Poglavje 4

Relacije in funkcije

4.3 Operacije z relacijami

Izrek 1 (lastnosti transponirane relacije in kompozituma relacij) *Za vse relacije $R, S, T \subseteq A \times A$ velja:*

1. $\left(R^T\right)^T = R$
2. (a) $(R \cup S)^T = R^T \cup S^T$
   (b) $(R \cap S)^T = R^T \cap S^T$
   (c) $(R \setminus S)^T = R^T \setminus S^T$
   (d) $(R \oplus S)^T = R^T \oplus S^T$
3. $R \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A \circ R = R$ (relacija enakosti je enota za komponiranje)
4. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (komponiranje relacij je asociativno)
5. $(R \circ S)^T = S^T \circ R^T$
6. (a) $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$
   (b) $R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$ (distributivnost $\circ$ glede na unijo)
7. (a) $R \subseteq S \implies R \circ T \subseteq S \circ T$
   (b) $R \subseteq S \implies T \circ R \subseteq T \circ S$ (monotonost $\circ$ glede na inkluzijo)

Dokaz: 4.

$$\begin{aligned} x\,(R \circ S) \circ T\,y &\iff \exists u\colon (xTu \,\wedge\, u\,R \circ S\,y) \\ &\iff \exists u\colon (xTu \,\wedge\, \exists v\colon (uSv \,\wedge\, vRy)) \\ &\iff \exists u \exists v\colon (xTu \,\wedge\, (uSv \,\wedge\, vRy)) \\ &\iff \exists v \exists u\colon ((xTu \,\wedge\, uSv) \,\wedge\, vRy) \\ &\iff \exists v\colon (\exists u\colon (xTu \,\wedge\, uSv) \,\wedge\, vRy) \\ &\iff \exists v\colon (x\,(S \circ T)\,v \,\wedge\, vRy) \\ &\iff x\,R \circ (S \circ T)\,y \end{aligned}$$

□

Zgled 1 Naj bo A množica ljudi.

1. Katera sorodstvena relacija je kompozitum relacije $\mathsf{hči}$ z relacijo $\mathsf{mož}$?

$$\begin{aligned} x\ (\mathsf{hči} \circ \mathsf{mož})\ y &\iff \exists u\colon (x \text{ je mož } u\text{-ja } \wedge u \text{ je hči } y\text{-a }) \\ &\iff x \text{ je mož } y\text{-ove hčere} \\ &\iff x \text{ je zet } y\text{-a}, \end{aligned}$$

torej je $\mathsf{hči} \circ \mathsf{mož} \;=\; \mathsf{zet} \;=\;$ hčerin mož.

2. Po gornjem vzorcu dobimo:

$$\begin{aligned} \mathsf{oče} \circ \mathsf{brat} &= \text{očetov brat} = \mathsf{stric}, \\ \mathsf{mati} \circ \mathsf{brat} &= \text{materin brat} = \mathsf{ujec}. \end{aligned}$$

3. Kako se izraža relacija $\mathsf{tašča}$ z osnovnimi sorodstvenimi relacijami?

$$\begin{aligned} \mathsf{tašča} &= \text{moževa mati ali ženina mati} \\ &= \mathsf{mož} \circ \mathsf{mati} \;\cup\; \mathsf{žena} \circ \mathsf{mati} \\ &= (\mathsf{mož} \cup \mathsf{žena}) \circ \mathsf{mati} \\ &= \mathsf{zakonec} \,\circ\, \mathsf{mati} = \text{zakončeva mati}. \end{aligned}$$

Tu smo uporabili distributivnost kompozituma glede na unijo.

Izrek 2 (algebraična karakterizacija lastnosti relacij) *Naj bo $R \subseteq A \times A$. Potem velja:*

1. *R refleksivna* $\iff \mathrm{id}_A \subseteq R$
2. *R irefleksivna* $\iff R \cap \mathrm{id}_A = \emptyset$
3. *R simetrična* $\iff R = R^T$

4. *R asimetrična* $\iff R \cap R^T = \emptyset$

5. *R antisimetrična* $\iff R \cap R^T \subseteq \mathrm{id}_A$

6. *R tranzitivna* $\iff R \circ R \subseteq R$

7. *R intranzitivna* $\iff (R \circ R) \cap R = \emptyset$

8. *R strogo sovisna* $\iff R \cup R^T = A \times A$

9. *R sovisna* $\iff R \cup R^T \cup \mathrm{id}_A = A \times A$

10. *R enolična* $\iff R \circ R^T \subseteq \mathrm{id}_A$

11. *R ekvivalenčna* $\iff (R \circ R^T) \cup \mathrm{id}_A = R$

Dokaz: 6. Naj bo R tranzitivna. Potem za vse $x, y \in A$ velja:

$$x \; R \circ R \; y \implies \exists u \in A\colon (xRu \wedge uRy) \implies \exists u \in A\colon xRy \implies xRy,$$

torej je $R \circ R \subseteq R$. – Še obratno: Naj bo $R \circ R \subseteq R$. Potem za vse $x, y \in A$ velja:

$$xRy \wedge yRz \implies x \; R \circ R \; z \implies xRz,$$

torej je R tranzitivna.

10. Naj bo R enolična. Potem za vse $x, y \in A$ velja:

$$\begin{aligned} x \, R \circ R^T \, y &\implies \exists u \in A\colon (xR^T u \wedge uRy) \implies \exists u \in A\colon (uRx \wedge uRy) \\ &\implies \exists u \in A\colon x = y \implies x = y, \end{aligned}$$

torej je $R \circ R^T \subseteq \mathrm{id}_A$. – Še obratno: Naj bo $R \circ R^T \subseteq \mathrm{id}_A$. Potem za vse $x, y \in A$ velja:

$$xRy \wedge xRz \implies yR^T x \wedge xRz \implies y \; R \circ R^T \, z \implies y = z,$$

torej je R enolična. $\square$

4.4 Potence in ovojnice relacij

Definicija 1 *Naj bo $R \subseteq A \times A$.* Kompozicijsko potenco *relacije R induktivno definiramo takole:*

(osnova) $R^0 = \mathrm{id}_A$,
(korak) $\forall n \in \mathbb{N}\colon R^{n+1} \;=\; R^n \circ R$.

Zgled 2 a) $R^1 \;=\; R^{0+1} \overset{\text{korak}}{=} R^0 \circ R \overset{\text{osn.}}{=} \mathrm{id}_A \circ R \;=\; R$
b) $R^2 \;=\; R^{1+1} \overset{\text{korak}}{=} R^1 \circ R \overset{\text{a)}}{=} R \circ R$
c) $R^n \;=\; \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n\, R\text{-jev}}$

Trditev 1 *Za vse $n, m \in \mathbb{N}$ velja:*

1. $R^n \circ R^m \;=\; R^{n+m}$
2. $(R^n)^m \;=\; R^{nm}$

Dokaz: S popolno indukcijo po m. □

Zgled 3 Naj bo A množica ljudi, R pa relacija $\mathsf{otrok} = \mathsf{sin} \cup \mathsf{hči}$. Potem je

$$\begin{aligned} R^2 &= \mathsf{vnuk} \cup \mathsf{vnukinja}, \\ R^3 &= \mathsf{pravnuk} \cup \mathsf{pravnukinja}, \\ R^4 &= \mathsf{prapravnuk} \cup \mathsf{prapravnukinja}, \\ &\;\vdots \\ n \geq 2 : \quad R^n &= (\mathsf{pra})^{n-2}\mathsf{vnuk} \;\cup\; (\mathsf{pra})^{n-2}\mathsf{vnukinja}. \end{aligned}$$

Definicija 2 *Naj bo $R \subseteq A \times A$.*

1. $R^+ \;=\; \bigcup\{R^k;\; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \;=\; R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$,
2. $R^* \;=\; \bigcup\{R^k;\; k \in \mathbb{N}\} \;=\; \mathrm{id}_A \cup R \cup R^2 \cup \cdots \;=\; \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$.

Trditev 2 *Naj bo $R \subseteq A \times A$. Potem velja:*

1. $R^* \;=\; R^+ \cup\, \mathrm{id}_A$,
2. $\forall x, y \in A\colon (xR^+y \iff \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\colon xR^ky)$,

3. $\forall x, y \in A\colon (xR^*y \iff \exists k \in \mathbb{N}\colon xR^k y)$.

Grafično to lahko ponazorimo takole:

$$xR^+y \iff \text{v grafu relacije } R \text{ obstaja usmerjena pot dolžine } k \geq 1 \text{ od } x \text{ do } y,$$
$$xR^*y \iff \text{v grafu relacije } R \text{ obstaja usmerjena pot dolžine } k \geq 0 \text{ od } x \text{ do } y.$$

Zgled 4 Naj bo A množica ljudi in R relacija $\mathsf{otrok} = \mathsf{sin} \cup \mathsf{h\check{c}i}$ kot v zgledu 3. Potem je

$$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = \mathsf{potomec} \cup \mathsf{potomka}.$$

Definicija 3 *Naj bo $R \subseteq A \times A$ in L neka lastnost relacij v množici A (formalno: $L \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$). Relacija R^L je* L-ovojnica *relacije R, če velja:*

a) $R \subseteq R^L$,

b) $R^L \in L$ (z besedami: *relacija R^L ima lastnost L*),

c) $\forall S \subseteq A \times A\colon \big(R \subseteq S \wedge S \in L \implies R^L \subseteq S\big)$.

Z besedami: R^L *je* najmanjša *relacija v množici A, ki vsebuje relacijo R in ima lastnost L.*

Pripomba 1 1. Če relacija R ima lastnost L, je $R^L = R$.

2. Relacija R^L ne obstaja vedno.

Izrek 3 *Za vsako relacijo $R \subseteq A \times A$ obstajajo ovojnice $R^{\text{refl.}}$, $R^{\text{sim.}}$, $R^{\text{tranz.}}$, $R^{\text{refl. in tranz.}}$, $R^{\text{ekviv.}}$ in velja:*

1.	$R^{\text{refl.}} = R \cup \mathrm{id}_A$	*refleksivna ovojnica,*
2.	$R^{\text{sim.}} = R \cup R^T$	*simetrična ovojnica,*
3.	$R^{\text{tranz.}} = R^+$	*tranzitivna ovojnica,*
4.	$R^{\text{refl. in tranz.}} = R^*$	*refleksivna in tranzitivna ovojnica,*
5.	$R^{\text{ekviv.}} = \big(R \cup R^T\big)^*$	*ekvivalenčna ovojnica.*

Dokaz: 3. a) $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \implies R \subseteq R^+$

b) Pokažimo, da je relacija R^+ tranzitivna:

$$\begin{aligned} xR^+y \wedge yR^+z &\implies \exists k \geq 1\colon xR^k y \wedge \exists m \geq 1\colon yR^m z \\ &\implies \exists k, m \geq 1\colon xR^k y \wedge yR^m z \implies \exists k, m \geq 1\colon x\left(R^m \circ R^k\right) z \\ &\implies \exists k, m \geq 1\colon xR^{m+k} z \overset{n=m+k}{\implies} \exists n \geq 2\colon xR^n z \\ &\implies \exists n \geq 1\colon xR^n z \implies xR^+z \ \checkmark \end{aligned}$$

c) Pokažimo: $R \subseteq S \wedge S$ tranzitivna $\Longrightarrow R^+ \subseteq S$.
Najprej z indukcijo po k dokažimo, da velja

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \colon R^k \subseteq S. \tag{4.1}$$

Osnova ($k = 1$): $R \subseteq S$ velja po predpostavki.

Korak ($k \geq 1$): Privzemimo, da je $R^k \subseteq S$, in pokažimo, da je potem tudi $R^{k+1} \subseteq S$. Zaradi monotonosti komponiranja relacij iz $R^k \subseteq S$ sledi $R^{k+1} = R^k \circ R \subseteq S \circ R$, iz $R \subseteq S$ pa po komponiranju z S z leve še $S \circ R \subseteq S \circ S$, torej

$$R^{k+1} \subseteq S \circ R \subseteq S \circ S \overset{S \text{ tranz.}}{\subseteq} S,$$

s čimer je indukcijski dokaz formule (4.1) končan.

Torej je tudi $R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k \subseteq S$. $\square$

Zgled 5 *Naj bo A množica ljudi. Potem je*

$$\mathsf{otrok}^{\text{tranz.}} = \mathsf{otrok}^{+} = \mathsf{potomec} \cup \mathsf{potomka}.$$