Sašo Strle

Izbrane teme iz geometrijske topologije

Februar 2016

Kazalo

Brouwerjev izrek o negibni točki

Obstoj *negibne točke* kake preslikave $f: X \to X$, torej točke $a \in X$, za katero velja $f(a) = a$, pogosto zagotavlja obstoj objekta z določenimi lastnostmi – pomemben primer tega je obstoj rešitve navadne diferencialne enačbe (z danim začetnim pogojem), ki ga je mogoče dokazati s pomočjo Banachovega skrčitvenega načela. Brouwerjev[1] izrek o negibni točki zagotavlja obstoj negibne točke poljubne zvezne preslikave n-razsežne evklidske krogle $\mathbb{B}^n$ nazaj v $\mathbb{B}^n$ in je med drugim pomemben tudi v ekonomski teoriji pri dokazu obstoja tržnega ravnovesja. Vsebina izreka je topološka, saj za obstoj negibne točke niso pomembne (geo)metrične lastnosti krogle (primerjaj z Banachovim skrčitvenim načelom), ampak le njen topološki tip. Velja namreč tudi za zvezne preslikave $f: X \to X$, definirane na poljubnem prostoru X, ki je homeomorfen krogli $\mathbb{B}^n$ za kak n: če izberemo poljuben homeomorfizem $h: \mathbb{B}^n \to X$, je $g = h^{-1} \circ f \circ h: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ zvezna preslikava in ima po spodnjem izreku A negibno točko $b \in \mathbb{B}^n$, torej je $g(b) = b$. Za $a = h(b)$ velja $h^{-1}\big(f\big(h(b)\big)\big) = b$ in zato $f(a) = a$, torej je a negibna točka preslikave f.

Izrek A. *Vsaka zvezna preslikava $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ ima negibno točko.*

Dokaz izreka za primer $n = 1$ je lahek. Funkcija $g: \mathbb{B}^1 = [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definirana z $g(x) := x - f(x)$, je zvezna in ustreza pogojema $g(-1) \leq 0$ ter $g(1) \geq 0$, zato ima na $[-1, 1]$ (po izreku o vmesni vrednosti) najmanj eno ničlo, vsaka njena ničla pa je očitno negibna točka funkcije f. Po drugi strani hitro uvidimo, da izrek ne velja za vsak prostor, saj na primer netrivialni zasuki krožnice premaknejo vse točke. Zanimivo je torej vprašanje, kateri prostori se v tem smislu obnašajo enako kot krogla – za take prostore rečemo, da imajo *lastnost negibne točke.*

Pred dokazom izreka si bomo ogledali nekaj njegovih ekvivalentnih formulacij. Trije od spodnjih dokazov sodijo v svet diferencialne topologije oziroma globalne analize, četrti pa je kombinatoričen in sodi v svet kosoma linearne topologije. Dva od analitičnih dokazov temeljita na Brown–Sardovem izreku, ki zagotavlja obstoj regularne vrednosti gladke preslikave in je predstavljen v dodatku C. V dodatku A so predstavljeni nekateri pojmi kosoma linearne topologije, v dodatku B pa nekatere lastnosti mnogoterosti.

1. Ekvivalentne formulacije izreka

Zgoraj omenjeni dokazi Brouwerjevega izreka so dokazi ene od temu izreku ekvivalentnih izjav, zbranih v naslednji trditvi. Dokaz te je bistveno lažji od dokaza izreka; pred dokazom trditve bomo pojasnili pojme, ki v njej nastopajo.

Trditev 1.1. *Za vsako naravno število n so ekvivalentne naslednje izjave:*

A_n: *Vsaka zvezna preslikava $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ ima negibno točko.*
B_n: *Sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ ni retrakt krogle $\mathbb{B}^n$.*
C_n: *Sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ ni kontraktibilna.*

Definicija 1.2. Podmnožica $A \subset X$ je *retrakt* prostora X, če obstaja taka zvezna preslikava $r: X \to A$, ki je na A identiteta (torej je $r(a) = a$ za vsak $a \in A$); preslikavo r imenujemo *retrakcija.*

Kot za trditev A_1 tudi za B_1 zlahka vidimo, da velja, saj je krogla $\mathbb{B}^1 = [-1, 1]$ povezana, njena robna sfera $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ pa ni. Bolj splošno za retrakte velja

Trditev 1.3. (1) *Retrakt (s potmi) povezanega prostora je (s potmi) povezan.*
(2) *Retrakt kompaktnega prostora je kompakten prostor.*
(3) *Če je A retrakt Hausdorffovega prostora X, je A zaprt v X.*

[1] L. E. J. Brouwer (1881–1966), nizozemski matematik, pomemben zaradi svojega dela v topologiji (posebej zaradi dokaza topološke invariantnosti razsežnosti) in tvorec intuicionizma – vrste konstruktivne matematike. Izrek o negibni točki je dokazal leta 1910. Že leta 1886 pa je ekvivalentno trditev dokazal Henri Poincaré (1854–1912), francoski matematik, zadnji univerzalni matematik in eden utemeljiteljev topologije kot samostojnega področja.

Dokaz. Naj bo $r\colon X \to A$ retrakcija. Izjavi (1) in (2) veljata, saj se omenjene lastnosti ohranjajo pri zveznih preslikavah. Izjava (3) pa sledi iz Hausdorffove lastnosti, saj je $A = \{x \in X \mid r(x) = x\}$ incidenčna množica zveznih preslikav r in id_X (glej [**7**, trditev 2.4]). □

Naslednja trditev pokaže, kako lahko iz prostora z lastnostjo negibne točke dobimo nove prostore s to lastnostjo. Od tod na primer sledi, da ima unija dveh zaprtih krogel, ki se stikata v eni točki, lastnost negibne točke.

Trditev 1.4. *Naj ima prostor X lastnost negibne točke in naj bo A retrakt tega prostora. Potem ima tudi A lastnost negibne točke.*

Dokaz. Naj bo $r\colon X \to A$ retrakcija in $f\colon A \to A$ zvezna preslikava. Po predpostavki ima kompozitum $g = f \circ r\colon X \to A$, gledan kot preslikava iz X v X, negibno točko, recimo x. Ker g slika v A, je $x \in A$, zato iz $r(x) = x$ sledi $f(x) = x$. □

Navadno je to, ali je podprostor $A \subset X$ retrakt prostora X ali ne, odvisno tako od A kot od ambientnega prostora X. Krožnica $\mathbb{S}^1$ je na primer retrakt prebodene ravnine $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ (poišči retrakcijo!), ne obstaja pa retrakcija iz $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ na 0-sfero $\mathbb{S}^0 = \{(-1,0),(1,0)\}$ (po trditvi 1.3(1)) in tudi ne retrakcija iz $\mathbb{B}^2$ na $\mathbb{S}^1$ (po izreku A in trditvi 1.1). Za nekatere prostore pa velja, da so retrakti vsakega prostora, v katerega so vloženi.

Definicija 1.5. Naj bo $\mathcal{R}$ neki razred topoloških prostorov. Prostor R je *absolutni retrakt* za $\mathcal{R}$ (oznaka $R \in \mathrm{AR}(\mathcal{R})$), če $R \in \mathcal{R}$ in je za vsak $X \in \mathcal{R}$ ter vsako zaprto vložitev $\varphi\colon R \to X$ slika $\varphi(R)$ retrakt prostora X.

V tej definiciji se omejimo na zaprte vložitve, saj v »spodobnih« prostorih nezaprt podprostor po trditvi 1.3(3) ne more biti retrakt.

Po Tietzejevem izreku je vsak interval absolutni ekstenzor za razred $\mathcal{N}$ normalnih prostorov. Ker je razred $\mathrm{AE}(\mathcal{R})$ zaprt za produkte in retrakte (glej [**7**, vaja 4.13 in trditev 4.15]), to porodi veliko absolutnih ekstenzorjev in preko naslednje trditve tudi absolutnih retraktov za $\mathcal{N}$.

Trditev 1.6. *Prostor $R \in \mathcal{R}$, ki je absolutni ekstenzor za $\mathcal{R}$, je tudi absolutni retrakt za $\mathcal{R}$, torej velja $\mathcal{R} \cap \mathrm{AE}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{AR}(\mathcal{R})$.*

Dokaz. Naj bo $R \in \mathcal{R} \cap \mathrm{AE}(\mathcal{R})$, $X \in \mathcal{R}$ in $\varphi\colon R \to X$ zaprta vložitev. Potem je $A := \varphi(R) \subseteq X$ absolutni ekstenzor za razred $\mathcal{R}$, zato ima $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ zvezno razširitev $r\colon X \to A$ in ta je iskana retrakcija. □

Pojasnimo še pojme v zadnji izjavi trditve 1.1. Podobno kot homeomorfne prostore združimo v ekvivalenčni razred in jih štejemo za »isti« prostor, saj imajo enake topološke lastnosti, je včasih ugodno združiti tudi »sorodne« preslikave. Tak pojem sorodnosti preslikav – srečamo ga tudi pri analizi – je homotopnost: preslikavi sta homotopni, če lahko eno zvezno deformiramo v drugo. Izkaže se, da je to pomemben pojem, na katerem temelji pretežni del algebraične topologije (v slednjo sodi tudi pojem stopnje preslikave, ki ga bomo spoznali pri enem od dokazov Brouwerjevega izreka).

Definicija 1.7. Naj bosta $f, g\colon X \to Y$ zvezni preslikavi. *Homotopija* od f do g je zvezna preslikava $H\colon X \times I \to Y$, za katero velja $H(x,0) = f(x)$ in $H(x,1) = g(x)$. Pravimo, da sta f in g *homotopni* (pišemo $f \simeq g$), če obstaja kakšna homotopija med njima. Prostor X je *kontraktibilen*, če je id_X homotopna kaki konstantni preslikavi; ustrezno homotopijo tedaj imenujemo *kontrakcija*.

Hitro se lahko prepričamo, da je homotopnost ekvivalenčna relacija na množici $\mathcal{C}(X,Y)$ zveznih preslikav iz X v Y. Namesto $H(x,t)$ pišemo tudi $H_t(x)$ in tako homotopiji priredimo družino preslikav $\{H_t \in \mathcal{C}(X,Y) \mid t \in I\}$. Z zvezno deformacijo preslikave $f = H_0$ v $g = H_1$ smo zgoraj mislili prehod preko vmesnih preslikav H_t za $0 < t < 1$. Ni se težko prepričati, da omenjena družina preslikav porodi pot v prostoru zveznih preslikav, $H\colon I \to \mathcal{C}(X,Y)$, $t \mapsto H_t$, opremljenem s kompaktno-odprto topologijo. Obratno pa ne velja vedno – taka pot porodi homotopijo le ob dodatnih predpostavkah, na primer če je prostor X lokalno kompakten in Hausdorffov [**5**, izrek 3.1].

Če je K konveksna podmnožica v kakem $\mathbb{R}^n$, sta za poljuben prostor X poljubni zvezni preslikavi $f, g\colon X \to K$ homotopni, npr. kar s premočrtno homotopijo $H_t = (1-t)f + tg$. Posebej od tod sledi, da je vsaka taka množica kontraktibilna. Po drugi strani sfera $\mathbb{S}^0$ ni kontraktibilna (kar pravi trditev C_1), saj ni niti povezana. V splošnem namreč velja

Trditev 1.8. *Kontraktibilen prostor je povezan s potmi.*

Dokaz. Naj bo X kontraktibilen prostor. Homotopija H od $H_0 = \mathrm{id}_X$ do konstantne preslikave $H_1\colon X \to \{c\}$ $(c \in X)$ porodi pot $t \mapsto H(x,t)$ od poljubne točke $x \in X$ do točke c. □

Dokaz trditve 1.1. Vse implikacije bomo dokazali s kontrapozicijo.

($\mathrm{A}_n \Rightarrow \mathrm{B}_n$) Denimo, da je $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ retrakcija. Ker antipodna preslikava $a(x) = -x$ sfere $\mathbb{S}^{n-1}$ nima negibne točke (izhodišče je edina negibna točka te preslikave na ambientnem evklidskem prostoru), iz trditve 1.4 sledi, da tudi krogla $\mathbb{B}^n$ nima lastnosti negibne točke.

($\mathrm{B}_n \Rightarrow \mathrm{A}_n$) Denimo, da je $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ zvezna preslikava brez negibne točke. Za poljuben $x \in \mathbb{B}^n$ naj bo $P(x)$ odprti poltrak od $f(x)$ skozi x. Ta poltrak seka sfero v natanko eni točki in tako določa preslikavo $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, $x \mapsto P(x) \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Bralec lahko sam izračuna, da je ta preslikava podana s predpisom

$$r(x) = f(x) + \frac{\langle f(x), f(x) - x\rangle + \sqrt{\big(1 - \langle x, f(x)\rangle\big)^2 - \big(1 - ||x||^2\big)\big(1 - ||f(x)||^2\big)}}{||x - f(x)||^2}\big(x - f(x)\big),$$

torej je zvezna. Iz njenega geometričnega opisa je neposredno razvidno, da za x na sferi velja $r(x) = x$, torej je r retrakcija.

($\mathrm{B}_n \Rightarrow \mathrm{C}_n$) Naj bo $H\colon \mathbb{S}^{n-1} \times I \to \mathbb{S}^{n-1}$ kontrakcija. Ker H preslika $\mathbb{S}^{n-1} \times \{1\}$ v eno točko, inducira zvezno preslikavo $\overline{H}\colon C\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ iz stožca nad sfero. Po drugi strani preslikava $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \times I \to \mathbb{B}^n$, definirana z $(x,t) \mapsto (1-t)x$, inducira homeomorfizem $\overline{f}\colon C\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{B}^n$. Kompozitum $r := \overline{H} \circ \overline{f}^{-1}$ je tedaj retrakcija krogle na sfero.

($\mathrm{C}_n \Rightarrow \mathrm{B}_n$) Naj bo $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ retrakcija. Potem je $H := r \circ f\colon \mathbb{S}^{n-1} \times I \to \mathbb{S}^{n-1}$ kontrakcija sfere, kjer je f preslikava iz dokaza prejšnje implikacije. □

2. Sfera ni retrakt krogle – Brown–Sardov izrek

V tem in naslednjem razdelku si bomo ogledali dva dokaza izreka o neobstoju retrakcije krogle na sfero:

Izrek B. *Sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ ni retrakt krogle $\mathbb{B}^n$.*

Prvi bo analitični dokaz z uporabo izreka o implicitni preslikavi in Brown–Sardovega izreka. Dokazovali bomo s protislovjem. Ob predpostavki, da obstaja retrakcija $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, bomo pokazali, da lahko f zamenjamo z gladko preslikavo $g\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, ki se v okolici sfere ujema s standardno retrakcijo

$$r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0^n\} \to \mathbb{S}^{n-1},\ r(x) = x/||x||.$$

Nato pa bomo dokazali, da taka preslikava g ne more obstajati.

Označimo z $\mathbb{B}^n_a \subset \mathbb{R}^n$ zaprto kroglo s središčem v izhodišču in polmerom $a > 0$. Najprej si bomo pripravili gladko funkcijo, s pomočjo katere bomo iz domnevne zvezne sestavili gladko retrakcijo krogle na sfero.

Lema 2.1. *Za poljubna $0 < a < b$ obstaja gladka funkcija $\lambda\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, ki je na $\mathbb{B}^n_a$ identično enaka ena in ima nosilec vsebovan v $\mathbb{B}^n_b$, tj. na komplementu $\mathbb{B}^n_b$ je enaka nič.*

Dokaz. Lahko je preveriti, da je $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dana s predpisom

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases},$$

gladka preslikava. Naj bo $\chi(t) = \psi(t-a)\psi(b-t)$ in

$$\varphi(t) = \frac{1}{p}\int_t^b \chi(s)\,ds,$$

kjer je p ploščina območja pod χ. Funkcija φ slika v $[0,1]$, je enaka 1 za $t \le a$ in enaka 0 za $t \ge b$. Želene lastnosti ima

$$\lambda(x) = \varphi\left(||x||\right). \qquad □$$

Lema 2.2. *Če je $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ retrakcija, potem obstaja gladka preslikava $g\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, ki se v okolici sfere ujema s standardno retrakcijo $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0^n\} \to \mathbb{S}^{n-1}$.*

Dokaz. Zvezno preslikavo f lahko po Stone-Weierstrassovem izreku na kompaktu $\mathbb{B}^n$ poljubno natančno aproksimiramo z gladko preslikavo. To lahko naredimo tako, da aproksimiramo vsako komponento posebej z gladko, npr. s polinomsko funkcijo. Naj bo tedaj $h\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava, katere vrednost je v vsaki točki od ustrezne vrednosti preslikave f oddaljena manj kot $1/2$. Posebej od tod sledi, da izhodišče ni v sliki h.

Ker se f in r ujemata na kompaktu $\mathbb{S}^{n-1}$, obstaja tak $\varepsilon > 0$, da sta v poljubni točki, ki je od sfere oddaljena manj kot 2ε, sliki te točke oddaljeni manj kot $1/2$. Res, najprej ima zaradi zveznosti razlike $f - r$ vsaka točka na sferi odprto okolico, katere točke izpolnjujejo ta pogoj. Unija teh je odprta okolica V za $\mathbb{S}^{n-1}$ in ker je sfera kompaktna, je razdalja 2ε med sfero in komplementom množice V pozitivna.

Naj bo $\lambda\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ gladka funkcija, ki je enaka 1 na $B^n_{1-2\varepsilon}$ in katere nosilec je vsebovan v $B^n_{1-\varepsilon}$. Potem je $\widetilde{g}\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, dana s predpisom

$$\widetilde{g}(x) = \lambda(x)h(x) + (1 - \lambda(x))r(x),$$

gladka preslikava, ki se v ε-okolici sfere ujema z r in v sliki ne vsebuje izhodišča. Če bi namreč veljalo $\widetilde{g}(x) = 0^n$ za neki x, bi za ta x veljalo $\lambda(x) \in (0,1)$ (saj niti h niti r nimata 0^n v zalogi vrednosti), zato tudi

$$\lambda(x)(h(x) - r(x)) = -r(x).$$

To pa ni mogoče, saj za tak x velja

$$||h(x) - r(x)|| \leq ||h(x) - f(x)|| + ||f(x) - r(x)|| < 1,$$

dolžina $r(x)$ pa je enaka 1.

Iskano preslikavo dobimo tako, da $\widetilde{g}$ komponiramo z retrakcijo r, torej $g = r \circ \widetilde{g}$. Ker se $\widetilde{g}$ v okolici sfere ujema z r, enako velja tudi za g. □

Izrek 2.3. *Gladka preslikava $g\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, ki bi se v okolici $\mathbb{S}^{n-1}$ ujemala s standardno retrakcijo $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0^n\} \to \mathbb{S}^{n-1}$, ne obstaja.*

Dokaz. Pa recimo, da taka preslikava obstaja. Po Brown–Sardovem izreku C.1 obstaja $y \in \mathbb{S}^{n-1}$, ki je regularna vrednost te preslikave. Ker se g v okolici sfere ujema z r, je presek $K = g^{-1}(y)$ z dovolj majhno okolico $\mathbb{S}^{n-1}$ enak $\{ty \mid t \in (1-\varepsilon, 1]\}$. Po izreku o implicitni preslikavi je K v vsaki točki, ki leži v notranjosti krogle, gladek lok, tj. vsaka točka v $K \cap \operatorname{Int} \mathbb{B}^n$ ima odprto okolico, difeomorfno odprtemu intervalu. Ker je K tudi kompaktna, je komponenta K, ki izhaja iz y, kompakten gladek lok z natanko enim krajiščem, kar je protislovje. □

3. Sfera ni retrakt krogle – Spernerjeva lema

Spernerjeva[2] lema je kombinatorična ustreznica izreka o neobstoju retrakcije krogle na robno sfero. Kroglo $\mathbb{B}^n$ nadomestimo s homeomorfnim prostorom Δ^n, ki je standardni pravilni n-simpleks. Iz Spernerjeve leme sledi, da na kakorkoli majhne simplekse razdelimo Δ^n, je pri domnevni retrakciji na $\partial\Delta^n$ diameter slike vsaj enega simpleksa velik, tj. navzdol omejen s konstanto, neodvisno od velikosti majhnih simpleksov. To pa je v nasprotju z zveznostjo domnevne retrakcije. Simbol $[n]$ naj označuje množico $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Trditev 3.1 (Spernerjeva lema). *Naj bo dana poljubna triangulacija $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in A\}$ n-simpleksa $\sigma = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ in oštevilčenje oglišč te triangulacije, torej funkcija $\omega\colon \mathcal{T}^{(0)} \to [n+1]$, ki izpolnjuje pogoja:*

(i) *oglišča simpleksa σ imajo različne oznake, tj. $\omega\colon \sigma^{(0)} \to [n+1]$ je bijekcija, in*

(ii) *če je τ_a vsebovan v licu $[x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}]$ simpleksa σ, je $\omega(\tau_a^{(0)}) \subset \{\omega(x_{j_1}), \ldots, \omega(x_{j_k})\}$.*

Potem je v $\mathcal{T}$ liho mnogo n-simpleksov τ_a, katerih oglišča imajo paroma različne oznake, tj. za katere velja $\omega(\tau_a^{(0)}) = [n+1]$.

Dokaz. Za enostavnejše pisanje privzemimo, da velja $\omega(x_i) = i$ za $i \in [n+1]$. Dokazovali bomo z indukcijo na razsežnost n simpleksa σ. Naj bo najprej $n = 1$. Triangulacija $\mathcal{T}$ je določena z izbiro delilnih točk $x_0 = \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k = x_1$ daljice $\sigma = [x_0, x_1]$; privzemimo, da so točke navedene zaporedoma, kot se zvrstijo od x_0 do x_1. Ker je $\omega(x_0) = 0$ in $\omega(x_1) = 1$, obstaja tak najmanjši j, da je $\omega(\tau_j) = 0$ in $\omega(\tau_{j+1}) = 1$. Če se v zaporedju $\omega(\tau_0), \omega(\tau_1), \ldots, \omega(\tau_k)$ nekje za $\omega(\tau_{j+1}) = 1$ ponovno pojavi vrednost 0, tej nujno sledi še en prehod vrednosti iz 0 na 1. Vidimo torej, da se vrednosti

[2] Emanuel Sperner (1905–1980), nemški matematik.

v zgornjem zaporedju spremenijo liho mnogokrat. 1-simpleksi v $\mathcal{T}$, katerih oglišči sta označeni z različnima vrednostma, pa bijektivno ustrezajo spremembam vrednosti funkcije ω.

Privzemimo sedaj, da trditev velja za vse ustrezno označene triangulacije simpleksov razsežnosti manjše od n. Za $\sigma, \mathcal{T}$ in ω kot v trditvi triangulacija $\mathcal{T}$ določa triangulacijo $\mathcal{T}'$ lica $\sigma' = [x_0, \ldots, x_{n-1}] \leq \sigma$, zožitev ω' funkcije ω na oglišča $\mathcal{T}'$ pa oštevilčenje, ki ustreza pogojem v trditvi. Zato po indukcijski predpostavki v $\mathcal{T}'$ obstaja liho mnogo $(n-1)$-simpleksov, katerih oglišča so označena s samimi različnimi števili v $[n]$. Predstavljajmo si sedaj, da je σ hiša, n-simpleksi v $\mathcal{T}$ pa so sobe v tej hiši. Vrata v sobo τ_a predstavlja njegovo $(n-1)$-lice τ_a', če so oglišča tega lica oštevilčena z vsemi števili v $[n]$, torej je $\omega(\tau_a') = [n]$. Opazimo, da imajo sobe v hiši lahko ena ali dvoja vrata, ali pa so brez vrat. Če $\omega(\tau_a)$ ne vsebuje $[n]$, ta soba nima vrat. V nasprotnem primeru pa ima lahko natanko ena vrata – če je $\omega(\tau_a) = [n+1]$ – ali dvoja – če je $\omega(\tau_a) = [n]$, saj imata tedaj natanko dve oglišči enaki oznaki, vrata pa predstavljata lici, ki ležita nasproti teh dveh oglišč.

Trditev sedaj sledi, če si ogledamo vse možne sprehode po hiši, ki se začnejo z vstopom v hišo skozi vrata na licu σ' ali pa v sobi z le enimi vrati. Vsak tak sprehod je enolično določen, če zahtevamo, da nikoli ne zapustimo sobe skozi vrata, skozi katera smo vstopili, ter da sprehod nadaljujemo, dokler se ne znajdemo v sobi s samo enimi vrati ali pa izstopimo iz hiše. Vsak sprehod torej lahko poveže par vrat v σ', lahko vodi od vrat v σ' do sobe s samo enimi vrati, torej do n-simpleksa s samimi različnimi oznakami oglišč, ali pa poveže dve sobi s samo enimi vrati. Ker je po indukcijski predpostavki vrat na σ' liho mnogo, je tudi sob z le enimi vrati v notranjosti hiše liho mnogo. □

Dokaz izreka B. Naj v nasprotju s trditvijo izreka B obstaja retrakcija $r\colon \Delta^n \to \partial\Delta^n$, kjer je $\partial\Delta^n$ rob standardnega n-simpleksa $\Delta^n = [e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}]$, ki je unija njegovih $(n-1)$-lic. Za $p \in \mathbb{N}$ razrežimo Δ^n s po $p-1$ enako oddaljenimi hiperravninami, ki so vzporedne njegovim glavnim licem, torej z afinimi ravninami

$$A_{j,q} = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} t_i e_i \;\middle|\; t_j = \frac{q}{p},\ \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\},\ j = 1, \ldots, n+1,\ q = 1, \ldots, p-1.$$

To določa triangulacijo $\mathcal{T}$ simpleksa Δ^n. Oštevilčenje ω oglišč triangulacije definiramo takole: $\omega(e_i) = i - 1 \in [n+1]$, za poljubno drugo oglišče x v $\mathcal{T}^{(0)}$ pa naj bo $\omega(x)$ enak oznaki tistega od oglišč e_i simpleksa Δ^n, ki mu je $r(x)$ najbližja; če je $r(x)$ enako oddaljena od večih oglišč Δ^n, izberemo oznako enega od teh oglišč.

Preverimo, da tako definirano oštevilčenje oglišč triangulacije $\mathcal{T}$ ustreza pogojem Spernerjeve leme. Oglišča Δ^n so označena z vsemi oznakami v $[n+1]$, torej je prvi pogoj izpolnjen. Za izpolnjenost drugega pa je dovolj preveriti, da je vsako oglišče Δ^n, ki ni oglišče nekega lica $[e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}]$, bolj oddaljeno od poljubne točke x tega lica kot eno od oglišč tega lica. Zaradi simetričnosti standardnega simpleksa je dovolj obravnavati poljubno točko x v licu $\tau = [e_1, \ldots, e_k]$ ter oglišče e_ℓ za $\ell > k$. Točko x lahko zapišemo kot konveksno kombinacijo

$$x = \sum_{i=1}^{k} t_i e_i,\ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1,\ t_i \geq 0 \ \text{ za } i = 1, \ldots, k.$$

Točka x leži najbliže e_ℓ, če je $x - e_\ell$ pravokoten na ravnino lica τ, torej na vse vektorje oblike $e_i - e_j$ za $1 \leq i < j \leq k$, kar da $t_i = t_j$. Torej je $t_i = 1/k$ za vse i in x je težišče x_τ simpleksa τ. Kvadrat dolžine vektorja $x_\tau - e_\ell$ je enak

$$\langle x_\tau - e_\ell, x_\tau - e_\ell \rangle = \langle x_\tau, x_\tau \rangle + \langle e_\ell, e_\ell \rangle = 1 + \frac{1}{k}.$$

Po drugi strani je vsaka točka v τ od vsaj enega oglišča oddaljena največ toliko kot x_τ, saj je τ vsebovan v uniji zaprtih krogel s središči v ogliščih simpleksa in polmeri enakimi oddaljenosti težišča od oglišča. To sledi iz konveksnosti krogel in dejstva, da je težišče lica, ki vsebuje izbrano oglišče, od tega oglišča oddaljeno manj kot težišče celotnega simpleksa. Kvadrat oddaljenosti x_τ od e_i za $i = 1, \ldots, k$ je

$$\langle x_\tau - e_i, x_\tau - e_i \rangle = \frac{k-1}{k^2} + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 = 1 - \frac{1}{k}.$$

Iz Spernerjeve leme sedaj sledi, da so oglišča vsaj enega n-simpleksa $\rho = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ v $\mathcal{T}$ označena z vsemi oznakami v $[n+1]$. Zato je diameter slike $r(\rho)$ tega simpleksa večji od $1/n$. Če namreč $r(x_0)$ leži na glavnem licu Δ_i^n simpleksa Δ^n nasproti e_i in je $\omega(x_j) = \omega(e_i)$, je po zgornjem računu razdalja med e_i in $r(x_0)$ vsaj $\sqrt{1+1/n}$, razdalja med $r(x_j)$ in e_i pa kvečjemu $\sqrt{1-1/n}$, zato je

$$||r(x_0)-r(x_j)|| \geq \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}} > \frac{1}{n}.$$

Ker je r zvezna preslikava na kompaktu Δ^n, je enakomerno zvezna, torej obstaja tak $\varepsilon > 0$, da sta sliki poljubnih točk, ki ležita bližje kot ε, oddaljeni manj kot $1/n$. Izberimo torej p tako velik, da bo diameter poljubnega simpleksa v $\mathcal{T}$ manjši od ε. Potem sta oglišči x_0 in x_j simpleksa ρ kot zgoraj oddaljeni manj kot ε, njuni sliki $r(x_0)$ in $r(x_j)$ pa več kot $1/n$, kar je protislovje. $\square$

4. Krožnica ni kontraktibilna – ovojno število

Ogledali si bomo dva dokaza izreka o nekontraktibilnosti sfere:

Izrek C. *Sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ ni kontraktibilna.*

Prvi bo le posebni primer – dokaz nekontraktibilnosti krožnice. Dokazati želimo, da identična preslikava krožnice same vase ni homotopna (nobeni) konstantni preslikavi. Osnovna ideja dokaza je, da identična preslikava krožnico enkrat obhodi, konstantna pa ne. To razliko bomo zaznali z uporabo ovojnega števila poti, ki parametrizira sklenjeno krivuljo v ravnini, glede na izhodišče. Pri tem si bomo pomagali s funkcijami s kompleksnimi vrednostmi. Realno ravnino $\mathbb{R}^2$ bomo enačili s kompleksno premico $\mathbb{C}$, parametrizacijo sklenjene krivulje Γ v ravnini pa bomo gledali kot preslikavo $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$; parametrizacija določa usmerjenost oziroma orientacijo krivulje. Ker zaradi sklenjenosti Γ velja $\gamma(0) = \gamma(1)$, lahko parametrizacijo ekvivalentno obravnavamo kot preslikavo $g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$. Pri tem imamo v mislih konkreten model kvocientnega prostora $[0,1]/_{0\sim 1}$ in s tem eksplicitno zvezo med γ in g, dano s parametrizacijo $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$, $\varphi(t) = e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$; velja torej $\gamma = g \circ \varphi$.

Definicija 4.1. *Ovojno število* preslikave $g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ki opiše krivujo $\Gamma = g(\mathbb{S}^1)$, glede na izhodišče je

$$w(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt.$$

Primitivna funkcija za zadnji integral je kompleksni logaritem $\log\gamma(t) = \log|\gamma(t)| + i\arg\gamma(t)$. Če je Γ enotska krožnica, je realni del $\log\gamma(t)$ enak nič; pa tudi v splošnem se prispevka pri $t=0$ in $t=1$ odštejeta, saj sta dolžini enaki. Drugače pa je z argumentom, ki se lahko pri večih obhodih krivulje okoli izhodišča spremeni za neki celoštevilski večkratnik polnega kota 2π. Kompleksni logaritem je večlična funkcija, da dobimo primitivno funkcijo, pa moramo izbrati njene vrednosti vzdolž krivulje $t \mapsto \gamma(t)$ tako, da bo $t \mapsto \log\gamma(t)$ zvezna. Od tod vidimo, da je ovojno število krivulje celo število.

Primer 4.2. Ovojno število konstantne preslikave $g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $g(z) = a$ za neki $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, je enako 0.

To takoj sledi iz definicije ovojnega števila, saj je parametrizacija γ v tem primeru konstantna pot, torej je njen odvod enak 0. $\diamondsuit$

Primer 4.3. Za vsako celo število n je ovojno število preslikave $g_n\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ enako n. Posebej je ovojno število identične preslikave enako 1.

V skladu z zgornjim dogovorom za g_n izberemo parametrizacijo $\gamma_n(t) = e^{2n\pi i t}$. Tedaj je $\gamma_n'(t) = 2n\pi i\gamma_n(t)$, zato je

$$w(g_n) = \int_0^1 n\, dt = n,$$

kar seveda vključuje tudi primer konstantne preslikave. $\diamondsuit$

Izrek C bomo v primeru $n=2$ dokazali tako, da bomo pokazali, da imata homotopni preslikavi enaki ovojni števili – rečemo, da je ovojno število *invarianta* homotopskega razreda preslikave. Najprej bomo to preverili za gladke homotopije.

Lema 4.4. *Naj bo $G\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gladka preslikava, ki je homotopija med $G_0 = G(\cdot,0)$ in $G_1 = G(\cdot,1)$. Potem je $w(G_0) = w(G_1)$.*

Dokaz. Za vsak $s \in [0,1]$ naj bo $G_s = G(\cdot,s)$ in $\Gamma_s = G_s(\mathbb{S}^1)$. Pokazati želimo, da je ovojno število $w(s) = w(G_s)$ neodvisno od $s \in [0,1]$. Ker je interval povezan in so možne vrednosti ovojnega števila cela števila, je dovolj pokazati, da je funkcija $s \mapsto w(s)$ zvezna. To sledi iz lastnosti integrala s parametrom. Kot zgoraj naj bo

$$\gamma(t,s) = G(e^{2\pi i t}, s) = G_s\left(e^{2\pi i t}\right);$$

tako definirana funkcija $\widetilde{\gamma}\colon [0,1]^2 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je seveda zvezno odvedljiva. Zato je

$$w(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_s} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\gamma}(t,s)}{\widetilde{\gamma}(t,s)}\,dt$$

zvezna funkcija spremenljivke s, torej konstanta. □

Naslednji izrek o enakosti ovojnih števil velja bolj splošno za poljubni zvezni preslikavi $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Iz dokaza izreka namreč sledi, da lahko definiramo ovojno število za poljubno zvezno preslikavo tako, da jo dovolj natančno aproksimiramo z gladko preslikavo – vsaki dve dovolj bližnji gladki preslikavi imata namreč enaki ovojni števili.

Izrek 4.5. *Naj bosta $f_i\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ za $i = 0, 1$ poljubni gladki preslikavi. Če je $F\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ poljubna (zvezna) homotopija, za katero velja $F_i = f_i$ za $i = 0, 1$, potem je $w(f_0) = w(f_1)$.*

Dokaz. Ker kompaktna množica $F(\mathbb{S}^1 \times [0,1])$ ne vsebuje izhodišča, je razdalja ε med izhodiščem in to množico pozitivna. Naj bo $G\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}$ gladka preslikava, katere vrednosti se v vsaki točki od vrednosti F razlikujejo manj kot ε. Očitno potem izhodišče ni v sliki G in po lemi 4.4 imata $G_i = G(\cdot, i)$ za $i = 0, 1$ enaki ovojni števili. Pokazali bomo še, da velja $w(f_i) = w(G_i)$ za $i = 0, 1$. Ker je argument v obeh primerih enak, bomo namesto f_i pisali f, namesto G_i pa g.

Definirajmo $H\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}$ s predpisom $H(z,s) = (1-s)f(z) + sg(z)$. Očitno je H gladka, saj so vse v predpisu nastopajoče preslikave gladke. Preveriti moramo še, da H slika v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pa nasprotno privzemimo, da je $H(z,s) = 0$ za neka (z,s). Potem je

$$\varepsilon \leq ||f(z)|| = s||f(z) - g(z)|| < \varepsilon,$$

saj je $s \in [0,1]$, g pa aproksimira f z natančnostjo boljšo od ε. Enakost ovojnih števil začetne preslikave f in končne g sedaj sledi iz leme 4.4. □

Dokaz izreka C za $n = 2$. Iz zadnjega izreka sledi, da identična preslikava in konstantna preslikava ne moreta biti homotopni, saj smo v primerih 4.2 in 4.3 pokazali, da imata preslikavi različni stopnji. □

Iz zgornjih rezultatov sledi, da imata homotopni preslikavi $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ enaki ovojni števili. Velja pa tudi obratno – torej so homotopski razredi takih preslikav določeni z ovojnim številom. To je osnova za izračun fundamentalne grupe prostora $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mi se s pojmom fundamentalne grupe ne bomo ukvarjali, povejmo le, da je ta ena osnovnih invariant prostora v algebraični topologiji. Oglejmo si še eno zanimivo uporabo ovojnega števila.

Posledica 4.6 (Osnovni izrek algebre). *Vsak polinom $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stopnje vsaj ena ima vsaj eno ničlo.*

Dokaz. Denimo, da polinom p nima ničle. Potem je zožitev p_r preslikave p na krožnico $\mathbb{S}^1_r$ s polmerom $r > 0$ homotopna konstantni preslikavi – za homotopijo lahko vzamemo $H\colon \mathbb{S}^1_r \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $H(z,s) = p(sz)$. Res, $H_0 = p(0)$ je konstantna preslikava in $H_1 = p_r$. Iz leme 4.4 sledi, da je $w(p_r) = 0$.

Za polinom p smemo privzeti, da ima vodilni koeficient 1, saj imata preslikavi g in ag enako ovojno število za poljuben $a \neq 0$. Torej je $p(z) = z^n + q(z)$, kjer je n stopnja polinoma p, q pa polinom nižje stopnje. Ker gre $q(z)/z^n$ proti 0, ko $|z|$ narašča čez vse meje, obstaja tak $r > 0$, da je $|q(z)| < r^n$ za poljuben $z \in \mathbb{S}^n_r$. Naj bo $g(z) = z^n$ in g_r njena zožitev na $\mathbb{S}^1_r$. Potem je $G\colon S^1_r \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dana s predpisom

$$G(z,s) = g_r(z) + sq_r(z),$$

homotopija od g_r do p_r, ki res slika v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, saj je drugi sumand po absolutni vrednosti manjši od prvega. Iz leme 4.4 zato sledi, da je ovojno število p_r enako ovojnemu številu g_r, ki je enako n (po analognem računu kot v primeru 4.3). To je v nasprotju z zgornjim sklepom, da je ta stopnja enaka 0. □

5. Sfera ni kontraktibilna – stopnja preslikave

V primeru preslikave $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ovojno število iz prejšnjega razdelka imenujemo tudi stopnja preslikave. Na analogen način kot ovojno število – torej s pomočjo integrala – lahko definiramo tudi stopnjo gladke preslikave med sferama $\mathbb{S}^n$ razsežnosti n (in bolj splošno med poljubnima orientiranima gladkima sklenjenima mnogoterostma razsežnosti n). Mi si bomo pomagali z drugačno definicijo stopnje gladke preslikave, ki je zgornji ekvivalentna, temelji pa na Brown–Sardovem izreku.

Naj bosta M in N gladki sklenjeni enako razsežni mnogoterosti. Če je y regularna vrednost za f, je $f^{-1}(y)$ gladka kompaktna 0-mnogoterost v M (torej končna množica točk), v okolici vsake točke $x \in f^{-1}(y)$ pa je f (po izreku o inverzni preslikavi) lokalni difeomorfizem (tj. preslika neko okolico x difeomorfno na neko okolico y).

Definicija stopnje preslikave sloni na pojmu orientacije mnogoterosti. Za naš namen zadošča stopnja modulo dva, ki za definicijo ne potrebuje orientacije, njeno invariantnost pa je lažje dokazati. Stopnja preslikave z upoštevanjem orientacije je predstavljena v dodatku B.

Definicija 5.1. Naj bosta M in N gladki sklenjeni n-mnogoterosti, $f\colon M \to N$ gladka preslikava ter $y \in N$ regularna vrednost preslikave f. *Stopnja modulo* 2 *preslikave f nad y* je moč množice $f^{-1}(y)$ modulo 2; označimo jo $d_2(f, y)$.

Izrek 5.2. *Naj bosta M in N gladki sklenjeni povezani enako razsežni mnogoterosti. Stopnja modulo* 2 *gladke preslikave $f\colon M \to N$ je neodvisna od regularne vrednosti y, nad katero jo računamo. Skupno vrednost vseh teh stopenj imenujemo* stopnja modulo 2 *preslikave f in označimo $d_2(f)$. Poleg tega imata homotopni preslikavi enako stopnjo.*

Pred dokazom izreka si oglejmo primera, ki ju potrebujemo za dokaz posplošitve izreka C, kjer sfero lahko zamenjamo s poljubno sklenjeno gladko mnogoterostjo.

Primer 5.3. Naj bo $f\colon M \to M$ konstantna preslikava. Če $y \in M$ ni enaka sliki preslikave f, je njena regularna vrednost, saj je pogoj regularnosti na prazno izpolnjen. Ker je $f^{-1}(y)$ prazna množica, je stopnja $d_2(f) = 0$. $\diamondsuit$

Primer 5.4. Naj bo $f\colon M \to M$ identična preslikava. Potem je poljuben $y \in M$ regularna vrednost, $f^{-1}(y) = \{y\}$ in zato $d_2(f) = 1$. $\diamondsuit$

Dokaz izreka C. Iz zgornjih primerov sledi, da sta stopnji konstante in identične preslikave različni, izrek 5.2 pa zagotavlja, da imata homotopni preslikavi enaki stopnji. Sklepamo, da identična preslikava sklenjene gladke mnogoterosti ni homotopna konstantni preslikavi. $\square$

Dokaz izreka 5.2. Najprej dokažimo, da je stopnja homotopnih preslikav nad neko skupno regularno vrednostjo enaka. Podobno kot pri ovojnem številu je dovolj preveriti enakost stopenj preslikav, povezanih z gladko homotopijo; konstrukcija v primeru sfer je analogna tisti pri krožnici, v primeru splošnih mnogoterosti pa pri zamenjavi zvezne homotopije z gladko npr. upoštevamo, da je gladko mnogoterost mogoče vložiti kot gladko podmnogoterost v neki evklidski prostor (izrek B.8) ter da za sklenjeno gladko podmnogoterost v evklidskem prostoru obstaja gladka retrakcija neke njene okolice na mnogoterost (izrek B.13).

Naj bosta torej $f, g\colon M \to N$ gladki preslikavi in $H\colon M \times [0,1] \to N$ gladka homotopija med njima. Privzeti smemo tudi, da je za s blizu 0 ali 1 preslikava $(x, s) \mapsto H(x, s)$ neodvisna od s (to lahko dosežemo tako, da parameter homotopije s preslikamo z gladko funkcijo $\lambda\colon [0,1] \to [0,1]$, ki je v okolici 0 enaka 0, v okolici 1 pa enaka 1, torej H zamenjamo s preslikavo $(x, s) \mapsto H(x, \lambda(s))$). Ker je množica regularnih vrednosti gladke preslikave iz kompaktne mnogoterosti po Brown–Sardovem izreku C.1 gosta odprta množica, obstaja $y \in N$, ki je regularna vrednost za f, g in H. Zato sta $K_0 = f^{-1}(y) \subset M \times \{0\}$ in $K_1 = g^{-1}(y) \subset M \times \{1\}$ končni množici točk, $L = H^{-1}(y)$ pa je kompaktna 1-razsežna mnogoterost v $M \times [0,1]$, torej unija nekaj sklenjenih krivulj v $M \times (0,1)$ ter lokov s krajišči v $K_0 \cup K_1$. Vsak lok v L torej povezuje dve točki v $K_0 \cup K_1$. Od tod sledi, da je parnost števila točk v K_0 in v K_1 enaka, torej velja $d_2(f, y) = d_2(g, y)$.

Preverimo še neodvisnost od izbire regularne vrednosti. Naj bo y regularna vrednost za $f\colon M \to N$. Najprej preverimo, da ima y tako odprto okolico, da je stopnja f nad vsako točko te enaka. Za vsak x v $K = f^{-1}(y)$ je zožitev f na dovolj majhno okolico V_x točke x difeomorfizem na sliko. Naj bo $U = \bigcap_{x \in K} f(V_x)$. Ker je $A = M \setminus \bigcup_{x \in K} V_x$ kompaktna množica, katere slika pri preslikavi f ne vsebuje y, obstaja znotraj U manjša povezana okolica $W \subset U \setminus f(A)$ točke y, za katero velja, da se vsaka komponenta v $f^{-1}(W)$ difeomorfno preslika na W. Torej je število točk v $f^{-1}(z)$ neodvisno od točke $z \in W$.

Naj bosta sedaj $y, z \in N$ poljubni regularni vrednosti preslikave f. Po lastnosti gladke homogenosti povezane mnogoterosti N (izrek B.15) obstaja gladka izotopija $H\colon N \times [0,1] \to N$, ki se začne s $H_0 = \mathrm{id}_N$ in katere končni difeomorfizem preslika z v y. Potem je $F\colon M \times [0,1] \to N$, $F(x,s) = H(f(x),s)$ gladka homotopija med f in $g := H_1 \circ f$, za katero smemo kot zgoraj privzeti, da je konstantna za s blizu 0 in blizu 1. Po konstrukciji je $F^{-1}(y) \cap (M \times \{0\}) = f^{-1}(y)$ in $F^{-1}(y) \cap (M \times \{1\}) = f^{-1}(H_1^{-1}(y)) = f^{-1}(z)$. Kot v dokazu neodvisnosti od homotopije lahko izberemo dovolj bližnjo točko y', ki je regularna vrednost za f, g in F. Torej sta stopnji f in g nad y' enaki. Če y' izberemo dovolj blizu y, pa po prejšnjem odstavku sledi, da sta tudi stopnji nad y enaki. To pa sta ravno stopnji f nad y in z. $\square$

Jordan-Brouwerjev separacijski izrek

Za podprostor $A \subset X$ rečemo, da *separira* ali *deli* povezan prostor X, če je $X \setminus A$ nepovezan. Ta lastnost je lastnost para (X, A), saj na primer točka deli premico, ne deli pa večrazsežnih evklidskih prostorov. Poleg tega je včasih to odvisno od konkretne vložitve A v X, včasih pa ne; v prejšnjem primeru točke v evklidskem prostoru je rezultat enak ne glede na izbiro točke, premico $\mathbb{R}$ pa lahko v ravnino $\mathbb{R}^2$ vložimo kot $\mathbb{R} \times \{0\}$, ki ravnino deli, ali pa kot $(-1, 1) \times \{0\}$, ki je ne deli.

V tem poglavju nas bo zanimalo, ali podprostori evklidskih prostorov, homeomorfni sferi ali krogli, prostor delijo ali ne. Standardna enotska krogla $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ prostora za $n > 1$ očitno ne deli, sfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ pa ga. Kaj pa, če kroglo ali sfero drugače vložimo v evklidski prostor? Podprostor $B \subset \mathbb{R}^n$ imenujemo *topološka k-krogla*, če je homeomorfen $\mathbb{B}^k$; $S \subset \mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen $\mathbb{S}^k$, pa imenujemo *topološka k-sfera*. Topološka 1-krogla je torej lok, topološka 1-sfera pa enostavna sklenjena krivulja.

Izrek D. *Topološka k-krogla ne deli $\mathbb{R}^n$ za poljuben $k \leq n$, če je $n > 1$.*

Izrek E (Jordan[3]-Brouwerjev separacijski izrek). *Naj bo $n > 1$. Topološka $(n-1)$-sfera S deli $\mathbb{R}^n$ na natanko dve komponenti, eno omejeno in eno neomejeno. Obe komponenti sta povezani s potmi in odprti v $\mathbb{R}^n$, njuna meja pa je S.*

Slednjega izreka v tej splošnosti ne bomo dokazali – pokazali bomo vse trditve razen tiste o številu komponent komplementa, ki jo bomo preverili le za $n = 2$. Za splošen n je to najlaže dokazati s sredstvi algebraične topologije. Jordan je dokazal izrek za enostavne sklenjene krivulje leta 1887 v svojem slavnem učbeniku za analizo, splošno verzijo pa je dokazal Brouwer leta 1911.

6. Komplement kompaktne podmnožice evklidskega prostora

Kot kažeta zgornja izreka, nekatere kompaktne podmnožice delijo evklidski prostor, nekatere pa ne. Najprej si oglejmo lastnosti, ki so skupne komplementom vseh kompaktnih podmnožic.

Trditev 6.1. *Komplement kompaktne podmnožice K v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ ima natanko eno neomejeno komponento. Vse komponente so povezane s potmi in odprte v $\mathbb{R}^n$, njihova meja (v $\mathbb{R}^n$) pa je vsebovana v K.*

Dokaz. Ker je K zaprta, je njen komplement U odprta množica in zato lokalno povezana s potmi. Posledično so komponente U odprte v $\mathbb{R}^n$ in povezane s potmi. Ker je K omejena, je vsebovana v neki dovolj veliki krogli B, zato je komplement te krogle, ki je povezan, vsebovan v eni komponenti U – ta je neomejena, ostale pa so vsebovane v B in torej omejene. Poljubna komponenta V množice U je zaprta v U, zato meja V v $\mathbb{R}^n$ vsebuje le točke iz K. $\square$

V splošnem seveda ne velja, da je meja komponente komplementa množice K enaka K; to gotovo ne velja za množice K z neprazno notranjostjo. Pri dokazu, da je meja komponente topološke $(n-1)$-sfere v $\mathbb{R}^n$ enaka tej sferi, si bomo pomagali z izrekom D, zato najprej dokažimo tega.

Dokaz izreka D. Naj bo $B \subset \mathbb{R}^n$ topološka k-krogla in denimo, da $U = \mathbb{R}^n \setminus B$ ni povezana. Po zgornji trditvi ima U tedaj vsaj eno omejeno komponento; naj bo V taka komponenta in $v \in V$. Ker je $K = B \cup V$ omejena, obstaja $r > 0$, da je $K \subset K(v, r)$. Pokazali bomo, da tedaj obstaja retrakcija zaprte krogle $\overline{K}(v, r)$ na robno sfero $S(v, r)$, kar je v nasprotju z izrekom B.

Ker je B absolutni retrakt za normalne prostore in je zaprt v K, obstaja retrakcija $\rho\colon K \to B$. Po trditvi 6.1 je meja V vsebovana v B, zato je K zaprta v $\mathbb{R}^n$. Ker je ρ na B identična preslikava, je njena razširitev $\widehat{\rho}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \setminus V$, ki je na komplementu V identiteta, zvezna. Preslikava f, ki je kompozitum $\widehat{\rho}$ z radialno retrakcijo

$$\mathbb{R}^n \setminus \{v\} \to S(v, r),\ x \mapsto v + r\frac{x - v}{||x - v||},$$

[3] Camille Jordan (1838–1922), francoski matematik, znan po dokazu separacijskega izreka za krivulje, po Jordanovi kanonični formi in drugih rezultatih v algebri ter po Jordanovi meri.

zožena na zaprto kroglo $\overline{K}(v,r)$, je iskana retrakcija. $\square$

Trditev 6.2. *Naj bo $S \subset \mathbb{R}^n$ topološka $(n-1)$-sfera, ki deli $\mathbb{R}^n$. Tedaj je S meja vsake komponente svojega komplementa.*

Dokaz. Pokazati moramo še, da je vsaka točka topološke sfere S vsebovana v meji vsake komponente svojega komplementa. Denimo, da za točko $x \in S$ to ne velja: za neko komponento V komplementa $\mathbb{R}^n \setminus S$ tedaj velja $x \notin \overline{V}$. Torej obstaja odprta okolica U točke x v $\mathbb{R}^n$, ki ne seka V. Naj bo W še ena (od V različna) komponenta $\mathbb{R}^n \setminus S$.

Izberimo homeomorfizem $h\colon \mathbb{S}^{n-1} \to S$. Za dovolj majhen $\varepsilon \in (0,1)$ je $\overline{K}(h^{-1}(x),\varepsilon) \subset h^{-1}(U)$. Množica $H = h(\mathbb{S}^{n-1} \setminus K(h^{-1}(x),\varepsilon))$ je tedaj topološka $(n-1)$-krogla, ki po izreku D ne deli $\mathbb{R}^n$. Torej obstaja pot $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus H$ od neke točke $v \in V$ do neke točke $w \in W$. Po drugi strani sta V in W različni komponenti $\mathbb{R}^n \setminus S$, zato tir poti γ seka S. Naj bo $t_0 = \min\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in S\}$. Tedaj je $\gamma([0,t_0)) \subset V$ in $\gamma(t_0) \in U$. To je protislovje, saj je γ zvezna in U odprta množica, ki ne seka V. $\square$

7. Komplement poligonske krožnice v ravnini

Topološki krožnici, ki je unija končno mnogo daljic v ravnini, bom rekli *poligonska krožnica*. Dokaz Jordanovega izreka, tj. izreka E za $n = 2$, za poligonske krožnice je posebej zanimiv, saj je algoritmičen. Opremi nas namreč s preprosto metodo, ki za poljubno točko v komplementu krožnice pove, ali ta leži v omejeni ali neomejeni komponenti komplementa. Metoda temelji na informaciji o presečiščih med poligonsko krožnico S in poltrakom L. Hitro se lahko prepričamo, da je naivna ideja s štetjem komponent preseka (modulo 2) napačna. Vsaka komponenta K v preseku $S \cap L$ je bodisi točka bodisi (neizrojena) daljica in takih komponent je končno mnogo (seveda je presek lahko tudi prazen). Rečemo, da S pri K *prečka* L, če vsaka okolica K v S seka obe komponenti $\mathbb{R}^2 \setminus \widehat{L}$, kjer je $\widehat{L}$ nosilka poltraka L.

Definicija 7.1. Naj bo S poligonska krožnica v ravnini, $A \notin S$ in L poljuben poltrak z začetkom v točki A. *Globina* A glede na L, $g_S(A,L) \in \mathbb{Z}_2$, je število tistih komponent v $S \cap L$, pri katerih S prečka L, modulo 2.

Trditev 7.2. *Naj bo S poligonska krožnica v ravnini. Globina točke $A \notin S$ je neodvisna od poltraka, zato jo označimo $g_S(A)$. Funkcija $g_S\colon \mathbb{R}^2 \setminus S \to \mathbb{Z}_2,\ A \mapsto g_S(A)$ je lokalno konstantna in surjektivna.*

Dokaz. Izberimo točko $A \notin S$ in poltraka L, L', ki izhajata iz te točke. Potem ima $\mathbb{R}^2 \setminus (L \cup L') \approx \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ dve komponenti – označimo z V eno od teh. Naj bodo $K_1, \ldots, K_s$ komponente v $S \cap L$, pri katerih S prečka L, ter $K'_1, \ldots, K'_t$ komponente v $S \cap L'$, pri katerih S prečka L'. Vsaki komponenti v $S \cap \overline{V}$ priredimo zaprt podlok v S, ki ga iz komponente dobimo z odstranitvijo morebitne polodprte daljice na začetku in koncu loka, ležeče v L ali L'; ti podloki torej sekajo $L \cup L'$ le v krajiščih. Iz vsake od množic K_i oziroma K'_j izhaja natanko en tak lok, saj S v teh množicah prečka L oziroma L'. Vsak tak lok povezuje dve od množic v $\{K_i \mid i = 1, \ldots, s\} \cup \{K'_j \mid j = 1, \ldots, t\}$, zato je $s \equiv t \pmod 2$.

Za poljubno točko $A \notin S$ obstaja (neprazna) odprta krogla W s središčem v A, vsebovana v komplementu S. Izberimo $B \in W$, različno od A. Označimo z L poltrak, ki izhaja iz A in gre skozi B ter z $L' \subset L$ podpoltrak, ki se začne v B. Potem je $L \cap S = L' \cap S$, zato velja

$$g_S(B) = g_S(B, L') = g_S(A, L) = g_S(A).$$

Naj bo D neka daljica v S. Potem lahko na simetrali D izberemo tako kratko daljico AB, da ta seka S le v razpolovišču, kjer jo S prečka. Podobno kot v prejšnjem odstavku dobimo $g_S(B) \equiv g_S(A) + 1 \pmod 2$. $\square$

Iz zgornje trditve sledi, da ima komplement poligonske krožnice vsaj dve komponenti. Pokazati moramo še, da sta komponenti natanko dve. Ker lahko poljubno blizu poligonske krožnice narišemo »vzporedno« (poligonsko) krivuljo na eni in na drugi strani krožnice (kjer sta strani tu mišljeni lokalno, torej dve strani premice, ki nosi daljico na krožnici), sledi, da so vse bližnje točke vsebovane v največ dveh komponentah komplementa. Po drugi strani pa trditev 6.1 pravi, da vsaka točka krožnice leži v zaprtju vsake komponenete komplementa, torej bližnje točke sekajo vse komponente komplementa.

8. Komplement topološke krožnice v ravnini

Za dokaz ravninske verzije izreka E moramo preveriti še, da ima komplement topološke krožnice natanko dve komponenti. Sledili bomo [**6**]. Glavno tehnično orodje bo naslednja lema o ravninskih krivuljah, ki sledi iz izreka A.

LEMA 8.1. *Naj bosta $h, v\colon [-1,1] \to [a,b] \times [c,d]$ taki poti v pravokotniku, da h povezuje levo in desno stranico pravokotnika, v pa spodnjo in zgornjo, tj. $h_1(-1) = a$, $h_1(1) = b$, $v_2(-1) = c$ in $v_2(1) = d$. Potem se tira poti v in h sekata, torej obstajata $s, t \in [-1,1]$, da velja $h(s) = v(t)$.*

DOKAZ. Pa denimo, da se tira poti ne sekata in označimo

$$D(s,t) = \max\{|h_1(s) - v_1(t)|, |h_2(s) - v_2(t)| \mid s,t \in [-1,1]\}.$$

Iz predpostavke sledi, da je $D\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ zvezna pozitivna funkcija. Trdimo, da tedaj preslikava

$$F\colon [-1,1]^2 \to [-1,1]^2, \quad (s,t) \mapsto \left(\frac{v_1(t) - h_1(s)}{D(s,t)}, \frac{h_2(s) - v_2(t)}{D(s,t)}\right)$$

nima negibne točke, kar je v nasprotju z izrekom A. Po definiciji funkcije D je vsaj ena komponenta slike $F(s,t)$ enaka ± 1, torej F slika v rob kvadrata. Če bi F imela negibno točko (s_0, t_0), bi za to veljalo $s_0 = \pm 1$ ali $t_0 = \pm 1$. Preverimo, da to ni mogoče:

če je $s_0 = -1$, je $h_1(s_0) = a$, torej je $0 \leq F_1(s_0,t_0) = \dfrac{v_1(t_0) - h_1(s_0)}{D(s,t)} \neq -1 = s_0$;

če je $s_0 = 1$, je $h_1(s_0) = b$, torej je $0 \geq F_1(s_0,t_0) = \dfrac{v_1(t_0) - h_1(s_0)}{D(s,t)} \neq 1 = s_0$;

če je $t_0 = -1$, je $v_2(t_0) = c$, torej je $0 \leq F_2(s_0,t_0) = \dfrac{h_2(s_0) - v_2(t_0)}{D(s,t)} \neq -1 = t_0$;

če je $t_0 = 1$, je $v_2(t_0) = d$, torej je $0 \geq F_2(s_0,t_0) = \dfrac{h_2(s_0) - v_2(t_0)}{D(s,t)} \neq 1 = t_0$. □

V nadaljevanju nas bo zanimal le obstoj presečišča krivulj, ki ju lahko gledamo kot tira poti. V tem primeru rezultat leme še vedno velja, saj lahko izberemo konkretni parametrizaciji krivulj. Ta princip bomo uporabljali v naslednjem dokazu brez dodatnega pojasnila.

DOKAZ IZREKA E ZA $n = 2$. Ker je topološka krožnica $S \subset \mathbb{R}^2$ kompaktna, obstajata točki $A, A' \in S$, v katerih je dosežen maksimum razdalj dveh točk iz S, torej

$$||A - A'|| = \max\{||x - y|| \mid x, y \in S\}.$$

Koordinatni sistem postavimo tako, da je $A = (0,0)$ in $A' = (2,0)$. Potem je $S \subset P = [0,2] \times [-2,2]$ in S seka rob pravokotnika P le v točkah A in A'. Označimo $T = (1,2)$ in $B = (1,-2)$.

Točki A in A' razdelita S na dva loka, ki po zgornji lemi sekata daljico TB. Naj bo $M_T \in S \cap TB$ točka z največjo y-koordinato v tem preseku in S_T tisti podlok v S med A in A', ki jo vsebuje; označimo z m_T najnižjo točko v $S_T \cap TB$. Drugi podlok v S označimo s S_B, najvišjo in najnižjo točko v preseku $S_B \cap m_T B$ pa z M_B in m_B. Presek lokov $m_T B$ in S_B je res neprazen, saj bi v nasprotnem primeru krivulja

$$Bm_T \cup (\text{lok v } S_T \text{ od } m_T \text{ do } M_T) \cup M_T T$$

ne sekala S_B, kar je v nasprotju z lemo 8.1.

Pokažimo najprej, da ima $\mathbb{R}^2 \setminus S$ vsaj dve komponenti. Trdimo, da središče C daljice $m_T M_B$ pripada omejeni komponenti komplementa S. Označimo z V komponento $\mathbb{R}^2 \setminus S$, ki vsebuje C. Če je V neomejena komponenta, potem obstaja pot v V od C do neke točke na robu P; označimo z Γ tir te poti in z D njeno drugo krajišče. Če je y-koordinata točke D negativna, potem krivulja

$$TM_T \cup (\text{lok v } S_T \text{ med } M_T \text{ in } m_T) \cup m_T C \cup \Gamma \cup (\text{pot v robu } P \text{ od } D \text{ do } B \text{ pod osjo } x)$$

v nasprotju z lemo 8.1 ne seka S_B. Podobno, če je y-koordinata točke D pozitivna, krivulja

$$BC \cup \Gamma \cup (\text{pot v robu } P \text{ od } D \text{ do } T \text{ nad osjo } x)$$

ne seka S_T.

Pokažimo še, da je V edina omejena komponenta $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Denimo, da je W še ena omejena komponenta; očitno velja $W \subset P$. Naj bo Γ krivulja

$$TM_T \cup (\text{lok v } S_T \text{ med } M_T \text{ in } m_T) \cup m_T M_B \cup (\text{lok v } S_B \text{ med } M_B \text{ in } m_B) \cup m_B B.$$

Opazimo, da Γ leži v komplementu W in ne vsebuje točk A in A'. Zato obstajata odprti krogli U_A in $U_{A'}$ okoli A in A', ki ne sekata Γ. Ker sta $A, A' \in \overline{W}$, obstajata točki $A_1 \in U_A \cap W$ in $A_1' \in U_{A'} \cap W$ in pot δ med tema točkama v W. Potem krivulja

$$AA_1 \cup (\text{tir poti } \delta) \cup A_1'A'$$

ne seka Γ. $\square$

Schoenfliesov izrek

Schoenfliesov[4] izrek je nadgradnja Jordanovega izreka o separaciji in pravi, da je omejena komponenta komplementa topološke sfere homeomorfna odprti krogli. Brez dodatnih predpostavk na topološko sfero $S \approx \mathbb{S}^{n-1}$ v $\mathbb{R}^n$ velja le v ravnini, torej za $n = 2$. Omejeno komponento komplementa topološke $(n-1)$-sfere bomo imenovali *notranjost*, neomejeno pa *zunanjost*. Spodnja oblika izreka na videz pove več, vendar je ekvivalentna temu, da je zaprtje notranjosti homeomorfno zaprtemu krogu.

Izrek F. *Naj bo $S \subset \mathbb{R}^2$ topološka krožnica ter $h\colon S \to \mathbb{S}^1$ homeomorfizem. Potem obstaja homeomorfizem $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki je razširitev h. Posebej je zaprtje notranjosti S homeomorfno disku $\mathbb{B}^2$. Homeomorfizem H lahko izberemo tako, da ima kompakten nosilec, torej se ujema z identično preslikavo izven neke kompaktne podmnožice.*

9. Ekvivalentne formulacije

V Jordan-Brouwerjevem in Schoenfliesovem izreku lahko ambientni evklidski prostor $\mathbb{R}^n$ zamenjamo s sfero $\mathbb{S}^n$, pa rezultat v bistvu ostane enak, le da v tem primeru ni odlikovane (neomejene) komponente. To sledi, saj sta sfera in evklidski prostor iste razsežnosti tesno povezana – sfera $\mathbb{S}^n$ je kompaktifikacija $\mathbb{R}^n$ z eno točko. Tako lahko gledamo na $\mathbb{R}^n$ kot na podprostor $\mathbb{S}^n$, dodana točka pa leži v komplementu topološke $(n-1)$-sfere.

Trditev 9.1. *Naj bo S topološka $(n-1)$-sfera. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. *Zaprtje omejene komponente komplementa $\mathbb{R}^n \setminus S$ je homeomorfno $\mathbb{B}^n$.*
2. *Obstaja homeomorfizem $\mathbb{R}^n$, ki prenese S na $\mathbb{S}^{n-1}$.*
3. *Zaprtje komponente komplementa $\mathbb{S}^n \setminus S$ je homeomorfno $\mathbb{B}^n$.*
4. *Obstaja homeomorfizem $\mathbb{S}^n$, ki prenese S na $\mathbb{S}^{n-1}$.*

V dokazu trditve bomo potrebovali naslednji rezultat o razširitvi poljubnega homeomorfizma sfere do homeomorfizma krogle.

Lema 9.2. *Naj bo $h\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ poljuben homeomorfizem ter $x, y \in \operatorname{Int} \mathbb{B}^n$. Potem obstaja homeomorfizem $H\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, ki se na $\mathbb{S}^{n-1}$ ujema s h in prenese x v y.*

Dokaz. Za poljuben $z \in \mathbb{S}^{n-1}$ naj H preslika daljico xz linearno na daljico $yh(z)$. Dobljena preslikava $H\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ je očitno bijekcija z zahtevanimi lastnostmi. Ni se težko prepričati, da je tudi zvezna (npr. tako, da eksplicitno zapišemo njeno formulo) in posledično zaprta. □

Dokaz trditve 9.1. ((2) $\implies$ (1)) Homeomorfizem $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, za katerega velja $h(S) = \mathbb{S}^{n-1}$, preslika komponenti komplementa S na komponenti komplementa $\mathbb{S}^{n-1}$, zato enako velja tudi za zaprtja teh komponent. Med komponentama $\mathbb{R}^n \setminus S$ ima kompaktno zaprtje le V, zato je $h(\overline{V}) = \mathbb{B}^n$.

((1) $\implies$ (3)) Naj bo V komponenta komplementa $\mathbb{S}^n \setminus S$ in izberimo $w \in \mathbb{S}^n \setminus \overline{V}$. Ker je $\mathbb{S}^n \setminus \{w\} \approx \mathbb{R}^n$, V pri tem homeomorfizmu ustreza omejeni komponenti komplementa slike S, katere zaprtje je po (1) homeomorfno $\mathbb{B}^n$.

((3) $\implies$ (4)) Naj bosta V in W komponenti komplementa $\mathbb{S}^n \setminus S$. Po predpostavki obstajata homeomorfizma $h_V\colon \overline{V} \to \mathbb{B}^n$ in $h_W\colon \overline{W} \to \mathbb{B}^n$. Homeomorfizem $f := h_V \circ h_W^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ sfere $\mathbb{S}^{n-1}$ ima po zgornji lemi razširitev do homeomorfizma $F\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$. Potem je

$$H(x) = \begin{cases} \left(h_V(x), \sqrt{1 - ||h_V(x)||^2}\right) & ; \quad x \in \overline{V} \\ \left(F \circ h_W(x), -\sqrt{1 - ||F \circ h_W(x)||^2}\right) & ; \quad x \in \overline{W} \end{cases}$$

iskani homeomorfizem sfere, saj se predpisa na preseku ujemata.

[4] Arthur Moritz Schoenflies (1853–1928), nemški matematik, znan po svojem delu v algebri in topologiji. Naslovni izrek je dokazal leta 1906; nekatere napake v dokazu je leta 1909 odpravil Brouwer.

((4) $\implies$ (2)) Identificirajmo $\mathbb{R}^n$ s $\mathbb{S}^n \setminus \{w\}$ preko stereografske projekcije, kjer je $w = (0,0,1)$. Po predpostavki obstaja homeomorfizem $h\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, ki S preslika na $\mathbb{S}^{n-1}$. Privzeti smemo, da $h(w)$ leži v (odprti) zgornji hemisferi – če temu ni tako, komponiramo h z zrcaljenjem preko ravnine $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, ki preslika $\mathbb{S}^{n-1}$ vase. Po zgornji lemi obstaja homeomorfizem F zaprte zgornje hemisfere $\mathbb{S}^n_+$, ki je na $\mathbb{S}^{n-1}$ identiteta in preslika $h(w)$ v w. F lahko razširimo do homeomorfizma sfere $\mathbb{S}^n$, ki je identična preslikava na spodnji hemisferi. Potem je $H = F \circ h$ homeomorfizem $\mathbb{S}^n$, ki preslika S na $\mathbb{S}^{n-1}$ in w vase, zato inducira iskani homeomorfizem $\mathbb{R}^n$. $\square$

Iz trditve sledi, da ima v primeru, ko je zaprtje omejene komponente komplementa topološke $(n-1)$-sfere S v $\mathbb{R}^n$ homeomorfno krogli $\mathbb{B}^n$, sfera S okolico V, homeomorfno $S \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^n$. Poleg tega lahko homeomorfizem $h\colon S \times (-1,1) \to V$ izberemo tako, da velja $h(x,0) = x$ za vsak $x \in S$. V tem primeru rečemo, da ima S *dvojni obrobek* v $\mathbb{R}^n$. Posebej od tod sledi, da ima vsaka točka $x \in S$ okolico $U \subset \mathbb{R}^n$, za katero obstaja vložitev U v $\mathbb{R}^n$, pri kateri se $S \cap U$ preslika v $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. To pomeni, da lahko sfero S v ambientnem evklidskem prostoru lokalno izravnamo, zato rečemo, da je *lokalno ploščata*. Ta pojem lahko vpeljemo bolj splošno.

Definicija 9.3. Naj bo $M \subset \operatorname{int} N$, kjer je M m-mnogoterost in N n-mnogoterost. Pravimo, da je M *lokalno ploščata* v N, če za vsak $x \in M$ obstaja karta $h\colon V \to V'$ okoli x na N, da je $h(V \cap M) = V' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0^{n-m}\})$. V tem primeru pravimo tudi, da je M *podmnogoterost* v N.

Iz izreka F sledi, da je vsaka topološka krožnica v ravnini lokalno ploščata. Za višjerazsežne sfere pa to ne velja – za vsak $n \geq 3$ obstajajo topološke $(n-1)$-sfere v $\mathbb{R}^n$, ki niso lokalno ploščate. Najbolj znana primera sta Alexandrova[5] rogata sfera in Fox[6]-Artinova[7] sfera v $\mathbb{R}^3$. Navedimo še splošno verzijo Schoenfliesovega izreka; dokaz lahko bralec najde v [**2**].

Izrek 9.4. *Naj bo $S \subset \mathbb{S}^n$ lokalno ploščata topološka $(n-1)$-sfera. Potem obstaja homeomorfizem $h\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, ki S preslika na $\mathbb{S}^{n-1}$.*

10. Schoenfliesov izrek za poligonske krožnice

Naj bo $S \subset \mathbb{R}^2$ poligonska krožnica, torej topološka krožnica, ki je unija končno mnogo daljic, V notranjost S in $K = \overline{V}$. Najprej pokažimo, da je K polieder. Triangulacijo, naravno določeno s S, lahko dobimo na naslednji način. Vsaki daljici (1-simpleksu) τ_i v S pridružimo njeno nosilno premico L_i, $i \in \mathbb{I}$, ta pa določa dva zaprta polprostora $P_i^{\pm}$, ki sta zaprtji komponent komplementa $\mathbb{R}^2 \setminus L_i$. Neprazni preseki poddružin teh polprostorov določajo politope – *politop* $R = \bigcap_{j \in \mathbb{J}} P_j^{\varepsilon_j}$, kjer je $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$ in $\varepsilon_j \in \{+,-\}$, je zaprta konveksna ravninska množica, omejena z daljicami in poltraki (če je neomejena). Če R ni prazna, je lahko (zaprto) ravninsko območje, premica, poltrak, daljica ali točka. Omejen politop z nepraznο notranjostjo je torej konveksen mnogokotnik, ki ga lahko trianguliramo (razdelimo na trikotnike) tako, da neko točko v njegovi notranjosti z daljicami povežemo z njegovimi oglišči. Iskani kompleks, ki določa triangulacijo K, sestoji iz vseh tako dobljenih trikotnikov, ki ležijo v K, skupaj z njihovimi lici.

Pri konstrukciji homeomorfizma si bomo pomagali s kosoma linearnimi preslikavami, tj. takimi, ki so na vsakem simpleksu enake zožitvi neke afine preslikave. Če sta $\sigma = [x_0, \ldots, x_n]$ in $\tau = [y_0, \ldots, y_n]$ n-simpleksa v $\mathbb{R}^k$, je afini homeomorfizem σ na τ dan s predpisom

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i x_i \mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i y_i.$$

Pri tem je preslikava odvisna od vrstnega reda oglišč simpleksov; če se nekaj istoležnih oglišč ujema, je preslikava na ustreznem licu identiteta. Ta homeomorfizem lahko v jeziku linearne algebre opišemo kot zožitev afine preslikave, ki x_0 preslika v y_0 in bazni vektor $x_i - x_0$ v vektor $y_i - y_0$ za $i = 1, \ldots, n$, na simpleks σ.

Izrek 10.1. *Za poligonsko krožnico $S \subset \mathbb{R}^2$ obstaja homeomorfizem ravnine s kompaktnim nosilcem, ki S preslika na rob trikotnika.*

[5]James Waddell Alexander II (1888–1971), ameriški matematik, pomemben zaradi svojega dela v topologiji. Konstrukcija rogate sfere sodi v leto 1924.

[6]Ralph Hartzler Fox (1913–1973), ameriški matematik, pomemben zaradi svojega dela v diferencialni topologiji in teoriji vozlov. Skupaj z Artinom je leta 1948 odkril divji lok, ki je osnova za konstrukcijo sfere, ki ni lokalno ploščata.

[7]Emil Artin (1898–1962), avstrijski matematik, pomemben zaradi svojega dela v algebraični teoriji števil in v abstraktni algebri.

Kot v topološkem primeru bi lahko predpisali trikotnik in homeomorfizem na krožnici.

Dokaz. Naj bo R kvadrat, ki vsebuje S v svoji notranjosti. Stranice R in daljice v S kot zgoraj določajo triangulacijo $\mathcal{T}$ za R in triangulacijo podpoliedra K, ki je zaprtje notranjosti S. Z indukcijo na število trikotnikov v K bomo pokazali, da obstaja homeomorfizem kvadrata R, ki je na robu R identiteta in preslika K na trikotnik. Če je K že trikotnik v $\mathcal{T}$, ni kaj dokazovati.

Naj K vsebuje $n+1$ trikotnikov iz $\mathcal{T}$ in naj trditev velja za vse poligonske krožnice v notranjosti R, za katere je zaprtje omejene komponente sestavljeno iz največ n trikotnikov v $\mathcal{T}$, $n \geq 1$. Predpostavimo, da je v K vsaj en trikotnik σ, katerega presek s S je enak eni ali dvema stranicama σ. Obravnavajmo najprej primer, ko $\sigma \cap S$ sestoji iz dveh stranic. Tretja stranica, označimo jo $st \leq \sigma$, ne leži v S in je stranica nekega trikotnika ρ v K. Naj bodo $\tau_1, \ldots, \tau_k$ vsi trikotniki v $\mathcal{T}$, ki imajo s σ skupno oglišče v nasproti st, oštevilčeni tako, da si τ_i in τ_{i+1} delita skupno stranico, poleg tega pa je s oglišče τ_1 in t oglišče τ_k. Privzeti smemo, da je unija $\sigma \cup \bigcup_{i=1}^k \tau_i$ konveksna. Če ni, potem lahko zaporedoma na stranicah trikotnikov τ_i, $i = 1, \ldots, k$, ki imajo v za eno oglišče, z izjemo stranic sv in tv, izberemo novo oglišče in trikotnika τ_i in τ_{i+1} razdelimo na dva z daljicama, ki povezujeta novo oglišče s tistim, ki leži nasproti obravnavani stranici. Za τ_i potem vzamemo novo nastale trikotnike z ogliščem v.

Opisali bomo homeomorfizem, ki bo iz K izločil σ, njegov nosilec pa bo vsebovan v $\sigma \cup \rho \cup \bigcup_{i=1}^k \tau_i$. Označimo z u razpolovišče stranice st in z z razpolovišče daljice uw, kjer je w oglišče ρ nasproti st. Trikotnik σ razdelimo na dva z daljico vu, trikotnik ρ pa na štiri dele tako, da ga najprej razdelimo z uw, nato pa dobljena trikotnika še na dva z daljicama sz in tz. Za iskani homeomorfizem vzamemo kosoma linearno preslikavo, ki preslika simplekse po naslednjih pravilih:

$$[s,u,w] \to [s,z,w], \quad [t,u,w] \to [t,z,w], \quad [s,v,u] \to [s,u,z], \quad [t,v,u] \to [y,u,z],$$

vsakega od τ_i pa preslika tako, da premakne v v u, nasprotno stranico pa fiksira. Ker je tako dobljena preslikava identiteta na robu unije omenjenih simpleksov, jo lahko na komplementu razširimo kot identiteto. Slika K pri tem homeomorfizmu ne vsebuje več simpleksa σ.

Naj bo sedaj $\sigma \cap S$ ena stranica st. Označimo z v oglišče σ nasproti st, z ρ trikotnik v $\mathcal{T}$, ki si s σ deli stranico st, z w oglišče ρ nasproti st, z u razpolovišče daljice st in z z razpolovišče daljice uw. Naj bodo $\tau_1, \ldots, \tau_{k+1}$ vsi trikotniki v $\mathcal{T} \setminus \{\sigma\}$, ki imajo v za oglišče, našteti tako, da je sv stranica τ_1, zaporedna trikotnika τ_i in τ_{i+1} si delita stranico, vt pa je stranica τ_{k+1}. Pri konstrukciji preslikave smemo privzeti, da je k liho število – če ni, enega od trikotnikov τ_i razdelimo s simetralo kota pri v. Označimo oglišča trikotnikov τ_i na stranicah nasproti v zaporedoma s $s_0 = s, s_1, \ldots, s_k, s_{k+1} = t$. Trikotnik σ razdelimo na $k+1$ podtrikotnikov tako, da na stranici vt zaporedoma izberemo različne točke $v_1 = v, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1} = t$ in jih z daljicami znotraj σ povežemo z u; naj bo še $v_0 = s$. Potrebujemo še točke x_i, s pomočjo katerih razrežemo trikotnike τ_j: izberimo $x_i = s_i$ za sode i, za lihe i pa naj bo x_i razpolovišče vs_i, $i = 0, \ldots, k+1$. Za iskani homeomorfizem vzamemo kosoma linearno preslikavo, ki preslika simplekse takole:

$$\begin{aligned}
&[s,w,z] \to [s,w,u], \quad [t,w,z] \to [t,w,u], \quad [s,z,u] \to [s,u,v], \quad [t,z,u] \to [t,u,v], \\
&[v_i,u,v_{i+1}] \to [x_i,v,x_{i+1}], \quad \text{za } i = 0, \ldots, k, \\
&[s_i,v,s_{i+1}] \to [s_i,x_{i+1},s_{i+1}], \quad \text{za sode } i = 0, \ldots, k, \\
&[s_i,v,s_{i+1}] \to [s_i,x_i,s_{i+1}], \quad \text{za lihe } i = 0, \ldots, k.
\end{aligned}$$

Na komplementu zgornjih simpleksov to preslikavo ponovno razširimo z identiteto.

Trdimo, da je v K vsaj en trikotnik, ki seka S na enega od zgornjih dveh načinov, torej v eni ali dveh stranicah. Denimo, da noben trikotnik v K ne izpolnjuje tega pogoja. Potem vsi trikotniki v K, ki imajo s S skupno stranico, sekajo S v stranici in nasprotnem oglišču. Izberimo en tak trikotnik σ, naj bo $v \in S$ oglišče stranice σ, ki leži v S, in $w \in S$ oglišče σ nasproti te stranice. Potem v in w razdelita S na dva loka, S_1 in S_2. Označimo s S_1 tistega, ki ne vsebuje stranice σ. Naj bo $L \subset S_1$ podlok, katerega krajišči sta oglišči nekega trikotnika τ, nobena stranica τ pa ne leži na L, in ki ne vsebuje pravega podloka s to lastnostjo. Lok L mora imeti več kot eno daljico, saj ne vsebuje stranice trikotnika τ. Daljica v L, ki izhaja iz oglišča L, je stranica nekega trikotnika ρ v K, ki leži v zaprtju notranjosti krožnice, sestavljene iz L in daljice med krajiščema tega loka. Zaradi minimalnosti L bodisi nasprotno oglišče ρ ne leži na L (in torej ne leži na S) bodisi L vsebuje še eno stranico trikotnika ρ, kar je v nasprotju s predpostavko. $\square$

11. Schoenfliesov izrek za topološke krožnice

Najprej bomo dokazali, da lahko zaprtje notranjosti homeomorfno preslikamo na disk tako, da razširimo poljuben homeomorfizem robu na krožnico. To je glavni korak v dokazu izreka F. Predstavljeni dokaz je povzet po [**4**].

Izrek 11.1. *Naj bo $S \subset \mathbb{R}^2$ topološka krožnica in $h\colon S \to \mathbb{S}^1$ homeomorfizem. Potem obstaja homeomorfizem H zaprtja notranjosti S na $\mathbb{B}^2$, ki je razširitev h.*

Če je zaprtje notranjosti topološke krožnice S unija daljic, ki povezujejo točke na krožnici z neko točko v notranjosti ter sekajo krožnico le v eni točki (tedaj je zaprtje notranjosti zvezdasta množica), lahko iskano razširitev poiščemo kot v lemi 9.2. V splošnem primeru bomo zaprtje notranjosti razdelili na takšne podmnožice in H konstruirali induktivno.

Naslednji rezultat neposredno sledi iz Jordanovega izreka in je njegova posplošitev na vložitev Θ grafa v ravnino, tj. grafa z dvema vozliščema, ki ju povezujejo tri povezave. Tak objekt nastane, če topološki krožnici $S \subset \mathbb{R}^2$ dodamo lok Γ s krajiščema na S, odprti lok pa leži v notranjosti S. V primeru, ko je Γ daljica, jo imenujemo *tetiva* topološke krožnice, sicer pa *topološka tetiva* in v luči spodnje leme rečemo, da Γ deli notranjost S na dva *odseka*.

Lema 11.2. *Naj bo $S \subset \mathbb{R}^2$ topološka krožnica, $A, B \in S$ in Γ topološka tetiva S s krajiščema A in B. Potem Γ deli notranjost V krožnice S na dve komponenti, torej ima $\mathbb{R}^2 \setminus (S \cup \Gamma)$ tri komponente: omejeni komponenti ležita v V in sta omejeni s topološkima krožnicama $S_1 \cup \Gamma$ in $S_2 \cup \Gamma$, kjer sta S_1 in S_2 komponenti $S \setminus \{A, B\}$, neomejena komponenta pa je enaka neomejeni komponenti W komplementa S.*

Dokaz. Po Jordanovem izreku ima komplement $T_i = S_i \cup \Gamma$ za $i = 1, 2$ dve komponenti in ker je $T_i \subset \overline{V}$, je omejena komponenta V_i vsebovana v V, neomejena komponenta W_i pa vsebuje S_{3-i} in posledično $V_{3-i} \cup W$. Od tod sledi, da je unija $V_1 \cup V_2$ nepovezana. Neomejena komponenta komplementa $S \cup \Gamma$ je torej enaka W, $V \setminus \Gamma$ pa razpade na dva odseka V_1 in V_2. $\square$

Naj bo $\Gamma = AB$ tetiva topološke krožnice S in $\Gamma' = h(A)h(B)$ tetiva krožnice $\mathbb{S}^1$. Razširimo najprej h na daljico Γ tako, da to preslika linearno na Γ'. Potem je dovolj pokazati, da je mogoče h razširiti do homeomorfizmov H_i zaprtij odsekov tetive Γ na ustrezna odseka kroga, določena z Γ', saj se tako dobljena homeomorfizma ujemata na preseku in zato sestavljata homeomorfizem iz izreka 11.1. Konstrukcija bo potekala induktivno, na vsakem koraku bomo poiskali razširitev h na del odseka, ki ga od S odreže tetiva.

Trditev 11.3. *Naj bo T topološka krožnica, sestavljena iz daljice Γ in loka L, ki se stikata v krajiščih, ter h vložitev loka L v $\mathbb{S}^1$. Potem obstajata lok M z istimi krajišči kot L, ki seka L v podmnožici M^* in je unija te množice ter števno mnogo tetiv krožnice T, ter vložitev H zaprtja notranjosti $M \cup \Gamma$ v $\mathbb{B}^2$, ki se na M^* ujema s h in je linearna na vseh daljicah v $M \cup \Gamma$.*

Dokaz. Označimo z A in B krajišči Γ in z D razpolovišče te daljice. Naj bo C tisto presečišče poltraka, ki izhaja iz D pravokotno na Γ na tisti strani Γ, ki leži v notranjosti T, z L, ki je najbližje D. Točka C razdeli L na podloka L_A oziroma L_B, ki vsebujeta A oziroma B. Če daljica AC leži v zaprtju notranjosti T, lok L_A v konstrukciji M nadomestimo s to daljico, torej postavimo $M_A = AC$. Sicer označimo s K konveksno ogrinjačo unije daljice AC in $L_A \cap \triangle ADC$. Potem v M lok L_A nadomestimo s krivuljo M_A, ki nastane iz meje K po odstranitvi odprte daljice AC. Množica M_A sestoji iz dela M_A^*, ki leži v L_A, komplement pa sestavlja števno mnogo tetiv krožnice T. Pokazali bomo, da lahko M_A zvezno parametriziramo s koti pri D ter da na zaprtju notranjosti krožnice $DA \cup M_A \cup CD$ obstaja razširitev homeomorfizma h, ki je linearna na vseh robnih daljicah.

Iz konveksnosti množice K sledi, da poljuben poltrak iz D znotraj kvadranta, določenega s kotom $\angle ADC$, seka M_A v natanko eni točki. Poljuben tak poltrak P_φ lahko opišemo s kotom $\varphi \in [0, \pi/2]$, ki ga oklepa s poltrakom iz D skozi A (pri tem se ne oziramo na standardno izbiro predznaka oziroma usmeritve kota). Naj bo Q_φ tisto presečišče poltraka P_φ z množico K, ki je najbližje D. Trdimo, da je $f\colon [0, \pi/2] \to (0, \infty)$, kjer je $f(\varphi)$ dolžina daljice DQ_φ, zvezna in torej določa zvezno parametrizacijo loka M_A. Za $\psi \in [0, \varphi)$ je zgornja meja za $f(\psi)$ dolžina daljice DQ', kjer je Q' presek P_ψ z daljico AQ_φ, ta pa ne presega vsote $f(\varphi)$ in dolžine daljice $Q'Q_\varphi$. Iz sinusnega izreka v trikotniku $DQ'Q_\varphi$ sledi

$$|Q'Q_\varphi| = \frac{|DQ'|}{\sin \alpha} \sin(\varphi - \psi) \leq m_\varphi(\varphi - \psi),$$

kjer je $\alpha = \angle DQ_\varphi A$. Analogno velja tudi za $\psi \in (\varphi, \pi/2]$. Ker ležijo daljice DQ' znotraj trikotnika ADC, je njihova dolžina omejena neodvisno od izbire poltraka. Če φ omejimo stran od krajišč intervala, je tudi $\sin\alpha$ omejen stran od nič (kar preverimo podobno kot zveznost v krajiščih intervala spodaj), zato za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak m, da velja

$$f(\psi) \leq f(\varphi) + m|\psi - \varphi|$$

za vse $\varphi \in [\varepsilon, \pi/2 - \varepsilon]$ in $\psi \in [0, \pi/2]$. Od tod sledi, da je f Lipschitzova na $[\varepsilon, \pi/2 - \varepsilon]$ za vsak $\varepsilon > 0$ in zato zvezna na $(0, \pi/2)$. Preverimo še zveznost v krajiščih; ker je argument v obeh enak, poglejmo le zveznost pri $\varphi = 0$. Kot zgoraj sledi, da je $f(\psi) \leq f(0) + m\psi$, torej je f navzgor polzvezna (ker je $\angle DAC$ oster, velja celo $f(\psi) \leq f(0)$). Če torej f ni zvezna, obstaja tak $\delta > 0$ in zaporedje kotov ψ_n z limito 0, da je $f(0) - f(\psi_n) > \delta$ za vse n, torej poltrak P_0 seka K pred A; pri tem upoštevamo, da je konveksna ogrinjača kompaktne množice kompaktna (saj je enaka preseku vseh zaprtih polravnin, ki to množico vsebujejo). Presečišče v $K \cap P_0$, ki je najbližje D, pa mora ležati v L, kar je v nasprotju s tem, da Γ seka L le v krajiščih. Sledi, da je f zvezna tudi v krajiščih intervala.

Razširitev homeomorfizma h na zaprtje notranjosti krožnice $DA \cup M_A \cup CD$ dobimo tako, da najprej vsako tetivo krivulje $L_A \subset T$, ki je del M_A, linearno preslikamo na tetivo $\mathbb{S}^1$, katere krajišči sta sliki krajišč tetive s h. Prav tako DA linearno preslikamo na ustrezno polovico tetive $\mathbb{S}^1$ s krajiščema $h(A)$ in $h(B)$, nazadnje pa še DC linearno na daljico med slikama krajišč. Za razširitev tako dobljene preslikave H na notranjost potrebujemo še funkcijo $g\colon [\zeta_0, \zeta_1] \to (0, \infty)$, kjer sta ζ_0 in ζ_1 polarna kota, ki pripadata točkama $h(A)$ in $h(C)$ na $\mathbb{S}^1$ glede na izhodišče $H(D)$, ki analogno f parametrizira sliko M_A pri razširitvi H (tu si mislimo, da je $\zeta_0 < \zeta_1$ – v nasprotnem primeru ustrezno popravimo zapis). Ker je ta slika unija točk na krožnem loku med $h(A)$ in $h(C)$, ki jih povezujejo tetive tega loka, je g zvezna (argument je podoben kot za zveznost f). Zožitev homeomorfizma H na M_A določa homeomorfizem $[0, \pi/2] \to [\zeta_0, \zeta_1]$, H pa razširimo tako, da daljico DQ_φ linearno preslikamo na daljico $H(D)H(Q_\varphi)$. Ker sta dolžini daljice in njene slike zvezno odvisni od kota, je H res homeomorfizem.

Enako konstrukcijo ponovimo še na krožnici $DB \cup L_B \cup CD$. Dobljeni razširitvi se po konstrukciji ujemata na daljici DC, zato skupaj sestavljata iskani homeomorfizem. □

Dokaz izreka 11.1. Najprej izberemo poljubno tetivo Γ topološke krožnice S, ki jo razdeli na dva podloka S_1 in S_2. Po trditvi 11.3 obstaja razširitev H_1 na notranjost N topološke krožnice M_1, ki jo dobimo kot unijo razširitev, ki pripadata $S_1 \cup \Gamma$ ter $S_2 \cup \Gamma$, saj se ti po konstrukciji na preseku Γ ujemata. Pri tem je $M_1 \cap S = M_1^*$, preostanek M_1 pa tvori števna družina tetiv krožnice S, na katerih je H linearna. Na naslednjem koraku uporabimo trditev na vseh tistih odsekih, določenih s tetivami S v M_1, ki ne sekajo notranjosti M_1. Tako dobimo M_2, ki seka S v M_2^*. Dobljene vložitve (definirane na odsekih) skupaj s H_1 sestavljajo injektivno preslikavo H_2, saj se na presekih ujemajo s H_1. Preveriti moramo še zveznost tako dobljene H_2. Če ima točka x v domeni H_2 okolico, ki seka le končno mnogo dodanih odsekov, je na tej okolici zvezna zaradi zveznosti delnih preslikav. Težave z zveznostjo bi torej lahko nastopile le v točkah iz $M_2^* \subset S$. Naj bo $x \in M_2^*$ taka, da vsaka njena okolica seka neskončno mnogo dodanih odsekov. Izberimo (dovolj majhen) $\varepsilon > 0$ in tako okolico V točke x, da H_1 preslika $V \cap \overline{N}$ v $K(h(x), \varepsilon)$, $V \cap S$ pa se s h homeomorfno preslika na $K(h(x), \varepsilon) \cap \mathbb{S}^1$. Če sta obe oglišči odseka vsebovani v V, je po konstrukciji slika odseka s H_2 vsebovana v $K(h(x), \varepsilon)$. Znotraj okolice V sta lahko največ dve oglišči odsekov, katerih drugi oglišči ne pripadata V. Poleg tega lahko V izberemo tako, da ne seka odsekov, katerih oglišča niso v V – ker je razdalja x do oglišč odseka navzdol omejena, je navzdol omejena tudi razdalja do tetive, ki določa odsek. Sledi, da je H_2 zvezna tudi v taki točki x.

Konstrukcijo induktivno nadaljujemo in tako definiramo preslikavo H kot limito vložitev H_n, definiranih na zaprtjih notranjosti krožnic M_n. Dodatno H na $S \setminus M^*$ razširimo s h, kjer smo označili $M^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^*$, torej se na S ujema s h. Preveriti moramo, da domena H vsebuje notranjost S ter da je H homeomorfizem. To bo sledilo iz gostosti množice M^* v S. Denimo, da M^* ni gosta v S, in izberimo neki maksimalen podlok L v S, ki z (morebitno) izjemo krajišč A, B ne seka M^*. Točki A in B ne moreta obe ležati v nekem M_n^*, saj bi bila v tem primeru daljica AB del M_n in bi v naslednjem koraku konstrukcije L s simetralo daljice AB razdelili na dva podloka, torej bi L poleg krajišč vseboval vsaj še eno točko iz M^*. Naj bosta torej A in B limiti zaporedij $(A_n)_n$ in $(B_n)_n$ točk v M_n^* (eno od teh je lahko tudi konstantno od nekod dalje). Ker daljice A_nB_n »konvergirajo« proti AB, simetrala daljice A_nB_n za dovolj velike n na strani, kjer je AB, seka to daljico in posledično tudi L, kar je spet v nasprotju s predpostavko, da L ne vsebuje točk iz M^*.

Naj bo x poljubna točka v notranjosti S. Pokazati želimo, da leži v notranjosti M_n za dovolj velike n. Če bi to ne veljalo, bi za vsak n obstajala taka tetiva Γ_n krožnice S, vsebovana v M_n, da bi x pripadal zaprtju zunanjosti M_n, bolj natančno zaprtju »majhnega« odseka N_n, ki ga določa Γ_n. Ker gre zaradi gostosti točk v M^* diameter odsekov N_n proti 0, ko n raste čez vse meje, bi to – v nasprotju s predpostavko – pomenilo, da x leži na S. Vsaka točka v notranjosti S torej leži v notranjosti neke M_n in zato je H na neki okolici te točke enaka H_n, torej zvezna v tej točki.

Preveriti moramo še zveznost H v točkah na S. Ker je S kompaktna, za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da sta za poljubni točki na S, ki sta oddaljeni manj kot 2δ, njuni sliki pri h oddaljeni manj kot ε. Zaradi gostosti M^* v S za ta δ obstaja tak n_δ, da je za vsak $n > n_\delta$ diameter odseka med poljubnima »zaporednima« točkama v M_n^* manjši od δ. Poljuben $x \in S$ ima okolico v zaprtju notranjosti M_{n_δ}, ki se preslika v $K(h(x), 2\varepsilon)$, saj je $H|_{M_{n_\delta}} = H_{n_\delta}$. Poleg tega pa H vse odseke v M_n za $n > n_\delta$, ki sekajo $K(x, \delta)$, preslika v množice z diametrom manjšim od ε, torej znotraj $K(h(x), 2\varepsilon)$.

Očitno H notranjost S bijektivno preslika v notranjost enotske krožnice $\mathbb{S}^1$, na meji S je enaka h, zato je preslikava H homeomorfizem, saj je zvezna in zaprta. □

Dokaz izreka F. Naj bo $P \subset \mathbb{R}^2$ tako velik kvadrat, da vsebuje S in $\mathbb{S}^1$ v svoji notranjosti, in označimo mejo kvadrata s Q. Izberimo navpično premico, ki seka S v vsaj dveh točkah in naj bosta $D_A = A'A$ in $D_B = BB'$ daljici na tej premici, ki povezujeta točki A', B' iz Q s točkama A, B iz S, sicer pa ležita v komplementu $S \cup Q$. Izberimo disjunktna loka L_A in L_B, ki povezujeta A' s $h(A)$ in B' s $h(B)$ ter z izjemo krajišč ne sekata $\mathbb{S}^1 \cup Q$. Homeomorfizem $h\colon S \to \mathbb{S}^1$ razširimo do homeomorfizma $\widehat{h}\colon S \cup Q \cup D_A \cup D_B \to \mathbb{S}^1 \cup Q \cup L_A \cup L_B$ tako, da je na Q identiteta ter daljico D_A (D_B) homeomorfno preslika na L_A (L_B). S pomočjo izreka 11.1 lahko $\widehat{h}$ razširimo do homeomorfizma P nase, ki je na robu identiteta in se na S ujema s h, nato pa ga razširimo na celotno ravnino z identično preslikavo na komplementu P. □

Invarianca odprtih množic

V splošnem topološkem prostoru X podmožica V, ki je homeomorfna odprti podmnožici tega prostora, ni njuno odprta v X. To se lahko zgodi že v »zelo lepih« prostorih, npr. zaprta enotska krogla $\mathbb{B}^n$ je odprta sama v sebi, hkrati pa je homeomorfna zaprti krogli $\mathbb{B}^n_{1/2}$, ki ni njena odprta podmnožica. V luči tega morda presenetljiv rezultat je, da se za odprte množice v evklidskem prostoru to ne more zgoditi.

Izrek G (Invarianca odprtih množic). *Naj bosta $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfni podmnožici in naj bo U odprta. Potem je tudi V odprta v $\mathbb{R}^n$.*

Iz tega izreka sledi morda na videz pričakovan rezultat, da je razsežnost evklidskega prostora topološka lastnost, to pa omogoča, da govorimo o razsežnosti mnogoterosti. Manj »očiten« ta rezultat postane v luči premisleka, da je razsežnost evklidskega prostora definirana kot razsežnost vektorskega prostora, homeomorfizmi pa v splošnem ne ohranjajo te strukutre. Poleg tega obstajajo zvezne preslikave, ki dvigujejo razsežnost, na primer krivulje, katerih zaloga vrednosti je kvadrat – primer take krivulje je Peanova[8] krivulja.

Izrek H (Invarianca razsežnosti). *Evklidska prostora $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ sta homeomorfna natanko tedaj, ko je $m = n$.*

Oba navedena izreka sledita iz Brouwerjevega izreka o odprti preslikavi, ki ga je dokazal leta 1912.

12. Brouwerjev izrek o odprti preslikavi

Izrek 12.1. *Naj bo U odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$ ter $f: U \to \mathbb{R}^n$ zvezna injektivna preslikava. Potem je f odprta preslikava; posebej je $f(U)$ odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Dovolj je pokazati, da f vsako odprto kroglo, katere zaprtje leži v U, preslika v odprto podmnožico $\mathbb{R}^n$, saj take krogle tvorijo bazo za U. Naj bo torej $K(x, r)$ taka krogla, označimo njeno zaprtje s K, njeno mejno sfero pa s $S = S(x, r)$. Ker sta K in S kompaktni, je zožitev f na ti množici zaprta vložitev, torej velja $K' = f(K) \approx K$ in $S' = f(S) \approx S$. Po Jordan-Brouwerjevem separacijskem izreku ima $\mathbb{R}^n \setminus S'$ natanko dve komponenti, ki sta odprti v $\mathbb{R}^n$, po drugi strani pa je $\mathbb{R}^n \setminus S'$ unija dveh povezanih podmnožic: $f(K(x, r))$, ki je slika povezane množice, in $\mathbb{R}^n \setminus K'$, ki je povezana po izreku D. Vidimo torej, da je $f(K(x, r))$ ena od komponent $\mathbb{R}^n \setminus S'$ in zato odprta. $\square$

Dokaz izreka G. Naj bo $h: U \to V$ homeomorfizem. Potem je h zvezna in injektivna preslikava $U \to \mathbb{R}^n$, zato je po izreku 12.1 njena slika $f(U) = V$ odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$. $\square$

Dokaz izreka H. Če je $m = n$, sta prostora enaka. Denimo torej, da sta za neka $n < m$ prostora $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ homeomorfna in naj bo $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizem. Označimo z $i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \{0^{m-n}\} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (x, 0^{m-n})$ standardno vložitev $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$. Potem je kompozitum $f = i \circ h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ zvezna injektivna preslikava, njena slika $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times \{0^{m-n}\}$ pa ima v nasprotju z izrekom 12.1 prazno notranjost v $\mathbb{R}^m$. $\square$

[8]Giuseppe Peano (1858–1932), italijanski matematik, utemeljitelj matematične logike in teorije množic. Prvi primer krivulje, ki zapolni prostor, je odkril leta 1890.

Poliedrska struktura ploskev

Ploskev označuje povezano topološko 2-mnogoterost. Mi se bomo omejili na kompaktne ploskve, ker je v tej družini topoloških prostorov problem klasifikacije, tj. razvrstitve v homeomorfnostne razrede, rešljiv. Eden od možnih načinov klasifikacije ploskev temelji na spodnjem izreku, ki zagotavlja, da lahko vsako kompaktno ploskev predstavimo kot kvocientni prostor družine (disjunktnih) mnogokotnikov v ravnini, katerih stranice paroma identificiramo z linearnimi homeomorfizmi – ploskvi, dobljeni na tak način, bomo rekli *poliedrska* ploskev. Poliedrska ploskev dopušča tudi strukturo simplicialnega kompleksa (oziroma topološkega poliedra), je pa v splošnem za triangulacijo potrebnih veliko več simpleksov kot pa mnogokotnikov v opisani poliedrski strukturi.

Izrek I (Radó[9]). *Poljubna kompaktna ploskev je poliedrska.*

13. Eulerjeva karakteristika in orientabilnost

Poliedrski ploskvi lahko pridružimo *Eulerjevo*[10] *karakteristiko*, ki opisuje kombinatorične lastnosti poliedrske ploskve. Pomemben in na prvi pogled presenetljiv rezultat je, da je Eulerjeva karakteristika topološka invarianta ploskve, torej je neodvisna od predstavitve dane kompaktne ploskve kot poliedrske ploskve.

Definicija 13.1. Naj bo kompaktna ploskev P predstavljena kot kvocient (končne) družine disjunktnih mnogokotnikov $P_i \subset \mathbb{R}^2$, $i \in \mathbb{I}$, katerih stranice so paroma identificirane z linearnimi homeomorfizmi. *Poliedrska struktura* $K = (K^{(0)}, K^{(1)}, K^{(2)})$ na P je določena z družinami *j-celic* $K^{(j)}$ v P za $j \in \{0,1,2\}$, kjer so

- 0-celice slike oglišč mnogokotnikov P_i pri kvocientni projekciji;
- 1-celice slike stranic mnogokotnikov P_i pri kvocientni projekciji;
- 2-celice slike mnogokotnikov P_i pri kvocientni projekciji.

Eulerjeva karakteristika $\chi(P,K)$ ploskve P s poliedrsko strukturo K je enaka

$$\chi(P,K) = |K^{(0)}| - |K^{(1)}| + |K^{(2)}|.$$

Ploskev P je disjunktna unija *odprtih* celic, ki so zapovrstjo slike oglišč, stranic brez krajišč in notranjosti mnogokotnikov.

Izrek 13.2. *Eulerjeva karakteristika kompaktne ploskve P je topološka invarianta, torej neodvisna od poliedrske strukture na P, zato jo označimo s $\chi(P)$.*

Pojem orientacije na mnogoterosti, ki je topološki polieder, lahko razširimo tudi na poliedrske ploskve. Čeprav je orientabilnost opisana glede na poliedrsko strukturo, pa je topološka lastnost.

Definicija 13.3. *Orientacija* mnogokotnika K je dana z izbiro usmeritve njegovega robu. Če si orientirana mnogokotnika delita skupno stranico, rečemo, da sta *skladno orientirana*, če določata nasprotni usmeritvi te stranice.
Poliedrska ploskev je *orientabilna*, če lahko izberemo orientacije mnogokotnikov v poliedrski strukturi tako, da v vsaki 1-celici, ki je slika dveh stranic mnogokotnikov v poliedrski strukturi, ti stranici določata nasprotni usmeritvi. *Orientacija* poliedrske mnogoterosti je izbira skladnih orientacij mnogokotnikov v poliedrski strukturi.

V poliedrski strukturi na ploskvi se lahko zgodi, da se identificirata dve stranici istega mnogokotnika, zato je pogoj orientabilnosti poliedrske ploskve na videz bolj zapleten – v takem primeru zahtevamo, da lepilni homeomorfizem obrne usmeritev daljice. V resnici vsako poliedrsko ploskev

[9] Tibor Radó (1895–1965), madžarski matematik, znan po svojem delu v topologiji, analizi in računalništvu. Leta 1925 je pokazal, da ima vsaka kompaktna ploskev v bistvu enolično strukturo topološkega poliedra.

[10] Leonhard Euler (1707–1783), švicarski matematik, fizik, astronom, logik in inženir. V matematiki je posebej pomembno njegovo delo v infinitezimalnem računu, teoriji grafov, topologiji in analitični teoriji števil.

lahko predstavimo kot kvocientni prsotor enega mnogokotnika, saj lahko različne komponente zlepimo vzdolž parov stranic.

Očitno ima mnogokotnik dve orientaciji, enako pa velja tudi za orientabilno (povezano) poliedrsko ploskev, saj sprememba orientacije enega mnogokotnika zaradi zahteve po skladnosti orientacij povzroči spremembo orientacije na vseh mnogokotnikih, ki tvorijo poliedrsko ploskev.

Izrek 13.4. *Orientabilnost poliedrske ploskve je topološka lastnost, tj. poliedrska ploskev je orientabilna glede na eno poliedrsko strukturo natanko tedaj, ko je orientabilna glede na vsako poliedrsko strukturo.*

14. Obstoj poliedrske strukture

Pri konstrukciji poliedrske strukture na ploskvi P si bomo pomagali z evklidskimi okolicami točk v P. Za poljubno karto na P, torej homeomorfizem $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2$ (ali $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2_+$), bomo v domeno $U \subset P$ včrtali poligonsko krožnico (ali lok s krajišči na robu mnogoterosti). Zaradi kompaktnosti P obstaja končna družina kart (atlas) na P, za katere unije notranjosti včrtanih krožnic pokrivajo P. Poliedrska struktura na P bo določena z zaprtji presekov notranjosti teh krožnic. Da bo ta konstrukcija res določala poliedrsko strukturo, pa moramo poskrbeti, da bo imel presek notranjosti poljubnih dveh krožnic le končno mnogo komponent. Tehnični pripomoček, s katerim si bomo pomagali, je transverzalnost preseka poligonskih lokov.

Definicija 14.1. Naj bosta K in L poligonski poti v $\mathbb{R}^2$, torej končni uniji daljic, kjer se »zaporedni« daljici na poti sekata v skupnem krajišču. Pravimo, da se K in L sekata *transverzalno*, če je $K \cap L$ končna množica točk, ki niso krajišča daljic v K in L. Družina poligonskih krivulj je v *splošni legi*, če se krivulje paroma sekajo transverzalno, presek vsakih treh krivulj pa je prazen.

Lema 14.2. *Naj bo $U \subset \mathbb{R}^2$ povezana odprta podmnožica, $\mathcal{D}$ končna družina daljic v U in $a, b \in U$ različni točki, ki ne ležita na nobeni daljici iz $\mathcal{D}$. Potem obstaja poligonski lok v U, ki povezuje a in b ter seka vse daljice v $\mathcal{D}$ transverzalno.*

Dokaz. Ker je $\mathbb{R}^2$ lokalno povezan z daljicami, je vsaka povezana odprta podmnožica v $\mathbb{R}^2$ povezana s poligonskimi potmi. Če poligonska pot $\gamma\colon I \to U$ med a in b ni enostavna, obstajata $t_1 < t_2$ v I, da je $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Naj bo $[t_1', t_2'] \subset I$ maksimalen podinterval, ki vsebuje $[t_1, t_2]$ in za katerega velja $\gamma(t_1') = \gamma(t_2')$. Potem lahko pot γ skrajšamo v novo poligonsko pot med a in b tako, da izpustimo zožitev γ na $(t_1', t_2']$ in pot ustrezno reparametriziramo. Ker je pot γ sestavljena iz končno mnogo daljic, obstaja največ končno mnogo takih podintervalov. Po odstranitvi vseh dobimo kosoma linearno vložitev $\widehat{\gamma}$, katere slika je poligonski lok.

Pogoj transverzalnosti zagotovimo tako, da po potrebi malo premaknemo krajišča daljic, ki sestavljajo poligonski lok, z izjemo krajišč loka. Pri tem upoštevamo, da daljica ostane transverzalna na končno družino daljic, če njeni krajišči premaknemo dovolj malo. Privzemimo, da je $\widehat{\gamma}$ že transverzalna na (lahko prazno) poddružino $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ in izberimo $D \in \mathcal{D} \smallsetminus \mathcal{D}'$. Če neka daljica L v tiru $\widehat{\gamma}$ ni transverzalna na D, potem $D \cap L$ vsebuje krajišče ene od daljic ali pa skupno poddaljico. S poljubno majhnim premikom enega ali obeh krajišč L lahko dosežemo, da je presek transverzalen. Pri tem izberemo dovolj majhen premik, da ne pokvarimo transverzalnosti loka z daljicami v $\mathcal{D}'$ in da je rezultat premika še vedno lok. Induktivno sledi, da lahko lok $\widehat{\gamma}$ premaknemo s fiksiranimi krajišči tako, da bo transverzalen na vse daljice v $\mathcal{D}$. □

Za poljuben $x \in P$ naj bo U_x evklidska okolica točke x, ki je homeomorfna $\mathbb{R}^2$ za notranjo točko oziroma $\mathbb{R}^2_+$ za robno. Označimo s $\varphi_x\colon U_x \to \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^2_+)$ karto, ki preslika x v izhodišče, ter definirajmo $S_x = \varphi_x^{-1}(S)$, $V_x = \varphi_x^{-1}(V)$, $T_x = \varphi_x^{-1}(T)$ in $W_x = \varphi_x^{-1}(W)$, kjer so $S \subset \mathbb{R}^2$ rob kvadrata z oglišči $(\pm 1, \pm 1)$, V notranjost kvadrata z oglišči $(\pm 1/2, \pm 1/2)$, W notranjost komplementa kvadrata z oglišči $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ v kvadratu z oglišči $(\pm 2, \pm 2)$ ter T meja W.

Pokritje $\{V_x \,|\, x \in P\}$ kompaktne ploskve P ima končno podpokritje $\{V_{x_i} \,|\, i = 1, \ldots, n\}$; odslej bomo namesto indeksov x_i pisali kar i. Ideja dokaza izreka I je, da unija krožnic S_i razdeli ploskev P na končno družino območij, katerih zaprtja so homeomorfna zaprtim diskom, dve območji pa se lahko sekata v skupnih lokih na robu (tak lok je lahko izrojen v eno točko). Situacija je v splošnem bolj zapletena, saj ne vemo, kako komplicirani so lahko preseki različnih krožnic S_i. Želeno situacijo dosežemo tako, da naredimo preseke krožnic S_i transverzalne. Pri tem transverzalnost topoloških lokov na ploskvi P pomeni, da v okolici vsake presečne točke lokov obstaja karta na ploskvi, s katero se dela lokov preslikata na poligonska loka s transverzalnim presekom v sliki presečne točke.

LEMA 14.3. *Krožnice (oziroma loke) $S_i \subset P$ lahko zamenjamo s takimi krožnicami (oziroma loki s krajišči na robu P) S_i', ki ležijo v W_i, da je družina teh krivulj v splošni legi. Posebej je presek $S_i' \cap S_j'$ končna (lahko prazna) množica točk za poljubna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

DOKAZ. Induktivno bomo konstruirali krivulje (topološke krožnice oziroma loke) S_i' z naslednjimi lastnostmi:

(1) S_i' leži v W_i;
(2) zaprtje $S_i' \setminus S_i$ je unija krivulj v končnih družinah $\mathcal{D}_i^j \cup \mathcal{L}_i^j$ za $j = 1, \ldots, i-1$, kjer so krivulje v $\mathcal{D}_i^j$ poligonske glede na karto φ_i, krivulje v $\mathcal{L}_i^j$ pa glede na karto φ_j;
(3) S_i' seka S_j' za $j = 1, \ldots, i-1$ le v točkah na lokih v $\bigcup_{k=1}^{j} \mathcal{L}_i^k$ in ti preseki so transverzalni, družina $\{S_1', \ldots, S_i'\}$ pa je v splošni legi.

Postavimo $S_1' = S_1$. Pred indukcijskim korakom si oglejmo konstrukcijo S_2', ki je preprostejša. Če S_2 ne seka S_1', postavimo $S_2' = S_2$, $\mathcal{D}_2^1 = \emptyset$ in $\mathcal{L}_2^1 = \emptyset$. Denimo sedaj, da S_2 in S_1' nista disjunktni. Če je $S_2 \subset W_1$, jo zamenjamo s topološko krožnico (ali lokom, katerega krajišči ležita v P in ne na S_1') $S_2' \subset W_1 \cap W_2$, ki je poligonska glede na φ_1 in seka S_1' transverzalno; postavimo $\mathcal{D}_2^1 = \emptyset$, $\mathcal{L}_2^1 = S_2'$. Sicer naj bo L zaprtje nekega loka v $S_2 \cap W_1$, ki seka S_1'. Vsaj eno od krajišč A in B loka L leži na T_1; če je S_2 lok, njegovo krajišče lahko leži v W_1 in je krajišče podloka L. Če sta obe krajišči na T_1, izberimo loka D_A in D_B v $\overline{W}_1 \cap W_2$, ki izhajata iz krajišč A in B loka L in ne sekata S_1' ter sta poligonska glede na φ_2. V primeru, ko eno od krajišč pripada W_1 (denimo, da je to B), pa ga po potrebi le premaknemo, da ne sovpada s krajiščem S_1', in postavimo $D_B = B$. Sedaj podobno kot v lemi 14.2 lok L zamenjamo z lokom $D_A \cup L' \cup D_B$ v $W_1 \cap W_2$, ki ne seka $S_2 \setminus L$, kjer je L' poligonski lok glede na φ_1 ter seka S_1' transverzalno. Da zgornjo unijo lokov lahko skrajšamo v lok, sledi podobno kot v lemi: izpustimo začetni podlok v L' do zadnjega presečišča z D_A ter del D_A od tega presečišča dalje in podobno na drugi strani. Tako dobljena loka D_A in D_B dodamo v $\mathcal{D}_2^1$, L' pa v $\mathcal{L}_2^1$.

Konstrukcijo na naslednjih podlokih naredimo enako, le v komplementu že obstoječih lokov v $\mathcal{L}_2^1$; tako za L morda namesto celotnega zaprtja komponente $S_2 \cap W_1$ vzamemo del te, ki ne seka lokov v $\mathcal{L}_2^1$. Podlokov v S_2, ki sekajo S_1' in imajo krajišči na T_1, je le končno mnogo. Denimo, da bi jih bilo neskončno in na vsakem izberimo točko, ki leži na S_1'. Praslike teh točk pri vložitvi $\mathbb{S}^1 \to S_2$ imajo stekališče v $\mathbb{S}^1$, ki se zaradi zveznosti vložitve preslika v $S_1' \cap T_1 = \emptyset$. Sledi, da lahko induktivno vse loke kot zgoraj zamenjamo s poligonskimi, kar da družini $\mathcal{D}_2^1$ in $\mathcal{L}_2^1$ ter krivuljo S_2', ki je transverzalna na S_1'.

Denimo, da smo že konstruirali $S_1', \ldots, S_{i-1}'$ z zgornjimi lastnostmi. S_i' konstruiramo induktivno tako, da jo zaporedoma postavimo v splošno lego glede na S_j' in loke v $\mathcal{L}_k^j$, $k > j$, za $j = 1, \ldots, i-1$. Na prvem koraku S_i zamenjamo s $S_i^{(1)}$ podobno, kot smo S_2 zamenjali s S_2', le da za loka D_A in D_B zahtevamo, da njuni drugi krajišči ne ležita v $\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j'$, za lok L' pa zahtevamo, da je v splošni legi glede na S_1' in vse loke v $\bigcup_{k=2}^{i-1} \mathcal{L}_k^1$. Denimo, da smo že konstruirali $S_i^{(j-1)}$ za neki $j < i$. V naslednjem koraku spremenimo to krivuljo na komplementu notranjosti lokov v $\bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{L}_i^k$ tako, da je nova krivulja $S_i^{(j)}$ v splošni legi glede na S_j' in vse loke v $\bigcup_{k=j+1}^{i-1} \mathcal{L}_k^j$. Slednjo konstrukcijo lahko naredimo v komplementu $\bigcup_{k=1}^{j-1} S_k' \cup \bigcup_{k=1}^{j-1} \bigcup_{m=j}^{i-1} \mathcal{L}_m^k$, torej ne pokvarimo presekov, ki smo jih že naredili transverzalne. Iskana krivulja S_i' je $S_i^{(i-1)}$. □

Poliedrska struktura na P je sedaj določena z družino krivulj S_i', ki razdelijo ploskev P na končno mnogo območij, katerih zaprtja so homeomorfna zaprtim diskom. Takšne so namreč po konstrukciji »notranjosti« krivulj S_i', ki jih ostale krivulje S_j' s topološkimi tetivami razdelijo na več takšnih območij. Vsako tako območje ima na robu vsaj dva loka, ki sta podloka krivulj S_i', poleg tega pa lahko vsebuje še del robu ploskve. Na ta način lahko zaprtje območja identificiramo z mnogokotnikom, skupni loki na robu območij pa določajo identifikacije mnogokotnikov.

15. Invariantnost Eulerjeve karakteristike

Poliedrska struktura ploskve P določa vložen povezan graf G na P, katerega vozlišča so 0-celice, povezave so 1-celice, lica grafa pa so odprte 2-celice poliedrske strukture. Dodatni pogoj, ki je na sferi za povezan graf vedno izpolnjen, je, da so vsa lica grafa homeomorfna odprtim diskom. Obratno, vsak tak graf določa poliedrsko strukturo ploskve. V jeziku grafov Eulerjevo karakteristiko grafa dobimo tako, da od števila vozlišč odštejemo število povezav in rezultatu prištejemo število lic grafa, izrek 13.2 pa trdi, da je rezultat neodvisen od (povezanega) grafa, če so le njegova lica odprti diski.

TRDITEV 15.1. *Naj bosta K_1 in K_2 dve poliedrski strukturi na ploskvi P ter G_1 in G_2 pripadajoča grafa. Potem lahko graf G_2 premaknemo v graf G_2' tako, da sta G_1 in G_2' v splošni legi, tj. povezave grafov G_1 in G_2' se sekajo transverzalno v notranjosti P, na robu ploskve P pa vozlišča ne sovpadajo. Poleg tega grafa G_2 in G_2' določata izomorfni poliedrski strukturi ploskve P.*

DOKAZ. Privzeti smemo, da sta poliedrski strukturi K_i za $i = 1, 2$ tako fini, da se robne točke nobenega mnogokotnika ne identificirajo med sabo. Če ta pogoj ni izpolnjen, ga namreč lahko dosežemo s subdivizijo mnogokotnikov. To naredimo npr. tako, da najprej v notranjost vsake 1-celice dodamo še eno oglišče, nato pa v notranjost vsakega mnogokotnika včrtamo koncentrični mnogokotnik in povežemo istoležna oglišča obeh mnogokotnikov. Če bo premik tako dobljenega večjega grafa G_2' transverzalen na novi G_1', bo isti premik prvotnega grafa G_2 transverzalen tudi na prvotni graf G_1.

Kot v dokazu homogenosti mnogoterosti lahko s homeomorfizmom ploskve, ki ima nosilec v poljubno majhni vnaprej izbrani okolici vozlišča grafa G_2 v $\operatorname{int} P$, to vozlišče (po potrebi) premaknemo tako, da ne leži na grafu G_1. Podobno lahko s homeomorfizmom, ki ima nosilec v poljubno majhni vnaprej izbrani okolici vozlišča grafa G_1 v $\operatorname{int} P$ poskrbimo, da nobena povezava tako premaknjenega grafa G_2 ne vsebuje tega vozlišča (ker so povezave loki, imajo prazno notranjost v ploskvi). Na robu ploskve P lahko prav tako s homeomorfizmom ploskve premaknemo vozlišča G_2 tako, da nobeno ne sovpada z vozliščem G_1. Poskrbeti moramo še, da v $\operatorname{int} P$ vsaka povezava v tako dobljenem grafu G_2 seka povezave grafa G_1 transverzalno. Naj bo L povezava v G_2 in F lice $G_2 \setminus L$, ki vsebuje odprt lok $\operatorname{int} L$. Označimo s F' komplement množice vozlišč grafa G_1 v F. Za vsako povezavo L' grafa G_1, ki seka F', naj bo V' evklidska okolica na P, ki vsebuje odprto povezavo $\operatorname{int} L'$, dobljena kot notranjost unije zaprtij lic grafa G_1, ki si delita povezavo L'. Par $(V', \operatorname{int} L')$ je po konstrukciji homeomorfen $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times \{0\})$.

Izberimo točke $x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ v komplementu G_1, ki si zaporedoma sledijo po loku L, kjer sta x_0 in x_{k+1} krajišči tega loka, podloka L_0 med x_0 in x_1 ter L_k med x_k in x_{k+1} ne sekata G_1, x_i in x_{i+1} za $i = 1, \ldots, k-1$ pa ležita v eni od množic V_i', opisanih zgoraj. Sedaj lahko lok med x_i in x_{i+1} za $i = 1, \ldots, k-1$ kot v dokazu leme 14.2 zamenjamo s poligonskim lokom (z istimi krajišči) znotraj $V_i' \cap F'$, ki seka L_i' transverzalno. Dobljeno pot podaljšamo še s podlokoma L_0 in L_k in po potrebi kot v lemi 14.2 odstranimo del tako dobljene poti, če ta ni enostavna. Tako smo povezavo L zamenjali s takšno, ki seka povezave grafa G_1 transverzalno. Postopek nato induktivno ponovimo na ostalih povezavah tako spremenjenega grafa G_2.

Preverimo še, da je kombinatorična struktura grafov G_2 in G_2' enaka. Po konstrukciji si oglišča in povezave bijektivno ustrezajo. Ker so premiki oglišč in povezav, ki zagotavljajo, da oglišča enega grafa ne ležijo na povezavah drugega, narejeni s pomočjo homeomorfizma ploskve, je jasno, da si lica grafa pred in po tej spremembi bijektivno ustrezajo. Enako pa velja tudi pri zadnji modifikaciji, ko povezavo grafa G_2 najprej odstranimo in tako združimo dve lici v eno, za katero je odstranjena povezava topološka tetiva, nato pa to lice razdelimo na dve z novo topološko tetivo (z istima krajiščema). $\square$

DOKAZ IZREKA 13.2. Naj bosta K_1 in K_2 dve poliedrski strukturi na ploskvi P ter G_1 in G_2 pripadajoča grafa. Po trditvi 15.1 smemo privzeti, da se grafa sekata transverzalno. Posebej smemo privzeti, da grafa nista disjunktna. Če sta, je vsak vsebovan v enem licu drugega (to se lahko zgodi le na sferi). V primeru, ko je eden od grafov le ena točka, lahko to prestavimo v notranjost ene od povezav drugega, kar določa skupen nadgraf kot spodaj. Sicer pa imata oba grafa vsaj po eno povezavo. Izberimo povezavo L_i grafa G_i na robu lica, ki vsebuje drugi graf. Naj bo T poligonski lok, ki povezuje notranji točki teh povezav. Potem lahko kratek podlok ene povezave vzdolž T potisnemo preko druge tako, da se ti povezavi sekata transverzalno.

Grafa G_1 in G_2 določata skupen povezan nadgraf G z množico vozlišč, ki je unija vozlišč obeh grafov skupaj s presečišči med grafoma, množica povezav pa je družina vseh lokov, na katere presečišča razdelijo povezave v obeh grafih. Dovolj je dokazati, da je Eulerjeva karakteristika podgrafa $G' = G_i$ $(i = 1, 2)$ enaka Eulerjevi karakteristiki grafa G. To sledi induktivno, saj lahko graf G dobimo iz G' z zaporednim dodajanjem vozlišč in povezav tako, da je graf na vsakem koraku povezan in so njegova lica odprti diski. Zaradi povezanosti grafa G lahko namreč na vsakem koraku dodamo novo vozlišče, ki razdeli obstoječo povezavo na dve, novo povezavo, ki povezuje neko obstoječe vozlišče z novim vozliščem ali pa novo povezavo, ki povezuje že obstoječi vozlišči. V prvih dveh primerih se število vozlišč in povezav poveča za ena, število lic pa ostane nespremenjeno, torej se tudi Eulerjeva karakteristika ne spremeni. Pokazati moramo le še, da so vsa lica v drugem primeru odprti diski. Spremeni se le tisto lice, ki vsebuje dodano vozlišče in povezavo (z izjemo drugega vozlišča nove povezave). Da je to lice po odstranitvi nove povezave tudi homeomorfno odprtemu disku, bomo dokazali v naslednjem odstavku. V zadnjem primeru pa dodana povezava (z izjemo krajišč) leži v nekem licu grafa, ki ga razdeli na dve lici (ki sta po Schoenfliesovem izreku odprta diska), zato Eulerjeva karakteristika ostane nespremenjena.

V grafu $G' = G_1$ je meja vsakega lica topološka krožnica. Denimo, da smo po nekaj korakih dodajanja povezav dodali lok L, ki z izjemo enega krajišča leži v notranjosti lica F grafa G_1, omejenega s topološko krožnico S. Iz lastnosti grafa G_2 sledi, da obstaja lok L', sestavljen iz povezav grafa G_2, ki skupaj z L sestavlja topološko tetivo Γ krožnice S. Tetiva Γ po lemi 11.2 razdeli F na dve komponenti F_1 in F_2, katerih zaprtji sta po Schoenfliesovem izreku zaprta diska. Potem je $F \setminus L = F_1 \cup \operatorname{int} L' \cup F_2$, kar je zlepek disjunktne unije $F_1 \cup \operatorname{int} L'$ in $F_2 \cup \operatorname{int} L'$ vzdolž odprtega loka $\operatorname{int} L'$, ki je odprt disk. Če notranjost lica na nekem koraku zgornje konstrukcije vsebuje več takih lokov, rezultat sledi induktivno. □

16. Invariantnost orientabilnosti

Dokaz izreka 13.4. Naj bosta K_1 in K_2 dve poliedrski strukturi na ploskvi P ter G_1 in G_2 pripadajoča grafa. Kot v dokazu izreka 13.2 smemo privzeti, da se grafa sekata transverzalno in da je njun presek neprazen, torej določata skupen povezan nadgraf G. Denimo, da je ploskev P s poliedrsko strukturo K_1 orientabilna. Torej obstaja skladna izbira orientacij lic grafa G_1. Graf G razdeli vsako lice F grafa G_1 na podlica, ki jih lahko orientiramo skladno s F (orientacijo vsa podedujejo od ambientne orientacije ravnine, v kateri lahko narišemo zaprtje F in jo orientiramo skladno s F); najprej orientiramo tista podlica, katerih zaprtja sekajo rob F, in sicer tako, da v rob F inducirajo isto usmeritev kot izbrana orientacija F, nato to širimo globlje v notranjost F. Tako izbrane orientacije podlic so usklajene. Novo lice grafa G nastane, ko unija dodanih povezav tvori topološko tetivo robu lica F ali nekega že prej nastalega podlica, ki to (pod)lice razdeli na dve podlici. Na robu vsake je vsaj ena daljica z robu F, usmeritev te daljice, določena z orientacijo F, pa določa skladni orientaciji lic (saj bosta inducirani usmeritvi delilne tetive, določeni z novo nastalima komponentama, različni). Sledi torej, da je orientabilna tudi poliedrska struktura, določena z G. To pa da orientabilnost poliedrske strukture, določene z G_2, saj so lica G_2 unije lic grafa G, ki (zaradi usklajene orientiranosti) določajo usklajene orientacije lic G_2. □

Trditev 16.1. *Poliedrska podploskev orientabilne ploskve je orientabilna in povezana vsota orientabilnih ploskev je orientabilna. Ploskev je neorientabilna natanko tedaj, ko vsebuje Möbiusov*[11] *trak.*

Dokaz. Naj bo P poliedrska ploskev in Q njena podploskev, ki je unija nekaterih 2-celic v P. Potem izbira skladnih orientacij 2-celic v P, ki obstaja po predpostavki, določa orientacijo Q.

Naj bosta P in Q orientabilni poliedrski ploskvi ter $D \subset \operatorname{int} P$ in $E \subset \operatorname{int} Q$ poliedrski podploskvi, homeomorfni disku. Potem sta $P' = P \setminus \operatorname{int} D$ in $Q' = Q \setminus \operatorname{int} E$ orientabilni poliedrski ploskvi. Za izbrani homeomorfizem $h\colon \partial D \to \partial E$ in izbrano orientacijo P', ki določa usmeritev ∂D, orientirajmo Q' tako, da v ∂E določa nasprotno usmeritev od tiste, ki jo določa ∂D preko h. Potem je zlepek $P' \cup_h Q'$ poliedrska ploskev (poliedrsko strukturo s kvocientno projekcijo prenesemo na zlepek, torej sliko krožnice ∂D razdelimo na podloke, določene z delitvijo ∂D in ∂E), ki podeduje orientacijo od ploskev P' in Q'.

Pokazati moramo še, da neorientabila ploskev vsebuje Möbiusov trak. Denimo, da je P neorientabilna ploskev s poliedrsko strukturo K, torej 2-celic v $K^{(2)}$ ni mogoče skladno orientirati. To pomeni, da obstaja zaporedje 2-celic $K_0, K_1, \ldots, K_{k-1}, K_k = K_0$, v katerem si poljubni zaporedni celici delita skupno 1-celico in z izjemo prve in zadnje vsebuje same različne celice, ki jih ni mogoče usklajeno orientirati. Za poljubno izbiro orientacije K_0 z izbiro usklajenih orientacij celic od K_1 do K_{k-1} slednja za skladno orientiranost s K_0 zahteva nasprotno orientacijo K_0, kot je bila izbrana. Naj bodo x_i razpolovišča stranic, skupnih K_i in K_{i+1} za $i \in \mathbb{Z}_k$. V K_i izberimo daljico L_i, ki povezuje x_{i-1} z x_i za $i \in \mathbb{Z}_k$ (to je mogoče ob predpostavki, da so mnogokotniki konveksni, kar smemo privzeti). Potem je unija L lokov L_i topološka krožnica in če jo odebelimo tako, da vsak lok L_i odebelimo v »tanek štirikotnik«, nastane Möbiusov trak. □

[11]August Ferdinand Möbius (1790–1868), nemški matematik in astronom. Isto ploskev je hkrati (leta 1858) odkril tudi Johann Benedict Listing (1808–1882), nemški matematik, ki je vpeljal pojem *topologija*; pred tem je bil v uporabi pojem *analysis situs*.

Dodatek

A. Simplicialni kompleksi in poliedri

Simpleks je posplošitev pojma trikotnika na poljubno razsežnost. Trikotnik štejemo za 2-simpleks, ker je dvorazsežen (vložen v ravnino ima neprazno notranjost), piramida pa je primer 3-simpleksa, ker je trirazsežna. Primer 1-simpleksa je daljica, primer 0-simpleksa pa točka. Drugače, n-simpleks je konveksna množica v nekem $\mathbb{R}^k$, določena s svojimi $n+1$ oglišči, ki tvorijo »neodvisno« množico točk. Oglišča simpleksa razpenjajo n-razsežen afin podprostor, tj. n-razsežno ravnino v $\mathbb{R}^k$, vzporedno nekemu n-razsežnemu vektorskemu podprostoru.

Definicija A.1. Točke $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^k$ so *afino neodvisne*, če so vektorji $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ linearno neodvisni. *Afina n-razsežna ravnina*, določena z afino neodvisnimi točkami $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^k$, je

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i x_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Simpleks razsežnosti n ali kratko *n-simpleks* v $\mathbb{R}^k$ je konveksna ogrinjača $n+1$ afino neodvisnih točk v $\mathbb{R}^k$, tj. za afino neodvisne točke $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^k$ je simpleks, razpet s temi točkami, enak

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i x_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}.$$

Točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ imenujemo *oglišča* simpleksa. *Standardni n-simpleks* Δ^n je razpet s standardnimi baznimi vektorji $e_1, \ldots, e_{n+1}$ v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Iz lastnosti linearno neodvisnih množic vektorjev sledi, da dobimo ekvivalentno definicijo afine neodvisnosti nabora vektorjev, če namesto x_0 odlikujemo kak drug vektor tega nabora. Afina ravnina, razpeta z afino neodvisnimi vektorji $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^k$, je vzporedna linearnemu podprostoru, razpetemu na vektorje $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$, saj je

$$\sum_{i=0}^{n} t_i x_i = x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - x_0),$$

kjer so t_i za $i > 0$ poljubna realna števila.

Množica $C \subseteq \mathbb{R}^k$ je *konveksna*, če je za poljubni točki iz C tudi daljica med njima vsebovana v C, torej je za poljubna $x, y \in C$ tudi $(1-t)x + ty \in C$ za $t \in [0,1]$. Za točke $x_0, x_1, \ldots, x_n \in C$ z večkratno uporabo pogoja konveksnosti sledi, da je konveksna kombinacija

$$\sum_{i=0}^{n} t_i x_i, \; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, \; t_i \geq 0$$

teh točk tudi v C. *Konveksna ogrinjača* $c(A)$ množice $A \subseteq \mathbb{R}^k$ je najmanjša konveksna podmnožica v $\mathbb{R}^k$, ki vsebuje A, in sestoji iz vseh konveksnih kombinacij točk iz A. V primeru, ko je A končna množica, lahko vsako točko v $c(A)$ zapišemo kot konveksno kombinacijo vseh točk v A. V tem primeru je ogrinjača $c(A)$ zaprta podmnožica $\mathbb{R}^k$, kar v splošnem ne velja.

Simplekse običajno označujemo z grškimi črkami $\sigma, \tau, \rho \ldots$ Standardni n-simpleks je pravilen, n-simpleks, razpet z vektorji $0^n, e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$, pa ni.

Definicija A.2. *Lice* simpleksa σ je vsak simpleks τ, razpet na neko podmnožico njegovih oglišč; označimo $\tau \leq \sigma$. *Glavno lice* simpleksa nasproti oglišča x je razpeto z vsemi ostalimi oglišči simpleksa. Če je $\sigma = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$, so njegova glavna lica $\sigma_i = [x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n] = [x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ za $i = 0, 1, \ldots, n$.

Simpleks $\sigma \subset \mathbb{R}^k$ je geometrični objekt, ki mu lahko pridružimo kombinatorični objekt, ki sestoji iz σ in vseh njegovih lic. Tak kombinatorični pristop uberemo tudi pri opisu bolj kompliciranih prostorov, ki so sestavljeni iz simpleksov.

Definicija A.3. Podprostor $P \subset \mathbb{R}^k$, ki je unija simpleksov, kjer je presek poljubnih dveh simpleksov lice obeh, imenujemo *polieder*.

Simplicialni kompleks v $\mathbb{R}^k$ je družina simpleksov $\mathcal{C}$ v $\mathbb{R}^k$, ki izpolnjuje naslednja pogoja:

(S1) če je $\sigma \in \mathcal{C}$ in je $\tau \leq \sigma$, je $\tau \in \mathcal{C}$;

(S2) če sta $\sigma, \tau \in \mathcal{C}$ in je $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, potem je $\sigma \cap \tau$ lice σ in τ.

Polieder P, ki je unija vseh simpleksov v $\mathcal{C}$, imenujemo *telo* simplicialnega kompleksa $\mathcal{C}$, kompleks $\mathcal{C}$ pa imenujemo *triangulacija* poliedra P.

Simpleks σ skupaj z vsemi svojimi lici torej določa simplicialni kompleks, katerega telo je kar σ. Simplicialni kompleks pa je tudi množica vseh *pravih* lic simpleksa σ (tj. lic različnih od σ), ki sestavljajo *rob* $\partial\sigma$ simpleksa σ. To je poseben primer pojma podkompleksa.

Definicija A.4. Naj bo $\mathcal{C}$ simplicialni kompleks in $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ podmnožica, ki zadošča lastnostma (S1) in (S2). Potem $\mathcal{C}'$ imenujemo *simplicialni podkompleks* kompleksa $\mathcal{C}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ je *n-skelet* kompleksa $\mathcal{C}$ podkompleks $\mathcal{C}^n$, ki sestoji iz vseh simpleksov v $\mathcal{C}$ razsežnosti največ n, $\mathcal{C}^{(n)}$ pa označuje družino vseh n-simpleksov v $\mathcal{C}$. Telo podkompleksa imenujemo *podpolieder*.

Vsak polieder dopušča več triangulacij – iz dane triangulacije lahko dobimo novo triangulacijo tako, da vsak simpleks razdelimo na unijo simpleksov na tak način, da spet dobimo simplicialni kompleks, torej da nova družina simpleksov zadošča (S1) in (S2) – temu postopku rečemo *subdivizija*. Subdivizija poliedra pa očitno določa subdivizijo vsakega podpoliedra (ki sestoji iz vseh simpleksov, ki ležijo v podpoliedru).

Zgornji pojmi so vezani na ambientni evklidski prostor, a jih lahko posplošimo.

Definicija A.5. *Abstraktni simplicialni kompleks* na množici V je družina $\mathcal{C}$ končnih podmnožic V, ki jih imenujemo *simpleksi*, če za poljuben $\sigma \in \mathcal{C}$ in $\tau \subset \sigma$ velja $\tau \in \mathcal{C}$; τ imenujemo *lice* simpleksa σ.

Če je V končna množica, ima abstraktni simplicialni kompleks (geometrično) realizacijo v $\mathbb{R}^k$ za dovolj velike k; množico V lahko npr. identificiramo z množico baznih vektorjev, elemente $\mathcal{C}$ pa z geometričnimi simpleksi, ki jih razpenjajo ustrezni vektorji.

Po drugi strani pogosto želimo strukturo poliedra na prostoru, ki ni unija simpleksov. Na primer, n-razsežna krogla $\mathbb{B}^n$ ni polieder, je pa homeomorfna standardnemu n-simpleksu Δ^n in preko tega homeomorfizma lahko kroglo (in njen rob $\mathbb{S}^{n-1}$) opremimo s strukturo poliedra.

Definicija A.6. Prostor X je *topološki polieder*, če je homeomorfen kakšnemu poliedru.

B. Mnogoterosti

Mnogoterost lokalno izgleda kot evklidski prostor, zato izrek o invarianci odprtih množic zagotavlja, da lahko govorimo o razsežnosti mnogoterosti. Ker želimo dopustiti tudi robne točke, mnogoterost lokalno modeliramo na odprtih podmnožicah evklidskega polprostora $\mathbb{R}^m_+ = \mathbb{R}^{m-1} \times [0, \infty)$, kjer postavimo $\mathbb{R}^0 = \mathbb{R}^0_+ = \{0\}$.

Definicija B.1. *(Topološka) mnogoterost razsežnosti $m \in \mathbb{N}_0$* (ali kratko *m-mnogoterost*) je Hausdorffov topološki prostor M s števno bazo, v katerem ima vsaka točka odprto okolico, homeomorfno odprti podmnožici polprostora $\mathbb{R}^m_+$; tako okolico imenujemo tudi *evklidska okolica*, homeomorfizem $\varphi\colon U \to U'$, kjer sta $U \subseteq M$ in $U' \subseteq \mathbb{R}^m_+$ odprti, pa imenujemo *karta*. Inverz karte imenujemo *lokalna parametrizacija*. Družino kart na M, katerih domene pokrivajo M, imenujemo *atlas* na M.

Tip evklidske okolice deli točke mnogoterosti na dva tipa: *notranje* točke so tiste, ki imajo evklidske okolice, homeomorfne odprtim podmnožicam evklidskega prostora, ostale točke pa imenujemo *robne*. Množico vseh notranjih točk mnogoterosti imenujemo *notranjost mnogoterosti* in označimo $\operatorname{int} M$, množico vseh robnih točk pa imenujemo *rob mnogoterosti* in označimo ∂M. Notranjost mnogoterosti je njena odprta podmnožica, rob pa zaprta. Kompaktno mnogoterost s praznim robom imenujemo *sklenjena*.

Vsaka točka mnogoterosti ima bazo evklidskih okolic. To pomeni, da lahko, če je to pomembno, za kodomene kart izberemo posebne podmnožice. Za kodomeno karte okoli notranje točke mnogoterosti lahko vzamemo poljubno odprto podmnožico evklidskega prostora, npr. celotni $\mathbb{R}^m$ ali pa odprto kroglo $K(0,1)$. Podobno za kodomeno karte okoli robne točke mnogoterosti lahko izberemo $\mathbb{R}^m_+$ ali »pol-odprto« polkroglo $K(0,1)_+ = K(0,1) \cap \mathbb{R}^m_+$.

Trditev B.2 (Izrek o odprti preslikavi za mnogoterosti). *Naj bosta M in N m-mnogoterosti, U odprta podmnožica* $\operatorname{int} M$ *in $f\colon U \to N$ zvezna injektivna preslikava. Potem je f odprta preslikava in $f(U) \subseteq \operatorname{int} N$.*

Dokaz. Za poljubno točko $x \in U$ obstajata evklidski okolici $V \subset U$ za x v M, ki je homeomorfna odprti podmnožici $\mathbb{R}^m$, in W za $f(x)$ v N, ki je homeomorfna odprti podmnožici $\mathbb{R}^m_+$, da velja $f(V) \subseteq W$. Označimo s $\varphi\colon V \to V' \subseteq \mathbb{R}^m$ in $\psi\colon W \to W' \subseteq \mathbb{R}^m_+$ pripadajoči karti. Izrek 12.1 zagotavlja, da je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ odprta preslikava in da je njena slika odprta podmnožica $\mathbb{R}^m$. Od tod sledi, da je f odprta in da njena slika leži v notranjosti N. □

B.1. Gladke mnogoterosti. Pomembni primeri mnogoterosti so gladke podmnogoterosti v evklidskih prostorih, topološka mnogoterost pa sama po sebi nima gladke strukture. Po analogiji s podmnogoterostmi bi lahko naivno zahtevali, da so karte gladke preslikave, a to ni smiselno, saj domena karte ni podmnožica evklidskega prostora, torej ne moremo govoriti o odvedljivosti karte. Lahko pa primerjamo dve karti $\varphi\colon U \to U'$ in $\psi\colon V \to V'$ preko njune *prehodne preslikave*

$$\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V),$$

ki slika med podmnožicami evklidskih prostorov.

Definicija B.3. Atlas na mnogoterosti M imenujemo *gladek atlas* na M, če so vse prehodne preslikave med kartami gladke. Dva atlasa na M sta *kompatibilna*, če je njuna unija tudi gladek atlas na M. *Gladka struktura* na M je ekvivalenčni razred kompatibilnih atlasov na M ali ekvivalentno maksimalni gladek atlas na M. Mnogoterost M skupaj z gladko strukturo imenujemo *gladka mnogoterost*.

Spomnimo se, da je za gladko preslikavo $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, kjer je $U \subseteq \mathbb{R}^m$ odprta, točka $x \in \mathbb{R}^m$ *kritična točka* ali *singularna točka*, če odvod $D_x f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ni surjektiven, sicer pa je *regularna*. Točko $y \in \mathbb{R}^n$ imenujemo *singularna vrednost* preslikave f, če se vanjo preslika kakšna singularna točka, sicer pa jo imenujemo *regularna vrednost*. Pri tem za regularne vrednosti štejemo tudi točke, ki niso v zalogi vrednosti preslikave f. Izrek o implicitni preslikavi pove, da je praslika regularne vrednosti preslikave f gladka $(m-n)$-mnogoterost, saj pravi, da ima vsaka točka okolico, ki je graf gladke preslikave, definirane na odprti podmnožici $\mathbb{R}^{m-n}$. Enako velja tudi za gladke preslikave med gladkimi mnogoterostmi.

Definicija B.4. Naj bosta $(M, \Phi = \{\varphi_i\colon U_i \to U_i' | i \in \mathbb{I}\})$ in $(N, \Psi = \{\psi_j\colon V_j \to V_j' | j \in \mathbb{J}\})$ gladki mnogoterosti in $f\colon M \to N$ zvezna preslikava. Pravimo, da je f gladka, če je za vsaka i in j kompozitum $f_{ij} := \psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}\colon \varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) \to V_j'$ gladka preslikava. Točka $x \in M$ je *regularna točka* preslikave f, če je za neka $i \in \mathbb{I}$ in $j \in \mathbb{J}$, kjer je $x \in U_i$ in $f(x) \in V_j$, točka $\varphi_i(x)$ regularna za preslikavo f_{ij}; sicer pa je x *singularna točka* preslikave f. Točka $y \in N$ je *regularna vrednost* preslikave f, če $f^{-1}(y)$ ne vsebuje singularnih točk.

Definicija regularne točke je neodvisna od izbire karte, saj so prehodne preslikave med kartami difeomorfizmi in torej ohranjajo pogoj regularnosti.

Izrek B.5 (Izrek o implicitni preslikavi). *Naj bo M gladka m-mnogoterost, N gladka n-mnogoterost ter $f\colon M \to N$ gladka preslikava. Naj bo $y \in \operatorname{int} N$ regularna vrednost preslikave f in $L = f^{-1}(y)$.*

(1) *Če je ∂M prazen, potem je L gladka $(m-n)$-mnogoterost.*
(2) *Če je y tudi regularna vrednost za $f|_{\partial M}$, potem je L gladka $(m-n)$-mnogoterost, ki je* prav *vložena v M, tj. $L \cap \partial M = \partial L$.*

Dokaz. To sledi iz evklidske verzije izreka, ki zagotavlja obstoj evklidskih okolic za L znotraj kart z domenami v notranjosti M, ki so odprte v $\mathbb{R}^{m-n}$. Za točke v $L \cap \partial M$ pri dodatnem privzetku iz točke (2) enako sledi, da sestavljajo $(m-n-1)$-mnogoterost, ki je torej rob L. □

B.2. Rob mnogoterosti.

Trditev B.6. *Rob (gladke) m-mnogoterosti je (gladka) $(m-1)$-mnogoterost s praznim robom.*

Dokaz. Naj bo $x \in \partial M$ in $\varphi\colon U \to U'$ karta na M okoli x. Pokazali bomo, da je tedaj njena zožitev $\psi := \varphi|_{U\cap\partial M}\colon U \cap \partial M \to U' \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$ karta na ∂M okoli x. Karta φ slika točke iz $U\cap\partial M$ v $\mathbb{R}^{m-1}\times\{0\}$, saj bi sicer te točke imele evklidske okolice, homeomorfne odprtim podmnožicam $\mathbb{R}^m$. Poleg tega točk iz $U \smallsetminus \partial M$ ne slika v $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$, saj bi bilo to v nasprotju z izrekom o odprti preslikavi. Torej je ψ bijekcija in posledično homeomorfizem na odprto podmnožico $\mathbb{R}^{m-1}$.

Če je M gladka, potem so prehodne preslikave v atlasu na M gladke, zato so gladke tudi njihove zožitve na rob. □

Intuitivno je jasno, da rob ne more deliti mnogoterosti, saj ta leži le na »eni strani« robu.

Trditev B.7. *Če je M povezana mnogoterost, potem je tudi njena notranjost povezana.*

Dokaz. Denimo, da notranjost M ni povezana in naj bo $\operatorname{int} M = A+B$ njena separacija, torej sta A in B zaprti podmnožici notranjosti. Ker so vse točke roba M v zaprtju notranjosti, je $M = \overline{A}\cup\overline{B}$, zaradi povezanosti M pa je presek $\overline{A}\cap\overline{B}$ neprazen in vsebovan v ∂M. Izberimo točko $x \in \overline{A}\cap\overline{B}$ in karto $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n_+$ okoli x. Potem je $\varphi(A\cap U) + \varphi(B\cap U)$ separacija za $\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$. □

Robne točke mnogoterosti imajo po definiciji evklidske okolice, ki spominjajo na pogoj lokalne ploščatosti, le da so te okolice »polovične«. Podobno kot ima lokalno ploščata topološka $(n-1)$-sfera v $\mathbb{R}^n$ dvojni obrobek, ima ∂M *obrobek* v M, tj. okolico U, za katero obstaja homeomorfizem $h\colon \partial M \times [0,1) \to U$, ki zadošča $h(x,0) = x$. Obstoja obrobka ne bomo dokazali, bralec pa lahko dokaz M. Browna[12], ki je dokazal tudi posplošeni Schoenfliesov izrek, najde v [**3**]. Obrobek obstaja tudi v gladki kategoriji, kjer je obstoj takega difeomorfizma h relativno lahko dokazati s sredstvi diferencialne topologije.

B.3. Vložitev mnogoterosti v evklidski prostor. Naravno vprašanje je, ali smo s splošno definicijo gladke mnogoterosti zajeli večjo družino prostorov kot le gladke podmnogoterosti evklidskih prostorov. Izkaže se, da ne, saj je mogoče vsako mnogoterost vložiti v vsak evklidski prostor dovolj velike razsežnosti (Whitneyjev[13] izrek zagotavlja obstaj vložitve n-razsežne mnogoterosti v $\mathbb{R}^{2n}$). Kljub temu je pojem abstraktne gladke mnogoterosti zelo pomemben, saj omogoča uporabo analitičnih metod na mnogoterosti neodvisno od vložitve te v evklidski prostor. Čeprav izrek o vložitvi velja za vse mnogoterosti, si bomo ogledali le dokaz za kompaktne; pri dokazu za poljubno mnogoterost upoštevamo, da dopušča atlas s končno mnogo kartami.

Izrek B.8. *Vsako kompaktno mnogoterost je mogoče vložiti v neki evklidski prostor. Če ima mnogoterost gladko strukturo, obstaja vložitev, katere slika je gladka podmnogoterost.*

Dokaz. Za poljuben $x \in M$ naj bo $\varphi\colon U \to U' \subseteq \mathbb{R}^m_+$ karta na M okoli x. Potem obstaja $r_x > 0$, da je presek $\overline{K}(\varphi(x), 2r_x) \cap \mathbb{R}^m_+$ vsebovan v U'. Naj bo λ gladka funkcija na $\mathbb{R}^m$ kot v lemi 2.1, ki ima nosilec vsebovan v krogli $K(\varphi(x), 2r_x)$ in je enaka 1 na krogli $\overline{K}(\varphi(x), r_x)$. Označimo $W'_x = \varphi^{-1}(K(\varphi(x), 2r_x))$, $W_x = \varphi^{-1}(K(\varphi(x), r_x))$ in

$$\mu_x\colon M \to \mathbb{R}, \quad \mu_x(z) := \begin{cases} \lambda(\varphi(z)) & ; \quad z \in \overline{W'_x} \\ 0 & ; \quad z \notin W'_x \end{cases}.$$

Ker je M kompaktna, ima pokritje $\{W_x \,|\, x \in M\}$ končno podpokritje; označimo članice tega z $W_1, \ldots, W_\ell$, pripadajoče karte s $\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell$ in pripadajoče funkcije μ_x z $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$. Trdimo, da je $f\colon M \to \mathbb{R}^{(m+1)\ell}$, $x \mapsto (\mu_1(x)\varphi_1(x), \mu_1(x), \ldots, \mu_\ell(x)\varphi_\ell(x), \mu_\ell(x))$ iskana vložitev. Dovolj je dokazati, da je f injektivna. Naj za poljubni točki $x, y \in M$ velja $f(x) = f(y)$. Ker množice W_i pokrivajo M, obstaja i, za katerega je $\mu_i(x) = 1$. Potem je tudi $\mu_i(y) = 1$, zato y pripada W_i in velja

$$\varphi_i(x) = \mu_i(x)\varphi_i(x) = \mu_i(y)\varphi_i(y) = \varphi_i(y).$$

Iz injektivnosti karte φ_i sledi $x = y$.

Če je M gladka mnogoterost, izberemo karte iz gladkega atlasa na M in pripadajoča preslikava f je gladka, kar posebej pomeni, da ima slika $f(M)$ lokalno regularno parametrizacijo v okolici vsake točke, torej je gladka podmnogoterost. □

Posledica B.9. *Mnogoterost je metrizabilen prostor.*

[12]Morton Brown (1931), ameriški matematik, pomemben zaradi svojega dela v geometrični topologiji.

[13]Hassler Whitney (1907-1989), ameriški matematik, pomemben zaradi svojega dela v teoriji mnogoterosti in v teoriji singularnosti.

Dokaz. Za kompaktne mnogoterosti trditev sledi neposredno iz zgornjega izreka. Za poljubno nekompaktno mnogoterost M lahko konstrukcijo v zgornjem dokazu spremenimo tako, da dobimo vložitev M v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ki je metrizabilen. Okolice W'_x lahko izberemo relativno kompaktne, saj je mnogoterost lokalno kompaktna. Nadalje lahko izberemo števno družino množic W_x, ki pokrivajo M, saj ima mnogoterost števno bazo; označimo te množice z $\{W_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pripadajoča preslikava f je kot zgoraj zvezna in injektivna, poleg tega je zaprta kot preslikava v svojo sliko. Naj bo namreč A zaprta podmnožica M in $y = f(x) \in f(M)$ limita nekega zaporedja $(f(a_n))_n$. Točka x pripada eni od množic W_i, zato je $\mu_i(x) = 1$ in posledično obstaja n_0, da velja $\mu_i(a_n) > 0$ za vse $n \geq n_0$. Zaporedje $(a_n)_{n\geq n_0}$ ima stekališče z v kompaktu $\overline{W}'_i$; posebej je $z \in A$. Iz zveznosti f sledi, da je $y = f(z) \in f(A)$. □

B.4. Tangentni in normalni sveženj gladke podmnogoterosti. Pojma tangentnega in normalnega svežnja gladke podmnogoterosti v evklidskem prostoru bomo potrebovali pri konstrukciji stopnje preslikave. S pomočjo normalnega svežnja pa bomo tudi pokazali, da je podmnogoterost retrakt neke svoje okolice.

Definicija B.10. Naj bo $p\colon E \to B$ zvezna preslikava in naj ima vsako *vlakno* $E_x = p^{-1}(x)$ za $x \in B$ strukturo k-razsežnega realnega vektorskega prostora. Trojico (E, p, B) imenujemo *vektorski sveženj razsežnosti* k nad B, če ima vsaka točka v B odprto okolico U, za katero obstaja homeomorfizem $\Phi\colon p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, ki vlakno E_x izomorfno preslika na $\{x\} \times \mathbb{R}^k$. Prostor E imenujemo *totalni prostor* svežnja, B imenujemo *baza* svežnja, preslikavo p *sveženjska projekcija*, Φ pa *sveženjska karta*.

Trditev B.11. *Naj bo M m-razsežna gladka podmnogoterost v $\mathbb{R}^k$. Množica $\top M = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^k \mid v$ je tangentni vektor na M v $x\}$ je gladka $2m$-razsežna podmnogoterost v $\mathbb{R}^{2k}$ in je totalni prostor m-razsežnega vektorskega svežnja nad M, ki ga imenujemo* tangentni sveženj *mnogoterosti M. Sveženjska projekcija je porojena s projekcijo na prvi faktor, vlakno tega svežnja nad točko $x \in M$ pa je tangentni prostor $\top_x M$.*

Dokaz. Naj bo $\varphi\colon U' \to U$ lokalna parametrizacija M, kjer je U' odprta v $\mathbb{R}^m_+$ in U odprta v M. Preslikava φ je gladka kot preslikava v $\mathbb{R}^k$ in za vsak $x \in U'$ njen odvod $D_x\varphi$ preslika $\mathbb{R}^m$ izomorfno na tangentni prostor $\top_{\varphi(x)}M$. Potem je gladka preslikava

$$\Phi\colon U' \times \mathbb{R}^m \to \top M,\ (x, v) \mapsto (\varphi(x), D_x\varphi(v))$$

lokalna parametrizacija za $\top M$, torej inverz karte na $\top M$; ta mnogoterostna karta je hkrati tudi sveženjska karta, če le množico U' nadomestimo z U preko parametrizacije φ.

Naj bo $\psi\colon V' \to V$ tudi lokalna parametrizacija M in naj bo presek $U \cap V$ neprazen. Potem je prehodna preslikava med pripadajočima kartama na $\top M$ dana s predpisom

$$\Psi^{-1} \circ \Phi\colon (x, v) \mapsto (\psi^{-1}(\varphi(x), D_x(\psi^{-1} \circ \varphi)(v))),$$

ki je gladka preslikava. Gladek atlas na M torej določa gladek atlas na $\top M$. Ker je prehodna preslikava linearna na vlaknih, parametrizacija Ψ določa na vlaknu isto strukturo vektorskega prostora kot Φ (ta stuktura se ujema s strukturo vektorskega prostora $\top_x M$ kot podprostora v $\mathbb{R}^k$), zato sta inverza teh preslikav res sveženjski karti. □

Trditev B.12. *Naj bo M m-razsežna gladka podmnogoterost v $\mathbb{R}^k$. Množica $\perp M = \{(x, w) \in M \times \mathbb{R}^k \mid w$ je pravokoten na $\top_x M\}$ je gladka k-razsežna podmnogoterost v $\mathbb{R}^{2k}$ in je totalni prostor $(k-m)$-razsežnega vektorskega svežnja nad M, ki ga imenujemo* normalni sveženj *podmnogoterosti M. Sveženjska projekcija je porojena s projekcijo na prvi faktor, vlakno tega svežnja nad točko $x \in M$ pa je normalni prostor $\perp_x M$.*

Dokaz. Naj bo $\varphi\colon U' \to U$ lokalna parametrizacija M kot v dokazu trditve B.11 in Φ pripadajoča lokalna parametrizacija za $\top M$. Vektorska polja $V_i(x) = D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi(e_i)$, $i = 1, \ldots, m$, kjer so e_i standardni bazni vektorji $\mathbb{R}^m$, razpenjajo tangentni prostor $\top_x M$ za $x \in U$. Izberimo $a \in U$ in dopolnimo $(V_1(a), \ldots, V_m(a))$ do baze $\mathbb{R}^k$ z izbiro vektorjev $(w_1, \ldots, w_{k-m})$. Potem obstaja odprta okolica $\widetilde{U} \subseteq U$ točke a, da so vektorji v $\mathcal{B}(x) = (V_1(x), \ldots, V_m(x), w_1, \ldots, w_{k-m})$ linearno neodvisni za vsak $x \in \widetilde{U}$, saj so vektorska polja V_i zvezno odvisna od točke x. Gram-Schmidtova ortogonalizacija baze $\mathcal{B}(x)$ za $x \in \widetilde{U}$ porodi gladka vektorska polja $W_j\colon \widetilde{U} \to \mathbb{R}^k$, ki v vsaki točki $\widetilde{U}$ razpenjajo normalni prostor na M. Potem je gladka preslikava

$$\Theta\colon \widetilde{U} \times \mathbb{R}^{k-m} \to \perp M,\ (x, (t_1, \ldots, t_{k-m}) \mapsto \left(x, \sum_{i=1}^{k-m} t_i W(x)\right)$$

lokalna parametrizacija normalnega svežnja (če $\widetilde{U}$ zamenjamo z $\widetilde{U}' = \varphi^{-1}(\widetilde{U})$ preko φ), ki kot zgoraj porodi sveženjsko karto. $\square$

Izrek B.13. *Za sklenjeno gladko podmnogoterost v evklidskem prostoru obstajata odprta okolica in gladka retrakcija te okolice na mnogoterost.*

Dokaz. Naj bo M gladka podmnogoterost $\mathbb{R}^k$ ter $\perp M$ njen normalni sveženj. Preslikava

$$F\colon \perp M \to \mathbb{R}^k,\ (x, w) \mapsto x + w$$

je lokalni difeomorfizem na neki odprti okolici W_x poljubne točke $(x, 0) \in M \times \{0\} \equiv M$. Tangentni prostor na $\perp M$ v točki $(x, 0)$ je namreč $\top_x M \times \perp_x M$, ki ga odvod preslikave F preslika v $\top_x M + \perp_x M = \mathbb{R}^k$. Odvod $D_{(x,0)}F$ je torej linearni izomorfizem in po izreku o inverzni preslikavi je F lokalni difeomorfizem.

Za vsak $r > 0$ naj bo $V_r = \{(x, w) \in \perp M \,|\, ||w|| < r\}$. Iz konstrukcije normalnega svežnja sledi, da je V_r njegova odprta podmnožica. Trdimo, da obstaja tak $r > 0$, da je zožitev F na V_r difeomorfizem. Najprej iz prejšnjega odstavka sledi, da obstaja $r_0 > 0$, da je za vse $r \leq r_0$ zožitev F na V_r lokalni difeomorfizem: če je $W \supset M \times \{0\}$ unija odprtih množic W_x kot zgoraj, je razdalja kompaktne množice M do komplementa W pozitivna. Zato je dovolj pokazati, da je F injektivna na V_r za neki $r \in (0, r_0]$ (saj je tedaj na tej množici po izreku o odprti preslikavi odprta vložitev). Denimo, da to ne velja: potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstajata različni točki $x_n, y_n \in V_{1/n}$, za kateri velja $F(x_n) = F(y_n)$. Zaradi kompaktnosti $\overline{V}_1$ lahko izberemo podzaporedje v (x_n, y_n), ki konvergira proti neki točki $(x, y) \in (M \times \{0\}) \times (M \times \{0\})$. Ker je F na $M \times \{0\}$ injektivna, iz $F(x) = F(y)$ sledi $x = y$. Odprta okolica W_x torej vsebuje nekatere x_n in y_n za dovolj velike n, zato za te n v nasprotju s predpostavko velja $x_n = y_n$.

Naj bo $r > 0$ tak, da je zožitev F na V_r difeomorfizem na sliko V, ki je odprta okolica M v $\mathbb{R}^k$. Iskana retrakcija je inducirana s sveženjsko projekcijo normalnega svežnja, zoženo na V_r. Bolj natančno, naj bo $p\colon \perp M \to M, (x, w) \mapsto x$ sveženjska projekcija in $F\colon V_r \to V$ zgornji difeomorfizem. Potem je $r = F \circ p \circ F^{-1}\colon V \to M$ iskana retrakcija. $\square$

Okolico V iz dokaza imenujemo *cevasta okolica*, saj v okolici poljubne točke na mnogoterosti izgleda kot produkt te okolice z odprto kroglo, torej kot cev okoli mnogoterosti. Ker rezultat velja za poljubno gladko vložitev sklenjene mnogoterosti v evklidski prostor, rečemo, da je sklenjena gladka mnogoterost *evklidski okoliški retrakt*. Iz dokaza sledi še, da je dobljena retrakcija homotopna identični preslikavi, saj lahko normalne vektorje s premočrtno homotopijo prenesemo v ničelni vektor – tako homotopijo imenujemo *deformacijska retrakcija* in rečemo, da je M *deformacijski retrakt* svoje okolice, slednjo pa zaradi te lastnosti imenujemo tudi *regularna okolica*.

B.5. Homogenost mnogoterosti. Mnogoterosti sicer niso povsem homogeni prostori, saj npr. ne obstaja homeomorfizem mnogoterosti, ki bi robno točko preslikal v notranjo ali obratno. Poleg tega bomo potrebovali krepko verzijo homogenosti, ki ne zagotavlja le homeomorfizma mnogoterosti, ampak izotopijo – homotopijo homeomorfizmov, ki se začne z identiteto.

Definicija B.14. Naj bo M (gladka) mnogoterost. *Izotopija M* je (gladka) homotopija $H\colon M \times I \to M$, pri kateri je H_t (difeomorfizem) homeomorfizem M za vsak t in velja $H_0 = \mathrm{id}_M$.

Izrek B.15 (Homogenost mnogoterosti). *Naj bo M povezana (gladka) mnogoterost in x, y notranji točki v M. Potem obstaja izotopija M, katere končna preslikava preslika x v y.*

Najprej bomo dokazali rezultat za kroglo, torej nekakšno lokalno verzijo izreka.

Lema B.16. *Naj bosta $x, y \in \operatorname{int} \mathbb{B}^n$. Potem obstaja (gladka) izotopija $\mathbb{B}^n$, ki miruje (v okolici $\mathbb{S}^{n-1}$) na $\mathbb{S}^{n-1}$ in katere končna preslikava preslika x v y.*

Dokaz. Sestavimo najprej zvezno izotopijo. Za poljuben $z \in \operatorname{int} \mathbb{B}^n$ naj bo $f_z\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ homeomorfizem, ki preslika daljico xw linearno na daljico zw za $w \in \mathbb{S}^{n-1}$. Iskana izotopija je dana s $H_t = f_{(1-t)x+ty}$.

Pri konstrukciji gladke izotopije si bomo pomagali s tokom vektorskega polja, torej z rešitvami navadne diferencialne enačbe. Izberimo števili $a < b < 1$, za kateri velja še $||x||, ||y|| < a$ in naj bo $\lambda\colon \mathbb{B}^n \to [0, 1]$ gladka funkcija kot v lemi 2.1, ki je enaka ena na $\mathbb{B}^n_a$ in ničelna na komplementu $\mathbb{B}^n_b$. Vektorsko polje $V\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $V(z) = (y - x)\lambda(z)$ določa diferencialno enačbo $\dot{z} = V(z)$. Rešitvene krivulje $\gamma_z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{B}^n$ z začetnim pogojem $\gamma(0) = z$ za $||z|| \geq b$ so konstantne poti, saj je tam vektorsko polje ničelno. Del rešitvene krivulje skozi x znotraj $\mathbb{B}^n_a$ pa je $\gamma_x(t) = x + t(y - x)$ in gre pri $t = 1$ skozi

y. Vse rešitvene krivulje sestavljajo *tok* F vektorskega polja V, $F\colon \mathbb{B}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{B}^n$, $F(z,t) = \gamma_z(t)$, ki je gladka preslikava. Iskana izotopija je zožitev F na $\mathbb{B}^n \times [0,1]$. $\square$

Dokaz izreka B.15. Dokažimo najprej obstoj zvezne izotopije. Na $\operatorname{int} M$ definirajmo ekvivalenčno relacijo: $x \sim y$ natanko tedaj, ko obstaja izotopija M, ki prenese x v y. Relacija je očitno refleksivna, simetričnost lahko vidimo tako, da izotopijo H, ki prenese x v y, predkomponiramo z inverzom njene končne stopnje in jo obrnemo okoli:

$$(x,t) \mapsto H(H_1^{-1}(x), 1-t).$$

Za dokaz tranzitivnosti opazimo, da lahko izotopiji H, ki prenese x v y, in K, ki prenese y v z, sklopimo tako, da najprej uporabimo H, nato pa K, komponiran s H_1:

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x,2t) & ; \quad 0 \le t \le 1/2 \\ K(H_1(x), 2t-1) & ; \quad 1/2 \le t \le 1 \end{cases}.$$

Izberimo karto $\varphi\colon U \to U'$ okoli točke $x \in M$. Ker je x notranja točka v M, obstaja zaprta krogla B v U', ki vsebuje $\varphi(x)$ v svoji notranjosti. Po zgornji lemi za vsako točko $y \in \varphi^{-1}(\operatorname{int} B)$ obstaja izotopija $H\colon B \times I \to B$, ki prenese $\varphi(x)$ v $\varphi(y)$ in miruje na robu krogle. Potem je

$$(z,t) \mapsto \begin{cases} \varphi^{-1} H(\varphi(z), t) & ; \quad z \in \varphi^{-1}(B) \\ z & ; \quad z \notin \varphi^{-1}(\operatorname{int} B) \end{cases}$$

izotopija M, ki prenese x v y. Ekvivalenčni razredi so torej odprti in zaradi povezanosti M je ekvivalenčni razred en sam.

Obstoj gladke izotopije dokažemo podobno, preveriti moramo le tranzitivnost relacije v tem primeru. Sklop gladkih izotopij, dan z zgornjo formulo, v splošnem ni gladka preslikava. To lahko popravimo tako, da izotopiji, ki ju sklapljamo, naredimo neodvisni od parametra izotopije blizu krajišč intervala. Naj bo torej $\lambda\colon [0,1] \to [0,1]$ gladka funkcija, ki je enaka 0 v okolici 0 in enaka 1 v okolici 1. Potem je za gladki izotopiji H in K kot zgoraj

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x, \lambda(2t)) & ; \quad 0 \le t \le 1/2 \\ K(H_1(x), \lambda(2t-1)) & ; \quad 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

gladka izotopija. Prav tako je razširitev gladke izotopije s krogle na preostali del mnogoterosti z identično preslikavo gladka, saj izotopija miruje v okolici roba krogle. $\square$

B.6. Orientacija. Z elementarnimi sredstvi lahko definiramo pojem orientacije na mnogoterosti, ki je topološki polieder, ali pa na gladki mnogoterosti. Osnova v obeh primerih je orientacija vektorskega prostora.

Definicija B.17. Naj bo V realen vektorski prostor razsežnosti k. *Orientacija* V je dana z izbiro urejene baze $(v_1, \ldots, v_k)$ za V. Dve urejeni bazi določata *isto orientacijo* V, če ima prehodna matrika med bazama (glede na neko bazo) pozitivno determinanto, v nasprotnem primeru pa bazi določata *nasprotni orientaciji.*

Zgornja relacija med bazami je ekvivalenčna in določa dva ekvivalenčna razreda orientacij. Na $\mathbb{R}^k$ orientacijo, ki jo določa standardna urejena baza $(e_1, \ldots, e_k)$, imenujemo *standardna orientacija.* Vsaki bazi, ki določa izbrano orientacijo V, rečemo *pozitivna baza.*

Naj bo m-mnogoterost M topološki polieder. Ker ima vsaka točka v M m-razsežno evklidsko okolico, je vsebovana v nekem m-simpleksu. Če glavno lice m-simpleksa ne leži v robu M, potem je lice še natanko enega m-simpleksa. Orientacija poliedrske mnogoterosti M je določena z usklajeno izbiro orientacij m-simpleksov. S simbolom $[x_0, \ldots, x_m]$ bomo odslej razumeli *urejeni* m-simpleks, torej (geomerični) simpleks skupaj z izbranim zaporedjem oglišč.

Definicija B.18. *Orientacija* simpleksa $\sigma = [x_0, \ldots, x_m]$ je dana z urejeno bazo $(x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_0)$ pripadajočega vektorskega podprostora; simbol $-\sigma$ označuje simpleks σ z nasprotno orientacijo. Simpleks σ določa na svojem glavnem licu $\sigma_i = [x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_m]$ orientacijo $(-1)^i \sigma_i$. Dva simpleksa sta *skladno orientirana*, če na skupnem glavnem licu določata nasprotni orientaciji.

Krogla $\mathbb{B}^n$ je torej orientabilna m-mnogoterost, saj je homeomorfna standardnemu m-simpleksu Δ^m; kompatibilnostni pogoj je v tem primeru »na prazno« izpolnjen. Robna sfera $\mathbb{S}^{m-1}$ je prav tako orientabilna, saj je homeomorfna $\partial\Delta^m$ ki je unija glavnih lic Δ_i^m simpleksa Δ^m, ki jih lahko skladno orientiramo tako, da jih opremimo z orientacijo, ki jo na njih določa Δ^m: lice Δ_i^m ima torej orientacijo $(-1)^i \Delta_i^m$. Skupno glavno lice Δ_i^m in Δ_j^m je tisto lice Δ^m, ki leži nasproti e_i in e_j, torej

$\Delta^m_{ij} = [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, \widehat{e_j}, , \ldots, e_m]$, kjer smo privzeli $i < j$. Orientacija, ki jo na tem licu določa izbrana orientacija na Δ^m_i, je potem $(-1)^{j-1}(-1)^i \Delta^m_{ij}$, medtem ko Δ^m_j določa orientacijo $(-1)^i(-1)^j \Delta^m_{ij}$. Zadnji račun je tudi osnova za definicijo (simplicialne) homologije poliedra, ki je eno od sredstev algebraične topologije.

Na gladki mnogoterosti pa vpeljemo pojem orientacije preko atlasa.

Definicija B.19. Difeomorfizem $h\colon U \to V$, kjer sta $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ odprti podmnožici, *ohranja orientacijo*, če v vsaki točki $x \in U$ njegov odvod $D_x f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ohranja orientacijo. Gladek atlas na gladki mnogoterosti je *orientiran*, če vse prehodne preslikave atlasa ohranjajo orientacijo. Gladka mnogoterost je *orientabilna*, če dopušča kak orientiran atlas; izbira takega atlasa pa določa orientacijo mnogoterosti.

Naj bo M gladka m-mnogoterost z gladkim atlasom $\{\varphi_i\colon U_i \to U'_i \mid i \in \mathbb{I}\}$, ki določa orientacijo M. Za vsak $x \in U_i$ za *tangentni prostor* na M v točki x, $\mathsf{T}_x M$, vzamemo $\mathsf{T}_{\varphi_i(x)} U'_i = \mathbb{R}^m$. Če x pripada tudi domeni neke druge karte, prehodna preslikava med kartama porodi linearni izomorfizem tangentnih prostorov na kodomenah kart in v tem smislu je $\mathsf{T}_x M$ do izomorfizma enolično določen. Poleg tega ta izomorfizem ohranja standardno orientacijo tangentnega prostora $\mathbb{R}^m$. To pomeni, da lahko tangentne prostore na M opremimo z orientacijami, ki se zvezno spreminjajo s točko na M v smislu, da glede na poljubno karto orientiranega atlasa vsem tangentnim prostorom pripada ista orientacija.

Obratno tudi zvezna izbira orientacij tangentnih prostorov določa orientacijo mnogoterosti. Denimo, da je dana izbira orientacij tangentnih prostorov na M, za katero nad vsako povezano odprto podmnožico poljubne karte velja, da pripadajoče orientacije vseh tangentnih prostorov na kodomeni sovpadajo. Potem poljuben atlas na M s povezanimi domenami kart porodi orientiran atlas na naslednji način: če se orientacije tangentnih prostorov glede na neko karto ujemajo s standardno orientacijo evklidskega prostora, to karto pustimo nespremenjeno, sicer pa jo komponiramo z zrcaljenjem preko hiperravnine, ki spremeni orientacijo. Sedaj se ni težko prepričati, da so prehodne preslikave med novimi kartami orientacijo ohranjajoče.

Če je M gladka podmnogoterost v nekem evklidskem prostoru, lahko govorimo tudi o geometričnem tangentnem prostoru na M v poljubni točki $x \in M$, ki je prostor vseh tangentnih vektorjev v x gladkih poti na M, ki potekajo skozi to točko. Karta na M okoli x identificira ta tangentni prostor z zgoraj opisanim.

Na sferi lahko definiramo standardno orientacijo kot usklajeno izbiro orientacij tangentnih prostorov, določeno s standardno orientacijo ambientnega evklidskega prostora. Za poljuben $x \in \mathbb{S}^k$ naj bo orientacija (geometričnega) tangentnega prostora $\mathsf{T}_x\mathbb{S}^k$ določena s tako bazo $(v_1, \ldots, v_k)$, da $(x, v_1, \ldots, v_k)$ določa standardno orientacijo $\mathbb{R}^{k+1}$. Jasno je, da dve ekvivalentni bazi $\mathsf{T}_x\mathbb{S}^k$ hkrati izpolnjujeta (ali ne izpolnjujeta) pogoj v definiciji, saj je vektor x, skupaj s katerim tvorita bazo $\mathbb{R}^{k+1}$, za obe enak.

B.7. Stopnja preslikave. Stopnja gladke preslikave z upoštevanjem orientacije je posplošitev ovojnega števila kot preslikave krožnice vase na vse sklenjene orientabilne mnogoterosti. Ena pomembnih lastnosti stopnje je, da loči preslikave sfere nazaj vase do homotopije natančno – torej je stopnja popolna invarianta za homotopske razrede teh preslikav.

Definicija B.20. Naj bosta M in N gladki orientirani sklenjeni m-mnogoterosti in $f\colon M \to N$ gladka preslikava ter $y \in N$ regularna vrednost preslikave f. Naj bo $x \in f^{-1}(y)$. Če odvod $D_x f$ preslika izbrano orientacijo $\mathsf{T}_x M$ v izbrano orientacijo $\mathsf{T}_y N$, je *lokalna stopnja nad y* preslikave f v točki x enaka 1, pišemo $d(f, y; x) = 1$, sicer pa je $d(f, y; x) = -1$. *Stopnja preslikave f nad y* je vsota vseh njenih lokalnih stopenj nad y, torej

$$d(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} d(f, y; x).$$

Izrek B.21. *Naj bosta M in N gladki sklenjeni povezani orientirani m-mnogoterosti. Stopnja gladke preslikave $f\colon M \to N$ je neodvisna od regularne vrednosti y, nad katero jo računamo. Skupno vrednost vseh teh stopenj imenujemo* stopnja *preslikave f in označimo $d(f)$. Poleg tega imata homotopni preslikavi enako stopnjo.*

Dokaz izreka B.21. Podobno kot za stopnjo modulo 2 najprej dokažimo, da je stopnja homotopnih preslikav nad neko skupno regularno vrednostjo enaka. Začetek argumenta je enak kot v prejšnjem primeru – pri oznakah kot v dokazu izreka 5.2 dobimo množici $K_i \subset M \times \{i\}$, ki ju povezujejo gladki loki v L. Naš cilj je primerjati lokalni stopnji preslikav v krajiščih loka, zato moramo orientirati tudi $M' = M \times [0,1] \subset M \times \mathbb{R}$. Po izreku B.8 smemo predpostaviti, da je M gladka podmnogoterost v nekem $\mathbb{R}^n$. Ker za tangentni prostor v točki (x,s) na $M' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ velja

$$\top_{(x,s)}M' = \top_x M \oplus \top_s[0,1] = \top_x M \oplus \mathbb{R} \leq \mathbb{R}^n,$$

za njegovo orientacijo izberemo tisto, ki je določena z izbrano orientacijo na prvem sumandu ter standardno na drugem, torej interval $[0,1]$ usmerimo od 0 proti 1.

Izberimo lok $L' \subset L$ in označimo njegovi krajišči z x_0 in x_1. Predpostavimo, da je vsaj eno od krajišč, naj bo to x_0, vsebovano v K_0 in orientirajmo L' tako, da je usmerjen od x_0 do x_1. V vsaki točki $z \in L'$ je normalni prostor $\perp_z L'$ na L' v M' komplementaren $\top_z L'$ v $\top_z M'$. Orientacijo $\perp_z L'$ izberemo tako, da ta skupaj z orientacijo $\top_z L'$ tvori izbrano orientacijo $\top_z M'$; torej pozitivna baza $\perp_z L'$ dopolnjena s pozitivno bazo $\top_z L'$ tvori pozitivno bazo $\top_z M'$. Ker je za s blizu 0 lok L' enak $\{x_0\} \times [0,\varepsilon)$ in usmerjen stran od 0, je normalni prostor $\perp_{(x_0,s)} L' = \top_{x_0} M \oplus \{0\}$ in orientiran enako kot $\top_{x_0} M$. Orientacija $\perp_z L'$ se s točko $z \in L'$ zvezno spreminja, saj lahko baze za $\perp_z L'$ v okolici poljubne točke izberemo tako, da se bazni vektorji spreminjajo zvezno s točko z. Res, ker se $\top_z L'$ zvezno spreminja v odvisnosti od z, so si tudi normalni prostori $\perp_z L'$ blizu. Če s p_0 označimo pravokotno projekcijo $\mathbb{R}^{n+1}$ na $\perp_{z_0} L'$, je zato za z dovolj blizu z_0 zožitev p_0 na $\perp_z L'$ izomorfizem, s katerim lahko izbrano bazo v $\perp_{z_0} L'$ prenesemo v $\perp_z L'$ in tako dobljene baze se spreminjajo zvezno v odvisnosti od z.

Ker je $H(L') = \{y\}$, je $\top_z L'$ v jedru odvoda $D_z H$, zato ta odvod preslika $\perp_z L'$ izomorfno na $\top_y N$ (saj je surjektiven, ker je y regularna vrednost). Odvod $D_z H$ je zvezno odvisen od z, zato slike vseh orientiranih normalnih prostorov $\perp_z L'$ določajo isto orientacijo $\top_y N$. Zvezo med lokalnima stopnjama nad y v x_0 in x_1 bomo določili s primerjavo orientacije na $\perp_{x_1} L'$ z izbrano orientacijo na $\top_{x_1} M$. Ločimo dva primera.

Če je $x_1 \in M \times \{1\}$, je del loka L' za s blizu 1 enak $\{x_1\} \times (1-\varepsilon, 1]$, kjer usmeritev loka ustreza standardni orientaciji intervala proti 1, zato ima $\perp_{x_1} L'$ standardno orientacijo $\top_{x_1} M \oplus \{0\}$. Sledi, da je $d_y(f, x_0) = d_y(g, x_1)$.

Če je $x_1 \in M \times \{0\}$, je del loka L' za s blizu 1 enak $\{x_1\} \times [0,\varepsilon)$ in usmerjen proti 0, torej je njegova usmeritev nasprotna standardni orientaciji intervala, zato ima $\perp_{x_1} L'$ nasprotno orientacijo kot $\top_{x_1} M \oplus \{0\}$. Sledi, da je $d_y(f, x_0) = -d_y(f, x_1)$.

V primeru, ko sta obe krajišči L' v K_1, analogno kot zgoraj sledi $d_y(g, x_0) = -d_y(g, x_1)$. Zaradi izpeljanih zvez med lokalnimi stopnjami velja $d_y(f) = d_y(g)$.

Dokaz neodvisnosti od izbire regularne vrednosti je enak kot v primeru stopnje modulo 2. Upoštevamo le še, da je H_1 homotopna id_N in ima zato stopnjo 1. ☐

C. Brown–Sardov izrek

Brown[14]-Sardov[15] izrek pravi, da je množica regularnih vrednosti gladke ($\mathcal{C}^\infty$) preslikave $f\colon M \to N$ med gladkima mnogoterostma M in N »velika«, množica singularnih vrednosti pa »majhna«. Preslikava f ima sicer lahko veliko singularnih točk, saj je npr. za konstantno funkcijo $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ vsaka točka singularna, vsebina Brown–Sardovega izreka pa je, da slika množice singularnih točk ni zelo velika – v primeru omenjene konstante je le ena točka. Bolj natančno izrek pravi, da je množica regularnih vrednosti presek števne družine gostih odprtih podmnožic v N, od koder sledi, da je gosta; za tako množico rečemo, da je *gosta množica tipa G_δ*. Posledično je množica singularnih vrednosti števna unija zaprtih nikjer gostih množic in ima prazno notranjost (rečemo, da je množica tipa F_σ s prazno notranjostjo). Več o teh pojmih lahko bralec najde v [**8**, str. 176–178].

Izrek C.1 (Brown–Sardov izrek). *Naj bo M m-mnogoterost, N n-mnogoterost in $f\colon M \to N$ gladka preslikava. Potem je množica regularnih vrednosti preslikave f gosta podmnožica v N tipa G_δ; če je M kompaktna, pa je odprta gosta podmnožica.*

Ta izrek je relativno preprosta posledica naslednje lokalne verzije; ideja dokaza slednjega je povzeta po članku [**1**]. Tudi izrek na mnogoterostih se da formulirati v jeziku mere, vendar tega ne bomo storili.

Izrek C.2. *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^m$ odprta množica in $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Označimo s $S = S(f)$ množico singularnih točk preslikave f. Potem je $f(S)$ množica z mero nič v $\mathbb{R}^n$.*

[14]Arthur B. Brown (1905–1999), ameriški matematik.

[15]Arthur Sard (1909–1980), ameriški matematik, znan po svojem delu v diferencialni topologiji.

V zgornjih izrekih smo se omejili na gladke preslikave, a izreka veljata za preslikave razreda $\mathcal{C}^r$, če je le $r > \max\{m-n, 0\}$. Da je določena stopnja regularnosti res potrebna, pa dokazujejo »prostor-zapolnjujoče« krivulje, npr. Peanova krivulja, ki interval surjektivno preslika na kvadrat. Za tako krivuljo ima množica singularnih vrednosti neprazno notranjost.

Dokaz izreka C.1. Ker ima mnogoterost števno bazo, dopušča števen atlas. Poleg tega lahko atlasa $\Phi = \{\varphi_i \colon U_i \to U_i' | i \in \mathbb{N}\}$ na M in $\Psi = \{\psi_i \colon V_i \to V_i' | i \in \mathbb{N}\}$ na N izberemo usklajena s preslikavo f, tako da velja $f(U_i) \subseteq V_i$. Tedaj lahko za preslikave $f_i := f|_{U_i}$ uporabimo izrek C.2. Dodatno smemo privzeti, da obstajajo kompaktne podmnožice $B_i \subset U_i$, katerih notranjosti pokrivajo M. Ker je singularna množica $S(f_i)$ zaprta v U_i (saj je regularnost točke odprt pogoj), je $S(f_i) \cap B_i$ kompaktna, zato je takšna tudi njena slika $f_i(S(f_i) \cap B_i)$, ki ima po izreku C.2 mero nič in je torej nikjer gosta zaprta množica. Po Baireovem izreku [**8**, izrek 14.19] je torej $f(S(f))$ množica tipa F_σ s prazno notranjostjo. $\square$

Sedaj se lotimo dokaza izreka C.2. Ker je števna unija množic z mero nič množica z mero nič in je evklidski prostor 2-števen, je izrek dovolj dokazati lokalno. Tako se bomo tudi lotili dokaza, le da bomo poleg tega množico S razslojili na podmnožice, na katerih je f še bolj singularna. Za vsak $i \in \mathbb{N}$ naj bo $S_i \subseteq S$ množica točk, v katerih so vsi parcialni odvodi reda največ i vseh komponent preslikave f enaki 0; očitno so S in vse množice S_i zaprte. Izrek bomo dokazali lokalno za vsako množico S_i, globalno pa bo sledil s pomočjo naslednje leme, ki takoj sledi iz lastnosti množic z mero nič.

Lema C.3. *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^m$ odprta množica, $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava ter $L' \subset L$ podmnožici U. Če je $f(L')$ množica z mero nič ter ima vsak $x \in L \setminus L'$ okolico v $L \setminus L'$, katere slika s preslikavo f ima mero nič, potem je $f(L)$ množica z mero nič.*

Naslednja lema nam bo dala začetno množico točk, v katerih je f dovolj singularna, da ima slika te množice s preslikavo f mero nič.

Lema C.4. *Za odprto množico $U \subseteq \mathbb{R}^m$ in $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ je $f(S_{\lceil m/n \rceil})$ množica z mero nič.*

Dokaz. Izberimo poljubno točko $w \in S_\ell$, kjer smo označili $\ell = \lceil m/n \rceil$ in naj bo $a_0 > 0$ tako majhen, da je $\overline{K}(w, 2a_0)$ vsebovana v U. Pokazali bomo, da lahko f-sliko okolice $L = \overline{K}(w, a_0) \cap S_\ell$ točke w v S_ℓ pokrijemo s končno mnogo kockami v $\mathbb{R}^n$, katerih skupni volumen je poljubno majhen, zato je mera te množice enaka 0. Od tod pa sledi trditev leme.

Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$ in naj bo $a \in (0, a_0)$ tako majhen, da je maksimum poljubnega ℓ-tega parcialnega odvoda poljubne komponente preslikave f na $\overline{K}(L, a) = \bigcup_{z \in L} \overline{K}(z, a)$ manjši od ε. Prostor $\mathbb{R}^m$ razdelimo na m-kocke s stranico $\delta = 2^{-p} < a/\sqrt{m}$ za neki $p \in \mathbb{N}$. To naredimo tako, da prostor razrežemo z ravninami $x_i = q\delta$ za $q \in \mathbb{Z}$ in $i = 1, \ldots, m$; diametri tako dobljenih kock so manjši od a. Če neka kocka Q seka L v točki z, potem za poljubno točko $x \in Q$ z uporabo Taylorjeve formule z ostankom dobimo

$$\begin{aligned}|f_j(x) - f_j(z)| &\leq \frac{1}{\ell!} \sum_{\substack{\ell_1, \ldots, \ell_m \\ \sum \ell_i = \ell}} \left| \frac{\partial^\ell f_j}{\partial x_1^{\ell_1} \cdots \partial x_m^{\ell_m}}(\xi) \right| |x_1 - z_1|^{\ell_1} \cdots |x_m - z_m|^{\ell_m} \\ &\leq \frac{1}{\ell!} m^\ell \varepsilon \delta^\ell = \frac{\eta}{2} \delta^\ell,\end{aligned}$$

kjer zadnja enakost definira η. Torej je $f(Q)$ vsebovana v kocki Q' s stranico $\eta\delta^\ell$, ki ima volumen $V(Q') = \eta^n \delta^{n\ell}$. Razmerje volumnov kock $V(Q')/V(Q) = \eta^n \delta^{n\ell - m}$ je zgornja meja za $V(R')/V(R)$, kjer je R unija vseh kock Q v $\mathbb{R}^m$, ki sekajo L, R' pa unija kock Q' v $\mathbb{R}^n$ kot zgoraj, ki vsebujejo slike kock iz R. Ko pošljemo ε proti 0, gresta η in δ proti 0, tedaj pa gre proti 0 tudi $V(R')/V(R)$, saj je eksponent v $\delta^{n\ell - m}$ nenegativen. Ker volumen $V(R)$ z naraščajočim p ne narašča, od tod sledi, da je mera množice $f(L)$ (in posledično $f(S_\ell)$) enaka 0. $\square$

Trditev C.5. *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^m$ odprta množica in $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Potem je $f(S_1)$ množica z mero nič v $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Dokazovali bomo z indukcijo na m pri fiksnem n. Za $m \leq n$ je $\lceil m/n \rceil = 1$ in trditev sledi iz leme C.4.

Naj bo sedaj $m > n$ in naj trditev velja za vse gladke preslikave v $\mathbb{R}^n$, definirane na prostorih razsežnosti manjše od m. Po lemi C.4 f preslika $S_{\lceil m/n \rceil}$ v množico z mero nič. Izberimo poljubno točko $z \in S_1 \setminus S_{\lceil m/n \rceil}$ in naj bo ℓ najmanjši red neničelnega parcialnega odvoda kakšne komponente

f v z, $1 < \ell \leq \lceil m/n \rceil$. Dovolj je pokazati, da ima z okolico v $S_{\ell-1}$, katere f-slika ima mero 0, saj potem induktivno z uporabo leme C.3 sledi, da ima $f(S_1)$ mero 0. Predpostaviti smemo, da je

$$\frac{\partial^\ell f_1}{\partial x_1^{\ell_1} \cdots \partial x_m^{\ell_m}}(z) \neq 0,$$

kjer je $\ell_1 > 0$, kar lahko dosežemo s permutacijo koordinat (v domeni in kodomeni). Potem za funkcijo

$$h = \frac{\partial^{\ell-1} f_1}{\partial x_1^{\ell_1 - 1} \cdots \partial x_m^{\ell_m}} \text{ velja } h(z) = 0 \text{ in } \frac{\partial h}{\partial x_1}(z) \neq 0.$$

Po izreku o implicitni funkciji torej obstajajo okolici V za z_1 v $\mathbb{R}$ in W za $z' = (z_2, \ldots, z_m)$ v $\mathbb{R}^{m-1}$ ter gladka funkcija $g\colon W \to V$, $g(z') = z_1$, da je na $V \times W$ ničelna množica funkcije h enaka grafu g. V dovolj majhni okolici točke z lahko torej na $S_{\ell-1}$ (ki je podmnožica ničelne množice funkcije h) namesto preslikave f obravnavamo

$$\hat{f}\colon W \to \mathbb{R}^n, \; \hat{f}(x') = f(g(x'), x').$$

Po indukcijski predpostavki je $\hat{f}(S_1(\hat{f}))$ množica z mero 0. Ker slika $S_1(\hat{f})$ pri preslikavi $x' \mapsto (g(x'), x')$ vsebuje $S_{\ell-1} \cap W$, sledi, da ima z okolico v $S_{\ell-1}$, katere f-slika ima mero 0. □

Dokaz izreka C.1. Množico S razslojimo glede na rang odvoda preslikave f. Naj bo R_r za $r = 0, 1, \ldots$ množica točk, v katerih je rang odvoda f največ r. Dokazovali bomo z indukcijo na r. Ker je $R_0 = S_1$, ima po trditvi C.5 njena f-slika mero 0. Izberimo $r > 0$ in predpostavimo, da poljubna gladka preslikava preslika množico točk, v katerih je rang njenega odvoda največ $r - 1$, v množico z mero 0. Pokazati želimo, da ima poljubna točka $z \in R_r \setminus R_{r-1}$ okolico v tej množici, katere f-slika ima mero 0. Ker je $r > 0$, je vsaj en parcialni odvod neke komponente f v z neničeln; privzeti smemo, da je $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) \neq 0$. Potem je za poljubno točko $x' = (x_2, \ldots, x_m)$ dovolj blizu $z' = (z_2, \ldots, z_m)$ funkcija $f_1(\cdot, x')$ lokalni difeomorfizem v okolici z_1, zato obstajajo okolica $V \subset \mathbb{R}$ za z_1, okolica $U \subset \mathbb{R}$ za $f_1(z)$, okolica W za $z' \in R^{m-1}$ in gladka funkcija $g\colon W \times U \to V$, da za $x_1 \in V$, $x' \in W$ in $y_1 \in U$ velja $f_1(x_1, x') = y_1$ natanko tedaj, ko velja $x_1 = g(y_1, x')$. Preslikavo f lahko (z difeomorfizmom domene) v okolici točke z nadomestimo s preslikavo

$$U \times W \to U \times \mathbb{R}^{n-1}, \; (y_1, x') \mapsto (y_1, f'(g(y_1, x'), x')),$$

kjer je $f' = (f_2, \ldots, f_n)$. Iz Fubinijevega izreka sledi, da ima množica mero 0 v $\mathbb{R}^n$, če ima vsak njen presek s hiperravnino $y_1 = c$ ($c \in U$) mero 0. Opazujemo torej preslikave $\hat{f}_c = f'(g(c, \cdot), \cdot)\colon W \to \mathbb{R}^{n-1}$ za $c \in U$. Želeni rezultat sledi iz indukcijske predpostavke, če dokažemo, da je rang odvoda preslikave $\hat{f}_c$ v točkah $x' \in W$, pri katerih je rang odvoda Df v točki $(g(c, x'), x')$ enak r, največ $r - 1$.

Jacobijeva matrika za $\hat{f}_c$ ima za stolpce vektorje

$$\frac{\partial \hat{f}_c}{\partial x_j}(x') = \frac{\partial f'}{\partial x_1}(g(c, x'), x') \frac{\partial g}{\partial x_j}(c, x') + \frac{\partial f'}{\partial x_j}(g(c, x'), x') \quad \text{za } j = 2, \ldots, m.$$

To matriko dobimo iz Jacobijeve matrike za f v točki $(g(c, x'), x')$ tako, da najprej prištejemo j-temu stolpcu prvi stolpec, pomnožen z $\frac{\partial g}{\partial x_j}(c, x')$, nato pa izpustimo prvo vrstico in prvi stolpec. Ker je bil v izpuščeni prvi vrstici neničeln le prvi element, sledi, da rang tako dobljene matrike ne more biti večji kot $r - 1$, če je bil rang Jacobijeve matrike največ r. □

Literatura

[1] A. B. Brown, *Functional dependence*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935) 379-394.

[2] M. Brown, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960) 74-76.

[3] M. Brown, *Locally flat imbeddings of topological manifolds*, Ann. of Math. (2) **75** (1962) 331-341.

[4] S. S. Cairns, *An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951) 860-867.

[5] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

[6] R. Maehara, *The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem*, Amer. Math. Monthly **91** (1984) 641–643.

[7] J. Mr:cun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in fizike **44**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

[8] J. Vrabec, *Metrični prostori*, Matematika-fizika **31**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1990.