sreda, 09. december 2020 10:04

Ponovitev: $R, S \subseteq A \times A$, $x, y \in A$

1. $x R^T y \iff y R x$
2. $x R \circ S y \iff \exists u \in A : (x S u \wedge u R y)$

Izrek. $R, S, T \subseteq A \times A$ (ali: $R, S, T \in \mathcal{P}(A \times A)$).

1. $(R^T)^T = R$
2. $(R \cup S)^T = R^T \cup S^T$
   $(R \cap S)^T = R^T \cap S^T$
   $(R \setminus S)^T = R^T \setminus S^T$
   $(R \oplus S)^T = R^T \oplus S^T$
3. $R \circ id_A = id_A \circ R = R$ — id_A enota za komponiranje v $\mathcal{P}(A \times A)$
4. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
5. $(R \circ S)^T = S^T \circ R^T$
6. $R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$ — distributivnost
   $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$ — glede na $\cup$
7. $\underbrace{R \subseteq S \Rightarrow R \circ T \subseteq S \circ T \wedge T \circ R \subseteq T \circ S}_{\text{monotonost}}$

Dokaz 4. $x, y \in A$

$$
\begin{aligned}
x \underbrace{(R \circ S) \circ T}\, y &\iff \exists u : (x T u \wedge u R \circ S y) \\
&\iff \exists u : (x T u \wedge \exists v : (u S v \wedge v R y)) \\
&\iff \exists u \exists v : (x T u \wedge (u S v \wedge v R y)) \\
&\iff \exists v \exists u : ((x T u \wedge u S v) \wedge v R y) \\
&\iff \exists v : (\exists u : (x T u \wedge u S v) \wedge v R y) \\
&\iff \exists v : (x (S \circ T) v \wedge v R y) \\
&\iff x \underbrace{R \circ (S \circ T)}\, y \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Zgled. A = mn. ljudi

1. Kaj je hči $\circ$ mož?

$$x\ (\underbrace{\text{hči} \circ \text{mož}})\ y \iff \exists u : (x \text{ mož } u\text{-ja} \wedge u \text{ hči } y\text{-a})$$

$$\iff x \text{ je mož } y\text{-ove hčere}$$

$$\iff x \text{ je zet } y\text{-a}$$

$$\iff x\ \underbrace{\text{zet}}\ y$$

$$\left(\iff x \text{ je } \underbrace{\text{hčerin mož}}\right)$$

2. $\underline{\text{oče} \circ \text{brat}} = \text{očetov brat} = \underline{\text{stric}}$

$\underline{\text{mati} \circ \text{brat}} = \text{materin brat} = \underline{\text{ujec}}$

3. $\text{tašča} = \text{moževa mati ali ženina mati}$

$= \text{mož} \circ \underline{\text{mati}} \cup \text{žena} \circ \underline{\text{mati}}$

$= (\text{mož} \cup \text{žena}) \circ \text{mati}$

$= \text{zakonec} \circ \text{mati}$

$= \text{zakončeva mati}$

Izrek. (alg. karakterizacija operacij z relacijami)
Naj bo $R \in \mathcal{P}(A \times A)$.

1. R refleksivna $\iff id_A \subseteq R$
2. R irefleksivna $\iff R \cap id_A = \emptyset$
3. R simetrična $\iff R = R^T$
4. R asimetrična $\iff R \cap R^T = \emptyset$
5. R antisimetrična $\iff R \cap R^T \subseteq id_A$
6. R tranzitivna $\iff R \circ R \subseteq R$
7. R intranzitivna $\iff (R \circ R) \cap R = \emptyset$
8. R strogo sovisna $\iff R \cup R^T = A \times A$

8. R strogo sovisna $\iff R \cup R^T = A \times A$

9. R sovisna $\iff R \cup R^T \cup id_A = A \times A$

10. R enolična $\iff R \circ R^T \subseteq id_A$

Dokaz 6.

$(\Rightarrow)$ Naj bo R tranzitivna.

$x, y \in A$

$x \, R \circ R \, y \Rightarrow \exists u: xRu \wedge uRy$

$\Rightarrow \exists u: xRy \Rightarrow xRy$ ✓

$(\Leftarrow)$ Naj bo $R \circ R \subseteq R$.

$x, y \in A$

$xRy \wedge yRz \Rightarrow x \, R \circ R \, z \Rightarrow xRz$

Torej: R tranzitivna. ✓

10. $(\Rightarrow)$ Naj bo R enolična.

$x, y \in A$

$x \, R \circ R^T y \Rightarrow \exists u: (x R^T u \wedge uRy)$

$\Rightarrow \exists u: (uRx \wedge uRy)$

$\Rightarrow \exists u: x = y \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow x \, id_A \, y$ ✓

$(\Leftarrow)$ Naj bo $R \circ R^T \subseteq id_A$.

$x, y, z \in A$

$xRy \wedge xRz \Rightarrow y R^T x \wedge xRz$

$\Rightarrow y \, R \circ R^T z$

$\Rightarrow y = z$,

torej je R enolična. ✓

4.4. Potence in ovojnice relacij

4.4. Potence in ovojnice relacij

Def. $R \subseteq A \times A$. Kompozicijsko potenco relacije R definiramo takole:

osnova: $R^0 = id_A$

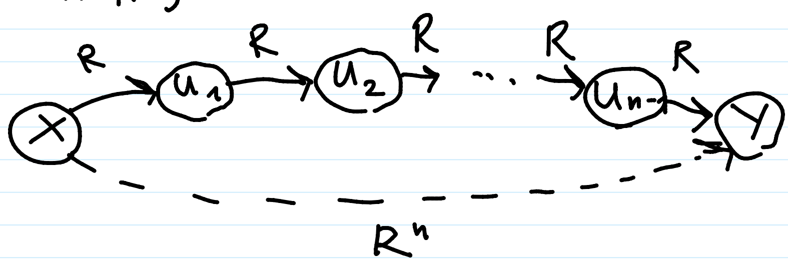
korak: $\forall n \in \mathbb{N}: R^{n+1} = R^n \circ R$.

Zgled. a) $R^1 = R^{0+1} \overset{kor.}{\underset{n=0}{=}} R^0 \circ R \overset{osn.}{=} id_A \circ R = R$

b) $R^2 = R^{1+1} \overset{kor.}{=} R^1 \circ R \overset{a)}{=} R \circ R$

c) $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n\ R\text{-jev}}$ (za $n \geq 1$)

Grafično:



Trditev. Za vse $n, m \in \mathbb{N}$ velja:

1. $R^n \circ R^m = R^{n+m}$
2. $(R^n)^m = R^{nm}$

Dokaz: Z indukcijo po m.

Zgled. A = mn. ljudi, R = otrok = sin ∪ hči.

R^2 = vnuk ∪ vnukinja

R^3 = pravnuk ∪ pravnukinja

$\vdots$

$n \geq 2$: R^n = pra^{n-2}vnuk ∪ pra^{n-2}vnukinja

Definicija. $R \subseteq A \times A$.

1. $R^+ = \bigcup \{R^k;\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$

$$= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

2. $R^* = \bigcup \{R^k;\ k \in \mathbb{N}\}$
$$= \underline{id_A} \cup R \cup R^2 \cup \dots = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

<u>Trditev.</u>

1. $R^* = R^+ \cup id_A$
2. $\forall x, y \in A: (x R^+ y \iff \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}: x R^k y)$
3. $\quad$ '' $\quad (x R^* y \iff \exists k \in \mathbb{N}: x R^k y)$

<u>Grafično:</u>

$x R^+ y \iff$ v grafu relacije R obstaja usmerjena pot dolžine $k \geq 1$ od x do y

$x R^* y \iff$ '' '' '' '' '' $k \geq 0$ od x do y

<u>Zgled.</u> $A =$ mn. ljudi, $R =$ otrok

$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$
$=$ potomec ali potomka

<u>Definicija.</u> Naj bo $R \subseteq A \times A$ (oz. $R \in \mathcal{P}(A \times A)$) in L neka lastnost relacij v A ($L \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$). Relacija R^L je <u>L-ovojnica</u> relacije R, če velja:

1. $R \subseteq R^L$,
2. $R^L \in L$ (R^L ima lastnost L),
3. $\forall S \subseteq A \times A$: S ima lastnost L

$(\dots \Rightarrow R^L \subseteq S)$

3. $\forall S \subseteq A \times A$: $(R \subseteq S \land \underbrace{S \in L}_{S \text{ ima lastnost } L} \Rightarrow R^L \subseteq S)$.

__Pripomba.__ 1. Če R ima lastnost L, je $R^L = R$.

2. R^L ne obstaja vedno.

__Izrek.__ Za vsako rel. $R \subseteq A \times A$ obstajajo ovojnice $R^{\text{refl.}}$, $R^{\text{sim.}}$, $R^{\text{tranz.}}$, $R^{\text{refl. in tranz.}}$, $R^{\text{ekvival.}}$ in velja:

1. $R^{\text{refl.}} = R \cup id_A$
2. $R^{\text{sim.}} = R \cup R^T$
3. $R^{\text{tranz.}} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = R^+$
   (R^+ = tranzitivna ovojnica R)
4. $R^{\text{refl. in tranz.}} = R^*$
5. $R^{\text{ekvival.}} = (R \cup R^T)^*$

__Dokaz 3.__

a) $R^+ = \underline{R} \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$, torej $R \subseteq R^+$. ✓

b) $\underbrace{x R^+ y \land y R^+ z}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k \geq 1: \underbrace{x R^k y} \land \exists m \geq 1: \underbrace{y R^m z}$

$\Rightarrow \exists k, m \geq 1: (\underbrace{x R^k y \land y R^m z})$

$\Rightarrow \exists k, m \geq 1: x R^m \circ R^k z$

$\Rightarrow \exists k, m \geq 1: x R^{m+k} z$

$\overset{n=m+k}{\Longrightarrow} \exists n \geq 2: x R^n z \Rightarrow \exists n \geq 1: x R^n z$

$\Rightarrow \underline{x R^+ z}$, torej je R^+ tranz. ✓

c) $R \subseteq S \land S$ tranz. $\Rightarrow R^+ \subseteq S$

Najprej z indukcijo po k dokažimo:

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}: \ R^k \subseteq S. \ ✓$$

Osnova $(k=1)$: $R \subseteq S$ ✓

Korak $(k \geq 1)$: Po ind. predp. je $R^k \subseteq S$.

$$R^k \subseteq S \ \Big| \circ R \qquad\qquad S \circ \Big| \ R \subseteq S$$

$$\underbrace{\Rightarrow R^{k+1} \subseteq S \circ R \qquad\qquad \Rightarrow S \circ R \subseteq S \circ S \overset{\text{tranz.}}{\subseteq} S}$$

$$\Rightarrow R^{k+1} \subseteq S \circ R \subseteq S \circ S \subseteq S \ ✓$$

Torej je $R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k \subseteq S$. ✓