastnosti funkcij

Definicija 3 *Naj bo $f: A \to B$.*

1. *f je* injektivna*, če $\forall x, y \in A: (f(x) = f(y) \implies x = y)$.*
2. *f je* surjektivna*, če je $\mathcal{Z}_f = B$.*
3. *f je* bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.*

Zgled 1

1. $\emptyset$ je *prazna funkcija*, $\emptyset: \emptyset \to A$ je *prazna preslikava* v množico A.
2. $\mathrm{id}_A: A \to A$, kjer za vsak $x \in A$ velja: $id_A(x) = x$, je *identiteta* na A.
3. Naj bo $A \subseteq B$. Preslikavo $i: A \hookrightarrow B$, kjer za vsak $x \in A$ velja: $i(x) = x$, imenujemo *vložitev* A v B.
4. Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Za vse $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je preslikava $p_i : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to A_i$, kjer za vsako urejeno n-terico $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ velja: $p_i(x) = a_i$, *projekcija $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ na i-to komponento.*
5. Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna relacija v A. Preslikava $p: A \to A/R$, kjer za vsak $x \in A$ velja: $p(x) = R[x]$, je *naravna kvocientna projekcija* množice A na množico A/R.
6. Naj bo $A \subseteq S$. Preslikava $\chi_A: S \to \{0, 1\}$, kjer za vsak $x \in S$ velja:

$$\chi_A(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{če } x \in A, \\ 0, & \text{če } x \notin A, \end{cases}$$

   je *karakteristična funkcija* množice A glede na S.

Prazna preslikava in vložitev sta injektivni, identiteta je bijektivna, projekcije nepraznega kartezičnega produkta na posamezne komponente so surjektivne, prav tako je surjektivna naravna kvocientna projekcija. Če $A \notin \{\emptyset, S\}$, je tudi karakteristična funkcija χ_A surjektivna.

Definicija 4 *Naj bo $f : A \to B$ in $C \subseteq A$. Preslikava $g : C \to B$, kjer za vse $x \in C$ velja: $g(x) = f(x)$, je* zožitev f na C*. Pišemo: $g = f|_C$.*

Zgled 2 Naj bo $C \subseteq A$. Vložitev $i: C \hookrightarrow A$ je zožitev id_A na C, torej $i = \mathrm{id}_A|_C$.

Definicija 5 *Preslikavo $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to B$ imenujemo tudi* funkcija n spremenljivk*. Tedaj namesto $f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$ pišemo kar $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.*

4.5.2 Operacije s funkcijami

Kot za vsako relacijo tudi za vsako *funkcijo* f obstaja transponirana relacija f^T. Očitno je $\mathcal{D}_{f^T} = \mathcal{Z}_f$ in $\mathcal{Z}_{f^T} = \mathcal{D}_f$. Kdaj pa je relacija f^T tudi funkcija?

Trditev 1

1. *Naj bo f funkcija. Potem je f^T funkcija natanko tedaj, ko je f injektivna.*
2. *Naj bo $f\colon A \to B$. Potem je $f^T\colon B \to A$ natanko tedaj, ko je f bijektivna.*

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
1.\ f^T \text{ funkcija} &\iff f^T \text{ enolična relacija} \\
&\iff \forall x, y, z\colon (x f^T y \land x f^T z \ \Rightarrow\ y = z) \\
&\iff \forall x, y, z\colon (y\, f\, x \land z\, f\, x \ \Rightarrow\ y = z) \\
&\iff \forall y, z, x\colon (\neg(y\, f\, x \land z\, f\, x) \ \lor\ y = z) \\
&\iff \forall y \forall z\colon (\forall x\colon (\neg(y\, f\, x \land z\, f\, x)) \ \lor\ y = z) \\
&\iff \forall y \forall z\colon (\neg\, \exists x\colon (y\, f\, x \land z\, f\, x) \ \lor\ y = z) \\
&\iff \forall y \forall z\colon (\neg\, (f(y) = f(z)) \ \lor\ y = z) \\
&\iff \forall y \forall z\colon (f(y) = f(z) \ \Rightarrow\ y = z) \\
&\iff f \text{ injektivna}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.\ f^T : B \to A &\implies f^T \text{ funkcija} \land \mathcal{D}_{f^T} = B \\
&\implies f \text{ injektivna} \land \mathcal{Z}_f = B \\
&\implies f \text{ bijektivna}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f \text{ bijektivna} &\implies f \text{ injektivna} \land \mathcal{D}_f = A \land \mathcal{Z}_f = B \\
&\implies f^T \text{ funkcija} \land \mathcal{Z}_{f^T} = A \land \mathcal{D}_{f^T} = B \\
&\implies f^T\colon B \to A
\end{aligned}
$$

$\square$

Če je funkcija f injektivna, imenujemo funkcijo f^T tudi *inverzna funkcija* funkcije f in jo označimo z f^{-1}.

Definicija 6 *Preslikavi $f\colon A \to B$ priredimo relacijo $K_f \subseteq A \times A$ takole:*

$$x\, K_f\, y \iff f(x) = f(y).$$

Očitno je K_f ekvivalenčna relacija v A in velja

$$\forall x \in A\colon K_f[x] \;=\; \{y \in A;\; f(y) = f(x)\}.$$

Relacija K_f je *kongruenca preslikave* f.

Trditev 2 *Naj bo $f\colon A \to B$. Potem velja:*

1. $f^T \circ f \;=\; K_f$
2. $f \circ f^T \;=\; \mathrm{id}_{\mathcal{Z}_f}$
3. f *injektivna* $\iff$ $f^T \circ f \;=\; \mathrm{id}_A$
4. f *surjektivna* $\iff$ $f \circ f^T \;=\; \mathrm{id}_B$

Dokaz:

1. $$\begin{aligned} x\, f^T\!\circ f\, y &\iff \exists u\colon (xfu \wedge uf^Ty) \iff \exists u\colon (xfu \wedge yfu) \\ &\iff f(x) = f(y) \iff xK_f\, y \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x\, f\circ f^T y &\iff \exists u\colon (xf^Tu \wedge ufy) \iff \exists u\colon (ufx \wedge ufy) \\ &\iff \exists u\colon (x = f(u) \wedge y = f(u)) \iff x = y \wedge x \in \mathcal{Z}_f \wedge y \in \mathcal{Z}_f \\ &\iff x\ \mathrm{id}_{\mathcal{Z}_f}\, y \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} f \text{ injektivna} &\iff \forall x, y \in A\colon (f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y) \\ &\iff \forall x, y \in A\colon (xK_f\, y \Leftrightarrow x = y) \\ &\iff K_f \;=\; \mathrm{id}_A \iff f^T \circ f \;=\; \mathrm{id}_A \end{aligned}$$

4. $$f \text{ surjektivna} \iff \mathcal{Z}_f = B \iff \mathrm{id}_{\mathcal{Z}_f} = \mathrm{id}_B \iff f \circ f^T \;=\; \mathrm{id}_B$$

$\square$

Posledica 1 *Naj bo $f\colon A \to B$ bijekcija. Potem je $f^{-1}\circ f \;=\; \mathrm{id}_A$ in $f\circ f^{-1} \;=\; \mathrm{id}_B$.*

Izrek 1

1. *Če sta f in g funkciji, je tudi $f \circ g$ funkcija in za vsak $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ je $(f \circ g)(x) \;=\; f(g(x))$.*
2. *Naj bo $g : A \to B$ in $f : B \to C$. Potem je $f \circ g : A \to C$.*

Dokaz: 1. Naj bo $x\,(f\circ g)\,y$ in $x\,(f\circ g)\,z$. Potem obstajata u in v, tako da je

$$\underline{x\,g\,u} \wedge u f y \wedge \underline{x\,g\,v} \wedge v f z.$$

Zaradi enoličnosti g sledi od tod $u = v$. Torej je ufy in ufz, od tod pa zaradi enoličnosti f sledi še $y = z$. Potemtakem je tudi relacija $f\circ g$ enolična.

Naj bo $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ in $y = (f\circ g)(x)$ oziroma $x(f\circ g)y$. Potem obstaja u, tako da je $x\,g\,u$ in ufy oziroma $u = g(x)$ in $y = f(u) = f(g(x))$. Torej je $(f\circ g)(x) = f(g(x))$.

2. Ker je $\mathcal{Z}_g \subseteq B = \mathcal{D}_f$, je $\underline{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathcal{D}_g = A}$. Ker je $g \subseteq A\times B$ in $f \subseteq B\times C$, je $f\circ g \subseteq A\times C$ in zato $\underline{\mathcal{Z}_{f\circ g} \subseteq C}$. Torej je $f\circ g : A \to C$. □

Trditev 3 *Naj bo $f : A \to B$. Potem je $f\circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$.*

Dokaz:

$$x\,(f\circ \mathrm{id}_A)\,y \iff \exists u\colon (x = u \wedge ufy) \iff xfy \ \surd$$
$$x\,(\mathrm{id}_B\circ f)\,y \iff \exists u\colon (xfu \wedge u = y) \iff xfy \ \surd$$

□

Trditev 4 *Naj bo $g : A \to B$ in $f : B \to C$. Potem velja:*

1. *f, g injektivni $\implies$ $f\circ g$ injektivna*
2. *f, g surjektivni $\implies$ $f\circ g$ surjektivna*
3. *$f\circ g$ injektivna $\implies$ g injektivna*
4. *$f\circ g$ surjektivna $\implies$ f surjektivna*

Dokaz: 3. $g(x) = g(y) \implies f(g(x)) = f(g(y)) \implies (f\circ g)(x) = (f\circ g)(y) \implies x = y$. □