Izrek o indukciji. Naj bo $L \subseteq \mathbb{N}$. Če velja:

1. $0 \in L$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}: (n \in L \Rightarrow n' \in L)$,

je $L = \mathbb{N}$.

Dokaz: Po 1 in 2 je L induktivna množica.

$\left.\begin{array}{l}\text{Potem je } \mathbb{N} \subseteq L. \\ \text{Toda } L \subseteq \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow L = \mathbb{N}.$ ✓

1.2. Relaciji $\sim$ in $\preccurlyeq$

Def. A in B imata enako moč ali sta ekvipolentni, če $\exists$ bijekcija $f: A \to B$. Pišemo: $A \sim B$.

Trditev. Za A, B, C velja:

1. $A \sim A$ (refleksivnost)
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (simetričnost)
3. $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (tranzitivnost)

Torej: $\sim$ je ekvival. relacija v razredu V vseh mn.

Dokaz:

1. $id_A: A \to A$ je bijekcija
2. Če $f: A \to B$ bij., potem je $f^{-1}: B \to A$ bij.
3. Če sta $f: A \to B$, $g: B \to C$ bij., je tudi $g \circ f: A \to C$ bijekcija. ✓

Def. A ima manjšo ali enako moč kot B, če $\exists f: A \to B$ injekcija. Pišemo: $A \preccurlyeq B$.

Trditev. Za vse A, B, C velja:

1. $A \subseteq B \Rightarrow A \preccurlyeq B$

2. $A \preccurlyeq B \iff \exists C \subseteq B: A \sim C$.

3. $A \preccurlyeq A$ (refl.)

4. $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq C \Rightarrow A \preccurlyeq C$ (tranz.)

Dokaz: 1. $A \subseteq B \Rightarrow i: A \hookrightarrow B$ je inj.

2. Če $f: A \to B$ inj., vzamemo $C := f_*(A)$.

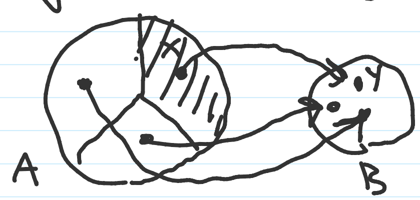
Schroeder–Bernsteinov izrek (SBI).

$$A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \Rightarrow A \sim B.$$

Dokaz: Gl. zapiske.

Izrek. Če obstaja surjekcija $f: A \to B$, je $A \succcurlyeq B$.

Dokaz: Naj bo $f: A \to B$ surjekcija.



Velja: $\forall y \in B: f^*(\{y\}) \neq \emptyset$.

Torej: $(f^*(\{y\}))_{y \in B}$ je družina nepraznih mn.

Po AC $\exists$ funkcija izbire

$$g: B \to \bigcup_{y \in B} f^*(\{y\}) = f^*\Big(\bigcup_{y \in B} \{y\}\Big) = f^*(B) = A,$$

tako da $\forall y \in B: g(y) \in f^*(\{y\})$

$$\Updownarrow$$

$$f(g(y)) \in \{y\} \iff f(g(y)) = y,$$

torej je $f \circ g = id_B \Rightarrow g$ injekcija

$\Rightarrow B \preccurlyeq A \Rightarrow A \succcurlyeq B$ ✓

Zgled. 1. $[0,1] \sim \mathbb{R}$

a) $[0,1] \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow [0,1] \preccurlyeq \mathbb{R}$

b) Naj bo $f: \mathbb{R} \to [0,1]$,

b) Naj bo $f : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$$

Potem: $f_*(\mathbb{R}) = (0,1)$.

$f'(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)} > 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ strogo naršč. $\Rightarrow f$ injektivna

$\Rightarrow \mathbb{R} \preccurlyeq [0,1]$

a) $\wedge$ b) $\overset{SBI}{\Longrightarrow} \mathbb{R} \sim [0,1]$.

2. $\underbrace{\mathcal{P}\mathbb{N} \sim \mathbb{R}}$

gl. zapiske.

<u>Def.</u> A ima <u>strogo manjšo moč</u> kot B, če:

$$A \preccurlyeq B \wedge A \not\sim B.$$

Pišemo: $A \prec B$.

<u>Izrek o trihotomiji.</u> Za vse A, B velja natk. ena od možnosti:

1. $A \prec B$, ali
2. $A \sim B$, ali
3. $A \succ B$.

<u>Dokaz:</u> S pomočjo DU.

<u>Posledica.</u> Za vse A, B je $A \preccurlyeq B \vee B \preccurlyeq A$.

1.3. Končne in neskončne množice

<u>Def.</u> (Dedekind) Mn. A je <u>neskončna</u> $\Leftrightarrow$

$$\exists B \subset A : A \sim B.$$

Sicer je A <u>končna</u>.

Zgled. 1. $\mathbb{R}$ je neskončna, ker $[0,1] \subset \mathbb{R}$

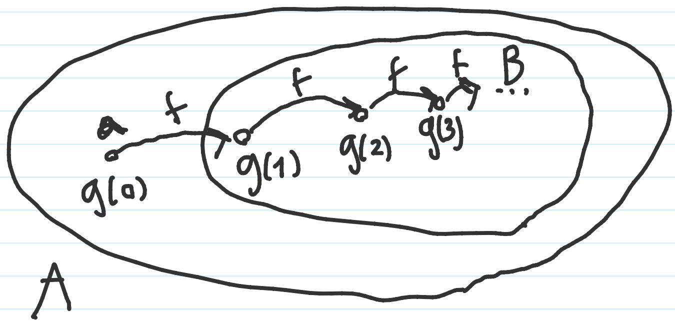
Zgled. 1. $\mathbb{R}$ je neskončna, ker $[0,1] \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \sim [0,1]$.

2. $\mathbb{N}$ je neskončna, npr.:
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\},$$
$$f(n) = n'$$
je bijekcija, torej: $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{N}$. ✓

Izrek. A neskončna $\iff \underbrace{A \succcurlyeq \mathbb{N}}$.

Dokaz: $(\Rightarrow)$ A neskončna
$$\Rightarrow \exists B \subset A : A \sim B.$$
Naj bo $f : A \to B$ bijekcija in $\underline{a \in A \setminus B}$.

Definirajmo $g : \mathbb{N} \to A$ takole:
$$\forall n \in \mathbb{N} : g(n) = f^n(a) = (\overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n})(a).$$



Trditev: g injekcija.

recimo: $g(n) = g(k)$, $n > k$.
$$\Rightarrow f^n(a) = f^k(a) \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} f^{n-1}(a) = f^{k-1}(a)$$
$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{f^{n-k}(a) = a}$$
$$\overset{n>k}{\Longrightarrow} a = f(f^{n-k-1}(a)) \in \mathcal{Z}_f = B$$
$\Rightarrow a \in B$ protislovje z izbiro $a \in A \setminus B$

Torej: g je injekcija in $\mathbb{N} \preccurlyeq A$. ✓

$(\Leftarrow)$: gl. zapiske

($\Leftarrow$): gl. zapiske

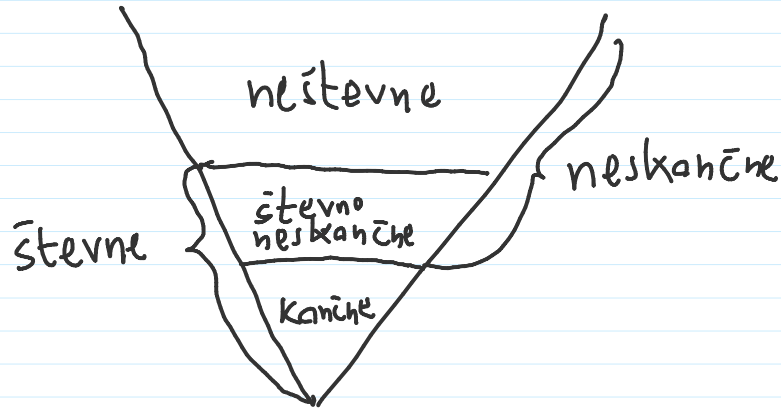
Def. 1.) A <u>števno neskončna</u> $\Leftrightarrow$ $A \sim \mathbb{N}$

2.) A <u>števna</u> $\Leftrightarrow$ A končna ali št. neskončna

3.) A <u>neštevna</u> $\Leftrightarrow$ A ni števna

Izrek. Za vse A velja:

1. A končna $\Leftrightarrow$ $A \prec \mathbb{N}$
2. A števna $\Leftrightarrow$ $A \preccurlyeq \mathbb{N}$
3. A št. neskončna $\Leftrightarrow$ $A \sim \mathbb{N}$
4. A neskončna $\Leftrightarrow$ $A \succcurlyeq \mathbb{N}$
5. A neštevna $\Leftrightarrow$ $A \succ \mathbb{N}$



1.4. Lastnosti števnih množic

Trditev. Če $\exists$ surjekcija $g: \mathbb{N} \to A$, je A števna.

Torej: Če lahko elemente A razvrstimo v zaporedje tako, da <u>vsak</u> elt mn. A v njem nastopi vsaj enkrat, je A števna.

Zgled. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Razvrstimo cela št. v zaporedje:

$(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots)$

Torej: $\mathbb{Z}$ je števna.

Def. Za družino $(A_\lambda)_{\lambda \in J}$ je končna / neskončna, števna, neštevna, neskončna, št. neskončna) $\iff$ J je končna (neskončna, ...).

Izrek. Unija vsake števno nesk. družine ~~m~~množic (števno neskončnih) je števno neskončna.

Dokaz: $(A_\lambda)_{\lambda \in J}$ družina

$$J : (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$$

AC:

$$A_{\lambda_0} : (a_{0,0},\ a_{0,1},\ a_{0,2},\ \dots)$$
$$A_{\lambda_1} : (a_{1,0},\ a_{1,1},\ a_{1,2},\ \dots)$$
$$A_{\lambda_2} : (a_{2,0},\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ \dots)$$
$$\vdots$$

Elemente $\bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda$ razvrstimo v zaporedje:

$$(\underbrace{a_{0,0}},\ \underbrace{a_{0,1},\ a_{1,0}},\ \underbrace{a_{0,2},\ a_{1,1},\ a_{2,0}},\ \dots)$$

Torej je $\bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda$ je števno neskončna. ✓

Posledica. Unija vsake števne družine števnih množic je števna.

Zgled. 1. $\mathbb{Q}$ je števna

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{kjer je}$$

$$A_n = \{\tfrac{k}{n};\ k \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z}$$
$$J = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$ ✓

2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je števna

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup^{\infty} A_n,$$

2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je števna

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

$$A_n = \{n\} \times \mathbb{N} = \{(n,k);\ k \in \mathbb{N}\} \sim \mathbb{N}$$

$$y = \mathbb{N} \quad \checkmark$$

1.5. Neštevne množice

Cantorjev izrek.

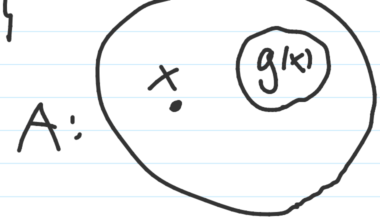
$$\forall A: \ \mathcal{P}A \succ A.$$

Dokaz:

1. Naj bo $f: A \to \mathcal{P}A$,
   $\forall x \in A: f(x) = \{x\}$.
   Očitno: f injekcija $\Rightarrow A \preceq \mathcal{P}A$.

2. Predpostavimo: $g: A \to \mathcal{P}A$ surjekcija.
   $\forall x \in A: g(x) \in \mathcal{P}A$, torej $g(x) \subseteq A$.

   Naj bo $C = \{\underline{x \in A};\ x \notin g(x)\}$



   Velja: $C \subseteq A$, torej
   je $C \in \mathcal{P}A$. Ker $g: A \to \mathcal{P}A$ surjekcija,
   $\exists x_0 \in A: \underline{g(x_0) = C}$. Ali $x_0 \in C$?
   Velja:

$$\underline{x_0 \in C} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x_0 \notin g(x_0) \overset{\text{izbira } x_0}{\Longleftrightarrow} \underline{x_0 \notin C}$$

   Protislovje! Torej **ni** surjekcije
   $g: A \to \mathcal{P}A$, zato: $\mathcal{P}A \succ A$. $\checkmark$

Zgledi:

1. $\mathcal{P}\mathbb{N} \succ \mathbb{N}$ neštevna

$\implies \mathbb{R} \sim \mathcal{P}\mathbb{N} \implies \mathbb{R}$ neštevna, vsi intervali pozitivne dolžine so neštevni

2. $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}\mathbb{N} \prec \underbrace{\mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{N}}_{\sim \mathcal{P}\mathbb{R}} \prec \underbrace{\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{N}} \prec \dots$

moč $\aleph_0$ (alef 0) — moč kontinuuma (c, $2^{\aleph_0}$)

$\mathbb{R}$ ima moč c ali moč $2^{\aleph_0}$