Zgledi.

1. Vsaka končna lin. urejena mn. je dobro urejena.
2. $\mathbb{N}$ je dobro urejena z $\leqslant$ (manjši ali enak).
3. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ niso dobro urejene z $\#$.
4. Interval pozitivne dolžine v $\mathbb{R}$ ni dobro urejen z $\leq$ (manjši ali enak).

   Def.: Dolžina intervalov $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ za $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, je enaka $b-a$.

   Npr. $[a,b]$: $\underbrace{(a,b)}$ $\subseteq [a,b]$,
   $a<b \implies$ $\hookrightarrow$ nima prvega el-ta!

Def. Naj R delno ureja A in $V \subseteq A$. Če $R|_V$ linearno ureja V, je V <u>veriga</u> v A.

Zgledi.

1. $1 \mid 2 \mid 2^2 \mid 2^3 \mid \ldots$

   $\implies \{1, 2, 2^2, \ldots\}$ je veriga v ($\underline{\mathbb{N}}$, <u>delno ur.</u> z rel. deljivosti $\mid$)

   $\uparrow$ <u>ni</u> dobro ur.
2. $\emptyset \subseteq \{0\} \subseteq \{0,1\} \subseteq \{0,1,2\} \subseteq \ldots$

   $\implies \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \ldots\}$ je veriga v ($\mathcal{P}\mathbb{N}$, urejeni z $\subseteq$).
3. $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{N} \setminus \{0\} \supseteq \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \supseteq \ldots$

   $\implies \{\mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \ldots\}$ je veriga v ($\mathcal{P}\mathbb{N}$, urejeni z inkluzijo).

$\{1\} \nsubseteq \{2\}$ in $\{2\} \nsubseteq \{1\}$
$\Rightarrow$ $\mathcal{P}\mathbb{N}$ ni veriga v $\mathcal{P}\mathbb{N}$.

Izrek o dobri urejenosti (DU).
Za vsako množico A obstaja relacija R, ki A dobro ureja.

Dokaz: S pomočjo AC (dolg).

Zornova lema (ZL).
Naj relacija R delno ureja A.
Če ima vsaka veriga v A zg. mejo, ima A maksimalni element.

Pripomba. V ZF lahko iz vsake od trditev AC, DU, ZL dokažemo drugi dve.

Zgled: DU $\Rightarrow$ AC

Naj $(A_\lambda)_{\lambda\in J}$ družina nepraznih množic.
Po DU množico $\bigcup_{\lambda\in J} A_\lambda$ dobro uredimo, torej vsaka mn. A_λ vsebuje $\min A_\lambda$.
Definirajmo $f: J \to \bigcup_{\lambda\in J} A_\lambda$ takole:

$$\forall \lambda\in J: \quad f(\lambda) := \min A_\lambda \in A_\lambda$$

$\Rightarrow$ f je funkcija izbire za $(A_\lambda)_{\lambda\in J}$. ✓

5.4. Mreža

Def. Delno urejena mn. A je mreža, če $\forall a, b\in A\ (\exists \inf\{a,b\} \wedge \exists \sup\{a,b\})$.

Zgledi:

1. Vsaka lin. ur. množica A je mreža:
   za vse $a, b \in A$ velja:
$$\inf\{a,b\} = \min\{a,b\},$$
$$\sup\{a,b\} = \max\{a,b\}$$

2. $(\mathbb{N}, |)$ je mreža:
$$\inf\{a,b\} = D(a,b)$$
$$\sup\{a,b\} = v(a,b)$$

3. Za vsako množico S je $(\mathcal{P}S, \subseteq)$ mreža.
   Za vse $A, B \in S$ velja:
$$\inf\{A,B\} = A \cap B,$$
$$\sup\{A,B\} = A \cup B.$$

Velja: dobra urejenost je poseben primer linearne urejenosti, ki je poseben primer mreže, ki je poseben primer delne urejenosti.

Hassejev diagram množice tipov urejenosti, delno urejene z relacijo „je poseben primer":

delna urejenost
|
mreža
|
linearna urejenost
|
dobra urejenost.

6. Moč množic

6.1. Množica naravnih števil

Peanovi aksiomi iz l. 1889:

P_1. 0 je naravno število.
P_2. Vsako nar. št. n ima točno določenega (neposrednega) naslednika n'.
P_3. 0 ni naslednik nobenega nar. št.
P_4. Različni nar. števili imata različna naslednika.
P_5. Naj bo L enomestni predikat. Če velja $L(0)$ in če za vsako nar. št. n velja: $L(n) \Rightarrow L(n')$, potem za vsako nar. št. n velja $L(n)$.

V ZFC: $0 = \emptyset$.

Def. Za poljubno mn. A je

$$A' = \underset{\smile}{A} \cup \{A\}$$

naslednik množice A.

Posamezna nar. števila:

$$\underbrace{1}= 0' = 0 \cup \{0\} = \underbrace{\emptyset \cup}\{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \underline{\{0\}}$$
$$2 = 1' = 1 \cup \{1\} = \{0,1\}$$
$$3 = 2' = 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\}$$
$$\vdots$$
$$n+1 = n' = \underset{\smile}{n} \cup \{n\} = \{0,1,\dots,n-1,n\}$$

Aksiom regularnosti (AR).
Vsaka neprazna mn. vsebuje elt, s katerim si je tuja.

$$\forall A : (A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A : x \cap A = \emptyset).$$

Posledica.

1. $\forall a: a \notin a$
2. $\forall a, b: \neg(a \in b \wedge b \in a)$

Dokaz:

1. a poljubna

Naj bo $A = \{a\}$. Potem $A \neq \emptyset$ in

$\underset{\text{za } A}{AR} \Rightarrow \underbrace{a \cap A = \emptyset}$

Če $a \in a \Rightarrow a \in \underline{a \cap A \neq \emptyset}$ protislovje z AR

Torej: $a \notin a$. ✓

Sledi: $\forall A: A \subset A'$, A' ima natanko 1 element več kot A (to je A).

P1. $0 = \emptyset$ ✓

P2. $n' = n \cup \{n\}$ ✓

P3. $\forall n: 0 \neq n'$ ✓

P4. $n' = m' \Rightarrow n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$

$\Rightarrow n \in m \cup \{m\} \wedge m \in n \cup \{n\}$

$\Rightarrow (n \in m \vee \underline{n = m}) \wedge (m \in n \vee \underline{m = n})$

$\Rightarrow (n \in m \wedge m \in n) \vee n = m$

$\Rightarrow n = m$ ✓

Def. Množica M je <u>induktivna</u>, če velja:

1. $\emptyset \in M$,
2. $\forall x \in M: x' \in M$.

Trditev. Naj bo $\mathcal{A}$ neprazna mn. induktivnih množic.
Potem je $\bigcap \mathcal{A}$ induktivna množica.

Dokaz: 1. $\forall y \in A: \emptyset \in y \Rightarrow \emptyset \in \bigcap A$

2. $x \in \bigcap A \Rightarrow \forall y \in A: x \in y$

$\Rightarrow \forall y \in A: x' \in y \Rightarrow x' \in \bigcap A$ ✓

Aksiom neskončnosti (AN).

Obstaja induktivna množica.

Izrek. Obstaja ntk. ena množica $\mathbb{N}$, tako da velja:

1. $\mathbb{N}$ je induktivna,
2. $\forall A: (A \text{ induktivna} \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq A)$.

Dokaz: (obstoj)

Po AN $\exists$ ind. mn. M. Naj bo

$$D = \{A \in M;\ A \text{ induktivna}\}.$$

Potem $M \in D$, torej $D \neq \emptyset$.

Naj bo $\mathbb{N} = \bigcap D$. Potem velja:

1. $\mathbb{N}$ je induktivna (po pr. trditvi),
2. $\underline{A \text{ induktivna}} \Rightarrow A \cap M$ induktivna

$\Rightarrow \underline{A \cap M} \in D$

$\Rightarrow \underline{\mathbb{N}} = \underline{\bigcap D} \subseteq A \cap M \subseteq A$. ✓

(enoličnost) Naj imata $\mathbb{N}_1$ in $\mathbb{N}_2$ lastnosti 1 in 2.

Po 2. $\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}_2 \land \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_1 \Rightarrow \mathbb{N}_1 = \mathbb{N}_2$. ✓