Poglavje 2

Predikatni račun

2.1 Motivacija

Hitro lahko opazimo, da izjavni račun ne zadošča za analizo sklepanja.

Zgled 1 1. Oglejmo si naslednji sklep:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Vsak zajec ljubi korenje.}\\ \text{Feliks je zajec.}\end{array}}{\textit{Torej Feliks ljubi korenje.}}$$

Ta sklep se zdi pravilen. Formalizirajmo ga v izjavnem računu:

$$\begin{array}{lll} p & \ldots & \text{vsak zajec ljubi korenje} \\ q & \ldots & \text{Feliks je zajec} \\ r & \ldots & \text{Feliks ljubi korenje} \end{array}$$

Ali velja

$$p, q \models r?$$

Seveda ne: če izberemo vrednosti $v(p) = v(q) = 1$ in $v(r) = 0$, sta obe predpostavki resnični, zaključek pa je lažen. Očitno ta formalizacija ni ustrezna, saj v izjavnem računu med izjavnimi spremenljivkami p, q in r ni nobene povezave, medtem ko v naravnem jeziku prvi dve povedi povezuje lastnost *biti zajec*, drugi dve individuum *Feliks*, prvo in tretjo pa lastnost *ljubiti korenje*.

V predikatnem računu (PR) razširimo jezik IR z dodatnimi simboli, npr.:

$$\begin{array}{cll} Z(x) & \ldots & x \text{ je zajec} \\ K(x) & \ldots & x \text{ ljubi korenje} \\ a & \ldots & \text{Feliks} \\ \forall x & \ldots & \text{za vsak } x \end{array}$$

Zdaj lahko gornji sklep formaliziramo takole:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x : (Z(x) \;\Rightarrow\; K(x))\\ Z(a)\end{array}}{K(a)}$$

Vrste uporabljenih simbolov:

x	...	individualna spremenljivka
a	...	individualna konstanta
Z, K	...	enomestna predikata
$\forall x$	...	univerzalni kvantifikator
$\Rightarrow$	...	izjavni veznik
: ( )	...	ločila

Videli bomo, da je to pravilen sklep v PR.

2. Preden se lahko lotimo analize sklepanja v predikatnem računu, moramo dobro spoznati jezik, ki ga predikatni račun uporablja. Zato prevedimo še nekaj izjav iz naravnega jezika (slovenščine) v jezik PR, npr.:

a) Vsi gasilci so hrabri.

b) Nekateri gasilci so hrabri.

c) Nekateri gasilci niso hrabri.

d) Noben gasilec ni hraber.

Uvedimo simbole

$G(x)$	...	x je gasilec
$H(x)$	...	x je hraber
$\exists x$	...	obstaja x

Gornje izjave lahko zdaj zapišemo takole:

a) $\forall x : (G(x) \;\Rightarrow\; H(x))$

b) $\exists x : (G(x) \;\wedge\; H(x))$

c) $\exists x : (G(x) \;\wedge\; \neg H(x))$

d) $\forall x : (G(x) \;\Rightarrow\; \neg H(x))$

Vrste uporabljenih simbolov:

x	...	individualna spremenljivka
G, H	...	enomestna predikata
$\forall x$	...	univerzalni kvantifikator
$\exists x$	...	eksistenčni kvantifikator
$\Rightarrow, \wedge, \neg$	...	izjavni vezniki
: ( )	...	ločila

3. Oglejmo si še kak primer iz matematike, saj nas ti najbolj zanimajo.

Evklidov izrek. *Praštevil je neskončno mnogo.*

Kako bi slavni Evklidov izrek prevedli v predikatni račun? Najprej ga povejmo drugače, npr.

– *obstaja poljubno veliko praštevilo*, ali natančneje

– *za vsako naravno število obstaja večje naravno število, ki je praštevilo.*

Ta oblika je primerna za prevod v PR. Da si prihranimo nekaj dela, se dogovorimo, da je področje našega pogovora v tem primeru množica naravnih števil. Potem lahko izjavo *vsako naravno število ima lastnost* L zapišemo na kratko $\forall x : L(x)$, sicer bi morali povsod pisati $\forall x\colon (x \in \mathbb{N} \Longrightarrow L(x))$ ali vsaj $\forall x \in \mathbb{N}\colon L(x)$.

Uvedimo simbola

$$\begin{array}{ccl} P(x) & \dots & x \text{ je praštevilo} \\ V(x,y) & \dots & x > y \end{array}$$

Zdaj lahko Evklidov izrek v jeziku PR zapišemo takole:

$$\forall x\, \exists y\colon (V(y,x) \ \wedge \ P(y))$$

Vrste uporabljenih simbolov:

$$\begin{array}{ccl} x, y & \dots & \text{individualni spremenljivki} \\ P & \dots & \text{enomesten predikat} \\ V & \dots & \text{dvomesten predikat} \\ \forall x & \dots & \text{univerzalni kvantifikator} \\ \exists y & \dots & \text{eksistenčni kvantifikator} \\ \wedge & \dots & \text{izjavni veznik} \\ :\ (\ )\ , & \dots & \text{ločila} \end{array}$$

Enomestni predikati izražajo lastnosti individuov, dvomestni predikati pa relacije med individui. V splošnem so predikati lahko n-mestni, kjer je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, in izražajo n-mestne relacije med individui. Podobno kot pri dvomestnih izjavnih veznikih tudi dvomestne predikate pogosto namesto v funkcijskem zapisu $R(x,y)$ pišemo s simbolom predikata med obema argumentoma, torej $x\,R\,y$. Če za dvomestno relacijo, ki jo tak predikat izraža, obstaja uveljavljen simbol, ga lahko uporabimo namesto imena predikata. Tako bomo npr. namesto $V(x,y)$ in $E(x,y)$ pisali kar $x > y$ oziroma $x = y$, kot smo navajeni.

4. V zadnjem primeru tega zgleda se bomo srečali še z eno vrsto simbolov predikatnega računa. Vzemimo definicijo praštevila in jo prepišimo v jeziku PR.

Definicija. *Naravno število n je* praštevilo*, če in samo če ima natanko dva naravna delitelja.*

Delitelja, o katerih govori definicija, sta seveda p in 1. Da bosta dva, mora biti $p \neq 1$ (kar pomeni, da število 1 ni praštevilo). Uvedimo simbola

$$\begin{array}{ccl} P(x) & \ldots & x \text{ je praštevilo} \\ f(x,y) & \ldots & x \cdot y \ \ (x \text{ krat } y) \end{array}$$

Definicijo praštevila lahko zdaj v PR zapišemo npr. takole:

$$\forall x\colon (P(x) \iff x > 1 \ \wedge \ \forall u \forall v\colon (x = f(u,v) \implies u = 1 \ \vee \ v = 1))$$

Vrste uporabljenih simbolov:

$$\begin{array}{ccl} x, u, v & \ldots & \text{individualne spremenljivke} \\ 1 & \ldots & \text{individualna konstanta} \\ P & \ldots & \text{enomesten predikat} \\ >, = & \ldots & \text{dvomestna predikata} \\ f & \ldots & \text{dvomesten funkcijski simbol} \\ \forall x, \forall u, \forall v & \ldots & \text{univerzalni kvantifikatorji} \\ \Leftrightarrow, \wedge, \Rightarrow & \ldots & \text{izjavni vezniki} \\ : \ (\ \ ) \ , & \ldots & \text{ločila} \end{array}$$

Dvomestni funkcijski simboli izražajo dvočlene operacije z individui. V splošnem n-mestni funkcijski simbol, kjer je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, predstavlja neko funkcijo n spremenljivk na množici individuov. Podobno kot pri dvomestnih izjavnih veznikih tudi dvomestne funkcijske simbole običajno namesto v funkcijskem zapisu $f(x,y)$ pišemo med obema argumentoma, torej $x\,f\,y$. Tako bomo namesto $f(u,v)$ v gornjem primeru pisali kar $u \cdot v$ ali $u\,v$, kot smo navajeni.

2.2 Sintaksa (skladnja) predikatnega računa

V tem razdelku sistematično naštejemo simbole, ki jih uporabljamo v PR, in opišemo, kako iz njih sestavljamo *terme* in *izjavne formule*. Predpostavljamo, da govorimo o elementih nekega *področja pogovora* D. Pomen teh simbolov bomo definirali v naslednjem razdelku, a za lažje razumevanje ga bomo nakazali že tu.

A. Simboli PR

1. *individualne konstante*: $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$ (predstavljajo *konkretne individue* iz D oziroma so *imena* posameznih individuov iz D)

2. *individualne spremenljivke*: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$ (predstavljajo *poljubne individue* iz D)

3. *predikati*: $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, P_3, \ldots$ (so lahko eno-, dvo-, $\ldots$, n-mestni in predstavljajo n-mestne *relacije* med individui iz D, oziroma (če je $n = 1$) *lastnosti* individuov iz D)

4. *funkcijski simboli*: $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, f_3, \ldots$ (so lahko eno-, dvo-, $\ldots$, n-mestni in predstavljajo *funkcije*, ki vsaki urejeni n-terici individuov iz D priredijo točno določen individuum iz D)

5. *izjavni vezniki*: kot v izjavnem računu

6. *simbola kvantifikacije*: $\forall$ (univerzalni) in $\exists$ (eksistenčni)

7. *ločila*: : ( ) ,

B. Termi PR (lahko predstavljajo *individue* iz D)

Terme definiramo induktivno.

Definicija 1

O1. *Vsaka individualna konstanta je term.*

O2. *Vsaka individualna spremenljivka je term.*

S. *Če je f neki n-mesten funkcijski simbol in so $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termi, potem je tudi $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ term.*

Definicija 2 *Term t je* zaprt*, če ne vsebuje individualnih spremenljivk.*

Zgled 2 Naj bo f enomesten in g dvomesten funkcijski simbol. Potem je

$$a,\ x,\ y,\ f(a),\ f(x),\ g(a,a),\ g(x,y),\ f(g(x,f(y))),\ g(f(f(f(a))),g(f(a),a))$$

devet različnih termov. Od teh so $a, f(a), g(a,a)$ in $g(f(f(f(a))), g(f(a),a))$ zaprti.

C. Izjavne formule PR (lahko predstavljajo *izjave* o individuih iz D)

Tudi izjavne formule definiramo induktivno.

Definicija 3

O. *Če je P neki n-mesten predikat in so $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termi, je $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$* atomarna *izjavna formula.*

S1. *Če je F neki n-mesten izjavni veznik in so $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ izjavne formule, je $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ izjavna formula.*

S2. *Če je φ izjavna formula in x poljubna individualna spremenljivka, sta $(\forall x\colon \varphi)$ in $(\exists x\colon \varphi)$ izjavni formuli. Pri tem je:*

$\forall x$ ... univerzalni kvantifikator*,*
$\exists x$ ... eksistenčni kvantifikator*, in*
φ ... doseg *kvantifikatorja* $\forall x$ *oziroma* $\exists x$*.*

Da bi zmanjšali število ločil v izjavnih formulah, podobno kot pri izjavnih izrazih sprejmemo dogovor o *prednostnem redu kvantifikatorjev in izjavnih veznikov ter opuščanju ločil*:

1. Za izjavne veznike in za zunanje oklepaje velja dogovor iz IR.
2. Kvantifikatorji imajo prednost pred izjavnimi vezniki.
3. Ločila med zaporednimi kvantifikatorji izpuščamo.

Zgled 3

$$\begin{aligned}
&Z(x),\ K(x),\ Z(a),\ K(a),\ V(y,x),\ \neg H(x),\quad \forall x : (Z(x) \ \Rightarrow\ K(x)),\\
&\forall x : (G(x) \ \Rightarrow\ H(x)),\quad \exists x : (G(x) \ \wedge\ H(x)),\quad \exists x : (G(x) \ \wedge\ \neg H(x)),\\
&\forall x : (G(x) \ \Rightarrow\ \neg H(x)),\quad \forall x\, \exists y \colon R(x,y),\quad \forall x\, \exists y \colon (V(y,x) \ \wedge\ P(y)),\\
&\forall x \colon (P(x) \ \iff\ x > 1 \ \wedge\ \forall u \forall v \colon (x = f(u,v) \ \Longrightarrow\ u = 1 \ \vee\ v = 1))
\end{aligned}$$

so izjavne formule. Od teh je prvih pet atomarnih, ostalih devet pa ne.

Definicija 4 Nastop *individualne spremenljivke v izjavni formuli je* vezan*, če je del kvantifikatorja ali če leži v dosegu kvantifikatorja, ki vsebuje isto spremenljivko. Sicer je to* prost nastop*.*

Izjavna formula je zaprta*, če so vsi nastopi individualnih spremenljivk v njej vezani.*

Zgled 4 1. Izjavne formule $P(a)$, $\forall x \colon P(x)$ in $\forall x\, \exists y \colon R(x,y)$ so zaprte.

2. Izjavne formule $P(\underline{x})$, $\exists y \colon R(\underline{x}, y)$ in $\forall x \colon (R(x, \underline{y}) \Rightarrow \exists y \colon P(y))$ niso zaprte. Prosti nastopi individualnih spremenljivk v njih so podčrtani in zapisani rdeče.

Substitucija ali zamenjava

Včasih izjavno formulo φ zapišemo v obliki $\varphi(x)$, kjer je x individualna spremenljivka. Če je t term, potem s $\varphi(t)$ označimo izjavno formulo, ki jo dobimo iz $\varphi(x)$, če v njej vse *proste* nastope spremenljivke x zamenjamo s termom t. Rečemo, da smo $\varphi(t)$ dobili iz $\varphi(x)$ s *substitucijo* ali *zamenjavo* spremenljivke x s termom t.

Podobno lahko φ zapišemo v obliki $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, kjer so $x_1, x_2, \ldots, x_k$ različne individualne spremenljivke. Če so $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termi, potem s $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ označimo izjavno formulo, ki jo dobimo iz $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, če v njej vse *proste* nastope spremenljivke x_i zamenjamo s termom t_i za $i = 1, 2, \ldots, k$.

Zgled 5 Če je $\varphi(x) = \exists y \colon R(x,y)$ in $t = f(a)$, je

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \exists y \colon R(f(a), y),\\
\varphi(y) &= \exists y \colon R(y, y).
\end{aligned}$$

2.3 Semantika (pomenoslovje) predikat. računa

Izjavne formule same po sebi nimajo pomena, dokler ne določimo, kaj predstavljajo individualne konstante, predikati in funkcijski simboli, ki v njih nastopajo, in o katerih objektih sploh govorimo.

Definicija 5 *Naj bo $\mathcal{F}$ neka množica izjavnih formul.* Interpretacijo *I množice formul $\mathcal{F}$ podamo tako, da:*

1. izberemo neprazen *razred objektov D, ki ga imenujemo* področje pogovora *ali* domena interpretacije*,*

2. vsaki individualni konstanti a, ki nastopa v formulah iz $\mathcal{F}$, priredimo neki element $\bar{a} \in D$,

3. vsakemu n-mestnemu predikatu P, ki nastopa v formulah iz $\mathcal{F}$, priredimo neko n-mestno relacijo $\bar{P}$ med n elementi razreda D,

4. vsakemu n-mestnemu funkcijskemu simbolu f, ki nastopa v formulah iz $\mathcal{F}$, priredimo neko funkcijo (preslikavo) $\bar{f}$, ki vsako urejeno n-terico elementov razreda D preslika v točno določen element iz D.

Izjavne veznike v formulah iz $\mathcal{F}$ interpretiramo enako kot v izjavnem računu. Univerzalni kvantifikator $\forall x$ v formulah iz $\mathcal{F}$ interpretiramo kot "za vsak $x \in D$"*. Eksistenčni kvantifikator $\exists x$ v formulah iz $\mathcal{F}$ interpretiramo kot* "obstaja $x \in D$"*.*