Poglavje 1

Izjavni račun

1.1 Izjave in izjavni vezniki

Neformalna definicija. *V klasični logiki z besedo* izjava *označujemo pripovedno povéd, ki je bodisi resnična bodisi neresnična.*

Zgled 1

- Povéd "*Ena in ena je dva*" je resnična izjava.
- Povéd "*Dva je liho število*" je neresnična izjava.
- Vprašalna povéd "*Ali je dva sodo število?*" ni izjava.
- Velelna povéd "*Izračunaj vsoto prvih 100 naravnih števil!*" ni izjava.
- Vzemimo povéd "*Ta povéd ni resnična*". Če bi bila resnična, bi bilo res, kar trdi sama o sebi – torej bi bila neresnična; in če bi bila neresnična, bi bila laž, kar trdi sama o sebi – torej bi bila resnična. Zato ta povéd ni izjava.

Izjave **po vsebini** delimo na:

1. *resnične*, ki jim pripišemo resničnostno vrednost 1,
2. *neresnične*, ki jim pripišemo resničnostno vrednost 0.

Namesto 1, 0 se uporabljata tudi simbola $\top$, $\bot$ (beri *vrh*, *dno*) ali *true, false*.

Izjave **po obliki** delimo na:

1. *osnovne*, ki ne vsebujejo izjavnih veznikov,
2. *sestavljene*, ki vsebujejo vsaj en izjavni veznik.

Preden definiramo izjavne veznike, si oglejmo nekaj zgledov.

Zgled 2

- Izjavi "*Vreme je lepo*" in "*Peter gre v hribe*" sta osnovni.
- Izjave
  - "*Vreme je lepo in Peter gre v hribe*",
  - "*Če je vreme je lepo, (potem) gre Peter v hribe*",
  - "*Peter ne gre v hribe*"

  so sestavljene iz gornjih dveh osnovnih izjav s pomočjo *izjavnih veznikov in*, *če – potem* in *ne*.

V gornjem zgledu sta izjavna veznika *in* ter *če – potem* dvomestna, veznik *ne* pa je enomesten. V splošnem lahko z n-mestnim izjavnim veznikom, kjer je n neko naravno število, n poljubnih izjav povežemo v novo izjavo.

Zahteva. *Resničnostna vrednost sestavljene izjave sme biti odvisna le od uporabljenega izjavnega veznika in od resničnostnih vrednosti izjav, ki jo sestavljajo.*

To med drugim pomeni, da ni vsak slovnični veznik tudi izjavni veznik.

Zgled 3 Recimo, da je torek, da sije sonce in da je toplo. Potem so vsi sestavni deli izjav "*Ker sije sonce, je toplo*" in "*Ker je torek, je toplo*" resnični, vendar je prva morda resnična, druga pa najbrž ne. Veznik *ker* torej *ni* izjavni veznik, saj je resničnost izjave, sestavljene z njegovo pomočjo, odvisna od tega, ali med njenima sestavnima deloma obstaja vzročna zveza ali ne.

Po gornji zahtevi je resničnostna vrednost sestavljene izjave *enolično določena* z resničnostnimi vrednostmi njenih sestavnih delov, zato lahko izjavni veznik definiramo kot neko preslikavo oziroma funkcijo:

Definicija 1 *Naj bo n naravno število. Preslikavo, ki vsaki urejeni n-terici, sestavljeni iz ničel in enojk, priredi vrednost 0 ali 1, imenujemo n*-mestni izjavni veznik *ali tudi* Boolova funkcija n spremenljivk.

Definicijsko območje n-mestnega izjavnega veznika je torej množica vseh urejenih n-teric, sestavljenih iz ničel in enojk, ki ima 2^n elementov. Naštejmo nekaj standardnih izjavnih veznikov:

– *enomestni:* negacija,

– *dvomestni:* konjunkcija, disjunkcija, implikacija, ekvivalenca.

Kako zapišemo in kako preberemo dobljeno sestavljeno izjavo, kaže naslednja tabela. V njej sta p in q poljubni izjavi.

ime veznika	simbolni zapis sestavljene izjave	kako preberemo sestavljeno izjavo
negacija	$\neg p$	ne p
konjunkcija	$p \wedge q$	p in q
disjunkcija	$p \vee q$	p ali q
implikacija	$p \Rightarrow q$	iz p sledi q če p, potem q p implicira q p je zadosten pogoj za q q je potreben pogoj za p
ekvivalenca	$p \Leftrightarrow q$	p natanko tedaj, ko q p, če in samo če q p je ekvivalentno q p je potreben in zadosten pogoj za q q je potreben in zadosten pogoj za p

Izjavo p imenujemo *antecedens*, izjavo q pa *konsekvens* implikacije $p \Rightarrow q$.

Ker je definicijsko območje n-mestnega izjavnega veznika končna množica, ga lahko podamo s tabelo resničnostnih vrednosti pri vseh 2^n možnih argumentih, ki jo imenujemo *resničnostna tabela* veznika. Resničnostne tabele negacije, konjunkcije, disjunkcije, implikacije in ekvivalence so naslednje:

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Z besedami: Negacija spremeni resničnostno vrednost. Konjunkcija je resnična natanko tedaj, ko sta resnična oba njena člena; disjunkcija, ko je resničen vsaj eden od členov; implikacija, ko je resničen njen konsekvens ali ko je neresničen njen antecedens; ekvivalenca pa, ko imata njena člena enako resničnostno vrednost.

Koristila nam bosta tudi *ničmestna izjavna veznika* 0 in 1, ki *nič* izjav "povežeta" v *izjavni konstanti* 0 oziroma 1. Tu si izjavno konstanto 0 predstavljamo kot neko splošno neresnično izjavo, izjavno konstanto 1 pa kot neko splošno resnično izjavo. Simbola 0 in 1 igrata torej trojno vlogo, saj lahko predstavljata

a) resničnostni vrednosti,

b) ničmestna izjavna veznika,

c) izjavni konstanti;

za katero vlogo gre, v vsakem posameznem primeru razberemo iz sobesedila.

Vprašajmo se še: Koliko je *vseh* možnih n-mestnih izjavnih veznikov? Vsak tak veznik podamo z njegovo resničnostno tabelo, ki vsebuje 2^n vrstic. Ker imamo v vsaki vrstici za vrednost veznika dve možnosti (0 ali 1), je število vseh n-mestnih izjavnih veznikov enako 2^{2^n}, kar je izredno hitro rastoča funkcija argumenta n.

n	0	1	2	3	4	5	6
2^n	1	2	4	8	16	32	64
2^{2^n}	2	4	16	256	65 536	4 294 967 296	18 446 744 073 709 551 616

1.2 Izjavni izrazi

V matematiki igrajo pomembno vlogo *aritmetični izrazi*, sestavljeni iz konstant (ki so števila), spremenljivk in aritmetičnih operacij. V takem izrazu lahko vsaka spremenljivka zavzame poljubno številsko vrednost iz dane zaloge vrednosti.

Podobno vlogo v izjavnem računu igrajo *izjavni izrazi*, sestavljeni iz *izjavnih konstant* 0, 1 in *izjavnih spremenljivk* $p_1, p_2, p_3, \ldots$ s pomočjo izjavnih veznikov. V izjavnem izrazu lahko vsaka izjavna spremenljivka zavzame poljubno resničnostno vrednost, torej 0 ali 1. Tako kot aritmetične izraze lahko tudi izjavne izraze definiramo *induktivno*: Najprej podamo vse *osnovne* izjavne izraze, nato pa povemo, kako iz že dobljenih izjavnih izrazov gradimo nove, *sestavljene* izjavne izraze.

Definicija 2

O1. *Izjavni konstanti* $0, 1$ *sta izjavna izraza.*

O2. *Izjavne spremenljivke* $p_1, p_2, p_3 \ldots$ *so izjavni izrazi.*

S1. *Naj bo* f *enomestni izjavni veznik in* A *izjavni izraz. Potem je tudi* $(f\,A)$ *izjavni izraz.*

S2. *Naj bo* f *dvomestni izjavni veznik in* A, B *izjavna izraza. Potem je tudi* $(A\,f\,B)$ *izjavni izraz.*

S3. *Naj bo* n *naravno število,* f n*-mestni izjavni veznik in* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *izjavni izrazi. Potem je tudi* $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *izjavni izraz.*

Če želimo pokazati, da je neki izraz A izjavni izraz, v skladu z definicijo 2 sestavimo njegovo *konstrukcijsko zaporedje*, t.j. zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_m$, pri čemer je vsak od njih bodisi izjavna konstanta bodisi izjavna spremenljivka bodisi ga dobimo po enem od pravil S1, S2, S3 iz predhodnih izrazov, zadnji izraz A_m pa je enak izrazu A. Členi konstrukcijskega zaporedja izraza A so *izjavni podizrazi* izraza A. Kadar izjavnih spremenljivk v izrazih, ki nas zanimajo, ni veliko, jih lahko namesto s $p_1, p_2, p_3 \ldots$ označujemo s črkami $p, q, r, \ldots$

Zgled 4 Pokažimo, da je $A = ((p \Rightarrow q) \wedge (\neg r))$ izjavni izraz. Eno od možnih konstrukcijskih zaporedij tega izraza prikazuje naslednja tabela.

k	izraz A_k	utemeljitev
1	p	O2
2	q	O2
3	r	O2
4	$(p \Rightarrow q)$	S2 iz A_1, A_2
5	$(\neg r)$	S1 iz A_3
6	$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg r))$	S2 iz A_4, A_5

Da bi zmanjšali število oklepajev v izjavnih izrazih, podobno kot pri aritmetičnih izrazih (kjer ima potenciranje prednost pred množenjem in deljenjem, ti dve operaciji pa pred seštevanjem in odštevanjem) določimo *prednostni red* (nekaterih) eno- in dvomestnih izjavnih veznikov z naslednjimi pravili prednosti:

1. Veznik $\neg$ ima prednost pred vsemi drugimi vezniki.
2. Vsak veznik iz končnega zaporedja $(\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$ ima prednost pred vezniki, ki so v tem zaporedju desno od njega.
3. Če isti dvomestni veznik nastopi v izjavnem izrazu večkrat zapored, ima levi nastop veznika prednost pred desnim.
4. Zunanji par oklepajev izpuščamo.

Zgled 5
- Zapis $p \Rightarrow q \wedge \neg r$ pomeni izjavni izraz $(p \Rightarrow (q \wedge (\neg r)))$.
- Zapis $p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow s$ pomeni izjavni izraz $(((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow s)$.
- Zapis $(p \Rightarrow q) \wedge \neg r$ pomeni izjavni izraz $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg r))$.

Izjavni izraz pri vsakem naboru vrednosti izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo, zavzame določeno resničnostno vrednost. Torej vsak izjavni izraz, ki vsebuje n izjavnih spremenljivk, predstavlja neki n-mestni izjavni veznik.

Zgled 6 Sestavimo resničnostno tabelo izjavnega izraza oziroma izjavnega veznika $f(p, q, r) = (p \Rightarrow q) \wedge \neg r$.

p	q	r	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\neg$	r
1	1	1	1	1	1	**0**	0	1
1	1	0	1	1	1	**1**	1	0
1	0	1	1	0	0	**0**	0	1
1	0	0	1	0	0	**0**	1	0
0	1	1	0	1	1	**0**	0	1
0	1	0	0	1	1	**1**	1	0
0	0	1	0	1	0	**0**	0	1
0	0	0	0	1	0	**1**	1	0

Na levi strani tabele zapišemo vseh $2^3 = 8$ naborov resničnostnih vrednosti, ki jih lahko zavzame trojica spremenljivk (p, q, r). Pod imena spremenljivk na desni strani prenesemo ustrezne stolpce vrednosti z leve strani in začnemo računati vrednosti podizrazov po vrsti, kot to določajo pravila prednosti in oklepaji. V danem primeru najprej izračunamo stolpca vrednosti implikacije (modro) in negacije (rdeče), potem pa še stolpec vrednosti njune konjunkcije (krepko), ki predstavlja končni rezultat, t.j. resničnostno tabelo trimestnega izjavnega veznika $f(p, q, r)$.

1.3 Tavtologije in enakovredni izrazi

Definicija 3 *Izjavni izraz je:*

- tavtologija*, če je resničen pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo;*
- protislovje*, če je neresničen pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo;*
- kontingenten izraz*, če ni niti tavtologija niti protislovje.*

Zgled 7 S pomočjo resničnostnih tabel pokažimo, da je izjavni izraz $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ tavtologija, izjavni izraz $p \wedge \neg(q \Rightarrow p)$ pa protislovje.

p	q	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\Rightarrow$	$\neg$	$p)$	p	$\wedge$	$\neg$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$
1	1		1		**1**	0		1	0		1	**0**	0		1	
1	0		0		**1**	1		0	0		1	**0**	0		1	
0	1		1		**1**	0		1	1		0	**0**	1		0	
0	0		1		**1**	1		1	1		0	**0**	0		1	

Prvi izraz je tavtologija, saj njegova resničnostna tabela vsebuje same enojke. Drugi izraz je protislovje, saj njegova resničnostna tabela vsebuje same ničle.

Zgled 8 Z resničnostnimi tabelami se brez težav prepričamo, da so izjavni izrazi

$$1, \quad p \vee \neg p, \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow p), \quad p \wedge \neg p \Rightarrow q$$

tavtologije, izjavni izrazi

$$0, \quad p \wedge \neg p, \quad p \wedge \neg(q \Rightarrow p), \quad p \wedge \neg(p \vee q)$$

protislovja, izjavni izrazi

$$p, \quad q, \quad \neg p, \quad p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \Rightarrow q, \quad p \Leftrightarrow q, \quad (p \Rightarrow q) \wedge \neg r, \quad p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow s$$

pa so kontingentni.

Definicija 4 *Izjavna izraza A in B sta* enakovredna*, če je izjavni izraz $A \Leftrightarrow B$ tavtologija. V tem primeru pišemo: $A \sim B$.*

Zgled 9 V zgledu 7 smo pokazali, da je izjavni izraz $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ tavtologija. Torej sta izraza $p \Rightarrow q$ in $\neg q \Rightarrow \neg p$ enakovredna, kar zapišemo krajše v obliki $p \Rightarrow q \ \sim \ \neg q \Rightarrow \neg p$.

Zgled 10 Parom enakovrednih izjavnih izrazov pravimo tudi *enakovrednosti* oziroma *zakoni izjavnega računa*. V vsakem izjavnem izrazu A lahko poljuben podizraz zamenjamo z enakovrednim izjavnim izrazom, ne da bi s tem spremenili izjavni veznik, ki ga A predstavlja. To nam omogoča poenostavljanje izrazov, kar je bistvenega pomena pri dokazovanju v matematiki. Spodnje tabele vsebujejo nekaj zakonov izjavnega računa, ki imajo v nekaterih primerih tudi svoje ime.

Z resničnostnimi tabelami lahko preverimo, da za vse izjavne izraze A, B, C velja:

$$\begin{array}{rcl} A \wedge 0 & \sim & 0 \\ A \wedge 1 & \sim & A \\ A \vee 0 & \sim & A \\ A \vee 1 & \sim & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} A \Rightarrow 0 & \sim & \neg A \\ A \Rightarrow 1 & \sim & 1 \\ 0 \Rightarrow A & \sim & 1 \\ 1 \Rightarrow A & \sim & A \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} A \Leftrightarrow 0 & \sim & \neg A \\ A \Leftrightarrow 1 & \sim & A \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} A \wedge A & \sim & A & \text{idempotenca konjunkcije} \\ A \vee A & \sim & A & \text{idempotenca disjunkcije} \\ A \Rightarrow A & \sim & 1 & \\ A \Leftrightarrow A & \sim & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} A \wedge B & \sim & B \wedge A & \text{komutativnost konjunkcije} \\ A \vee B & \sim & B \vee A & \text{komutativnost disjunkcije} \\ A \Leftrightarrow B & \sim & B \Leftrightarrow A & \text{komutativnost ekvivalence} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} A \wedge (B \wedge C) & \sim & (A \wedge B) \wedge C & \text{asociativnost konjunkcije} \\ A \vee (B \vee C) & \sim & (A \vee B) \vee C & \text{asociativnost disjunkcije} \\ A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) & \sim & (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C & \text{asociativnost ekvivalence} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} A \wedge (A \vee B) & \sim & A & \text{absorpcija konjunkcije glede na disjunkcijo} \\ A \vee (A \wedge B) & \sim & A & \text{absorpcija disjunkcije glede na konjunkcijo} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} A \wedge (B \vee C) & \sim & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & \text{distributivnost konjunkcije glede na } \vee \\ A \vee (B \wedge C) & \sim & (A \vee B) \wedge (A \vee C) & \text{distributivnost disjunkcije glede na } \wedge \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \neg 0 & \sim & 1 \\ \neg 1 & \sim & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \neg\neg A & \sim & A & \text{zakon dvojne negacije} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
\neg(A \wedge B) & \sim & \neg A \vee \neg B & \text{prvi De Morganov zakon} \\
\neg(A \vee B) & \sim & \neg A \wedge \neg B & \text{drugi De Morganov zakon}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
A \Rightarrow B & \sim & \neg B \Rightarrow \neg A & \text{zakon kontrapozicije} \\
A \Rightarrow B & \sim & \neg A \vee B & \\
\neg(A \Rightarrow B) & \sim & A \wedge \neg B &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
A \Leftrightarrow B & \sim & (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \\
A \Leftrightarrow B & \sim & (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\
A \Leftrightarrow B & \sim & (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \\
\neg(A \Leftrightarrow B) & \sim & \neg A \Leftrightarrow B \\
\neg(A \Leftrightarrow B) & \sim & A \Leftrightarrow \neg B
\end{array}$$