Poglavje 3

Množice

3.3 Operacije z množicami

3.3.3 Potenčna množica

Aksiom o potenčni množici (APM). Za vsako množico A obstaja njena potenčna množica $\mathcal{P}A$, ali s formulo:

$$\forall A\, \exists B\, \forall x\colon (x \in B \iff x \subseteq A).$$

Izrek 1 *Za vse množice A, B velja:*

1. $\emptyset \in \mathcal{P}A,\ \ A \in \mathcal{P}A$
2. $\bigcup \mathcal{P}A = A,\ \ \bigcap \mathcal{P}A = \emptyset$
3. $A \subseteq B \iff \mathcal{P}A \subseteq \mathcal{P}B$
4. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}A \cap \mathcal{P}B$
5. $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}A \cup \mathcal{P}B$

Dokaz: Dokažimo npr. točko 4:
Če je $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$, je $C \subseteq A \cap B$, torej $C \subseteq A$ in $C \subseteq B$. Sledi $C \in \mathcal{P}A$ in $C \in \mathcal{P}B$, torej $C \in \mathcal{P}A \cap \mathcal{P}B$. Ker je bil C poljuben, sledi $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}A \cap \mathcal{P}B$.

Če je $C \in \mathcal{P}A \cap \mathcal{P}B$, je $C \in \mathcal{P}A$ in $C \in \mathcal{P}B$, torej $C \subseteq A$ in $C \subseteq B$. Sledi $A \cap C = C$ in $B \cap C = C$, zato $A \cap B \cap C = A \cap C = C$, kar pomeni, da je $C \subseteq A \cap B$ in $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Ker je bil C poljuben, sledi $\mathcal{P}A \cap \mathcal{P}B \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.

Zaključimo, da je $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}A \cap \mathcal{P}B$. $\square$

3.3.4 Urejeni pari in kartezični produkt

Urejeni par množic a in b pišemo v obliki (a, b), pri čemer je a njegova *prva komponenta*, b pa njegova *druga komponenta*. Urejena para sta enaka, če in samo če sta njuni prvi komponenti enaki in njuni drugi komponenti enaki, torej

$$(a, b) \;=\; (c, d) \iff a = c \;\wedge\; b = d. \tag{3.1}$$

Ekvivalenci (3.1) pravimo *osnovna lastnost urejenih parov.*

V teoriji množic želimo vsak matematični objekt, torej tudi urejeni par, predstaviti oz. definirati kot neko množico. Najpreprosteje bi bilo vzeti

$$(a, b) \;=\; \{a, b\},$$

a brž ugotovimo, da to ne gre, saj v primeru $a \neq b$ iz (3.1) sledi $(a, b) \neq (b, a)$, medtem ko je $\{a, b\} = \{b, a\}$. Očitno morata elementa a in b v definiciji urejenega para (a, b) nastopati nesimetrično, tako da je mogoče ugotoviti, kateri od njiju je prva komponenta para in kateri druga. Poskusimo takole:

Definicija 1

$$(a, b) \;=\; \{\{a, b\}, \{a\}\}$$

S to definicijo lahko dokažemo

Izrek 2 *Za vse a, b, c, d velja* (3.1).

Dokaz: $(\Longrightarrow)$ Naj bo $(a, b) \;=\; (c, d)$, torej

$$\{\{a, b\}, \{a\}\} \;=\; \{\{c, d\}, \{c\}\} \tag{3.2}$$

Ker $\{a\}$ pripada množici na levi, pripada tudi množici na desni. Ločimo dva primera:

1. $\{a\} \;=\; \{c, d\}$

To je mogoče le, če je $a = c = d$.

2. $\{a\} \;=\; \{c\}$

To je mogoče le, če je $a = c$. V obeh primerih je $\underline{a = c}$, torej iz (3.2) sledi

$$\{\{a, b\}, \{a\}\} \;=\; \{\{a, d\}, \{a\}\}. \tag{3.3}$$

Spet ločimo dva primera:

1. $a = b$

V tem primeru je $\{\{a, b\}, \{a\}\} = \{\{a, a\}, \{a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$, torej iz (3.3) dobimo $\{\{a\}\} \;=\; \{\{a, d\}, \{a\}\}$, od tod pa $\{a, d\} = \{a\}$ in $a = d$. Iz $a = b$ zdaj sledi $\underline{b = d}$.

2. $a \neq b$
V tem primeru je $\{a,b\} \neq \{a\}$, torej iz (3.3) dobimo $\{a,b\} = \{a,d\}$. Sledi $b \in \{a,d\}$, od tod pa $\underline{b = d}$.

($\Longleftarrow$) Naj bo $a = c$ in $b = d$. Potem po načelu zamenljivosti enakega z enakim (EE) iz enakosti $(a,b) = (a,b)$ sledi $(a,b) = (c,d)$. $\square$

Trditev 1 *Za vse a, b obstaja urejeni par (a,b).*

Dokaz: Po aksiomu o paru obstajata množici $\{a,b\}$ in $\{a,a\} = \{a\}$, torej po aksiomu o paru obstaja tudi množica $\{\{a,b\},\{a\}\} = (a,b)$. $\square$

Definicija 2 *Množica vseh urejenih parov, katerih prva komponenta pripada A, druga pa B, je* kartezični produkt množic A in B, *ali s formulo:*

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(u,v);\ u \in A \ \wedge \ v \in B\} \\ &= \{x;\ \exists u \exists v \colon u \in A \wedge v \in B \ \wedge \ x = (u,v)\} \end{aligned}$$

Zgled 1 1. Naj bo $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3\}$. Potem je

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}, \\ B \times A &= \{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}. \end{aligned}$$

2. Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A = [1,2]$, $B = [1,3]$. Potem je

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x,y);\ 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}, \\ B \times A &= \{(x,y);\ 1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 2\}. \end{aligned}$$

Trditev 2 *Za poljubni množici A in B obstaja njun kartezični produkt $A \times B$.*

Dokaz: Najprej bomo iz množic A in B konstruirali neko množico M, za katero vemo, da obstaja, in ki vsebuje $A \times B$ kot podmnožico. Nato bomo na množici M uporabili ASP z izjavno formulo, ki definira elemente množice $A \times B$.

Katero množico lahko vzamemo za M? Poglejmo: za vse a, b velja

$$\begin{aligned} (a,b) \in A \times B &\iff a \in A \ \wedge \ b \in B \\ &\Longrightarrow \{a,b\} \subseteq A \cup B \ \wedge \ \{a\} \subseteq A \cup B \\ &\Longrightarrow \{a,b\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \ \wedge \ \{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\Longrightarrow \{\{a,b\},\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\Longrightarrow \{\{a,b\},\{a\}\} \in \mathcal{PP}(A \cup B) \\ &\Longrightarrow (a,b) \in \mathcal{PP}(A \cup B), \end{aligned}$$

torej je

$$A \times B \ \subseteq \ \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B). \tag{3.4}$$

Ker obstajata A in B, po AP obstaja $\{A, B\}$ in po AU tudi $\bigcup\{A, B\} = A \cup B$. Po APM zato obstajata $\mathcal{P}(A \cup B)$ in $\mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$. Torej po ASP obstaja množica

$$C \ = \ \{x;\ x \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B) \ \wedge \ \exists u \exists v \colon (u \in A \wedge v \in B \ \wedge \ x = (u, v))\}. \tag{3.5}$$

Ker iz $\exists u \exists v : (u \in A \wedge v \in B \wedge x = (u, v))$ po definiciji množice $A \times B$ sledi $x \in A \times B$, od tod pa po (3.4) tudi $x \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$, lahko člen $x \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$ v (3.5) izpustimo in dobimo, da je

$$C \ = \ \{x;\ \exists u \exists v \colon u \in A \wedge v \in B \ \wedge \ x = (u, v)\} \ = \ A \times B.$$

Torej množica $A \times B$ obstaja. □

Izrek 3 *Za vse A, B, C, D velja:*

1. $A \times \emptyset \ = \ \emptyset \times A \ = \ \emptyset$
2. *(distributivnost glede na unijo)*

   (a) $A \times (B \cup C) \ = \ (A \times B) \ \cup \ (A \times C)$
   (b) $(A \cup B) \times C \ = \ (A \times C) \ \cup \ (B \times C)$

3. *(superdistributivnost glede na presek)*

   $(A \cap B) \times (C \cap D) \ = \ (A \times C) \ \cap \ (B \times D)$

4. $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \ \vee \ B = \emptyset$
5. $A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq D \implies A \times B \ \subseteq \ C \times D$ *(monotonost glede na inkluzijo)*
6. $A \times B \ \subseteq \ C \times D \ \wedge \ A \times B \neq \emptyset \implies A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq D$

Dokaz:

3.
$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) &\iff x \in A \cap B \ \wedge \ y \in C \cap D \\ &\iff x \in A \wedge x \in B \ \wedge \ y \in C \wedge y \in D \\ &\iff x \in A \wedge y \in C \ \wedge \ x \in B \wedge y \in D \\ &\iff (x, y) \in A \times C \ \wedge \ (x, y) \in B \times D \\ &\iff (x, y) \in (A \times C) \ \cap \ (B \times D) \end{aligned}$$

□

Posledica 1 *(distributivnost glede na presek)*

(a) $A \times (B \cap C) \;=\; (A \cap A) \times (B \cap C) \;=\; (A \times B) \;\cap\; (A \times C)$

(b) $(A \cap B) \times C \;=\; (A \cap B) \times (C \cap C) \;=\; (A \times C) \;\cap\; (B \times C)$

Definicija 3 *Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ induktivno definiramo* urejeno n-terico *takole:*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;=\; ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

Zgled 2

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \;=\; ((a_1, a_2, a_3), a_4) \;=\; (((a_1, a_2), a_3), a_4)$$

Izrek 4 *Za vse $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ velja:*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;=\; (b_1, b_2, \ldots, b_n) \iff \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \colon a_i = b_i$$

Dokaz: Dokazujemo z indukcijo po n.

$n = 2$: To je osnovna lastnost urejenih parov (3.1).

$n \geq 3$: Po indukcijski predpostavki je

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \;=\; (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) \iff \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \colon a_i = b_i,$$

zato velja

$$\begin{aligned}
(a_1, \ldots, a_n) \;=\; (b_1, \ldots, b_n) &\overset{\text{def. 3}}{\iff} ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n) \;=\; ((b_1, \ldots, b_{n-1}), b_n) \\
&\overset{(3.1)}{\iff} (a_1, \ldots, a_{n-1}) \;=\; (b_1, \ldots, b_{n-1}) \;\wedge\; a_n = b_n \\
&\overset{\text{i. p.}}{\iff} (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \colon a_i = b_i) \;\wedge\; a_n = b_n \\
&\iff (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \colon a_i = b_i)
\end{aligned}$$

$\square$

Definicija 4 *Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je množica*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \;=\; \{(a_1, a_2, \ldots, a_n);\; \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \colon a_i \in A_i\}$$

kartezični produkt množic $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Poglavje 4

Relacije in funkcije

4.1 Definicija in lastnosti relacij

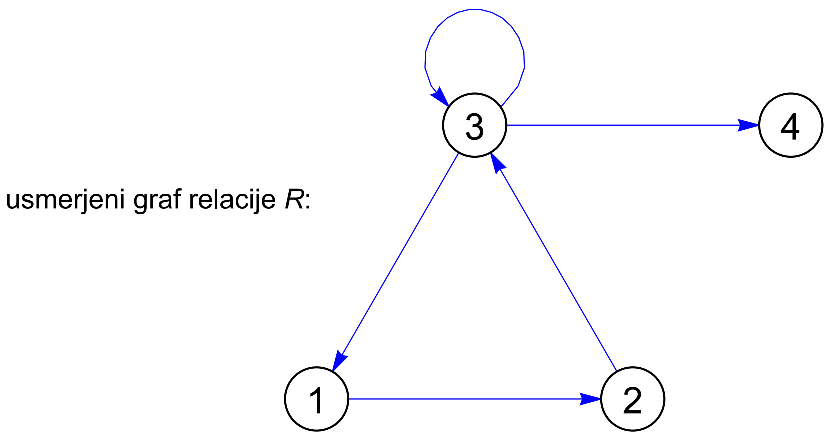
Ogledali si bomo le dvomestne relacije. V teoriji množic dvomestno relacijo definiramo *ekstenzionalno*, t.j. kot množico vseh tistih urejenih parov, katerih komponenti sta v obravnavani relaciji.

Definicija 5
- *Množica R je* dvomestna relacija*, če so njeni elementi urejeni pari, torej če velja* $\forall x \in R\, \exists a\, \exists b \colon x = (a, b)$.
- *Množica R je* dvomestna relacija v množici A*, če je $R \subseteq A \times A$.*

Zgled 3 A) Naj bo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ in

$$R \;=\; \{(1,2), (2,3), (3,1), (3,3), (3,4)\} \;\subseteq A \times A.$$

Relacijo na (majhni) množici lahko predstavimo grafično z *usmerjenim grafom*, kjer elemente množice A narišemo kot krožce v ravnini, pare $(a, b) \in R$ pa kot usmerjene puščice od krožca, ki predstavlja a, do krožca, ki predstavlja b.



B) Naj bo $A = \mathbb{N}$, relacija R pa naj bo relacija $\leq$ oziroma "*manjši ali enak*". Relacijo R definiramo kot množico urejenih parov npr. takole:

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ \exists z \in \mathbb{N} \colon x + z = y\} \\ &= \{(0,0),(0,1),(1,1),(0,2),(1,2),(2,2),(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(0,4),\dots\}. \end{aligned}$$

C) V vsaki množici A definiramo tri *standardne relacije*:

- $\emptyset \subseteq A \times A$ je *prazna relacija* v množici A. V tej relaciji ni nihče z nikomer.
- $A \times A \subseteq A \times A$ je *univerzalna relacija* v množici A. V tej relaciji je vsakdo z vsakomer.
- $\mathrm{id}_A = \{(x,x);\ x \in A\} \subseteq A \times A$ je *relacija enakosti* ali *identitete* v množici A. V tej relaciji je vsakdo le sam s seboj.

Relacijska pisava: Naj bo $R \subseteq A \times A$.

- Namesto $(x,y) \in R$ pišemo tudi $x\,R\,y$ in beremo: *x je v relaciji R z y.*
- Namesto $x \ \mathrm{id}_A \ y$ pišemo tudi $x = y$.

Definicija 6 *Naj bo $R \subseteq A \times A$.*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_R &= \{x \in A;\ \exists y \in A \colon xR\,y\} && \textit{je domena ali definicijsko območje relacije } R. \\ \mathcal{Z}_R &= \{y \in A;\ \exists x \in A \colon xR\,y\} && \textit{je zaloga vrednosti relacije } R. \end{aligned}$$

Zgled 4 1. Naj bo $A = \{1,2,3,4\}$ in $R = \{(1,3),(2,2),(4,3)\}$. Potem je

$$\mathcal{D}_R = \{1,2,4\}, \quad \mathcal{Z}_R = \{2,3\}.$$

2. Naj bo $A = \mathbb{N}$ in $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ \exists z \in \mathbb{N} \colon x + z + 1 = y\}$, t.j. relacija $<$ oziroma *manjši.* Potem je

$$\mathcal{D}_R = \mathbb{N}, \quad \mathcal{Z}_R = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Definicija 7 *Naj bo $R \subseteq A \times A$. Relacija R je:*

1. refleksivna*, če in samo če* $\forall x \in A \colon xRx$*;*
2. irefleksivna*, če in samo če* $\forall x \in A \colon \neg\, xRx$*;*
3. simetrična*, če in samo če* $\forall x,y \in A \colon (xRy \implies yRx)$*;*
4. asimetrična*, če in samo če* $\forall x,y \in A \colon (xRy \implies \neg\, yRx)$*;*

5. antisimetrična, *če in samo če* $\forall x, y \in A\colon (xRy \wedge yRx \implies x = y)$;

6. tranzitivna, *če in samo če* $\forall x, y, z \in A\colon (xRy \wedge yRz \implies xRz)$;

7. intranzitivna, *če in samo če* $\forall x, y, z \in A\colon (xRy \wedge yRz \implies \neg\, xRz)$;

8. strogo sovisna, *če in samo če* $\forall x, y \in A\colon (xRy \vee yRx)$;

9. sovisna, *če in samo če* $\forall x, y \in A\colon (x \neq y \implies xRy \vee yRx)$;

10. enolična, *če in samo če* $\forall x, y, z \in A\colon (xRy \wedge xRz \implies y = z)$.