Poglavje 4

Relacije in funkcije

4.1 Definicija in lastnosti relacij

Zgled 1

1. Relacija enakosti oz. identitete v poljubni množici je:
    - refleksivna
    - simetrična
    - antisimetrična $(x = y \wedge y = x \implies x = y \checkmark)$
    - tranzitivna
    - enolična $(x = y \wedge x = z \implies y = z \checkmark)$
2. Relacija $\leq$ v množici $\mathbb{N}$ je:
    - refleksivna
    - antisimetrična
    - tranzitivna
    - strogo sovisna
3. Relacija $<$ v množici $\mathbb{N}$ je:
    - irefleksivna
    - asimetrična
    - tranzitivna
    - sovisna
4. Relacija $\subseteq$ v poljubni množici množic je:
    - refleksivna

- antisimetrična
- tranzitivna

5. Relacija $\subset$ v poljubni množici množic je:
   - irefleksivna
   - asimetrična
   - tranzitivna

6. Naj bo R relacija "oče" v množici vseh ljudi (xRy naj pomeni "x je biološki oče y-a"). Relacija R je:
   - irefleksivna
   - asimetrična
   - intranzitivna

Dokaz: Dokažimo intranzitivnost relacije R iz točke 6. Naj bo x oče y-a in y oče z-ja. Recimo, da je x oče z-ja. Ker je tudi y oče z-ja, je $x = y$, saj je biološki oče (zaenkrat še) enoličen. Potem je x sam svoj oče, kar pa ni mogoče. – Torej x *ni* oče z-ja. Ker so bili x, y, z poljubni, sledi, da je relacija R intranzitivna. $\square$

Med lastnostmi relacij obstajajo nekatere povezave.

Trditev 1 *Naj bo $R \subseteq A \times A$. Potem velja:*

1. *R je asimetrična natanko tedaj, ko je antisimetrična in irefleksivna.*
2. *R je strogo sovisna natanko tedaj, ko je sovisna in refleksivna.*

Dokaz: Dokažimo točko 1.
a) Naj bo R asimetrična. Potem je trditev

$$\forall x, y \in A \colon (xRy \wedge yRx \implies x = y)$$

resnična, saj je v gornji implikaciji antecedens $xRy \wedge yRx$ lažen za vse $x, y \in A$. Torej je R antisimetrična.

V definiciji asimetričnosti vzemimo $y = x$, pa dobimo, da velja

$$\forall x \in A \colon (xRx \implies \neg\, xRx),$$

kar je enakovredno $\forall x \in A \colon \neg\, xRx$. Torej je R tudi irefleksivna.

b) Ker je R antisimetrična, iz $xRy \wedge yRx$ sledi $x = y$ in zato xRx, kar pa je v protislovju z irefleksivnostjo R, torej velja

$$\forall x, y \in A \colon \neg(xRy \wedge yRx).$$

To je enakovredno

$$\forall x, y \in A \colon (\neg\, xRy \vee \neg\, yRx) \quad \sim \quad \forall x, y \in A \colon (xRy \implies \neg\, yRx),$$

kar pomeni, da je R asimetrična. □

4.2 Ekvivalenčne relacije

Definicija 1 *Relacija $R \subseteq A \times A$ je* ekvivalenčna*, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna.*

Zgled 2 Naslednje relacije so ekvivalenčne:

- relacija enakosti id_A,
- univerzalna relacija $A \times A$,
- relacija vzporednosti v množici vseh premic v $\mathbb{R}^n$,
- relacija R v množici ljudi, kjer xRy pomeni "x ima enako barvo oči kot y".

Definicija 2 *Naj bo relacija $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna.*

1. *Vsakemu $x \in A$ priredimo njegov* ekvivalenčni razred

   $$R[x] \;=\; \{y \in A;\; yRx\}.$$

   Element x je predstavnik *ekvivalenčnega razreda $R[x]$.*

2. *Množico vseh ekvivalenčnih razredov relacije R*

   $$A/R \;=\; \{R[x];\; x \in A\}$$

   imenujemo faktorska *ali* kvocientna množica *množice A po relaciji R.*

Lema 1 *Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna. Potem velja:*

$$\forall x, y \in A \colon \; (R[x] = R[y] \iff xRy).$$

Dokaz: Vzemimo poljubna $x, y \in A$.

($\Longrightarrow$) Naj bo $R[x] = R[y]$. Ker je R refleksivna, je xRx, torej po definiciji $R[x]$ velja $x \in R[x] = R[y]$. Po definiciji $R[y]$ od tod sledi xRy.

($\Longleftarrow$) Naj bo xRy in naj bo $z \in R[x]$ poljuben. Po definiciji $R[x]$ je zRx in zaradi tranzitivnosti R tudi zRy. Po definiciji $R[y]$ je torej $z \in R[y]$. Ker je bil $z \in R[x]$ poljuben, sledi $R[x] \subseteq R[y]$.

Zaradi simetričnosti R pa iz xRy sledi yRx; če v gornjem razmisleku zamenjamo vlogi x in y, iz yRx izpeljemo $R[y] \subseteq R[x]$. Torej je $R[x] = R[y]$. □

Posledica 1 *Vsak element ekvivalenčnega razreda je tudi predstavnik razreda.*

Izrek 1 *Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna. Potem velja*

1. $\forall x \in A \colon R[x] \neq \emptyset$,
2. $\forall x, y \in A \colon (R[x] \neq R[y] \implies R[x] \cap R[y] = \emptyset)$,
3. $\bigcup(A/R) \ = \ A$.

Dokaz:

1. Naj bo $x \in A$ poljuben. Zaradi refleksivnosti R je xRx, torej $x \in R[x]$ in zato $R[x] \neq \emptyset$.

2. Naj bosta $x, y \in A$ poljubna. Dokažimo kontrapozicijo

$$R[x] \cap R[y] \neq \emptyset \implies R[x] = R[y].$$

   Naj bo torej $z \in R[x] \cap R[y]$. Potem je $z \in R[x]$ in $z \in R[y]$, torej zRx in zRy. Zaradi simetričnosti sledi xRz in zRy, od tod pa najprej po tranzitivnosti xRy, nato po lemi 1 še $R[x] = R[y]$.

3. Ker za vsak $x \in A$ velja: $R[x] \subseteq A$, je $\bigcup(A/R) \ \subseteq \ A$.

   Naj bo $x \in A$ poljuben. Ker je $x \in R[x]$ in $R[x] \in A/R$, je $x \in \bigcup(A/R)$. To velja za vse $x \in A$, zato je $A \subseteq \bigcup(A/R)$ – Torej je $A \ = \ \bigcup(A/R)$.

□

Izrek 1 lahko na kratko povemo takole: *Ekvivalenčna relacija v množici A razdeli množico A na paroma tuje neprazne bloke.*

Zgled 3 1. Naj bo A množica ljudi in R dvomestna relacija v A, kjer xRy pomeni "*x ima enako barvo oči kot y*". Potem razred $R[x]$ vsebuje vse tiste ljudi, ki imajo enako barvo oči kot x, torej ekvivalenčni razredi ustrezajo posameznim *barvam oči:* en razred vsebuje vse črnooke ljudi, drugi vse rjavooke, tretji vse modrooke, četrti vse zelenooke itd.

2. Naj bo $R = \mathrm{id}_A$ *relacija enakosti* v množici A. Ker je vsak element enak oziroma identičen le samemu sebi, za vsak $x \in A$ velja $R[x] = \{x\}$ in je

$$A/\mathrm{id}_A \;=\; \{\{x\};\; x \in A\}.$$

3. Naj bo $R = A \times A$ *univerzalna relacija* v množici A. Ker je vsak element v tej relaciji z vsakim elementom množice A, za vsak $x \in A$ velja $R[x] = A$ in je

$$A\,/\,R \;=\; \{A\}.$$

4. Naj bo R *relacija vzporednosti premic* v množici vseh premic v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Za vsako premico p je potem

$$R[p] \;=\; \{q;\; q \,||\, p\},$$

ekvivalenčni razredi pa ustrezajo vsem možnim smerem v trirazsežnem prostoru oziroma enotskim vektorjem v $\mathbb{R}^3$.

5. Množico celih števil $\mathbb{Z}$ definiramo kot faktorsko množico $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$, kjer je ekvivalenčna relacija R definirana s predpisom $(a, b)\, R\, (c, d) \iff a + d = b + c$.

6. Množico racionalnih števil $\mathbb{Q}$ definiramo kot faktorsko množico $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \emptyset))/R$, kjer je ekvivalenčna relacija R definirana s predpisom $(a, b)\, R\, (c, d) \iff ad = bc$.

7. Za vsako naravno število $m \geq 1$ definiramo v množici celih števil $\mathbb{Z}$ *relacijo kongruence po modulu m* takole: Naj bosta $x, y \in \mathbb{Z}$; potem je

$$\begin{aligned} x \equiv y \pmod{m} &\iff \exists k \in \mathbb{Z}\colon\; x - y \;=\; k \cdot m \\ &\iff x \text{ in } y \text{ dajeta isti ostanek pri deljenju z } m. \end{aligned}$$

Izjavno formulo $x \equiv y \pmod{m}$ preberemo: *x je kongruenten y po modulu m.* Ni težko preveriti, da je relacija kongruence po modulu m ekvivalenčna za vse naravne $m \geq 1$.

Naj bo R_m relacija kongruence po modulu m. Ekvivalenčni razred $R_m[x]$ vsebuje vsa tista cela števila, ki pri deljenju z m dajejo enak ostanek kot x. Ker pri deljenju z m dobimo lahko m različnih ostankov $0, 1, \ldots, m - 1$, ima množica

$\mathbb{Z} \,/\, R_m$ natanko m elementov, ki jih imenujemo *razredi ostankov po modulu m:*

$$\begin{aligned}
R_m[0] &= \{x \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon x = km\},\\
R_m[1] &= \{x \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon x = km+1\},\\
&\vdots\\
R_m[m-1] &= \{x \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon x = km+m-1\}.
\end{aligned}$$

Relacija R_1 je enaka univerzalni relaciji $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ v množici $\mathbb{Z}$. Ekvivalenčna razreda relacije R_2 pa vsebujeta eden vsa soda, drugi vsa liha cela števila.

4.3 Operacije z relacijami

Trditev 2 *Naj bosta R in S dvomestni relaciji v A. Potem so tudi $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$ in $R \oplus S$ dvomestne relacije v A in za vse $x, y, \in A$ velja:*

1. $x\ R \cup S\ y \iff xRy \vee xSy$
2. $x\ R \cap S\ y \iff xRy \wedge xSy$
3. $x\ R \setminus S\ y \iff xRy \wedge \neg(xSy)$
4. $x\ R \oplus S\ y \iff xRy + xSy$

Dokaz: 1. Iz $R, S \subseteq A \times A$ sledi $R \cup S \subseteq A \times A$. Za vse $x, y \in A$ pa velja:

$$x\ R \cup S\ y \iff (x,y) \in R \cup S \iff (x,y) \in R \vee (x,y) \in S \iff xRy \vee xSy.$$

$\square$

Definicija 3 *Naj bo R dvomestna relacija v A.*

1. *Relacija $R^C = (A \times A) \setminus R$ je* komplement *relacije R.*
2. *Relacija $R^T = \{(x,y);\ (y,x) \in R\}$ je* transponirana relacija *relacije R.*

Trditev 3 *Za vse $x, y, \in A$ velja:*

1. $x\, R^C y \iff \neg(xRy)$
2. $x\, R^T y \iff yRx$

Dokaz: 2. $x\, R^T\, y \iff (x,y) \in R^T \iff (y,x) \in R \iff y\, R\, x.$ $\square$

Zgled 4 Naj bo $A = \mathbb{N}$.

1. $(<) \cup (=) \ = \ (\leq)$
2. $(\leq) \setminus (=) \ = \ (<)$
3. $(\leq) \cap (\geq) \ = \ (=)$
4. $(\leq) \cup (\geq) \ = \ \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
5. $(<) \cap (>) \ = \ \emptyset$
6. $(<) \cup (>) \ = \ (\neq) \ = \ (=)^C$
7. $(\leq)^C \ = \ (>)$
8. $(\leq)^T \ = \ (\geq)$

Zgled 5 1. Naj bo A množica ljudi. Potem je "sin" $\cup$ "hči" $=$ "otrok".

2. Naj bo A množica heteroseksualnih ljudi. Potem je "mož"^{T} $=$ "žena" in "žena"^{T} $=$ "mož".

Definicija 4 *Za relaciji $R, S \subseteq A \times A$ definiramo* kompozitum $R \circ S$ *takole:*

$$R \circ S \ = \ \{(x, y);\ \exists u \in A\colon (xSu \ \wedge \ uRy)\}.$$

Za vse $x, y \in A$ torej velja: $x \ R \circ S \ y \iff \exists u \in A\colon (xSu \ \wedge \ uRy)$.