sreda, 02. december 2020 10:02

Zgled.

1. Relacija $=$ v A: $(id_A \subseteq A \times A)$
   - refleksivna
   - simetrična
   - tranzitivna
   - antisimetrična $(x=y \wedge y=x \Rightarrow x=y$ ✓$)$
   - enolična $(x=y \wedge x=z \Rightarrow y=z$ ✓$)$
2. Relacija $\leq$ v $\mathbb{N}$:
   - refleksivna
   - antisimetrična
   - tranzitivna
   - strogo sovisna
3. Relacija $<$ v $\mathbb{N}$:
   - irefleksivna
   - asimetrična
   - tranzitivna
   - sovisna
4. Relacija $\subseteq$ v A
   - refleksivna
   - antisimetrična
   - tranzitivna
5. Relacija $\subset$ v A
   - irefleksivna
   - asimetrična
   - tranzitivna
6. Naj bo R relacija „oče" v mn. ljudi ($x R y$ ... x je biološki oče y-a).
   - irefleksivna
   - asimetrična
   - intranzitivna

Dokaz: x oče y-a, y oče z-ja

Recimo: x oče z-ja. Potem je $x=y$ (biološki oče je enoličen). Torej:

(biološki oče je enoličen). Torej:

x je oče x-a // Torej x ni oče z-ja. ✓

<u>Trditev.</u> $R \subseteq A \times A$.

1. R asimetrična $\Longleftrightarrow$ R antisimetrična in irefleksivna
2. R strogo sovisna $\Longleftrightarrow$ R sovisna in refleksivna

<u>Dokaz 1.</u>

($\Rightarrow$) R asimetrična.

$$\forall x,y \in A: (\underbrace{xRy \land yRx}_{0} \Rightarrow x = y)\ ?$$ ✓

Torej: R je antisimetrična.

$$R \text{ asim.} \Rightarrow \forall x,y: (xRy \Rightarrow \neg yRx)$$
$$\Rightarrow \forall x: (\underbrace{xRx \Rightarrow \neg xRx}_{\neg xRx})$$
$$\Rightarrow R \text{ irefl.}$$ ✓

$$p \Rightarrow \neg p \sim \neg p \lor \neg p$$
$$\sim \neg p$$

($\Leftarrow$) R antisim. in irefl.

$$\underline{xRy \land yRx} \Rightarrow x = y \Rightarrow xRx,$$

torej $\forall x,y \in A: \neg(xRy \land yRx)$

$\sim$ ″ $(\neg xRy \lor \neg yRx)$

$\sim$ ″ $(xRy \Rightarrow \neg yRx)$ ✓

4.2. Ekvivalenčne relacije

<u>Def.</u> $R \subseteq A \times A$ je <u>ekvivalenčna</u>, če je

1. refleksivna,
2. simetrična,
3. tranzitivna.

<u>Zgledi ekvival. relacij:</u>

1. relacija enakosti id_A,
2. univerzalna relacija $A \times A$,
3. relacija vzporednosti v mn. premic v $\mathbb{R}^n$
4. relacija R v mn. ljudi,

$x R y$ ... x in y imata enako barvo oči

<u>Def.</u> $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna.

1. Vsakemu $x \in A$ priredimo <u>ekvivalenčni razred</u> $R[x] = \{y \in A;\ y R x\}$.
   Element x je <u>predstavnik</u> $R[x]$.

2. Množica vseh ekvival. razredov R v A

$$\underline{A/R} = \{R[x];\ x \in A\}$$

je <u>faktorska</u> ali <u>kvocientna množica</u>

A po R.

<u>Lema.</u> $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna.

$$\forall x, y \in A : (R[x] = R[y] \iff x R y).$$

<u>Dokaz:</u> $x, y \in A$

$(\Rightarrow)$ $R[x] = R[y]$

R refl. $\Rightarrow xRx \Rightarrow x \in R[x] \Rightarrow x \in R[y]$

$\Rightarrow xRy$ ✓

$(\Leftarrow)$ $\underline{xRy}$, $z \in R[x]$ poljuben

$\Rightarrow zRx \overset{\text{tranz.}}{\Rightarrow} zRy \Rightarrow z \in R[y]$

Torej $\forall z \in R[x] : z \in R[y]$, torej: $\underline{R[x] \subseteq R[y]}$.

$\Longrightarrow zRx \Longrightarrow zRy \Longrightarrow \ldots$

Torej $\forall z \in R[x]: z \in R[y]$, torej: $\underline{R[x] \subseteq R[y]}$.

$\underline{xRy} \Longrightarrow \underline{yRx}$

$\Longrightarrow$ ponovimo z $x \leftrightarrow y$ in dobimo še

$\underline{R[y] \subseteq R[x]}$ ✓

<u>Posledica</u>. Vsak element ekvival. razreda je tudi njegov predstavnik.

<u>Izrek</u>. $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna. Potem:

1. $\forall x \in A: R[x] \neq \emptyset$,
2. $\forall x, y \in A: (\underbrace{R[x] \neq R[y] \Longrightarrow R[x] \cap R[y] = \emptyset}))$
3. $\bigcup(A/R) = A$

<u>Dokaz</u>. 1. $x \in A$

R refl. $\Longrightarrow xRx \Longrightarrow x \in R[x] \neq \emptyset$ ✓

2. $x, y \in A$

Dokažimo kontrapozicijo:

$\underline{R[x] \cap R[y] \neq \emptyset \Longrightarrow R[x] = R[y]}$

Naj bo $z \in R[x] \cap R[y]$. Potem:

$z \in R[x] \land z \in R[y] \Longrightarrow \underline{zRx} \land zRy$

$\overset{\text{sim.}}{\Longrightarrow} xRz \land zRy$

$\overset{\text{tranz.}}{\Longrightarrow} xRy \Longrightarrow R[x] = R[y]$ ✓

3. $\forall x \in A: \underbrace{R[x]} \subseteq A$

$\xRightarrow{y \in R[x] \in A/R} \underbrace{\bigcup(A/R)} \subseteq A$

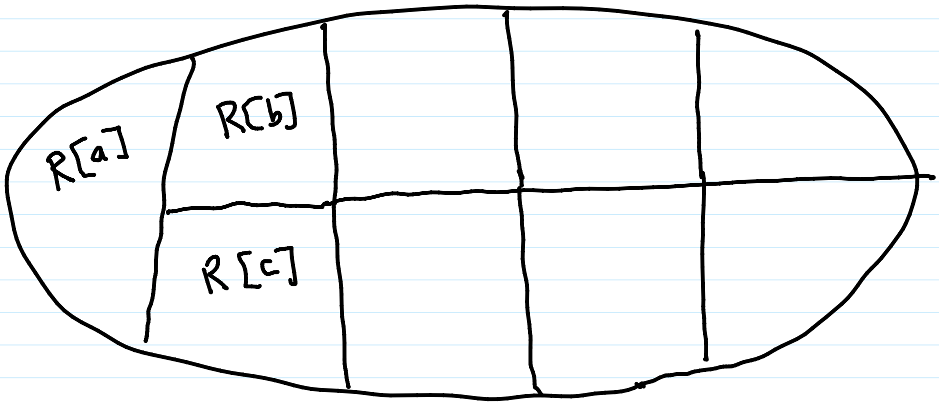
$x \in A \Rightarrow x \in R[x] \land R[x] \in A/R$

$\Rightarrow x \in \bigcup(A/R).$

x polj. iz A: $\quad A \subseteq \bigcup(A/R).$ ✓

Z besedami: Ekvival. relacija razdeli množico A na paroma tuje neprazne bloke.

A:



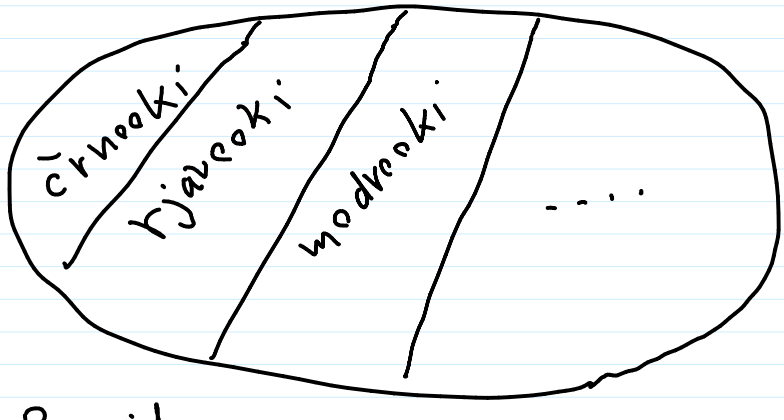
A/R

Zgledi:

1. A mn. ljudi, xRy ... x in y imata enako barvo oči

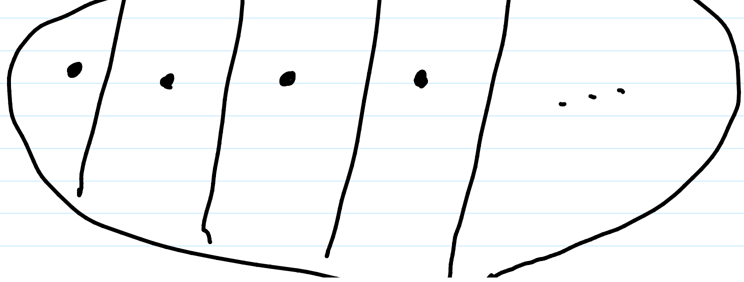
ekvival. razredi ustrezajo barvam oči.

mn. ljudi:



2. $R = id_A$

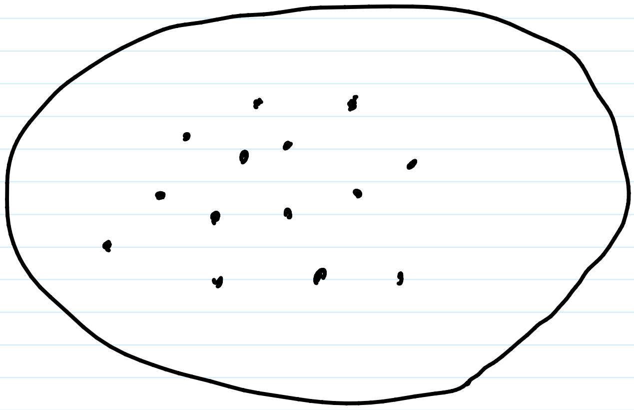
A:



$A/_{id_A}$

3. $R = A \times A$

A:

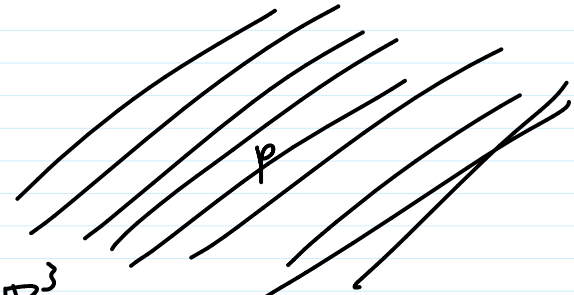


$A/R = \{A\}$

4. R rel. vzporednosti premic v $\mathbb{R}^3$:

$p \, R \, q \iff p \parallel q$

$R[p] = \{ q ;\ p \parallel q \}$



ekvival. razredi
ustrezajo smerem v $\mathbb{R}^3$
oziroma enotskim vektorjem v $\mathbb{R}^3$

5. Množico $\mathbb{Z}$ definiramo kot faktorsko mn.
$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / R$, kjer je:

$(a,b) \, R \, (c,d) \iff \underline{a+d = b+c}$

R je ekvival.

$(a,b) = a-b$
$(c,d) = c-d$
$(a,b) \, R \, (c,d)$
$\Updownarrow$
$a-b = c-d$
$\Updownarrow$
$a+d = b+c$

6. Množico $\mathbb{Q}$ definiramo kot faktorsko mn.
$(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / R$, kjer je:

$(a,b) \, R \, (c,d) \iff ad = bc$

R je ekvival.

R je ekvival.

7. **Def.** $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$

Za $x, y \in \mathbb{Z}$ definiramo rel. <u>kongruence po modulu m</u> takole:

$$x \equiv y \pmod m \iff \exists k \in \mathbb{Z}: \ x - y = km$$

(x je kongruenten y po modulu m) $\iff$ x in y dajeta isti ostanek pri deljenju z m

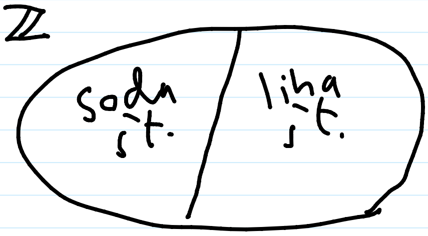
To je ekvival. relacija, oznaka: R_m.

Ekvival. razredi R_m ustrezajo ostankom pri deljenju z m:

$$R_m[0] = \{x \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z}:\ x = km\}$$
$$R_m[1] = \{x \in \mathbb{Z};\ \quad " \quad :\ x = km+1\}$$
$$\vdots$$
$$R_m[m-1] = \{x \in \mathbb{Z};\ \quad " \quad :\ x = km+m-1\}$$

$m=1$: $R_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$m=2$: $\mathbb{Z}/R_2$:



4.3. Operacije z relacijami

Trditev. $R, S \subseteq A \times A$. Potem so tudi $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $R \oplus S \subseteq A \times A$ in velja:

1. $x\, R \cup S\, y \iff xRy \lor xSy$
2. $x\, R \cap S\, y \iff xRy \land xSy$
3. $x\, R \setminus S\, y \iff xRy \land \neg(xSy)$
4. $x\, R \oplus S\, y \iff xRy + xSy$

Def. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

1. $R^c = (A \times A) \setminus R$ <u>komplement</u> rel. R

Def. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

1. $R^c = (A \times A) \setminus R$ — <u>komplement</u> rel. R
2. $R^T = \{(x,y);\ (y,x) \in R\}$ — <u>transponirana relacija</u> rel. R

Trditev. Za $x, y \in A$:

1. $x R^c y \iff \neg\, x R y$
2. $x R^T y \iff y R x$

Zgled. Naj bo $A = \mathbb{N}$.

1. $(<) \cup (=) = (\leq)$
2. $(\leq) \setminus (=) = (<)$
3. $(\leq) \cap (\geq) = (=)$
4. $(\leq) \cup (\geq) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
5. $(<) \cap (>) = \emptyset$
6. $(<) \cup (>) = (\neq) = (=)^c$
7. $(\leq)^c = (>)$
8. $(\leq)^T = (\geq)$

Zgled. 1. A je mn. ljudi

$$(\text{sin}) \cup (\text{hči}) = (\text{otrok})$$

2. A je mn. heteroseks. ljudi.

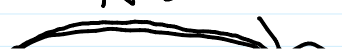
$$(\text{mož})^T = (\text{žena}),\quad (\text{žena})^T = (\text{mož})$$

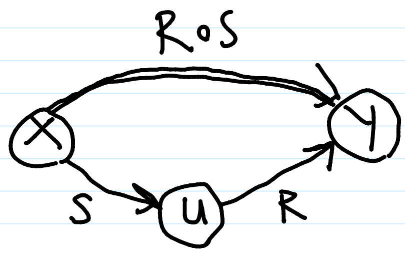
Def. $R, S \subseteq A \times A$.

$$R \circ \underline{S} = \{(x,y);\ \exists u \in A : (x S u \land u R y)\}$$

<u>kompozitum</u> R in S

$R \circ S$




R∘S
X
Y
S
U
R