# Poglavje 1

# Izjavni račun

## 1.4 Disjunktivna in konjunktivna normalna oblika

Zdaj znamo za znani izjavni izraz določiti njegovo resničnostno tabelo. V tem razdelku si zastavimo obratno nalogo:

*Dana je resničnostna tabela $T$ neznanega izjavnega izraza $A$. Zgolj z uporabo veznikov $\neg, \wedge, \vee$ sestavi izjavni izraz $D$, tako da bo $A \sim D$!*

**Zgled 1** Naj bo

$T$ :

| | $p$ | $q$ | $r$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2. | 1 | 1 | 0 | **1** |
| 3. | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4. | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5. | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 6. | 0 | 1 | 0 | **1** |
| 7. | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 8. | 0 | 0 | 0 | **1** |

resničnostna tabela neznanega izraza $A$. Iskani izjavni izraz $D$ mora biti resničen natanko tedaj, ko smo v 2., 6. ali 8. vrstici tabele $T$. To pa je natanko tedaj, ko:

– sta $p$ in $q$ resnični izjavi, $r$ pa ne, ali
– ko je $p$ lažna, $q$ resnična in $r$ lažna, ali
– ko so vse tri izjave lažne.

Pravkar povedano zapišimo s simboli, pa dobimo iskani izraz:

$$D \;=\; (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

Brez težav lahko preverimo, da je resničnostna tabela izraza $D$ res enaka $T$. Izraz $D$ imenujemo *disjunktivna normalna oblika (DNO)* izraza $A$ (in seveda tudi vseh drugih izjavnih izrazov z enako resničnostno tabelo). Preden opišemo konstrukcijo DNO v splošnem, za vajo dobljeni izraz $D$ še poenostavimo z uporabo zakonov izjavnega računa.

Ker je konjunkcija distributivna glede na disjunkcijo (in tudi obratno), lahko v primeru, ko imamo disjunkcijo konjunkcij (ali obratno), poskusimo poenostavljati z izpostavljanjem "skupnih faktorjev". Opazimo, da imata prvi dve konjunkciji skupni faktor $q \wedge \neg r$, drugi dve (če uporabimo še komutativnost konjunkcije) skupni faktor $\neg p \wedge \neg r$, prva in tretja pa skupni faktor $\neg r$. Izplača se izpostaviti tistega, ki je "večji", torej $q \wedge \neg r$ ali pa $\neg p \wedge \neg r$. Za katerega se bomo odločili? Za razliko od aritmetičnih izrazov lahko tu izpostavimo kar oba skupna faktorja, saj lahko zaradi idempotence disjunkcije drugo konjunkcijo podvojimo:

$$
\begin{aligned}
D &= (p \wedge \underline{q \wedge \neg r}) \vee (\overline{\neg p} \wedge \underline{q \wedge \overline{\neg r}}) \vee (\overline{\neg p} \wedge \neg q \wedge \overline{\neg r}) \\
&\sim \big((p \wedge \underline{q \wedge \neg r}) \vee (\neg p \wedge \underline{q \wedge \neg r})\big) \vee ((\overline{\neg p} \wedge q \wedge \overline{\neg r}) \vee (\overline{\neg p} \wedge \neg q \wedge \overline{\neg r})) \\
&\sim ((p \vee \neg p) \wedge (q \wedge \neg r)) \vee ((q \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge \neg r)) \\
&\sim (1 \wedge (q \wedge \neg r)) \vee (1 \wedge (\neg p \wedge \neg r)) \ \sim \ (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \\
&\sim (q \vee \neg p) \wedge \neg r
\end{aligned}
$$

Tu bi se lahko ustavili, a poskusimo število nastopov veznikov še zmanjšati tako, da disjunkcijo prepišemo kot implikacijo, konjunkcijo pa kot negacijo implikacije:

$$D \ \sim \ (q \vee \neg p) \wedge \neg r \ \sim \ (p \Rightarrow q) \wedge \neg r \ \sim \ \neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \ \sim \ \neg(p \Rightarrow q \Rightarrow r)$$

Na koncu smo upoštevali dogovor, da levi nastop veznika veže močneje kot desni.

Vrnimo se k nalogi, zastavljeni na začetku poglavja. Disjunktivno normalno obliko izraza $A$ lahko konstruiramo na enak način kot v zgledu 1 – razen v primeru, ko je izraz $A$ protislovje ali ko ne vsebuje izjavnih spremenljivk.

**Definicija 1** *Naj bo $A$ izjavni izraz, ki je kontingenten, in $T$ njegova resničnostna tabela.* Disjunktivna normalna oblika izraza $A$ *(na kratko:* DNO$(A)$*) je disjunkcija vseh tistih osnovnih konjunkcij, ki ustrezajo vrsticam tabele $T$, v katerih ima $A$ vrednost 1. Pri tem je* osnovna konjunkcija $i$-te vrstice tabele $T$ *konjunkcija vseh tistih izjavnih spremenljivk, ki so v tej vrstici resnične, in negacij vseh tistih izjavnih spremenljivk, ki so v tej vrstici lažne.*

**Trditev 1** *Naj bo $A$ izjavni izraz, ki je kontingenten. Potem je $A \sim$ DNO$(A)$.*

***Dokaz:*** Naj bo $T$ resničnostna tabela izraza $A$, v katerem nastopa $n \geq 1$ različnih izjavnih spremenljivk. Ker je izraz $A$ kontingenten, je vsaj v eni vrstici tabele $T$ resničen, torej DNO$(A)$ obstaja. Za $i = 1, 2, \ldots, 2^n$ očitno velja:

*Osnovna konjunkcija i-te vrstice tabele $T$ je v tej vrstici resnična, v vseh drugih vrsticah tabele $T$ pa je lažna.* (1.1)

Privzemimo, da je izraz $A$ v $i$-ti vrstici tabele resničen. Potem je po konstrukciji DNO($A$) iz definicije 1 osnovna konjunkcija $i$-te vrstice eden od členov disjunkcije DNO($A$). Po trditvi (1.1) je torej eden od členov te disjunkcije v $i$-ti vrstici tabele resničen, zato je v tej vrstici resnična tudi celotna disjunkcija DNO($A$).

V obratni smeri vzemimo, da je disjunkcija DNO($A$) v $i$-ti vrstici tabele resnična. Potem je resničen vsaj en njen člen, torej je vsaj ena od osnovnih konjunkcij vrstic tabele $T$ v njeni $i$-ti vrstici resnična. Po trditvi (1.1) je to lahko le osnovna konjunkcija $i$-te vrstice. Ker torej disjunkcija DNO($A$) vsebuje osnovno konjunkcijo $i$-te vrstice tabele $T$, je po konstrukciji DNO($A$) iz definicije 1 izraz $A$ v tej vrstici resničen.

Ker velja ta razmislek za vse $i \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$, imata izraza $A$ in DNO($A$) enaki resničnostni tabeli, kar pomeni, da sta enakovredna. $\square$

Nalogo, zastavljeno na začetku poglavja, lahko rešimo tudi drugače. Namesto vrstic resničnostne tabele, v katerih je dani izraz resničen, glejmo vrstice, v katerih je neresničen.

**Zgled 2** Vzemimo spet resničnostno tabelo $T$ neznanega izraza $A$ iz zgleda 1

$T$ :

| | $p$ | $q$ | $r$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 1 | 1 | 1 | **0** |
| 2. | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3. | 1 | 0 | 1 | **0** |
| 4. | 1 | 0 | 0 | **0** |
| 5. | 0 | 1 | 1 | **0** |
| 6. | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7. | 0 | 0 | 1 | **0** |
| 8. | 0 | 0 | 0 | 1 |

in zgolj z uporabo veznikov $\neg, \wedge, \vee$ sestavimo še drugačen izjavni izraz $K$, tako da bo $A \sim K$. Iskani izraz $K$ bo resničen natanko tedaj, ko ***nismo*** niti v 1. niti v 3. niti v 4. niti v 5. niti v 7. vrstici tabele $T$. To pa je natanko tedaj, ko:

– je vsaj ena od izjav $p$, $q$, $r$ lažna, in
– je vsaj ena od izjav $p$, $r$ lažna ali pa je $q$ resnična, in
– je $p$ lažna ali pa je vsaj ena od izjav $q$, $r$ resnična, in
– je $p$ resnična ali pa je vsaj ena od izjav $q$, $r$ lažna, in
– je vsaj ena od izjav $p$, $q$ resnična ali pa je $r$ lažna.

Pravkar povedano zapišimo s simboli, pa dobimo iskani izraz:

$$K = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r).$$

Izraz $K$ imenujemo *konjunktivna normalna oblika (KNO)* izraza $A$.

**Definicija 2** *Naj bo $A$ izjavni izraz, ki je kontingenten, in $T$ njegova resničnostna tabela.* Konjunktivna normalna oblika izraza $A$ (*na kratko:* $\mathrm{KNO}(A)$ ) *je konjunkcija vseh tistih osnovnih disjunkcij, ki ustrezajo vrsticam tabele $T$, v katerih ima $A$ vrednost 0. Pri tem je* osnovna disjunkcija $i$-te vrstice tabele $T$ *disjunkcija vseh tistih izjavnih spremenljivk, ki so v tej vrstici lažne, in negacij vseh tistih izjavnih spremenljivk, ki so v tej vrstici resnične.*

**Trditev 2** *Naj bo $A$ izjavni izraz, ki je kontingenten. Potem je $A \sim \mathrm{KNO}(A)$.*

***Dokaz:*** Dokazujemo podobno kot trditev 1, z zamenjano vlogo disjunkcije in konjunkcije ter resničnostnih vrednosti 0 in 1. □

Ni težko videti, da lahko $\mathrm{KNO}(A)$ dobimo iz izraza $\neg\,\mathrm{DNO}(\neg A)$ z uporabo obeh de Morganovih zakonov ter zakona dvojne negacije. Prav tako lahko dobimo $\mathrm{DNO}(A)$ iz izraza $\neg\,\mathrm{KNO}(\neg A)$.

## 1.5 Sklepanje v izjavnem računu

*Sklep* v logiki je končno zaporedje izjav $p_1, p_2, \ldots, p_k, z$, kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *predpostavke* sklepa, $z$ pa njegov *zaključek*. Sklep je *pravilen*, če je zaključek resničen, kadar so resnične vse predpostavke.

**Zgled 3** Oglejmo si naslednji sklep. V njem člene zaporedja izjav zaradi preglednosti pišemo enega pod drugim, med predpostavkami in zaključkom pa potegnemo vodoravno črto:

<u>Če</u> je ta žival ptič, <u>potem</u> ima krila.
Ta žival <u>ni</u>ma kril.
___

*Torej ta žival <u>ni</u> ptič.*

Ta sklep se zdi pravilen – formalizirajmo ga v izjavnem računu. V predpostavkah in zaključku poiščimo izjavne veznike (podčrtano) in označimo osnovne izjave:

| | | |
|---|---|---|
| $p$ | ... | ta žival je ptič |
| $q$ | ... | ta žival ima krila |

Sklep ima torej obliko

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Videli bomo, da je to res pravilen (ali tudi: veljaven) sklep v izjavnem računu. To pomeni, da je ne glede na pomen osnovnih izjav $p$ in $q$ zaključek resničen, kadar koli sta resnični obe predpostavki.

**Definicija 3** *Zaporedje izjavnih izrazov* $A_1, A_2, \ldots, A_k, B$ *je* pravilen *ali* veljaven sklep*, če je* zaključek sklepa $B$ *resničen pri vseh tistih vrednostih izjavnih spremenljivk, ki nastopajo v izjavnih izrazih* $A_1, A_2, \ldots, A_k, B$*, pri katerih so resnične vse* predpostavke sklepa $A_1, A_2, \ldots, A_k$*. V tem primeru pišemo* $A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$ *in beremo: iz predpostavk* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ logično sledi *zaključek* $B$*.*

Pravilne sklepe imenujemo tudi *pravila sklepanja.* Sedem takih pravil, ki jih bomo imenovali ***osnovna pravila sklepanja***, navaja naslednja trditev.

**Trditev 3** *Za vse izjavne izraze* $A, B, C$ *velja:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $A,\ A \Rightarrow B$ | $\models$ | $B$ | modus ponens (MP) |
| 2. | $A \Rightarrow B,\ \neg B$ | $\models$ | $\neg A$ | modus tollens (MT) |
| 3. | $A \vee B,\ \neg B$ | $\models$ | $A$ | disjunktivni silogizem (DS) |
| 4. | $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C$ | $\models$ | $A \Rightarrow C$ | hipotetični silogizem (HS) |
| 5. | $A \wedge B$ | $\models$ | $A$ | poenostavitev (Po) |
| 6. | $A, B$ | $\models$ | $A \wedge B$ | združitev (Zd) |
| 7. | $A$ | $\models$ | $A \vee B$ | pridružitev (Pr) |

***Dokaz:*** Pravilnost sklepa lahko dokažemo s pomočjo resničnostne tabele. V njej tabeliramo vse predpostavke in zaključek, potem pa preverimo, da je v vseh tistih vrsticah tabele, v katerih so resnične vse predpostavke, resničen tudi zaključek. Storimo to le za modus tollens (ki je sklep iz zgleda 3) in za hipotetični silogizem, dokaze ostalih petih sklepov pa pustimo za domačo nalogo.

2. Modus tollens:

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg B$ | $\neg A$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | $\boxed{1}$ | $\boxed{1}$ | **1** $\surd$ |

Obe predpostavki sta resnični le v zadnji vrstici tabele, tam pa je resničen tudi zaključek, torej je sklep pravilen.

4. Hipotetični silogizem:

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow C$ | $A \Rightarrow C$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $\boxed{1}$ | $\boxed{1}$ | **1** $\surd$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | $\boxed{1}$ | $\boxed{1}$ | **1** $\surd$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | $\boxed{1}$ | $\boxed{1}$ | **1** $\surd$ |
| 0 | 0 | 0 | $\boxed{1}$ | $\boxed{1}$ | **1** $\surd$ |

Obe predpostavki sta resnični v 1., 5., 7. in 8. vrstici tabele. V vseh teh vrsticah je resničen tudi zaključek, torej je sklep pravilen. $\square$

Pri nekoliko večjem številu izjavnih spremenljivk v predpostavkah in zaključku sklepa je lahko dokazovanje pravilnosti z resničnostnimi tabelami zelo zamudno. Zato si oglejmo še drugačen način dokazovanja pravilnosti sklepa.

**Izrek 1 (o naravni dedukciji)** *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_k$ izjavni izrazi. Če obstaja zaporedje izjavnih izrazov $B_1, B_2, \ldots, B_n$, tako da za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ velja (vsaj) ena od možnosti:*

*a) $B_i$ je enak enemu od izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_k$,*
*b) $B_i$ je tavtologija,*
*c) $B_i$ je enakovreden enemu od predhodnih izrazov $B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}$,*
*d) $B_i$ logično sledi iz $B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}$ po enem od osnovnih pravil sklepanja,*

*potem $A_1, A_2, \ldots, A_k \models B_n$.*

***Dokaz:*** s popolno indukcijo po $n$.

Osnova: $n = 1$

Izraz $B_1$ je lahko le eden od izrazov $A_1, \ldots, A_k$ ali pa je tavtologija. V obeh primerih velja: $A_1, \ldots, A_k \models B_1$. $\surd$

korak: $n \geq 2$

Indukcijska predpostavka: $A_1, \ldots, A_k \models B_j$ za vse $j \leq n - 1$.

a) $B_n$ je eden od izrazov $A_1, \ldots, A_k$: v tem primeru $A_1, \ldots, A_k \models B_n$. $\surd$

b) $B_n$ je tavtologija: Tudi v tem primeru $A_1, \ldots, A_k \models B_n$. $\surd$

c) $B_n \sim B_j$ za neki $j \leq n - 1$: Po ind. predpostavki $A_1, \ldots, A_k \models B_j$, torej $A_1, \ldots, A_k \models B_n$. $\surd$

d) $B_n$ logično sledi iz $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ po enem od osnovnih pravil sklepanja: Po ind. predpostavki $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ logično sledijo iz $A_1, \ldots, A_k$, torej tudi $A_1, \ldots, A_k \models B_n$. $\surd$

S tem smo dokazali, da trditev velja za vsako naravno število $n \geq 1$. $\square$

**Pripomba 1** *Zaporedje izjavnih izrazov $B_1, B_2, \ldots, B_n$ iz izreka 1 imenujemo* dokaz pravilnosti *sklepa $A_1, \ldots, A_k \models B_n$.*

**Zgled 4** Dokažimo, da velja

$$p \Rightarrow q,\ p \vee r,\ q \Rightarrow s,\ r \Rightarrow t,\ \neg s \models t.$$

V predpostavkah in zaključku sklepa nastopa 5 izjavnih spremenljivk, torej bi imela resničnostna tabela $2^5 = 32$ vrstic. Zato raje uporabimo naravno dedukcijo.

Izjavne izraze $B_1, B_2, \ldots, B_n$, ki predstavljajo dokaz pravilnosti sklepa, pišemo drugega pod drugim, ob vsakem pa navedemo utemeljitev, zakaj ga smemo vključiti v dokaz (možne utemeljitve po izreku 1 so: predpostavka, tavtologija, enakovreden predhodni izraz, ali po katerem osnovnem pravilu sklepanja in iz katerih predhodnih izrazov logično sledi trenutni izraz).

| $i$ | izraz $B_i$ | utemeljitev |
|---|---|---|
| 1 | $p \Rightarrow q$ | predpostavka |
| 2 | $p \vee r$ | predpostavka |
| 3 | $q \Rightarrow s$ | predpostavka |
| 4 | $r \Rightarrow t$ | predpostavka |
| 5 | $\neg s$ | predpostavka |
| 6 | $p \Rightarrow s$ | HS iz $1, 3$ |
| 7 | $\neg p$ | MT iz $6, 5$ |
| 8 | $r \vee p$ | $\sim 2$ |
| 9 | $r$ | DS iz $8, 7$ |
| 10 | $t$ | MP iz $9, 4$ |

Izpeljali smo zaključek $t$, torej je sklep pravilen.