UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO - ZAPISKI

1 Kvocientni prostori

1.1 Konstrukcije prostorov

Topologija preučuje prostore in zvezne preslikave med njimi. Pri obravnavi prostorov pa se pogosto srečamo z naslednjimi naravnimi konstrukcijami.

1. **Podprostor**

Podprostor topološkega prostora $(X, \mathcal{T})$ je poljubna podmnožica $A \subseteq X$, opremljena s topologijo

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

2. **Produkt**

Na produktu $X \times Y$ topoloških prostorov X in Y vpeljemo produktno topologijo, ki je generirana z bazo

$$\mathcal{B}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_X,\ Y \in \mathcal{B}_Y\}$$

oziroma ekvivalentno s predbazo

$$\mathcal{P}_{X\times Y} = \{U \times Y \mid U \overset{\text{odp}}{\subseteq} X\} \cup \{X \times V \mid V \overset{\text{odp}}{\subseteq} Y\}.$$

Produktno topologijo lahko posplošimo tudi na produkt poljubne družine množic $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Označimo $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ in običajno projekcijo $p_\lambda : X \to X_\lambda$. Potem je produktna topologija na X generirana s predbazo

$$\mathcal{P} = \{p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid U_\lambda \overset{\text{odp}}{\subseteq} X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}.$$

To je najmanjša topologija na X, v kateri so projekcije zvezne (seveda pa so tudi odprte).

Opomba. Za poljuben topološki prostor X je produktna topologija na $\prod_{\lambda\in\Lambda} X$ je ekvivalentna topologiji konvergence po točkah na X^Λ.

3. **Disjunktna unija**

Disjunktna unija indeksirane družine topoloških prostorov $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ je

$$X = \{(X_\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\}$$

in jo označujemo kot $X = \sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Za vsak $\lambda \in \Lambda$ imamo inkluzijo

$$i_\lambda : X_\lambda \to \sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda,\ i_\lambda(x) = (x, \lambda).$$

Sedaj lahko na $X = \sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ vpeljemo koproduktno topologijo, ki je generirana z bazo

$$\{i_\lambda(U) \mid U \overset{\text{odp}}{\subseteq} X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}.$$

4. **Kompaktifikacija z eno točko**

Kompaktifikacija z eno točko topološkega prostora $(X, \mathcal{T})$ je odprta vložitev $i : X \to Y$ prostora X v kompakten prostor Y, za katero velja:

- množica $Y \setminus i(X)$ vsebuje natanko eno točko,
- če je K kompaktna zaprta zaprta podmnožica X, potem je slika $i(K)$ zaprta v Y.

Vemo že, da ima vsak topološki prostor natanko eno (do homeomorfizma natančno) kompaktifikacijo z eno točko; konstruiramo jo tako, da definiramo prostor $X^+ := X \cup \{\infty\}$ s topologijo

$$\mathcal{T}_+ = \{U \subseteq X^+ \mid U \overset{\text{odp}}{\subseteq} X \text{ ali } X^+ \setminus U \overset{\text{kompakt}}{\subseteq} X\}.$$

Če je $i : X \to X^+$ kompaktifikacija z eno točko, potem je X^+ Hausdorffov natanko tedaj, ko je X Hausdorffov in lokalno kompakten. Velja pa tudi, da je poljubna vložitev $i : X \to Y$ topološkega prostora X v komapkten Hausdorffov prostor Y, za katero ima množica $Y \setminus i(X)$ natanko en element, kompaktifikacija prostora X z eno točko.

1.2 Kvocientni prostori

Definicija 1.1. Naj bo X množica, $\sim$ ekvivalenčna relacija in $\mathcal{R}$ množica ekvivalenčnih razredov. Kvocientna množica je množica ${}^{X}/_{\sim} = {}^{X}/_{\mathcal{R}} = \{[x] \mid x \in X\}$. Njena kvocientna projekcija pa je $q : X \to {}^{X}/_{\sim}$ s predpisom $x \mapsto [x]$.

Zgled 1.2. *Naj bo $X = [0, 1]$ in $\sim$ definirana kot $0 \sim 1$. Potem si lahko ${}^{X}/_{\sim}$ predstavljamo kot krožnico, torej interval na nek način zvežemo.*

Definicija 1.3. Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Kvocientno topologijo definiramo kot najmočnejšo topologijo, za katero je $q : X \to {}^{X}/_{\sim}$ zvezna.

Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na X in $\mathcal{T}_\sim$ kvocientna topologija na ${}^{X}/_{\sim}$. Potem je po definiciji

$$\mathcal{T}_\sim = \{V \subseteq {}^{X}/_{\sim} \mid q^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}.$$

Torej velja, da je $V \subseteq {}^{X}/_{\sim}$ odprta natanko tedaj, ko je $q^{-1}(V) \subseteq X$ odprta. Implikacija v desno nam da zveznost q, implikacija v desno pa kvocientnost topologije $\mathcal{T}_\sim$. Seveda pa potem velja tudi, da je $Z \subseteq {}^{X}/_{\sim}$ zaprta natanko tedaj, ko je $q^{-1}(Z) \subseteq X$ zaprta.

Zgled 1.4. *Naj bo $X = [0, 1]$ in $\mathcal{R} = \{[0, 1), \{1\}\}$. Potem je ${}^{X}/_{\mathcal{R}} = \{[0], [1]\}$ in njegova kvocientna topologija je $\mathcal{T} = \{[0], \emptyset, {}^{X}/_{\mathcal{R}}\}$, kar pa je topologija Sierpinskega.*

Zgled 1.5. *Naj bo tokrat $X = [0, 1]$ in $\mathcal{R} = \{X \cap \mathbb{Q}, X \setminus \mathbb{Q}\}$. Ta prostor ima trivialno kvocientno topologijo $\mathcal{T}_\sim = \left\{[0], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right\}$.*

Opomba. Kvocientna projekcija ni nujno odprta ali zaprta.

Zgled 1.6. *Vzemimo topološki prostor $X = [0, 1]$ z relacijo $\mathcal{R} = \{[0, 1), 1\}$ in $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ je zaprta množica. Potem je $q(A) = [0]$, torej q v tem primeru ni zaprta, saj je $q^{-1}(q(A)) = q^{-1}([0]) = [0, 1)$ odprta in ne zaprta. Podoben primer dobimo za $X = [0, 2]$ in $\mathcal{R} = \{\{x\} \mid x \in [0, 1)\} \cup \{[1, 2]\}$. Tedaj je $U = (1, 2)$ odprta in $q^{-1}(q(U)) = [1, 2]$, ki pa je le zaprta in ne odprta. Torej tudi q ni odprta.*

Definicija 1.7. Naj bo X topološki prostor z relacijo $\sim$ in kvocientno projekcijo $q : X \to X/_\sim$. Za poljubno množico $A \subseteq X$ imenujemo $q^{-1}(q(A))$ nasičenje za množico A.

Preprosto povedano je nasičenje množica vseh ekvivalenčnih razredov, ki sekajo A.

Trditev 1.8. *Naj bo X topološki prostor z ekvivalenčno relacijo $\sim$ in $q : X \to X/_\sim$ kvocientna projekcija.*

- *$q(A)$ je odprta natanko tedaj, ko je nasičenje A odprto.*
- *$q(A)$ je zaprta natanko tedaj, ko je nasičenje A zaprto.*

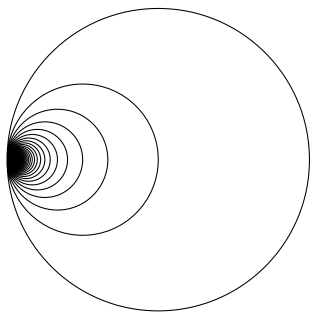
Potem je q odprta, če je nasičenje vsake odprte množice odprto, in zaprta, če je nasičenje vsake zaprte množice zaprto.

Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na njem. Če si lahko predstavljamo X geometrijsko, si želimo doseči enako še za njegov kvocientni prostor $X/_\sim$. Želimo torej najti f, ki slika X v tak prostor Y, ki je homeomorfen $X/_\sim$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] & \end{tikzcd}$$

Zgled 1.9. *Naj bo $X = \mathbb{R}$ in $A = \mathbb{Z}$ njegov edini netrivialni ekvivalenčni razred. Potem si lahko njegov kvocientni prostor $X/_\sim = X/_A$ predstavljamo kot števno neskončno mnogo krožnic, ki se sekajo v eni točki. Ta prostor pa ne moremo vložiti v nek evklidski prostor, saj ni Hausdorffov.*

Zgled 1.10. *Naj bo $X = [0,1]$ in $A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Tudi tokrat si lahko kvocientni prostor $X/_A$ predstavljamo kot števno neskončno mnogo krožnic. Ali obstaja kakšna razlika s prejšnjim zgledom? Da, tokrat je prostor $X/_A$ kompakten. Geometrijski ponazoritvi tega prostora pravimo Havajski uhan.*



1.3 Kvocientne preslikave

Naj bo $f : X \to Y$. Kakšen mora biti f, da sploh določa inducirano preslikavo $\overline{f} : X/_\sim \to Y$? Ker mora veljati $\overline{f}([x]) \mapsto f(x)$, mora f ekvivalentne točke v X slikati v eno točko. Z drugimi besedami, f mora biti konstantna v ekvivalenčnih razredih.

Trditev 1.11. *Veljajo naslednje trditve.*

- *Če za vsaka $x, y \in X$ velja $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$, potem f določa inducirano preslikavo $\overline{f}$:*

$X/_\sim \to Y$.

- *Če je f zvezna, je tudi $\overline{f}$ zvezna.*
- *Če je f surjektivna, je tudi $\overline{f}$ surjektivna.*
- *$\overline{f}$ je injektivna, če za vsaka $x, y \in X$, ki nista v relaciji $\sim$, velja $f([x]) \neq f([y])$ (tj. f loči razrede).*

Dokaz. Dokažimo drugo točko. Naj bo $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ in $V \subseteq Y$ odprta podmnožica. Potem je $q^{-1}(\overline{f}^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ in ker je f zvezna, je $f^{-1}(V)$ odprta. $\square$

Če je f taka, da je $\overline{f}$ (zvezna) bijekcija, nas zanimajo dodatni pogoji, ki zagotavljajo, da je $\overline{f}$ homeomorfizem, torej če $\overline{f}$ inducira bijekcijo med odprtimi množicami. Tako je poljubna množica $V \subseteq Y$ odprta natanko tedaj, ko je $\overline{f}^{-1}(V)$ odprta v $X/_\sim$, to pa je natanko tedaj, ko je $f^{-1}(V)$ odprta v Y.

Definicija 1.12. Funkcija $f : X \to Y$ je kvocientna, če je surjektivna in je vsaka množica $V \subseteq Y$ odprta natanko tedaj, ko je $f^{-1}(V)$ odprta v X.

Opomba. Surjektivna funkcija $f : X \to Y$ je kvocientna natanko tedaj, ko velja

$$Z^{\text{zap}} \subseteq Y \Leftrightarrow f^{-1}(Z)^{\text{zap}} \subseteq X. \tag{1}$$

V splošnem se kvocientna preslikava $f : X \to Y$ obnaša kot kvocientna projekcija glede na razčlenitev X na f-praslike točk iz Y.

Izrek 1.13.

Naj bo X topološki prostor z ekvivalenčno relacijo $\sim$ in $f : X \to Y$ kvocientna preslikava, ki je konstantna na ekvivalenčnih razredih in jih med seboj loči (pravimo, da naredi iste identifikacije kot $\sim$). Potem je $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ homeomorfizem.

Lema 1.14. *Naj bo $f : X \to Y$ zvezna in surjektivna. Če je f še odprta ali zaprta, potem je kvocientna.*

Dokaz. Dokažimo trditev za zaprto f, torej implikacijo (1) v levo. Če je $Z \subseteq Y$ taka, da je $f^{-1}(Z)$ zaprta v $X/_\sim$, potem je zaradi zaprtosti in surjektivnosti f tudi $Z = f(f^{-1}(Z))$ zaprta v Y. $\square$

Opomba. Če je X kompakt in Y Hausdorffov, je zvezna preslikava $f : X \to Y$ takoj zaprta.

Označimo interval $I = [0, 1]$ in si oglejmo nekaj naravnih kvocientov kvadrata $I^2 = [0, 1]^2$.

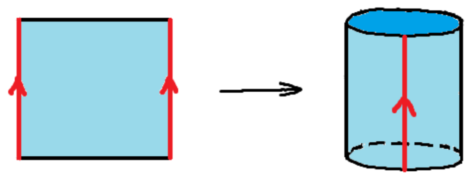
Zgled 1.15. *Kvocientni prostor kvadrata I^2 z relacijo*

$$\forall y \in I: \ (0, y) \sim (1, y)$$

je s funkcijo

$$f : I^2 \to S^1 \times I, \ f(s, t) = (e^{2\pi i s}, t)$$

homeomorfen plašču valja.



Zgled 1.16. *Möbiusov trak je kvocient kvadrata I^2 po relaciji*

$$\forall y \in I: \ (0,y) \sim (1, 1-y).$$

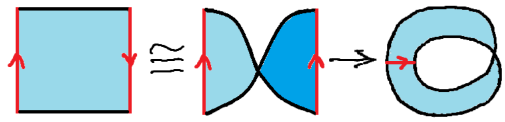
Ta prostor lahko vložimo v poln torus $S^1 \times B^2$ s preslikavo

$$f: I^2 \to S^1 \times B^2, \ (x,y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{\pi i x}(2y-1)),$$

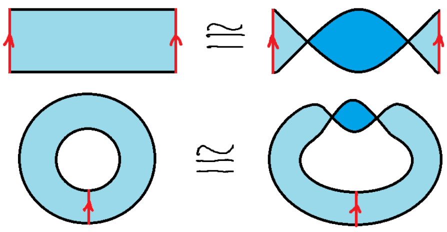
ki je očitno kvocientna. Poln torus $S^1 \times B^1$ pa lahko vložimo v $\mathbb{R}^3$ s predpisom

$$\varphi((x,y),(z,w)) = w(0,0,1) + (z+2)(x,y,0).$$

Če sedaj f komponiramo s φ, dobimo vložitev Möbiusovega traku v $\mathbb{R}^3$.

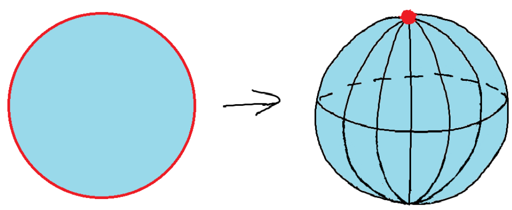


Zgled 1.17. *Če kvadrat I^2 iz prejšnjih zgledov še enkrat zavihnemo in nato zlepimo robova, dobimo kvocientni prostor, homeomorfen kolobarju.*



Z drugimi besedami, dobimo še eno vložitev kvocienta kvadrata I^2 z relacijo $(0,y) \sim (1,y)$ v $\mathbb{R}^3$.

Zgled 1.18. *Na B^2 imamo ekvivalenčno relacijo, v kateri je edini netrivialni ekvivalenčni razred S^1: to lahko označimo kot B^2/S^1 in že intuitivno se zdi, da je ta prostor homeomorfen S^2. Možen predpis za kvocientno preslikavo $f: B^2 \to S^2$ bi bil $f(\mathbf{x}) = ((2\sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2})\mathbf{x}, 2\|\mathbf{x}\|^2 - 1)$.*



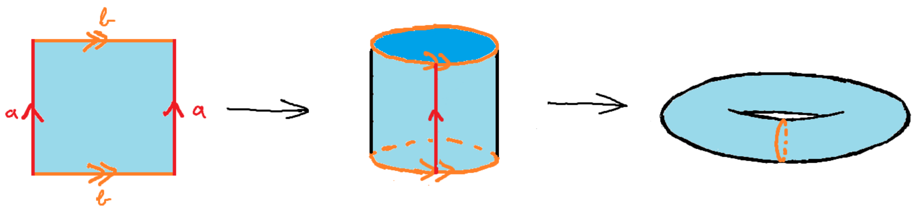
Zgled 1.19. *Kvocient kvadrata I^2 z relacijo*

$$\forall x, y \in I: \ (0, y) \sim (1, y), \ (x, 0) \sim (x, 1)$$

je homeomorfen torusu. Res, preslikava

$$f : I^2 \to S^1 \times S^1, \ f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$$

je kvocientna in zato inducira homeomorfizem $\overline{f} : I^2/_{\sim} \to S^1 \times S^1$.



1.4 Operacije s kvocientnimi preslikavami

Trditev 1.20. *Naj bosta $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ funkciji. Potem velja:*

- *f, g kvocientni $\Rightarrow$ $g \circ f$ kvocientna.*
- *$g \circ f$ kvocientna in f, g zvezni $\Rightarrow$ g kvocientna.*

Dokaz. Dokažimo najprej prvo točko. Očitno je $g \circ f$ surjektivna in zvezna, zato je dovolj, da preverimo lastnost (1) v levo.

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{-1}(V) \overset{\text{odp}}{\subseteq} X &\Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \overset{\text{odp}}{} \\ &\Rightarrow g^{-1}(V) \overset{\text{odp}}{\subseteq} Y \\ &\Rightarrow V \overset{\text{odp}}{\subseteq} Z. \end{aligned}$$

Pri drugi točki lahko takoj sklepamo, da je g surjektivna in zvezna. Naj bo $V \subseteq Z$ taka, da je $g^{-1}(V) \overset{\text{odp}}{\subseteq} Y$. Potem sledi

$$\begin{aligned} f^{-1}(g^{-1}(V)) \overset{\text{odp}}{\subseteq} X &\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(V) \overset{\text{odp}}{} \\ &\Rightarrow V \overset{\text{odp}}{\subseteq} Z. \end{aligned}$$

□

Zgled 1.21. *Z uporabo prejšnje trditve lahko pokažemo, da je za*

$$A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \times S^1$$

prostor $S^1 \times S^1/_A$ homeomorfen sferi S^2. Res, označimo $B = \partial I^2$ in po zgledu 1.18 je $I^2/_B$ homeomorfen S^2. Definirajmo še kvocientno preslikavo $f : I^2 \to S^1 \times S^1$ kot $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. Sedaj pa naša predpostavka sledi iz prejšnje trditve:

$$\begin{tikzcd} I^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_1"] \arrow[dr, "F = q_2 \circ f"] & S^1 \times S^1 \arrow[d, "q_2"] \\ I^2/_B \arrow[r, "\overline{F}"] & S^1 \times S^1/_A, \end{tikzcd}$$

saj je $F = q_2 \circ f$ kvocientna.

Opomba. Če je $h : X \to Y$ homeomorfizem in sta $\sim_X$ ter $\sim_Y$ ekvivalenčni relaciji na X oziroma Y, za kateri velja
$$x_1 \sim_X x_2 \Leftrightarrow h(x_1) \sim_Y h(x_2),$$
potem je $X/_\sim \cong Y/_\sim$.

1.5 Deljivost topoloških lastnosti

Definicija 1.22. Topološka lastnost $\mathcal{L}$ je deljiva, če se s poljubnega topološkega prostora prenese na vsak njegov kvocientni prostor. To je ekvivalentno temu, da se $\mathcal{L}$ ohranja pri vsaki kvocientni preslikavi.

Trditev 1.23.

1. *Deljive topološke lastnosti so kompaktnost, povezanost (s potmi), diskretnost, trivialnost, separabilnost in lokalna povezanost (s potmi).*
2. *Nedeljive topološke lastnosti so med drugim separacijske, lokalna kompaktnost, 1-števnost, 2-števnost, metrizabilnost in popolna nepovezanost.*

Dokaz.

1. Večina od navedenih lastnosti velja zaradi ohranitve pri zveznih preslikavah. Dokažimo zato lokalno povezanost s potmi. Naj bo $f : X \to Y$ kvocientna in X lokalno povezan s potmi. Potem so komponente vsake odprte množice odprte. Naj bo $V \subseteq Y$ odprta in $V = \cup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$, kjer so V_λ komponente V. Potem je $f^{-1}(V) = \cup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(V_\lambda)$. Komponente $f^{-1}(V)$ so odprte v X, naj bo W ena izmed teh komponent:
$$f(W) \subseteq V \Rightarrow \exists\lambda_0 : f(W) \subseteq V_{\lambda_0} \Rightarrow W \subseteq f^{-1}(V_{\lambda_0}).$$
Potem je $f^{-1}(V_\lambda)$ unija nekaj (odprtih) komponent množice $f^{-1}(V)$, zato je $f^{-1}(V_\lambda)$ odprta v X in ker je f kvocientna, je V_λ kvocientna v Y.
2. Za razne topološke lastnosti podamo kar konkretne protiprimere. Za Hausdorffovo lastnost vzemimo T_2 prostor $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ z ekvivalenčno relacijo $(x,0) \sim (x,1)$, $\forall x \in (0,\infty)$. Za 1-števnost pa lahko na primer vzamemo 1-števen prostor $X = \mathbb{N} \times [0,1]$, definiramo $A = \mathbb{N} \times \{0\}$ in potem $X/_A$ ni 1-števen. $\square$

Cantorjevo množico dobimo iz intervala $[0,1]$, ki mu izbrišemo srednjo tretjino in nato ta postopek induktivno nadaljujemo. Tako dobimo Cantorjevo množico C, ki je metrični kompakt brez izoliranih točk in je povsem nepovezan.

Opomba. Cantorjeva množica je homeomorfna prostoru funkcij $2^{\mathbb{N}}$, opremljenim s kompaktno-odprto topologijo, kjer je $2 = \{0,1\}$ diskreten prostor z dvema točkama.

Slika 1: Cantorjeva množica

Izrek 1.24.

Zgornje lastnosti določajo Cantorjevo množico do izomorfizma natančno.

Izrek 1.25 (Aleksandrov).

Če je X poljuben metrični kompakt, obstaja zvezna surjekcija $f : C \to X$. Taka f je tudi kvocientna.

Vzemimo metrični kompakt $X = I = [0, 1]$, to je torej kvocient Cantorjeve množice, vendar pa je povezan, zato se popolna nepovezanost ne ohrani. To bi lahko tudi dokazali tako, da uporabimo ekspliciten zapis Cantorjeve množice

$$C = \{x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i} \mid x_i \in \{0, 1\}\}$$

in definiramo zvezno surjektivno preslikavo v I s pomočjo dvojiškega zapisa:

$$f\left(\sum_{i=1} \frac{2x_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1} \frac{x_i}{2^i}.$$

Trditev 1.26. *Naj bo $\mathcal{R}$ razčlenitev prostora X. Potem je $X/_{\mathcal{R}} \in T_1$ natanko tedaj, ko so članice $\mathcal{R}$ zaprte v X.*

1.6 Topološke grupe in delovanja

Definicija 1.27. Topološka grupa G je grupa G, ki je hkrati tudi topološki prostor, tako da sta strukturi povezani:

- množenje $G \times G \to G$ je zvezno.
- invertiranje $G \to G$ je zvezno.

Opomba. Poznamo že na primer topološko algebro zveznih funkcij ali pa p-adična števila. Ta je množica racionalnih števil, napolnjena v p-adični metriki. Naj bo p praštevilo; potem je

$$\left|\frac{m}{n}\right| = p^{-k}, \text{ če je } \frac{m}{n} = p^k \frac{a}{b} \text{ in sta } a, b \text{ tuji s } p.$$

S tem dobimo topološki obseg p-adičnih števil.

Zgled 1.28. *Navedimo nekaj zgledov topoloških grup.*

- *Poljubna grupa G, opremljena z diskretno topologijo je topološka grupa.*
- *Grupe $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{H}, +)$ in pa tudi $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$, $(\mathbb{H}, \cdot)$ so vse topološke grupe.*
- *Množice S^0, S^1 in S^3 so zaporedoma podgrupe topoloških grup $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$ in $(\mathbb{H}, \cdot)$ ter so tudi same hkrati topološke podgrupe.*

Zgled 1.29. *Naj bo $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ družina topoloških grup. Potem definiramo $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ kot direktni produkt grup in topoloških prostorov z operacijo po komponentah:*

$$(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cdot (h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} := (g_\lambda h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}.$$

Na tej množici vpeljemo produktno topologijo. Preprost primer je, če proglasimo $G_n \cong \mathbb{Z}_2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potem je

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \cong C \ \dots \text{ Cantorjeva množica.}$$

Zgled 1.30. *Oglejmo si nekatere topološke grupe linearnih izomorfizmov. Naj bo* $\mathbb{F}$ *topološki obseg, torej* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$*. Naj bo* V n*-dimenzionalni vektorski prostor nad* $\mathbb{F}$*, torej* $V \cong \mathbb{F}^n$ *s produktno topologijo. Naj bo* $\mathrm{GL}(V)$ *množica vseh linearnih izomorfizmov* $V \to V$*. Potem lahko* V *identificiramo s* $\mathbb{F}^n$*, torej je*

$$\mathrm{GL}_n\mathbb{F} = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\} \overset{\text{odp}}{\subseteq} \mathbb{F}^{n\times n} \quad \text{z evklidsko topologijo.}$$

Splošna linearna grupa je topološka grupa. Res, množenje je očitno zvezno, saj sestoji iz elementarnih funkcij; enako velja tudi za invertiranje. Podobno sledi za naslednje grupe:
- $\mathrm{SL}_n\mathbb{F} = \{A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{F} \mid \det A = 1\}$,
- $\mathrm{O}_n = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid AA^\top = I\}$,
- $\mathrm{SO}_n = \mathrm{SL}_n\mathbb{R} \cap \mathrm{O}_n$,
- $\mathrm{U}_n = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid AA^{\mathsf{H}} = I\}$,
- $\mathrm{SU}_n = \mathrm{U}_n \cap \mathrm{SL}_n\mathbb{C}$.

Opomba. To so primeri Liejevih grup; tako pravimo topološkim grupam, ki so hkrati gladke mnogoterosti in v katerih so operacije gladke preslikave.

Trditev 1.31. *Naj bo* G *topološka grupa in* $a \in G$*. Potem je leva translacija za* a*, definirana kot*

$$L_a : G \to G, \quad g \mapsto ag$$

homeomorfizem.

Opomba. Enako velja za desno translacijo a, torej $D_a : G \to G$, $g \mapsto ga$.

Dokaz. Leva translacija $L_a : G \to G$ je zvezna, saj je kompozitum zveznih funkcij

$$G \to \{a\} \times G,\ g \mapsto (a, g) \quad \text{in} \quad \{a\} \times G \to G,\ (a, g) \mapsto ag.$$

Inverz L_a je $L_{a^{-1}}$, saj je $L_a \circ L_{a^{-1}} = \mathrm{Id}$. Od tod pa sledi dokaz trditve. □

Posledica 1.32. *Topološka grupa* G *je homogen prostor, torej za poljubna* $a, b \in G$ *obstaja homeomorfizem* $h : G \to G$*, da je* $h(a) = b$*.*

Dokaz. Definiramo $h := L_{b^{-1}a}$. □

Definicija 1.33. Naj bo X topološki prostor in G topološka grupa, potem je (levo) delovanje grupe G in prostora X zvezna preslikava $\varphi : G \times X \to X$, za katero velja

- $e \cdot x = x,\ \forall x \in X.$
- $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x,\ \forall a, b \in G,\ \forall x \in X.$

Topološki prostor X z delovanjem G-grupe imenujemo G-prostor.

Opomba. Za vsak $a \in G$ je $\varphi(a, \cdot) : X \to X$ leva funkcija za a, ki je homeomorfizem. Ampak v splošnem X ni homogen prostor, saj za poljubni izbrani točki ne obstaja nujno translacija, ki preslika eno v drugo.

Trditev 1.34. *Delovanje grupe* G *na* X *določa ekvivalenčno relacijo na* X*:*

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G,\ y = g \cdot x.$$

Ekvivalenčne razrede imenujemo orbite: orbita točke x je

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X.$$

Orbite tvorijo particijo prostora X. Prostor $X/_{\sim} := X/_{G}$ imenujemo prostor orbit[1]. Za poljuben $x \in X$ imenujemo

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \leq G.$$

stabilizatorska podgrupa. Iz algebre že vemo, da obstaja bijekcija med $G \cdot x$ in $G/_{G_x}$.

Zgled 1.35. *Če je G topološka grupa in $H \leq G$ podgrupa, potem je tudi H topološka grupa. Zožitev množenja v G določa delovanje H na G:*

$$H \times G \to G, \quad (h, g) \mapsto hg.$$

Takšen primer je recimo delovanje $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ s translacijami za cela števila:

$$Z \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a, x) \mapsto x + n.$$

Orbita točke x je $x + \mathbb{Z} = \{x + n \mid n \in \mathbb{Z}\} = [x]$. Pokazali bomo, da je prostor orbit $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ homeomorfen $[0,1]/_{0 \sim 1}$, ta pa je nadalje homeomorfen S^1.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"] & S^1 \\
\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] &
\end{tikzcd}$$

Definirajmo $f : \mathbb{R} \to S^1$, $f(x) = e^{2\pi i x}$. Očitno je f surjektivna in zvezna ter naredi iste identifikacije kot $\mathbb{Z}$:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow e^{2\pi i x} = e^{2\pi i y} \Leftrightarrow x = y + k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dovolj bi bilo že, če bi dokazali, da je f zaprta. To pa ni res, saj se množica

$$A = \{n + \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\} \stackrel{\text{zap}}{\subseteq} \mathbb{R},$$

ne preslika v zaprto množico, ker v njeni sliki ni elementa $1 \in S^1$. Na srečo pa f je odprta, saj vsak odprt interval $U \subseteq \mathbb{R}$ dolžine manj kot 1 injektivno preslika na odprt lok v krožnici. Torej je $\overline{f}$ homeomorfizem.

Zgled 1.36. *Množica $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ je topološka grupa in deluje na $\mathbb{C}$ z množenjem kompleksnih števil:*

$$S_1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (\alpha, z) \mapsto \alpha z.$$

Prostor orbit $\mathbb{C}/_{S^1}$ je izomorfen $[0, \infty)$.

Zgled 1.37. *Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, torej je $\mathbb{F}^*$ topološka grupa za množenje z evklidsko topologijo. Potem $\mathbb{F}^*$ deluje na $\mathbb{F}^n$ z množenjem s skalarji:*

$$\mathbb{F}^* \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v.$$

Orbita vektorja $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ je $\mathbb{F}$-premica skozi $\mathbf{v}$ brez izhodišča, ničelni element pa je kar sam svoja orbita.

Trditev 1.38. *Naj bo G topološka grupa, ki deluje na topološki prostor X. Potem je kvocientna projekcija $q : X \to X/_{G}$ odprta.*

[1] Pri tem moramo paziti, da razlikujemo med podobnim zapisom, kjer bi črka G označevala netrivialni ekvivalenčni razred. Razliko med zapisom razberemo iz konteksta.

Dokaz. Za poljubno odprto množico $V \subseteq X$ moramo pokazati, da je njeno nasičenje $q^{-1}(q(V))$ odprto.

$$\begin{aligned} q^{-1}(q(V)) &= \{y \mid y \sim x \text{ za nek } x \in V\} \\ &= \{g \cdot x \mid x \in V,\ g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} \{g \cdot x \mid x \in V\} \\ &= \bigcup_{g \in G} g \cdot V = \bigcup_{g \in G} L_g(V) \overset{\text{odp}}{}, \end{aligned}$$

ker je L_g homeomorfizem. □

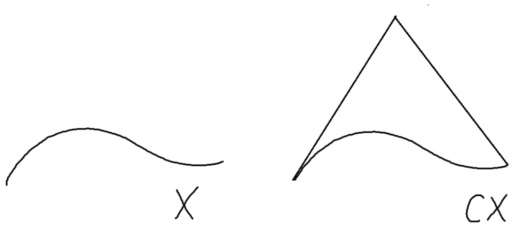
1.7 Konstrukcije kvocientov

1. **Stožec**

Naj bo X topološki prostor in $I = [0, 1]$. Potem kvocientu

$$CX := X \times I \big/ X \times \{1\}.$$

pravimo stožec nad X.



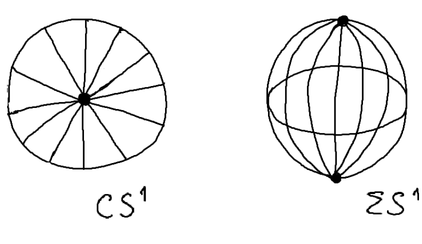
2. **Suspenzija**

Suspenzija nad X je kvocient

$$\Sigma X := X \times [-1, 1] \big/ X \times \{-1\}, X \times \{1\}.$$

Opomba. Če je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in obstaja $c \in \mathbb{R}^n$, da se daljice $[c, x]$, $x \in X$ sekajo paroma le v c, potem unijo teh daljic imenujemo linearni stožec. Če je X kompakt, ima njegov linearni stožec enake topološke lastnosti kot CX.

Trditev 1.39. *$CS^n \cong B^{n+1}$ in $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$.*



3. **Simetrični produkt**

Simetrični produkt je množica vseh neurejenih n-teric; če je X topološki prostor, $n \in \mathbb{N}$ in $X^n = \{x_1, \ldots, x_n) \mid x \in X\}$, potem definiramo

$$S^n X := X^n \big/ S_n ,$$

kjer je S_n simetrična grupa, ki deluje s permutacijami.

4. **Limita prostorov**

Limita prostorov $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} X_4 \cdots$ je definirana kot

$$\lim_{\to}(X_n, f_n) := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} /\sim ,$$

kjer za $x \in X_i$ in $y \in X_j$ vpeljemo relacijo

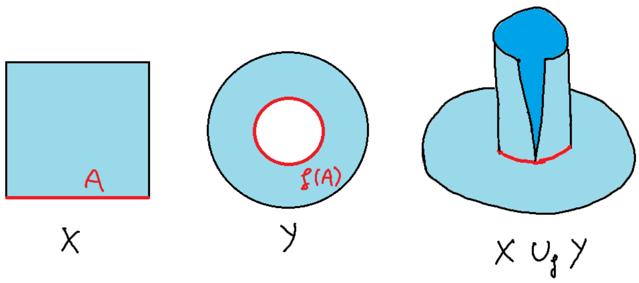
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \; f_n(\cdots f_{i+1}(f_i(x))) = f_n(\ldots f_{j+1}(f_j(y))).$$

5. **Zlepek prostorov**

Naj bosta X in Y topološka prostora $A \subseteq X$ in $f : A \to Y$. Potem je zlepek X in Y vzdolž f kvocient

$$X \cup_f Y := (X \bigsqcup Y) \Big/ a \sim f(a), \forall a \in A \cdot$$

Njegovi ekvivalenčni razredi so $[x] = \{x\}$ za $x \in X \setminus A$, $[y] = \{y\}$ za $y \in Y \setminus f(A)$ in pa $[y] = \{y\} \cup f^{-1}(\{y\})$ za $y \in f(A)$.



Zgled 1.40. *Navedimo nekaj primerov zlepkov.*
- *Če je $A \subseteq X$, potem je X/A zlepek za preslikavo $f : A \to Y = \{*\}$, torej je v tem primeru $X \cup_f Y \cong X/A$.*
- *Če je $f : S^{n+1} \to S^n$ homeomorfizem, potem je $B^n \cup_f B^n \cong S^n$.*
- *Preslikavni valj preslikave $f : X \to Y$ je zlepek $X \times I$ in Y, ki $X \times \{0\}$ z f prilepi na Y.*

Izrek 1.41.

Naj bosta X in Y normalna prostora, $A \overset{zap}{\subseteq} X$ in $f : A \to Y$ zvezna. Potem je $X \cup_f Y$ normalen.

Dokaz. Lastnost T_1 sledi zato, ker so ekvivalenčni razredi zaprti; res, za $y \in f(A)$ je $[y] = \{y\} \cup f^{-1}(\{y\})$ unija dveh zaprtih množic. Dokažimo še lastnost T_4, in sicer z Urisonovo karakterizacijo. Prostor Z je T_4, če za poljubni disjunktni zaprti množici $B, C \subseteq Z$ obstaja Urisonova funkcija $\varphi : Z \to I$, da je $\varphi|_B = 0$ in $\varphi|_C = 1$. V $X \cup_f Y$ izberemo poljubni disjunktni zaprti množici B, C. Naj bo $q : X \sqcup Y \to X \cup_f Y$ kvocientna projekcija in

$$B_X := q^{-1}(B) \cap X, \; B_Y := q^{-1}(B) \cap Y, \; C_X := q^{-1}(C) \cap X, \; C_Y := q^{-1}(C) \cap Y.$$

Potem sta $B_X, C_X \overset{\text{zap}}{\subseteq} X$ disjunktni in enako tudi za $B_Y, C_Y \overset{\text{zap}}{\subseteq} Y$. Ker je $Y \in T_4$, obstaja Urisonova funkcija $\varphi_y : Y \to I$, tako da je $\varphi_y\big|_{B_Y} = 0$ in $\varphi_y\big|_{C_Y} = 1$. To določa funkcijo $\psi : A \cup B_X \cup C_X \to I$,

$$\psi(x) := \begin{cases} \varphi_y(f(x)); & x \in A \\ 0; & x \in B_X \\ 1; & x \in C_X \end{cases}.$$

Ta predpis je zvezen, saj je zvezen na lokalno končnem zaprtem pokritju in se predpisi na presekih ujemajo. Po Tietzejevem razširitvenem izreku obstaja razširitev $\varphi_X : X \to I$ za funkcijo ψ, saj je množica $A \cup B_X \cup C_X$ zaprta v X. Sedaj pa φ_Y in φ_X določata iskano Urisonovo funkcijo na $X \cup_f Y$.

$$\begin{tikzcd} X \sqcup Y \arrow[r, "\varphi_X \sqcup \varphi_Y"] \arrow[d, "q"] & I \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

Preslikava $\varphi_X \sqcup \varphi_Y$ je po konstrukciji zvezna, hkrati pa je tudi konstantna na ekvivalenčnih razredih:

$$y \in f(A) : \ \{y\} \cup f^{-1}(y), \ \varphi_X(x) = \varphi_Y(f(x)) = \varphi_Y(y).$$

Očitno je tudi $\varphi\big|_B = 0$ in $\varphi\big|_C = 0$, saj je po konstrukciji

$$\varphi_X \sqcup \varphi_Y\big|_{q^{-1}(B)} = 0, \quad \varphi_X \sqcup \varphi_Y\big|_{q^{-1}(C)} = 1.$$

□

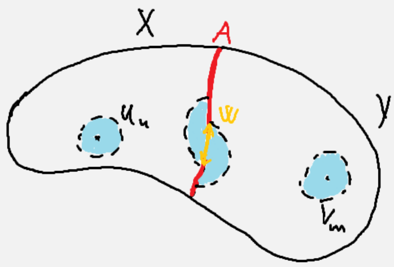
Trditev 1.42. *Naj bo $A \overset{zap}{\subseteq} X$, $f : A \to Y$ zaprta vložitev in $Z = X \cup_f Y$.*

1. *Če sta X, Y 2-števna, je Z 2-števen.*
2. *Če sta $X, Y \in T_2$, je tudi $Z \in T_2$.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{B}_X = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna baza za X in $\mathcal{B}_Y = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna baza za Y. Označimo

$$U_n \cap A \cap f^{-1}(V_m) =: W_{n,m} \overset{\text{odp}}{\subseteq} A.$$

Če je $W_{n,m} \neq \emptyset$, potem obstaja odprta množica ${W_{n,m}}^X \subseteq U_n$, da je ${W_{n,m}}^X \cap A = W_{n,m}$.



Podobno seveda tudi obstaja odprta množica ${W_{n,m}}^Y \subseteq V_m$, da je $f^{-1}({W_{n,m}}^Y) \cap A = W_{n,m}$. Sedaj označimo U'_n, V'_m kot bazne množice v X oziroma Y, ki ne sekajo A oziroma $f(A)$. To so nasičene odprte množice, saj sekajo le trivialne ekvivalenčne razrede. Torej so $q(U'_n), q(V'_m) \overset{\text{odp}}{\subseteq} Z$. Za poljubno $W_{n,m} \neq \emptyset$ pa je ${W_{n,m}}^X \sqcup {W_{n,m}}^Y$ odprta in nasičena, saj po konstrukciji velja

$$x \in A: \; x \in {W_{n,m}}^X \sqcup {W_{n,m}}^Y \Leftrightarrow f(x) \in {W_{n,m}}^X \sqcup {W_{n,m}}^Y.$$

Torej imamo podano števno družino odprtih množic v Z s predpisom

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = &\{q(U_n') \mid U_n' \in \mathcal{B}_X, \; U_n' \cap A = \emptyset\} \\ &\cup \{q(V_m') \mid V_m' \in \mathcal{B}_Y, \; V_m' \cap A = \emptyset\} \\ &\cup \{q({W_{n,m}}^X \sqcup {W_{n,m}}^Y) \mid W_{n,m} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Dokazati moramo še, da je $\mathcal{B}$ tudi baza. Za vsako $O \overset{\text{odp}}{\subseteq} Z$ in poljubno $z \in O$ moramo pokazati, da obstaja $B \in \mathcal{B}$, da je $z \in B \subseteq O$. Vemo, da je

$$q^{-1}(z) \subseteq q^{-1}(O) \overset{\text{odp}}{\subseteq} X \sqcup Y.$$

Če je $z \notin q(A)$, potem je bodisi $q^{-1}(z) \in X \setminus A$ ali pa $Y \setminus f(A)$. Dovolj je, če se omejimo na prvi primer; tedaj je $z \in q^{-1}(O) \cap (X \setminus A) \overset{\text{odp}}{\subseteq} X$. Potem pa že obstaja $U_n \in \mathcal{B}_X$, da je $q^{-1}(z) \in U_n \subseteq q^{-1}(O) \cap X$. Če pa je $z = [a] = [f(a)]$ za nek $a \in A$, potem je ponovno $a \in q^{-1}(O) \cap X \overset{\text{odp}}{}$ in zato obstaja nek U_n, da je $a \in U_n \subseteq q^{-1}(O) \cap X$. Po enakem premisleku obstaja V_m, da je $f(a) \in V_m \subseteq q^{-1}(O) \cap Y$. Torej je

$$z = [a] \in q({W_{n,m}}^X \sqcup {W_{n,m}}^Y) \subseteq O$$

in smo končali.

Sedaj dokažimo še drugo točko. Omejimo se na primer, ko je $u = [a] = [f(a)]$ in $v = [b] = [f(b)]$ za $a \neq b, \; a, b \in A$. Potem obstajata disjunktni odprti okolici $U_1, U_2 \subseteq X$ za a, b in disjunktni odprti okolici $V_1, V_2 \subseteq Y$ za $f(a), f(b)$. Označimo

$$W_1 := U_1 \cap A \cap f^{-1}(V_1), \; W_1 := U_1 \cap A \cap f^{-1}(V_2)$$

in kot v dokazu prve konstruiramo disjunktni odprti okolici

$$q({W_1}^X \sqcup {W_1}^Y), \; q({W_2}^X \sqcup {W_2}^Y)$$

točk $[a]$ in $[b]$. $\square$

1.8 Projektivni prostori

Motivacija: v ravninski geometriji nastopita dve možni (različni) medsebojni legi dveh različnih premic; premici sta si vzporedni ali pa se sekata v natanko eni točki. V izogib temu želimo geometrijo, kjer bo situacija za dve poljubni premici enaka.

Preprosto povedano to naredimo tako, da vsakemu snopu vzporednih premic „dodamo točko v neskončnosti“. Formalno pa to definiramo na naslednji način.

Definicija 1.43. Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in $n \in \mathbb{N}_0$. Projektivni prostor dimenzije n nad $\mathbb{F}$ je

$$\mathbb{F}P^n := (\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}) \Big/ (x = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{F}^*) = (\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{F}^* .$$

Opomba. Enako lahko naredimo za poljuben topološki obseg, na primer za $\mathbb{Z}_p$ z diskretno topologijo ali pa za p-adična števila.

Trditev 1.44. *$\mathbb{F}P^n$ je homogen prostor: za poljubni točki $u, v \in \mathbb{F}P^n$ obstaja homeomorfizem $h : \mathbb{F}P^n \to \mathbb{F}$, tako da je $h(u) = v$.*

Dokaz. Naj bo $u = [\mathbf{x}]$ in $v = [\mathbf{y}]$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "q \circ H"] & \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{F}P^n \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{F}P^n
\end{tikzcd}$$

Vektor $\mathbf{x}$ dopolnimo do baze $\mathbf{x}, \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}$, vektor $\mathbf{y}$ pa do $\mathbf{y}, \mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_n}$. Naj bo P prehodna matrika, da je $P\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Naj bo

$$H : \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$$

zožitev pripadajoče linearne preslikave, ki je tudi bijektivna in je zato homeomorfizem, torej kvocientna preslikava. Zato je tudi $q \circ H$ kvocientna. Ker H slika premice v premice, slika ekvivalenčne razrede v ekvivalenčne razrede za q, torej $q \circ H$ naredi iste identifikacije kot q. To pa že pomeni, da je inducirana preslikava h homeomorfizem in

$$h(u) = h(q(\mathbf{x})) = q(H(\mathbf{x})) = q(\mathbf{y}) = v.$$

□

Zgled 1.45. *Navedimo nekaj trivialnih primerov projektivnih prostorov.*

- $\mathbb{F}P^0 = \mathbb{F}^1 \setminus \{0\} / \mathbb{F}^* = \mathbb{F}^* \mathbb{F}^* = \{a\}$.
- $\mathbb{F}P^1 = \mathbb{F}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{F}^*$*, tako dobimo* $\mathbb{R}P \cong S^1$, $\mathbb{C}P \cong S^2$ *in* $\mathbb{H}P \cong S^4$.
- $\mathbb{R}P^2$ *je tudi ploskev, ki pa morda v nasprotju za našimi pričakovanji ni homoemorfen prostoru* S^2.

Cilj tega razdelka je poenostaviti opis projektivnega prostora, da bi bolje razumeli topološke lastnosti, kot so na primer kompaktnost. Takoj lahko za prostor $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ podamo trivialno opazko, da vsaka premica skozi izhodišče seka enotsko sfero, zato so predstavniki vseh ekvivalenčnih razredov $\mathbb{R}P^n$ zaprti v kompaktni sferi.

Najprej omenimo, da je $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ normiran obseg, torej za normo $\| \cdot \|$ v $\mathbb{F}$ velja $\|x \cdot y\| = \|x\|\|y\|$. Hkrati iz lastnosti norme sledi, da lahko le enotski skalarji ohranjajo enotsko sfero. Tako delovanje grupe $\mathbb{F}^*$ porodi delovanje grupe enotskih skalarjev na enotski sferi.

Definicija 1.46. Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in $n \in \mathbb{N}_0$. Potem definiramo $S(\mathbb{F}^n) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

Opomba. $S(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$, $S(\mathbb{C}^n) = S^{2n-1}$ in $S(\mathbb{H}^n) = S^{4n-1}$.

Trditev 1.47. *1. Kvocientna projekcija $q : \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{F}P^n$ je odprta.*

2. $\mathbb{F}P^n \cong S(\mathbb{F}^{n+1}) \big/ S(\mathbb{F})$.

3. *$\mathbb{F}P^n$ je kompakten, lokalno kompakten, povezan s potmi, lokalno povezan s potmi in 2-števen.*

Dokaz. Dokažimo drugo točko.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[rr, "r"] \arrow[d, "q"] \arrow[drr, "p \circ r"] & & S(\mathbb{F}^{n+1}) \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{F}P^n \arrow[rr, dashed] & & S(\mathbb{F}^{n+1}) \big/ S(\mathbb{F})
\end{tikzcd}$$

Vpeljimo $r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ in dokažimo, da je kvocientna. Očitno je zvezna in surjektivna. Dokazujemo, da je še odprta. Upoštevamo, da je $\mathbb{F}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^k$, torej r slika iz $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ v S^{n-1}. Potem je r kompozitum homeomorfizma in projekcije.

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^k \setminus \{0\} \xrightarrow{h} S^{k-1} \times (0,\infty) &\xrightarrow{\mathrm{pr}_1} S^{k-1} \\
\mathbf{x} \mapsto \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \|\mathbf{x}\| \right) &\mapsto \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.
\end{aligned}$$

Ker sta homeomorfizem in projekcija odprti, je tudi r odprta in zato je $p \circ r$ kvocientna. Če $p \circ r$ naredi iste identifikacije kot q, je inducirana preslikava homeomorfizem. Preverimo najprej v eno smer:

$$\begin{aligned}
(p \circ r)(\mathbf{x}) = (p \circ r)(\mathbf{y}) &\Leftrightarrow p\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) = p\left(\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \lambda \cdot \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}, \ \lambda \in S(\mathbb{F}) \\
&\Rightarrow \mathbf{y} = \lambda \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x} \\
&\Rightarrow q(\mathbf{y}) = \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Obratno; če je $q(\mathbf{y}) = q(\mathbf{x})$, potem obstaja $\mu \in \mathbb{F}^*$, $\mathbf{y} = \mu \mathbf{x}$.

$$\|\mathbf{y}\| = \|\mu\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

Od tod pa sledi $\|\mu\| = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ in končno

$$\mathbf{y} = \mu \mathbf{x} = \frac{\mu}{\|\mu\|} \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x},$$

kjer je $\frac{\mu}{\|\mu\|} \in S(\mathbb{F})$ in zato res $(p \circ r)(\mathbf{x}) = (p \circ r)(\mathbf{y})$. □

Posledica 1.48. $\mathbb{R}P^n \cong S^n / S^0 \cong S^n \big/ \{1,-1\} = S^n / x \sim -x$.

Trditev 1.49.

- $\mathbb{R}P^n \cong B^n \big/ y \sim -y,\ y \in S^{n-1}$
- $\mathbb{C}P^n \cong B^{2n} \big/ y \sim \lambda y,\ y \in S^{2n-1},\ \lambda \in S^1$
- $\mathbb{H}P^n \cong B^{4n} \big/ y \sim \lambda y,\ y \in S^{4n-1},\ \lambda \in S^3$

Dokaz. Preverimo le prvo točko, saj drugi dve sledita analogno.

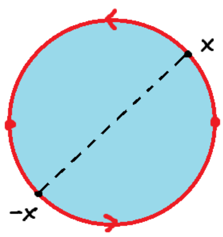
$$\begin{tikzcd} B^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"] \arrow[drr, "f"] & S^n_+ \arrow[r, hook, "i"] & S^n \arrow[d, "p"] \\ B^n \big/ y \sim -y,\ y \in S^{n-1} \arrow[rr, dashed, "\overline{f}"] & & S^n \big/ \{1,-1\} \end{tikzcd}$$

Funkcija f je zvezna, kvocientna (točke na S^n_+ sekajo vse ekvivalenčne razrede za p) in zaprta, kar bomo sedaj dokazali. Dovolj je že če dokažemo, da je $p \circ i$ zaprta. Naj bo $A \subseteq S^n_+$ zaprta; ker je i zaprta vložitev ($S^n_+ \overset{\text{zap}}{\subseteq} S^n$), je dovolj pokazati, da je $p(i(A)) = p(A)$ zaprta. Vemo pa že, da je to natanko tedaj, ko je $p^{-1}(p(A)) \overset{\text{zap}}{\subseteq} S^n$, kar pa seveda drži. Nazadnje moramo pokazati še, da f naredi iste identifikacije kot q:

$$x \in \text{Int } B^n \implies f^{-1}(f(x)) = \{x\}$$
$$x \in S^{n-1} \implies f^{-1}(f(x)) = \{x, -x\}.$$

□

Zgled 1.50. $\mathbb{R}P^2 \cong S^2 \big/ \{1,-1\} = B^2 \big/ x \sim -x,\ x \in S^1.$



2 Osnovni izreki topologije evklidskih prostorov

2.1 Brouwerjev izrek o negibni točki

Definicija 2.1. Preslikava $f : X \to X$ ima negibno točko $c \in X$, če je $f(c) = c$.

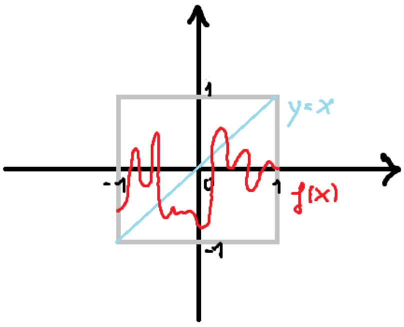
Obstoj negibne točke je odvisen tako od lastnosti prostora kot od lastnosti preslikave.

Zgled 2.2. *Banachovo skrčitveno načelo pove, da ima skrčitev $f : X \to X$ na polnem metričnem prostoru X negibno točko.*

Naslednji izjavi pravimo Brouwerjev izrek o negibni točki.

Trditev 2.3 (Izjava $\mathbf{A_n}$). *Vsaka zvezna preslikava $f : B^n \to B^n$ ima negibno točko.*

Opomba. Za $n = 1$ ta izrek poznamo že iz analize 1. Res, naj bo zvezna preslikava $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$. Da negibna točka te preslikave obstaja, sledi iz izreka o vmesni vrednosti za funkcijo $g(x) = f(x) - x$.



Zgled 2.4. *Za $B^n \setminus \{0\}$ ta izrek ne velja. Protiprimer je kar funkcija $f : B^n \setminus \{0\} \to B^n \setminus \{0\}$ s predpisom $f(x) = -x$.*

Definicija 2.5. Topološki prostor X ima lastnost negibne točke (LNT), če ima vsaka zvezna preslikava $f : X \to X$ negibno točko.

Opomba. LNT je topološka lastnost, torej se ohranja s homeomorfizmi.

Definicija 2.6. $A \subseteq X$ je retrakt prostora X, če obstaja retrakcija $r : X \to A$, torej zvezna preslikava r, ki je na A identiteta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, hook, "i"] \arrow[dr, "id"] & \\ X \arrow[r, dashed, "r"] & A \end{tikzcd}$$

Zgled 2.7. *Navedimo nekaj osnovnih primerov retraktov.*

- *X je sam svoj retrakt, saj ima retrakcijo $r = id$. Hkrati pa je za poljuben $x_0 \in X$ tudi enojec $\{x_0\}$ retrakt prostora X. V tem primeru moramo seveda vzeti konstantno preslikavo $r(x) = x_0$, $\forall x \in X$.*

- S^n_+ *je retrakt sfere* S^n *za retrakcijo*

$$r(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, |x_{n+1}|).$$

- *Ali obstaja retrakcija intervala* $[-1, 1]$ *na* $A = \{-1, 1\}$*? Odgovor je negativen, saj mora biti zvezna slika povezanega prostora* $[-1, 1]$ *prav tako povezana.*

Lema 2.8. *Če ima* X *LNT in je* $Y \subseteq X$ *njegov retrakt, ima tudi* Y *LNT.*

Dokaz. Naj bo $r : X \to Y$ retrakcija in $f : Y \to Y$ poljubna zvezna preslikava. Definirajmo preslikavo g:

$$g : X \xrightarrow{r} Y \xrightarrow{f} Y \xhookrightarrow{i} X.$$

Ker ima X lastnost negibne točke, obstaja tak $x_0 \in X$, da je $g(x_0) = x_0$. Torej je $i(f(r(x_0))) = x_0$, od koder pa naprej sledi $f(r(x_0)) = x_0$. Ker pa mora biti $x_0 \in Y$, je $r(x_0) = x_0$ in imamo $f(x_0) = x_0$, kar smo želeli dokazati. □

Trditev 2.9.
- *Retrakt povezanega prostora je povezan prostor.*
- *Retrakt kompaktnega prostora je kompakten.*
- *Če je* $X \in T_2$ *in je* $A \subseteq X$ *retrakt, je* $A \overset{zap}{\subseteq} X$*.*

Dokaz. Dokažimo tretjo točko. Naj bo $r : X \to A$ retrakcija. Potem se zvezni preslikavi $id : X \to X$ in $f : X \xrightarrow{r} A \xhookrightarrow{i} X$ ujemata na A, od koder po Hausdorffovi lastnosti sledi zaprtost A. □

Trditev 2.10. *Retrakcija ohranja lokalno povezanost (s potmi) in lokalno kompaktnost.*

Dokaz. Dokažimo za lokalno povezanost. Ta je ekvivalentna temu, da je povezana komponenta vsake odprte množice prav tako odprta. Naj bo X lokalno povezan prostor in $r : X \to A$ retrakcija. Naj bo $N \overset{\text{odp}}{\subseteq} A$ in C njena komponenta. Nato izberemo točko $x \in C$. Ker je retrakcija zvezna, je $r^{-1}(N) \overset{\text{odp}}{\subseteq} X$. Zaradi lokalne kompaktnosti je x vsebovan v odprti komponenti $U \subseteq r^{-1}(N)$. Ker je zvezna slika povezanega prostora povezana, velja $r(U) \subseteq C$. Od tod pa dobimo

$$x \in U \cap A \subseteq r(U) \subseteq C$$

in ker je $U \overset{\text{odp}}{\subseteq} X$, je $x \in U \cap A \overset{\text{odp}}{\subseteq} C$. To pa že pomeni, da je komponenta C odprta. □

Izrek 2.11 (Tietze)**.**

Naj bo X *normalen prostor,* $A \overset{zap}{\subseteq} X$*,* J *realen interval in zvezna preslikava* $f : A \to J$*. Potem obstaja razširitev* $F : X \to J$ *za* f*, torej* $F\big|_A = f$*.*

$$\begin{tikzcd}
A^{\ zap} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & J \\
X \arrow[ur, dashed, "F"] &
\end{tikzcd}$$

Definicija 2.12. Y je absolutni ekstenzor za nek razred $\mathcal{R}$ topoloških prostorov, če za vsak $X \in \mathcal{R}$, vsako $A \overset{\text{zap}}{\subseteq} X$ in vsako zvezno preslikavo $f : A \to Y$ obstaja zvezna preslikava $F : X \to Y$, da je $F\big|_A = f$, torej da je F razširitev f na X.

Opomba. To označujemo $Y \in AE(\mathcal{R})$. Tietzejev izrek nam pove, da je vsak interval J vsebovan v $AE(\mathcal{N})$, kjer $\mathcal{N}$ označuje razred normalnih prostorov.

Trditev 2.13. *1. Vsebovanost v $AE(\mathcal{R})$ je topološka lastnost.*

2. Če je $Y_\lambda \in AE(\mathcal{R})$ za vse $\lambda \in \Lambda$, potem je tudi $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \in AE(\mathcal{R})$.

3. Če je $Y \in AE(\mathcal{R})$ in je Z retrakt Y, potem je $Z \in AE(\mathcal{R})$.

Dokaz. Dokažimo tretjo točko. Naj bo $r : Y \to Z$ retrakcija. Izberimo poljuben podprostor $A \overset{\text{zap}}{\subseteq} X \in \mathcal{R}$ in zvezno preslikavo $f : A \to Z$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, "j\circ f"'] & Z \arrow[d, hook, shift right, "j"'] \\ X \arrow[r, dashed, "\exists G"'] & Y \arrow[u, shift right, "r"'] \end{tikzcd}$$

Označimo $g = j \circ f$ in imamo po predpostavki njeno razširitev $G : X \to Y$. Potem je razširitev od f kar $F = r \circ G$. To je res, saj je

$$F\big|_A = r \circ G\big|_A = r \circ g = r \circ j \circ f = f.$$ □

Definicija 2.14. Y je absolutni retrakt za neki razred topoloških prostorov $\mathcal{R}$, če je $Y \in \mathcal{R}$ in velja, da če za X obstaja zaprta vložitev $\varphi : Y \to X$, potem je $\varphi(Y)$ je retrakt za X.

Zgled 2.15. *Za vsako točko velja $\{*\} \in AR(\mathcal{R})$.*

Trditev 2.16. $\mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R}) \subseteq AR(\mathcal{R})$

Posledica 2.17. *Poljuben interval J je vsebovan v $AR(\mathcal{N})$.*

Dokaz. Naj bo $Y \in \mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R})$. Izberemo poljuben $X \in \mathcal{R}$ in poljubno zaprto vložitev $\varphi : Y \to X$. Označimo $\varphi(Y) =: A \overset{\text{zap}}{\subseteq} X$. Ker je $Y \in AE(\mathcal{R})$, je $A \in AE(\mathcal{R})$. Iščemo retrakcijo $r : X \to A$, torej zvezno preslikavo, ki je identiteta na A.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \in AE(\mathcal{R}) \\ X \in \mathcal{R} \arrow[ur, dashed, "\exists r"'] & \end{tikzcd}$$

Iz diagrama pa vidimo, da taka r obstaja po konstrukciji. □

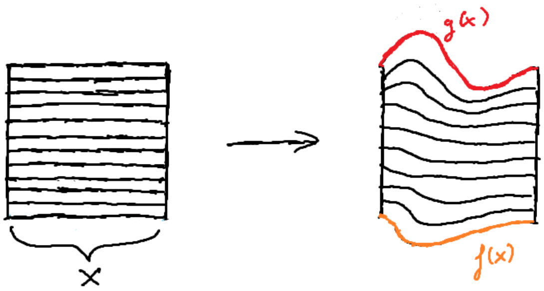
Trditev 2.18 (Izjava $\mathbf{B_n}$). *S^{n-1} ni retrakt B^n.*

Zgled 2.19. *Vemo že, da to ne velja za primer $n = 1$, saj $S^0 = \{-1, 1\}$ ni retrakt $B^1 = [-1, 1]$. Tudi v primeru $n = 2$ se intuitivno zdi, da če bi obstajal retrakt $r : B^2 \to S^1$, bi se disk B^2 moral vmes nekje pretrgati. Vsekakor pa lahko prebodan disk retraktiramo na S^1, in sicer z retrakcijo* $r = \frac{x}{\|x\|}$.

Za tretjo ekvivalentno formulacijo Brouwerjevega izreka potrebujemo pojem homotopije, torej zvezne deformacije preslikav.

Definicija 2.20.

1. Zvezni preslikavi $f, g : X \to Y$ sta homotopni ($f \simeq g$), če med njima obstaja homotopija oziroma zvezna preslikava $H : X \times I \to Y$, za katero velja $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$.
2. Prostor X je kontraktibilen, če je id_X homotopna kakšni konstantni preslikavi. Takšni homotopiji pravimo kontrakcija.



Slika 2: Homotopija med funkcijama $f, g : X \to Y$

Opomba.
- Kontrakcija cel prostor zvezno deformira v točko. Kontrakcija ima za končno preslikavo retrakcijo v eno točko. Čeprav je točka vedno retrakt, pa vsak prostor ni kontraktibilen.
- Homotopijo $H : X \times I \to Y,\ (x, t) \mapsto H(x, t)$ včasih označujemo kot preslikavo $H_t(x)$, tako da je $H_t : X \to Y,\ H_t(x) = H(x, t)$. Če je H homotopija od f do g, je torej $H_0 = f$ in $H_1 = id$.
- Homotopnost je ekvivalenčna relacija.

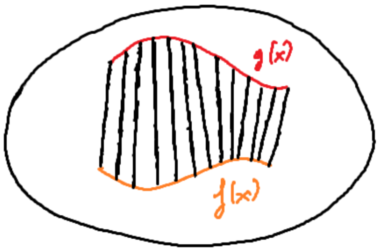
Naj bosta X, Y prostora in naj ima $\mathcal{C}(X, Y)$ kompaktno-odprto topologijo. Če je $f : X \times Z \to Y$ zvezna, enako velja tudi za inducirano preslikavo $F : Z \to \mathcal{C}(X, Y)$. Obratno velja, če je X lokalno kompakten in Hausdorffov. To je posplošitev trditve, da je homotopija prostorov X in Y ekvivalentna poti v $\mathcal{C}(X, Y)$ pri določenih predpostavkah[2].

Zgled 2.21. *Naj bo X poljuben prostor in naj bosta poljubni zvezni preslikavi $f, g : X \to B^n$. Potem sta f in g homotopni, saj imamo homotopijo*

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Enako velja, če B^n zamenjamo s poljubno konveksno podmnožico $\mathbb{R}^n$.

[2] glej: Munkres, J.: Topology



Tako prostori so potemtakem tudi kontraktibilni: primer kontrakcije prostora $\mathbb{R}^n$ v izhodišče je

$$H(x,t) = (1-t)x.$$

Zgled 2.22. *Ali je $S^0 = \{-1, 1\}$ kontraktibilen? Denimo, da imamo kontrakcijo*

$$H : S^0 \times I \to S^0, \;\; H_0 = id_{S^0}, \;\; H_1 = c.$$

Ker je $H(-1,0) = \{-1\}$, se mora interval $\{-1\} \times I$ (povezana množica) preslikati v -1. Podobno se mora $\{1\} \times I$ preslikati v $\{1\}$. To pa pomeni, da je $H_1 = id_{S^0}$ in pridemo v protislovje.

Trditev 2.23 (Izjava $\mathbf{C_n}$). *Sfera S^{n-1} ni kontraktibilna.*

Trditev 2.24. *Kontraktibilen prostor je povezan s potmi.*

Dokaz. Če je X kontraktibilen, obstaja homotopija H od id_X do konstantne preslikave $g(x) = x_0$ za neko točko $x_0 \in X$. Izberimo poljubni točki $x, y \in X$ in naj bo $c_x(t) = H(x,t)$ pot od x do x_0. Analogno naj bo $c_y(t) = H(y,t)$ pot od y do y_0. Sedaj pa definiramo pot $c : I \to X$ kot

$$c(t) := \begin{cases} c_x(2t); & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ c_y(2-2t); & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

□

Izrek 2.25.

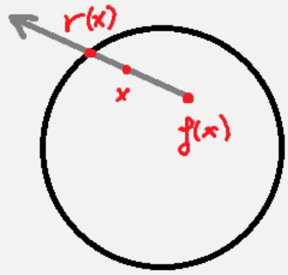
Za vsak $n \in \mathbb{N}$ so izjave $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$ in $\mathbf{C_n}$ ekvivalentne.

Dokaz. ($\mathbf{A_n} \Rightarrow \mathbf{B_n}$) Denimo, da obstaja retrakcija $r : B^n \to S^{n-1}$. Pokazati moramo, da obstaja zvezna funkcija $f : B^n \to S^{n-1}$ brez negibnih točk.

$$B^n \xrightarrow{r} S^{n-1} \overset{i}{\hookrightarrow} B^n$$

Definiramo $g : B^n \to B^n$ s predpisom $g(x) = -x$ in $f = g \circ r : B^n \to B^n$. Ta preslikava pa nima negibne točke, saj bi iz $f(x) = x$ sledilo $(g(r(x))) = x$, to pa pomeni, da je $r(x) = -x \in S^{n-1}$. To pa je protislovje z definicijo retrakcije.

($\mathbf{B_n} \Rightarrow \mathbf{A_n}$) Denimo, da $\mathbf{A_n}$ ne velja, torej obstaja zvezna preslikava $f : B^n \to B^n$, ki nima negibne točke. Iščemo retrakcijo $r : B^n \to S^{n-1}$. Za vsak $x \in B^n$ je $f(x) \neq x$, zato točki x in $f(x)$ enolično določata premico.



Označimo z $R(x)$ odprt poltrak te premice iz $f(x)$ skozi x. Presečišče $r(x) = R(x) \cap S^{n-1}$ določa sliko retrakcije r. Za $r : B^n \to S^{n-1}$ je treba še preveriti, če je zvezna in sploh dobro definirana. To je razvidno iz njenega predpisa:

$$r(x) = f(x) + \frac{\langle f(x), f(x) - x\rangle + \sqrt{(1 - \langle x, f(x)\rangle)^2 - (1 - \|x\|^2)(1 - \|f(x)\|^2)}}{\|x - f(x)\|^2}(x - f(x)).$$

Očitno pa je, da velja $r\big|_{S^{n-1}} = id\big|_{S^{n-1}}$.

($\mathbf{B_n} \Rightarrow \mathbf{C_n}$) Denimo, da obstaja kontrakcija S^{n-1}, torej

$$H : S^{n-1} \times I \to S^{n-1}, \quad H_0 = id_{S^{n-1}}, \quad H_1 = c.$$

Definirajmo funkcijo

$$f : S^{n-1} \times I \to B^n, \quad (x, t) \mapsto (1 - t)x.$$

Ta preslikava je zvezna, surjektivna in zaprta, torej je kvocientna.

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "f"'] & S^{n-1} \\ B^n \arrow[ur, dashed, "r"'] & \end{tikzcd}$$

Edini netrivialni ekvivalenčni razred, določen z f, je $S^{n-1} \times \{1\}$, kjer je H konstanta, torej H določa zvezno inducirano pot $r : B^n \to S^{n-1}$.

$$\begin{tikzcd} (x, 0) \arrow[r, mapsto, "H"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & x \in S^{n-1} \\ x \in B^n \arrow[ur, dashed, mapsto, "r"'] & \end{tikzcd}$$

($\mathbf{C_n} \Rightarrow \mathbf{B_n}$) Denimo, da obstaja retrakcija $r : B^n \to S^{n-1}$. Pokazati želimo, da obstaja kontrakcija sfere S^{n-1}. Potem definiramo f tako kot zgoraj in dobimo želeno $H = r \circ f$. $\square$

Preostane nam še pokazati, da so vse tri izjave $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$ in $\mathbf{C_n}$ tudi resnične. Dokazali bomo izjavo $\mathbf{C_n}$ za primer $n = 2$. Dokazati torej želimo, da identična preslikava krožnice sama vase ni homotopna nobeni konstantni preslikavi. Osnovna ideja dokaza je, da identična preslikava enkrat obhodi krožnico, konstantna pa ne. V ta namen bomo definirali ovojno število poti. Kompleksno ravnino bomo identificirali z $\mathbb{R}^2$, parametrizacijo sklenjene krivulje Γ v ravnini pa bomo gledali kot preslikavo $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$.

Ker zaradi sklenjenosti krivulje Γ velja $\gamma(0) = \gamma(1)$, lahko parametrizacijo ekvivalentno obravnavamo kot preslikavo $g : S^1 \to \mathbb{C}$, pri čemer gledamo $S^1 \cong [0,1] \big/ 0 \sim 1$. Definiramo

$$\varphi : [0,1] \to S^1,\ \varphi(t) = e^{2\pi i t}$$

in imamo zvezo $\gamma = g \circ \varphi$.

Definicija 2.26. Ovojno število preslikave $g : S^1 \to \mathbb{C} \big/ \{0\}$, ki opiše krivuljo $\Gamma = g(S^1)$, glede na izhodišče je

$$w(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt.$$

Primitivna funkcija za zadnji integral je kompleksni logaritem

$$\log \gamma(t) = \log |\gamma(t)| + i \arg \gamma(t).$$

Oglejmo si najprej realni del. Takoj lahko vidimo, da se prispevka pri $t = 0$ in $t = 1$ odštejeta, saj sta dolžini enaki. Drugače pa je z argumentom, ki se lahko pri večih obhodih krivulje okoli izhodišča spremeni za nek celoštevilski večkratnik polnega kota 2π. Kompleksni logaritem je večlična funkcija in da dobimo primitivno funkcijo, moramo izbrati njene vrednosti vzdolž krivulje $t \mapsto \gamma(t)$ tako, da bo $t \mapsto \log(\gamma(t))$ zvezna. Od tod vidimo, da je ovojno število krivulje celo število.

Zgled 2.27. *Ovojno število konstantne preslikave*

$$g : S^1 \to S^1,\ g(z) = a$$

za neki $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, je enako 0.

Zgled 2.28. *Naj bo $n \in \mathbb{Z}$ ter $g_n : S^1 \to \mathbb{C}$ podana z $g_n(z) = z^n$. V skledu z dogovorom izberemo parametrizacijo $\gamma_n(t) = e^{2n\pi i t}$. Potem je $\gamma_n'(t) = 2n\pi i \gamma_n(t)$, zato je*

$$w(g_n) = \int_0^1 n\, dt = n.$$

Od tod tudi sledi, da je ovojno število identične preslikave enako 1.

Izrek $\mathbf{C_2}$ bomo dokazali tako, da pokažemo, da je imata homotopni preslikavi enaki ovojni števili – ovojno število je torej invarianta homotopskega razreda preslikave. Najprej to preverimo za gladke homotopije.

Lema 2.29. *Naj bo $G : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gladka preslikava, ki je homotopija med $G_0 = G(\cdot, 0)$ in $G_1 = G(\cdot, 1)$. Potem je $w(G_0) = w(G_1)$.*

Dokaz. Za vsak $s \in [0,1]$ označimo $G_s := G(\cdot, s)$in $\Gamma_s = G_s(S^1)$. Pokazati želimo, da je ovojno število $w(s) = w(G_s)$ neodvisno od $s \in [0,1]$ Ker je interval povezan in ovojno število zavzame le celoštevilske vrednosti, je dovolj pokazati, da je funkcija $s \mapsto w(s)$ zvezna. To pa sledi iz lastnosti integrala s parametrom. Kot zgoraj naj bo

$$\widetilde{\gamma}(t, s) = G(e^{2\pi i t}, s) = G_s(e^{2\pi i t}).$$

Tako definirana funkcija $\widetilde{\gamma} : [0,1]^2 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je seveda zvezno odvedljiva, zato je

$$w(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\gamma}(t, s)}{\widetilde{\gamma}(t, s)}\, dt$$

zvezna funkcija spremenljivke s, torej smo dokazali. $\square$

Naslednji izrek o enakosti ovojnih števil velja bolj splošno za poljubni zvezni preslikavi $S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Iz dokaza izreka sledi, da lahko definiramo ovojno število za poljubno zvezno preslikavo tako, da jo dovolj natančno aproksimiramo z gladko preslikavo. Vsaki dve dovolj bližnji gladki preslikavi imata namreč enaki ovojni števili.

Izrek 2.30.

Naj bosta $f_0, f_1 : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ poljubni gladki preslikavi. Če je $F : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ poljubna zvezna homotopija, za katero velja $F_0 = f_0$ in $F_1 = f_1$, potem je $w(f_0) = w(f_1)$.

Dokaz. Ker kompaktna množica $F(S^1 \times [0,1])$ ne vsebuje izhodišča, je razdalja ε med izhodiščem in to množico pozitivna. Naj bo $G : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}$ gladka preslikava, katere vrednosti se v vsaki točki od vrednosti F razlikujejo za manj kot ε. Potem izhodišče ni v sliki G in po zgornji lemi imata G_0 in G_1 enako ovojno število. Dovolj je že, da dokažemo $w(f_0) = w(G_0)$ (dokaz za $w(f_1) = w(G_1)$ sledi analogno). Označimo $f := f_0$ in $g := G_0$. Definirajmo

$$H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}, \ H(z,s) := (1-s)f(z) + sg(z).$$

Očitno je H gladka, saj so vse v predpisu nastopajoče funkcije gladke. Preveriti moramo še, da H slika v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Res, če bi veljalo $H(s,z) = 0$ za neka (z,s), potem bi bilo

$$\varepsilon \leq \|f(z)\| = s\|f(z) - g(z)\| < \varepsilon,$$

kar pa bi po konstrukciji vodilo v protislovje. Sedaj moramo le še uporabiti lemo in smo končali. $\square$

Izrek $\mathbf{C_2}$ sedaj sledi iz zgornjih zgledov, v katerih smo dokazali, da imata konstantna in identična preslikava različni ovojni števili.

Opomba. Zgoraj smo dokazali, da imata homotopni preslikavi $S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ enaki ovojni števili. Velja pa tudi obratno, torej so homotopski razredi takšnih preslikav določeni z ovojnim številom. To je osnova za izračun fundamentalne grupe prostora $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Posledica 2.31 (Osnovni izrek algebre)**.** *Vsak polinom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stopnje vsaj ena ima vsaj eno ničlo.*

Dokaz. Denimo, da polinom p nima ničle. Potem je zožitev p_r preslikave p na krožnico S^1_r s polmerom $r > 0$ homotopna konstantni preslikavi – za homotopijo lahko vzamemo kar

$$H : S^1_r \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ H(z,s) := p(sz).$$

Po lemi, na katero se sklicujemo, velja $w(p_r) = 0$. Brez škode za splošnost naj ima polinom p vodilni koeficient 1, torej je $p(z) = z^n + q(z)$, kjer je q polinom stopnje največ $n-1$. Izberimo tak $r > 0$, da je $|q(z)| < r^n$ za poljuben $z \in S^1_r$. Sedaj označimo zožitev preslikave $g(z) = z^n$ na S^1_r kot g_r in definiramo homotopijo

$$G : S^1_r \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ G(z,s) = g_r(z) + sq_r(z)$$

ž od g_r do p_r, ki po konstrukciji slika v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Iz leme zato sledi, da je ovojno število p_r enako ovojnemu številu g_r, ki je enako n. To pa je v protislovju z zgornjim sklepom, da je $w(p_r) = 0$. $\square$

2.2 Jordan-Brouwerjev izrek

Definicija 2.32. Naj bo X povezan prostor. Potem pravimo, da $A \subseteq X$ deli X, če je $X \setminus A$ nepovezan.

Zgled 2.33. *Oglejmo si nekaj zgledov v ravnini $\mathbb{R}^2$.*

- $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *in* $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ *delita ravnino.*
- $B^1 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *ne deli ravnine.*

Vprašanje, ki si ga zastavimo, je naslednje: ali je to, da A deli X, topološka lastnost? Denimo, da je $\varphi : A \to X$ poljubna vložitev. Ali A deli X natanko tedaj, ko $\varphi(A)$ deli X?

Zgled 2.34.

- *Vemo že, da $\mathbb{R} \times \{0\}$ deli $\mathbb{R}^2$. Vendar pa velja $\mathbb{R} \times \{0\} \cong (-1,1) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, ki pa ne deli ravnine.*
- *Ali obstaja kakšna vložitev $\varphi : B^2 \to \mathbb{R}^2$, za katero $\varphi(B^2)$ deli $\mathbb{R}^2$? Intuitivno se zdi, da ne.*
- *Ali obstaja vložitev $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^2$, za katero $\varphi(S^1)$ ne deli ravnine? Ali pa taka, da ima komplement več kot dve komponenti?*

Definicija 2.35. Podmnožica $S \subseteq \mathbb{R}^2$, ki je homeomorfna S^1, se imenuje enostavna sklenjena krivulja ali krajše topološka krožnica.

Izrek 2.36 (Jordan)**.**

Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ topološka krožnica, torej $S \cong S^1$. Potem ima $\mathbb{R}^2 \setminus S$ dve komponenti, od tega eno omejeno in drugo neomejeno, ki sta odprti v $\mathbb{R}^2$, povezani s potmi in je S meja obeh komponent.

Opomba. Za poligonske krožnice obstaja preprost kombinatoričen dokaz, ki je algoritmičen. Naj bo S poligonska krožnica. Potem si za poljuben $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ ogledamo poljuben poltrak L iz x. Naj bo K poljubna komponenta $S \cap L$. Rečemo, da poltrak L prečka S v K, če vsaka okolica K v S seka obe komponenti $\mathbb{R}^2 \setminus \widehat{L}$, kjer je $\widehat{L}$ nosilka poltraka L. Definiramo $i(L, x)$ kot število komponent v preseku $S \cap L$, pri katerih S prečka L modulo 2. Lahko je preveriti, da $i(L, x)$ ni odvisen od L, torej je invarianta točke x. Potem je funkcija $i : \mathbb{R}^2 \setminus S \to \mathbb{Z}_2$ dobro definirana, lokalno konstantna in surjektivna. Ni težko pokazati, da ima potem $\mathbb{R}^2 \setminus S$ res dve komponenti.

Izrek 2.37 (Jordan-Brouwer)**.**

Naj bo $r \geq 2$ in $S \subseteq \mathbb{R}^n$ topološka $(n-1)$-sfera, torej $S \cong S^{n-1}$. Potem ima $\mathbb{R}^n \setminus S$ dve komponenti, od tega eno omejena in eno neomejeno, ki sta odprti v $\mathbb{R}^n$, povezani s potmi in je S meja obeh komponent.

Opomba. V tem izreku lahko ambientni prostor $\mathbb{R}^n$ zamenjamo z njegovo kompaktifikacijo z eno točko.

Lema 2.38. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktna. Potem ima $\mathbb{R}^n \setminus X$ natanko eno neomejeno komponento. Vse komponente $\mathbb{R}^n \setminus X$ so odprte v $\mathbb{R}^n$, povezane s potmi in meja vsake komponente je vsebovana v X.*

Zgled 2.39.

- $\mathbb{R}^n \setminus B^n$ *ima le neomejeno komponento.*
- *Komplement havajskega uhana v realni ravnini ima neskončno komponent.*
- $\mathbb{R}^n \setminus B^n$ *je komponenta, njena meja je S^{n-1}. Notranje točke v B^n očitno ne vsebujejo mejne za komplement.*

Dokaz leme. Ker je X kompakt, je omejen; obstaja namreč krogla $K(0,R) \supseteq X$ in potem

$$\emptyset \neq \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus K(0,R)}_{\text{povezana}} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X,$$

vse ostale komponente pa so vsebovane v $K(0,R)$. Ker je $\mathbb{R}^n$ lokalno povezana (s potmi), so komponente (s potmi) vseh odprtih množic odprte v $\mathbb{R}^n$ in tudi povezane s potmi. Ker je X kompakt, je zaprt, torej je $\mathbb{R}^n \setminus X$ odprt. Iz odprtosti komponent pa sledi, da nobena točka v komponentah ni mejna. □

Za dokaz Jordan-Brouwerja moramo še dokazati, da velja:

- S je vsebovana v meji od V, kjer je V komponenta od $\mathbb{R}^n \setminus S$.
- $\mathbb{R}^n \setminus S$ ima natanko eno omejeno komponento.

Opomba. Drugo točko bomo dokazali le za dimenzijo $n = 2$. Za višje dimenzije se to da lažje dokazati z orodji algebraične topologije.

Prvo točko dokazujemo ob privzetku, da ima komplement vsaj dve komponenti (da je temu res tako, se bomo prepričalu v dokazu druge točke).

Izrek 2.40 (Trditev $\mathbf{D_n}$)**.**

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ topološki k-disk, torej $D \cong B^k$ za $0 \leq k \leq n$ in $n \geq 2$. Potem je $\mathbb{R}^n \setminus D$ povezan, torej topološki disk ne deli evklidskega prostora.

Dokaz. Pokazali bomo, da $\mathbf{D_n}$ sledi iz $\mathbf{B_n}$. Denimo torej, da obstaja omejena komponenta V prostora $\mathbb{R}^n \setminus D$. Izberemo $v \in V$ in $R > 0$, da je $D \cup V \subsetneq K(v,R)$. Poiskati želimo retrakcijo $\overline{K(v,R)}$ v robno sfero $S(v,R)$. Po predpostavki je

$$\mathcal{N} \ni D \cong B^k \cong I^k \in AE(\mathcal{N}),$$

zato je $D \in AR(\mathcal{N})$. Ker je $D \overset{\text{zap}}{\subseteq} D \cup V \in \mathcal{N}$, obstaja retrakcija $r : D \cup V \to D$. Definirajmo funkcijo $f : R^n \to \mathbb{R}^n \setminus V$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} r(x); & x \in D \cup V \overset{\text{zap}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \\ x; & x \in \mathbb{R}^n \setminus V \overset{\text{zap}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \end{cases},$$

kjer smo uporabili dejstvo, da je

$$\overline{D \cup V} = \overline{D} \cup \overline{V} \subseteq D \cup (V \cup D) = V \cup D$$

in je zato $D \cup V$ zaprta. Ker sta oba predpisa zvezna in se ujemata na preseku zaprtih množic, je f zvezna. Potem je kompozitum $\rho \circ f : \overline{K(v,R)} \to S(v,R)$, kjer je

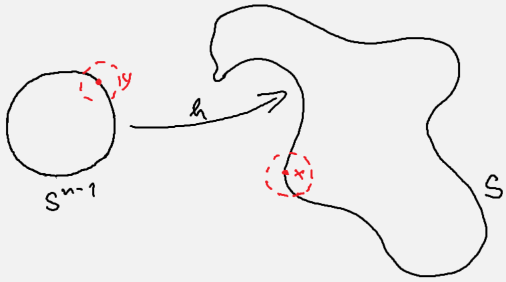
$$\rho : \mathbb{R}^n \setminus \{v\} \to S(v,R), \quad \rho(x) = R\frac{x-v}{\|x-v\|} + v$$

radialna retrakcija. Torej smo dobili želeno retrakcijo sfere $\rho \circ f$, kar pa vodi v protislovje. □

Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \cong S^{n-1}$ in V komponenta $\mathbb{R}^n \setminus S$. Vemo že, da je meja od V vsebovana v S.

Lema 2.41. *Če V ni edina komponenta $\mathbb{R}^n \setminus S$, potem je meja V enaka S.*

Dokaz. Dokazujemo, da je S vsebovana v meji od V. Denimo, da obstaja $x \in S$ in njena okolica W, ki ne seka V. Po predpostavki obstaja homeomorfizem $h : S^{n-1} \to S$ in naj bo $y = h^{-1}(x)$.



Potem je $h^{-1}(W)$ odprta okolica za $y \in S^{n-1}$ in obstaja $r > 0$, da je

$$H := \overline{K(y,r)} \cap S^{n-1} \subseteq h^{-1}(W)$$

in $G := \overline{S^{n-1} \setminus H} \cong B^{n-1}$. Po prejšnjem izreku $D := h(G) \cong B^{n-1}$ ne deli $\mathbb{R}^n$. Naj bo sedaj V' še ena komponenta $\mathbb{R}^n \setminus S$ in $v' \in V'$. Izberemo še nek $v \in V$. Ker D ne deli $\mathbb{R}^n$, obstaja pot

$$\gamma : (I, 0, 1) \to (\mathbb{R}^n \setminus D, v, v').$$

Ker v in v' pripadata različnim komponentam $\mathbb{R}^n \setminus S$, mora ta pot vsaj nekje sekati S oziroma natančneje $S \setminus D$, ki pa je vsebovana v W. Naj bo t_0 prva točka, pri kateri je $\gamma(t) \in S$. Ker je

$$\gamma^{-1}(S) \stackrel{\text{zap}}{\subseteq} [0,1] = I,$$

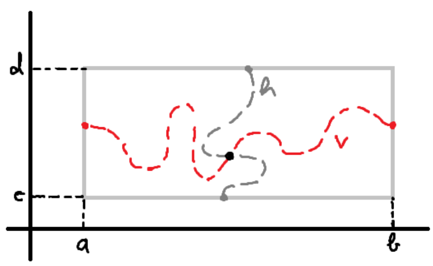
res obstaja najmanjša točka v tej množici. Torej imamo $\gamma(t_0) \in S \cap W$ in $\gamma\big|_{[0,t_0)}$ slika v V. Ker je γ zvezna, za okolico W točke $\gamma(t_0)$ obstaja $\delta > 0$, da je $\gamma((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \subseteq W$. To pa bi pomenilo, da γ interval $(t_0 - \delta, t_0)$ slikal v $V \cap W$, ki pa je po naši predpostavki iz dokaza prazna množica. □

Da ima $\mathbb{R}^n \setminus S$ res natanko dve komponenti, dokazujemo za posebni primer $n = 2$.

Lema 2.42. *Naj bosta $h = (h_1, h_2)$ in $v = (v_1, v_2)$ poti*

$$h, v : [-1, 1] \to P = [a, b] \times [c, d],$$

za kateri velja $h_1(-1) = a$, $h_1(1) = b$, $v_2(-1) = c$ in $v_2(1) = d$. Potem se tira poti h in v sekata, torej obstajata $s, t \in [-1, 1]$, da je $h(s) = v(t)$.



Dokaz. Denimo, da trditev ne velja. Potem za vsak $s, t \in [-1, 1]$ velja $h(s) \neq v(t)$. Naj bo torej

$$D(s,t) := \max\{|h_1(s) - v_1(t)|, |h_2(s) - v_2(t)|\} > 0,$$

ki je zvezna preslikava $[-1,1]^2 \to (0,\infty)$. Definiramo preslikavo $f : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ kot

$$f(s,t) := \frac{(v_1(t) - h_1(s), h_2(s) - v_2(t))}{D(s,t)}.$$

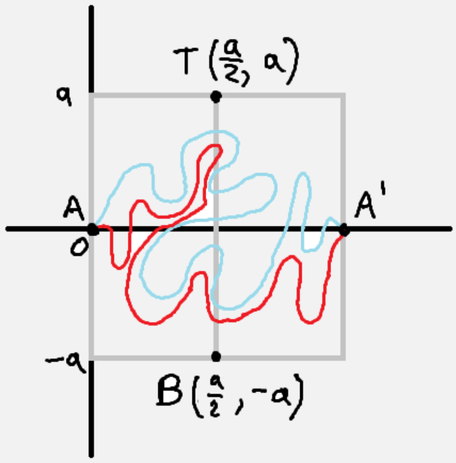
Trdimo, da ta preslikava nima negibne točke. Res, ker je ena od komponent f vedno enaka ± 1, potem f slika v rob kvadrata. Če ima f torej negibno točko, mora ta biti oblike

$$(1,t), \quad (-1,t), \quad (t,1), \quad (t,-1).$$

Hitro lahko prverimo, da te točke niso negibne, torej smo izpeljali protislovje z izjavo $\mathbf{A_n}$. □

Trditev 2.43. *Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ topološka krožnica. Potem ima $\mathbb{R}^2 \setminus S$ natanko eno omejeno komponento.*

Dokaz. Naj bosta A in A' najbolj oddaljeni točki na S – ker je metrika $d : S \times S \to [0,\infty)$ zvezna, na kompaktu vselej zavzame maksimum. Naj torej d zavzame maksimum v $d(A,A') = a$. Sedaj izberemo tak koordinatni sistem, da je $A = (0,0)$ in $A' = (a,0)$ ter označimo $P := [0,a] \times [-a,a]$. Potem je v novem koordinatnem sistemu $S \subseteq P$ in $S \cap \partial P = \{A, A'\}$. A in A' razdelita S na dva podloka med A in A' – ti krivulji ustrezata tiru poti h kot v prejšnji lemi. Naj bosta točki $T\left(\frac{a}{2}, a\right)$ in $B\left(-\frac{a}{2}, a\right)$.



Po prejšnji lemi oba loka S sekata daljico $\overline{BT}$. Naj bo M_T najvičja točka v preseku $S \cap \overline{BT}$ in označimo s S_T podlok od A do A', ki vsebuje M_T. Podobno naj bo m_T najnižja točka v $S_T \cap \overline{BT}$. Nato označimo s S_B drugi podlok od A do A' v S. Trdimo, da S_B seka $\overline{BT}$ pod m_T. Sicer vodoravna pot S_B ne bi sekala navpične poti s tirom

$$\overline{Bm_T} \cup (\text{podlok } S_T \text{ od } m_T \text{ do } M_T) \cup \overline{M_T T},$$

kar je v protislovju z lemo. Naj bo M_B najvišje in m_B najnižje presečišče S_B in $\overline{Bm_T}$. Označimo s C središče daljice $\overline{M_B m_T}$. Dokazali bomo, da C ne leži v neomejeni komponenti. Če bi C bil vsebovan v neomejeni komponenti, potem obstaja γ od C do neke točke v komplementu P, katere tir ne seka S. Naj bo D prva točka, v kateri γ seka ∂P in γ_D del poti od C do D. Denimo, da D leži nad osjo x. Potem navpična pot s tirom

$$\overline{BC} \cup \gamma_D \cup (\text{po najkrajši poti od } D \text{ do } T \text{ znotraj } \partial P)$$

ne seka vodoravne poti S_T. Če pa D leži nad osjo x, potem navpična pot s tirom

$$(\text{najkrajša pot od } B \text{ do } D \text{ po } \partial P) \cup \gamma_D \cup \overline{Cm_T} \cup (\text{podlok v } S_T \text{ od } m_T \text{ do } M_T) \cup \overline{M_T T}$$

ne seka vodoravne poti S_B in smo prišli v protislovje. Sedaj vemo, da je C v omejeni komponenti (naj bo to V), torej ta obstaja. Pokazati moramo še, da je to tudi edina omejena komponenta. Če je V' še ena omejena komponenta, potem je $V' \subseteq P$ in ker ima $\mathbb{R}^2 \setminus S$ vsaj 2 komponenti, je meja od V' enaka S. Naj bo γ_1 pot s tirom

$$\overline{Bm_B} \cup (\text{pot v } S_B \text{ od } m_B \text{ do } M_B) \cup \overline{M_B m_T} \cup (\text{pot v } S_T \text{ od } m_T \text{ do } M_T) \cup \overline{M_T T}.$$

γ_1 potuje po $S \cup V \cup$ (neomejena komponenta), torej ne seka V'. Naj bo $r > 0$ tako majhen, da $K(A, r)$ in $K(A', r)$ ne sekata tira γ_1. Ker sta A, A' vsebovana v meji od V, potem obstaja $A_1 \in K(A, r) \cap V'$ in $A_1' \in K(A_1, r) \cap V'$. Potem pa vodoravna pot s tirom

$$\overline{AA_1} \cup (\text{pot v } V' \text{ od } A_1 \text{ do } A_1') \cup \overline{A_1 A}$$

ne seka tira γ_1 in smo prišli v protislovje. $\square$

Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $S \cong S^1$ in V omejena komponenta $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Kaj lahko povemo o topološkem tipu V oziroma $\overline{V} = V \cup S$?

Izrek 2.44 (Schoenflis)**.**

Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $S \cong S^1$ in V omejena komponenta $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Potem je $\overline{V} \cong B^2$

Denimo, da je $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \cong S^n$ in V omejena komponenta $\mathbb{R}^n \setminus S$. Ali je tedaj $\overline{V} \cong B^n$? Podobno vprašanje si lahko zastavimo tudi za $S \subseteq S^n$, $S \cong S^{n-1}$.

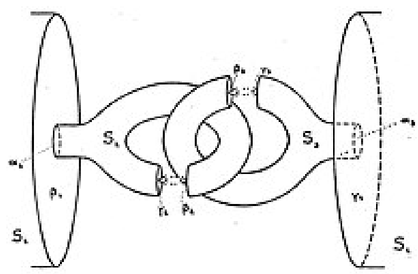
Trditev 2.45. *Naj bo $S^{n-1} \cong S \subseteq \mathbb{R}^n$ in V omejena komponenta $\mathbb{R}^n \setminus S$. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

1. *$\overline{V} \cong B^n$ (Schoenflis)*
2. *$\exists$ homeomorfizem $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tako da je $h(S) = S^{n-1}$.*

Trditev 2.46. *Naj bo $S^{n-1} \cong S \subseteq S^n$ in V poljubna komponenta $S^n \setminus S$. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

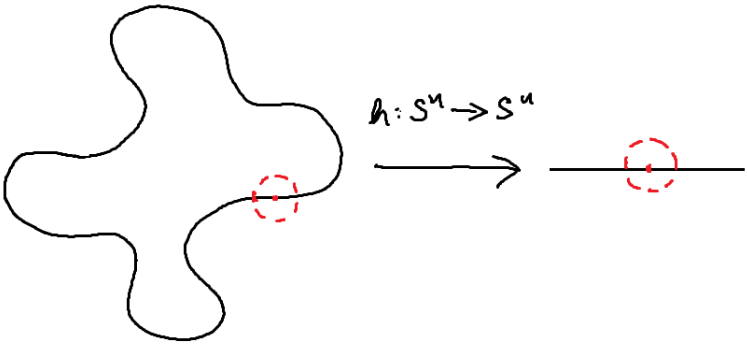
1. *$\overline{V} \cong B^n$.*
2. *$\exists$ homeomorfizem $h : S^n \to S^n$, tako da je $h(S) = S^{n-1}$.*

Analogen izrek kot Schoenflisov pa za dimenzijo $n \geq 3$ ne velja brez dodatnih predpostavk.



Slika 3: Alexandrova rogata sfera

Topološke sfere, ki so protiprimeri, so divje v smislu, da imajo točke, v okolici katerih je struktura vložene sfere kompleksna. Take točke imenujemo divje točke. Iz trditve vidimo, da je potreben pogoj za veljavnost Schoenflisovega izreka to, da je S mogoče v okolici vsake točke nekonstantno zravnati.



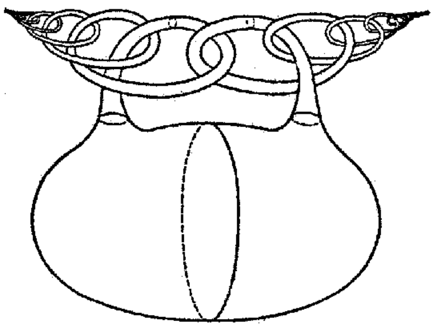
Definicija 2.47.

- Naj bo $S^{n-1} \cong S \subseteq \mathbb{R}^n$ in $x \in S$. Sfera S je lokalno ploščata ali krotka v točki x, če obstaja okolica $U \subseteq \mathbb{R}^n$ za x in homeomorfizem $h : U \to W \overset{\text{odp}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, da je $h(S \cap U) = W \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. S je lokalno ploščata ali podmnogoterost, če je lokalno ploščata v vsaki svoji točki.

- Naj bo $S^{n-1} \cong S \subseteq \mathbb{R}^n$ in $x \in S$. Sfera S je lokalno ploščata ali krotka v točki x, če obstaja okolica $U \subseteq S^n$ za x in homeomorfizem $h : U \to W \overset{\text{odp}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, da je $h(S \cap U) = W \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. S je lokalno ploščata ali podmnogoterost, če je lokalno ploščata v vsaki svoji točki.

Izrek 2.48.

Schoenflisov izrek velja natanko za lokalno ploščate topološke $(n-1)$-sfere v $\mathbb{R}^n$ oziroma S^n.



Slika 4: Fox-Artinova sfera

2.3 Invarianca odprtih množic

Cilj tega razdelka je pokazati, da je dimenzija vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$ topološka invarianta, torej če je $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, potem sledi $m = n$. Iz linearne algebre to že vemo za linearne izomorfizme, ki pa so le zelo posebna vrsta homeomorfizmov. V splošnem pa zvezna preslikava (ne nujno surjektivna) lahko spremeni dimenzijo.

Zgled 2.49. *Oglejmo si nekaj primerov zveznih preslikav, ki ne ohranijo dimenzije prostora.*

- *Projekcija na prvi faktor iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}$.*
- *Prostor zapolnjujoče krivulje (Hilbertova, Peanova) iz I^2 v I.*
- *Prejšnji primer lahko posplošimo na poljubno dimenzijo. Po izreku Aleksandrova obstaja*

zvezna surjekcija $f : C \to I^n$ in ker je $C \overset{zap}{\subseteq} I$, lahko f razširimo na zvezno surjekcijo $f : I \to I^n$.

Izrek 2.50 (Brouwer)**.**

Naj bo $U \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ in $f : U \to \mathbb{R}^n$ zvezna in injektivna. Potem je f odprta vložitev, torej je $f(V) \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Izberimo poljubno $W \overset{\text{odp}}{\subseteq} U$ in $y \in f(W)$. Dokazujemo, da ima y odprto okolico v $\mathbb{R}^n$, vsebovano v $f(W)$. Naj bo $x \in f^{-1}(\{y\})$. Za $x \in W \overset{\text{odp}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ obstaja $r > 0$, da je $K = \overline{K}(x, r) \subseteq W$ in torej $K \cong B^n$. Potem je seveda $\partial K \cong S^{n-1}$ in $\operatorname{Int} K \cong \mathring{B}^n$. Označimo $S = f(\partial K)$ in

$$f\big|_{\partial K} : \partial K \to \mathbb{R}^n \quad \text{je zaprta.}$$

To pa pomeni, da je tudi vložitev, zato je $S \cong S^{n-1}$. Po Jordan-Brouwerjevem izreku ima $\mathbb{R}^n \setminus S$ dve komponenti, ki sta odprti v $\mathbb{R}^n$:

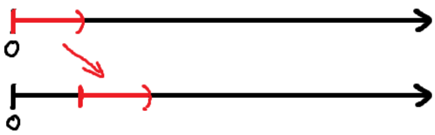
$$\mathbb{R}^n \setminus S = f(\operatorname{Int} K) \cup (\mathbb{R}^n \setminus f(K)).$$

Pri tem je $f(\operatorname{Int} K)$ povezana, ker je zvezna slika povezane, $\mathbb{R}^n \setminus f(K)$ pa je povezana, ker zaradi zaprtosti $f\big|_K$ velja $f(K) \cong K \cong B^n$, po izreku $\mathbf{D_n}$ pa topološki disk ne deli $\mathbb{R}^n$. Torej sta $f(\operatorname{Int} K)$ in $\mathbb{R}^n \setminus f(K)$ komponenti $\mathbb{R}^n \setminus S$ in zato odprti v $\mathbb{R}^n$. Od tod pa naprej

$$y = f(x) \in f(\operatorname{Int} K) \overset{\text{odp v } \mathbb{R}^n}{\subseteq} f(U)$$

in y je notranja točka. □

Opomba. Pri tem izreku je pomembno, da se nahajamo v ambientnem prostoru $\mathbb{R}^n$. V splošnem to seveda ne velja; vzamemo lahko na primer množico $[0, 1) \overset{\text{odp}}{\subseteq} [0, \infty)$ in na njej uporabimo preslikavo $f(x) = x + 1$.



Izrek 2.51 (Invarianca odprtih množic)**.**

Naj bo $V \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ in $W \subseteq \mathbb{R}^n$, tako da je $W \cong V$. Potem je W odprta v $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Po predpostavki obstaja homeomorfizem $h : V \to W$. Sedaj definiramo funkcijo

$$f : V \xrightarrow{h} W \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n.$$

Ker je f zvezna in injektivna, je po izreku f odprta in $f(V) = W \overset{\text{odp}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$. □

Posledica 2.52. *Iz $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ sledi $n = m$.*

Dokaz. Naj bo $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ in denimo, da je $m < n$. Ker je $\mathbb{R}^n$ odprta v $\mathbb{R}^n$, bi po izreku morala biti tudi $\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m \times 0^{n-m} \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. To pa je protislovje, saj ima 0^{n-m} prazno notranjost. □

Opomba. V splošnem sta notranjost in meja množice odvisna od tega, kako je množica vložena v prostor. Kot smo dokazali, pa se to ne zgodi znotraj $\mathbb{R}^n$.

Trditev 2.53. *Naj bosta* $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *in* $h : A \to B$ *homeomorfizem. Potem je*

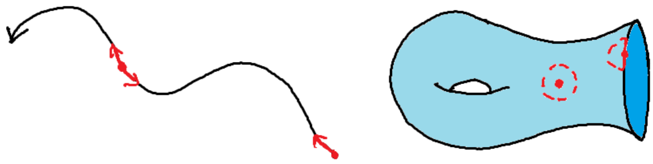
$$h(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} B, \quad h(A \cap \operatorname{Meja} A) = B \cap \operatorname{Meja} B.$$

Dokaz. Ker je $\operatorname{Int} A \overset{\text{odp}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, je $h(\operatorname{Int} A)$ tudi odprta v $\mathbb{R}^n$ in zato vsebovana v B, torej $h(\operatorname{Int} A) \subseteq \operatorname{Int} B$. Obratna inkluzija za h^{-1} da $h^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int} A$, torej je res $h(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} B$. Druga točka pa sledi zato, ker je h bijekcija. $\square$

3 Mnogoterosti

3.1 Topološke mnogoterosti

Ta razdelek začnimo z intuicijo, da je mnogoterost dinmenzije n topološki prostor, ki lokalno „izgleda“ kot $\mathbb{R}^n$. Osnovni primeri bi bile krivulje in ploskve, ki jih že poznamo iz analize. Vnaprej se dogovorimo za oznako $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ in $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.



Slika 5: Primer krivulje in ploskve, osnovnih mnogoterosti.

Definicija 3.1. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. Topološka mnogoterost dimenzije n oziroma n-mnogoterost je 2-števen Hausdorffov prostor, v katerem ima vsaka točka odprto okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$. Takšno okolico imenujemo evklidska okolica, pripadajoč homeomorfizem pa karta.

Definicija 3.2. Točka $x \in X$ je notranja, če ima kakšno okolico, ki je homeomorfna $\mathbb{R}^n$, sicer pa je x robna točka. Množico vseh notranjih točk mnogoterosti imenujemo notranjost X in ga označujemo z $\operatorname{int} X$, preostanek pa imenujemo rob od X in ga označujemo z $\partial X := X \setminus \operatorname{int} X$.

Opomba.

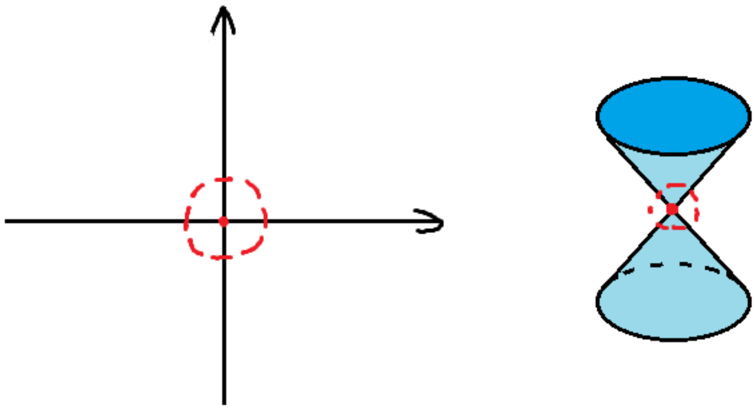
- $\mathbb{R}^n \cong \mathring{B}^n$, $\mathbb{R}^n_+ \cong \mathrm{B}^n_+ = \mathrm{B}^n \cup \mathbb{R}^n_+$. Alternativno lahko evklidske okolice definiramo kot tiste, ki so homeomorfne odprtim podmnožicam v $\mathbb{R}^n_+$.
- Vsak $x \in X$ ima bazo evklidskih okolic.
- V literaturi mnogoterost včasih pomeni mnogoterost brez roba.

Zgled 3.3.

- *S^1 je 1-mnogoterost z notranjostjo $\operatorname{int} S^1 = S^1$ in robom $\partial S^1 = \emptyset$.*
- *Naj bo $V \overset{odp}{\subseteq} X$ $^{n\text{-mnt.}}$. Potem je tudi V n-mnogoterost.*
- *Gladka podmnogoterost (ta pojem poznamo že iz analize) dimenzije n v $\mathbb{R}^m$ je tudi topološka mnogoterost dimenzije n.*

Zgled 3.4. *$\mathbb{R}^n$ je n-mnogoterost brez roba, $\mathbb{R}^n_+$ pa n-mnogoterost z robom $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Če bi $x \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ namreč imal okolico $U \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n_+$, ki je homeomorfna $\mathbb{R}^n$, potem ta V vsebuje x, zato V ni odprta v $\mathbb{R}^n$. To pa je v nasprotju z invarianco odprtih množic.*

Zgled 3.5. *$X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ ni mnogoterost, saj izhodišče nima evklidske okolice. Če bi jo imela, bi ta ob odstranitvi točke $(0, 0)$ razpadla na vsaj 4 komponente, kar pa vodi v protislovje. Enak argument uporabimo tudi za dokaz, da dvojni stožec $x^2 + y^2 = z^2$ ni mnogoterost.*



Opomba. V primeru sfere vidimo, da notranjost in rob mnogoterosti ne sovpadata nujno z relativno notranjostjo in mejo, če je mnogoterost vložena v ambientni prostor.

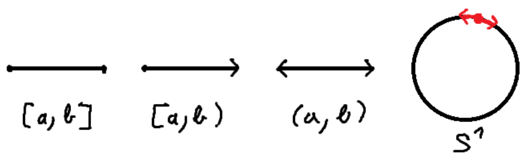
Ker so mnogoterosti lokalno evklidske, imajo enake lokalne lastnosti kot $\mathbb{R}^n$. To pomeni, da so lokalno povezane s potmi, lokalno kompaktne in T_1 (že brez predpostavke). Lastnost T_2 pa ni lokalna – primer smo že srečali pri kvocientu

$$(-\infty,0)\times\{0\}\cup[0,\infty)\times\{1\}\cup[0,\infty)\times\{-1\}\Big/\{(0,1),(0,-1)\},$$

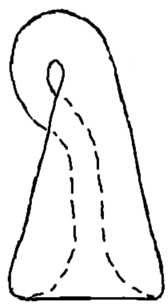
ki ima evklidske okolice, a ni T_2. Vendar pa nam lokalna kompaktnost v kombinaciji z predpostavko T_2 da regularnost, ta pa skupaj z 2-števnostjo implicira metrizabilnost.

Definicija 3.6. Kompaktno mnogoterost brez roba imenujemo sklenjena ploskev.

Zgled 3.7. *Povezane 1-mnogoterosti (krivulje) so homeomorfne intervalom ali pa krožnici – to je edina sklenjena krivulja.*



Zgled 3.8. *Povezane kompaktne 2-mnogoterosti imenujemo ploskve. Primeri teh so recimo disk B^2, kolobar $S^1\times I$ ali pa Möbiusov trak. Primeri sklenjenih ploskev pa so Riemannova sfera $S^2\cong\mathbb{C}P^1$, torus $T=S^1\times S^1$, realna projektivna ravnina $\mathbb{R}P^2=P$ in Kleinova steklenica.*



Trditev 3.9. *Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Projektivni prostor $\mathbb{F}P^n$ je sklenjena mnogoterost dimenzije n oziroma $2n$ oziroma $4n$.*

Dokaz. Ker je $q : \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{F}P^n$ kvocientna projekcija, je odprta in od tod sledi 2-števnost. Vemo že, da je $\mathbb{F}P^n$ kompakten. Pokazali bomo, da ima vsaka točka odprto okolico, ki je homeomorfna $\mathbb{F}^n$, od tod pa bo sledila sklenjenost, lokalna evklidskost in ustrezna dimenzija. Za $i = 1, 2, \ldots, n+1$ naj bo $V_i = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0\}$ in $\{V_1, \ldots, V_{n+1}\}$ je odprto pokritje za $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Od tod sledi, da je $\{q(V_1), \ldots, q(V_{n+1})\}$ odprto pokritje za $\mathbb{F}P^n$. Dokazali bomo, da je $q(V_i) \cong \mathbb{F}^n$ za vsak $i = 1, \ldots, n+1$. Brez škode za splošnost vzemimo $i = 1$ in definirajmo preslikavo $f : V_1 \to \mathbb{F}^n$ s predpisom

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1^{-1}x_2, x_1^{-1}x_3, \ldots, x_1^{-1}x_{n+1}).$$

Hkrati pa je preslikava $q\big|_{V_1}$ kvocientna, saj je zoožitev kvocientne preslikave na odprto množico.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q|_{V_1}"'] & \mathbb{F}^n \\ q(V_1) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Preslikava $\overline{f}$ obstaja in je zvezna, ker f slika ekvivalenčne razrede v eno točko in je prav tako zvezna. Inverz od $\overline{f}$ je $g : \mathbb{F}^n \to q(V_1)$, ki je definirana kot $g(y_1, \ldots, y_n) = q(1, y_1, \ldots, y_n)$ in je očitno zvezna. Dokazati moramo še, da je $\mathbb{F}P^n$ Hausdorffov prostor. Denimo, da imamo točki $a, b \in \mathbb{F}P^n$, kjer je $a := [x] \neq [y] =: b$ in sta $x, y \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$. Če so vse koordinate $x_i \neq 0$, potem je $a \in V(q_i)$ za vse $i = 1, \ldots, n+1$. Hkrati pa obstaja neko število $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, tako da je $b = [y] \in q(V_j)$ za neki j; znotraj $q(V_j) \cong \mathbb{F}^n$ imata a in b disjunktni okolici, ker pa velja $q(V_j) \overset{\text{odp}}{\subseteq} \mathbb{F}P^1$ in zato imata a in b disjunktni odprti okolici v $\mathbb{F}P^n$. V splošnem pa po homogenosti obstaja homeomorfizem $h : \mathbb{F}P^1 \to \mathbb{F}P^1$, ki preslika a v takšno točko kot prej (torej $x_i \neq 0$, za vsak i). Po enakem razmisleku imata $h(a)$ in $h(b)$ disjunktni odprti okolici U in V, torej imata a in b disjunktni odprti okolici $h^{-1}(U)$ in $h^{-1}(V)$. $\square$

3.2 Konstrukcije mnogoterosti

1. **Komponenta mnogoterosti**

Očitno je, da je Hausdorffova in 2-števna, saj sta to dedni lastnosti. Ker je mnogoterost lokalno povezana, so njene komponente odprte, od koder pa dobimo tudi lokalno evklidskost. Torej je komponenta n-mnogoterosti je n-mnogoterost.

2. **Disjunktna unija**

Disjunktna unija (največ) števno mnogo n-mnogoterosti je prav tako n-mnogoterost.

3. **Rob mnogoterosti**

Izrek 3.10 (Izrek o odprti preslikavi za mnogoterosti)**.**

Naj bosta M in N n-mnogoterosti, $V \overset{\text{odp}}{\subseteq} \operatorname{int} M$ in $f : V \to N$ zvezna injektivna funkcija. Potem je f odprta in $f(V) \subseteq \operatorname{int} N$.

Dokaz. Izberemo poljubno podmnožico $W \overset{\text{odp}}{\subseteq} V$, $y \in f(W)$ in $x = f^{-1}(y) \in W$. Vemo, da ima y evklidsko okolico $U \subseteq N$, ki je homeomorfna bodisi $\mathbb{R}^n$ bodisi $\mathbb{R}^n_+$. Potem je $f^{-1}(U)$ okolica za x v M in obstaja evklidska okolica U' za x, tako da je $U' \cong \mathbb{R}^n$ in $U' \subseteq f^{-1}(U) \cap W$. Preslikava

$$\mathbb{R}^n \overset{\cong}{\to} U' \overset{f}{\to} U \cong \begin{cases} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

je zvezna in injektivna, zato je po Brouwerjevem izreku odprta. Njena slika je odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$, zato v primeru $U \cong \mathbb{R}^n_+$ slika ne vsebuje točk iz $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. To pa pomeni, da je y notranja točka v N, $f(U') \overset{\text{odp}}{\subseteq} N$ in je znotraj $f(W)$. $\square$

Posledica 3.11. *Naj bosta U, V n-mnogoterosti in $h : U \to V$ homeomorfizem. Potem je*

$$h(\operatorname{Int} U) = \operatorname{Int} V, \quad h(\partial U) = \partial V.$$

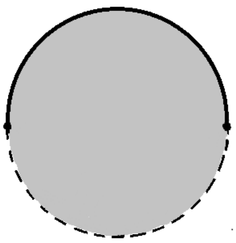
Opomba. Če je M n-mnogoterost, je $\operatorname{int} M$ odprta v M, zato je $\partial M \overset{\text{zap}}{\subseteq} M$.

Izrek 3.12.

Naj bo M m-mnogoterost z nepraznim robom. Potem je ∂M $(n-1)$-mnogoterost s praznim robom. Posebej: če je M kompaktna, je ∂M sklenjena.

Posledica 3.13. *Rob (kompaktne) ploskve je disjunktna unija krožnic.*

Zgled 3.14. *Naslednja množica ni mnogoterost.*

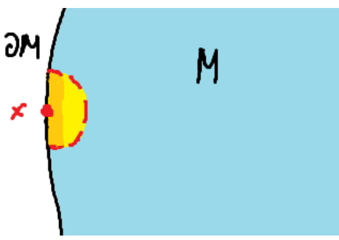


Dokaz. Po dednosti je ∂M Hausdorffov, 2-števen prostor. Za poljuben $x \in \partial M$ trdimo, da ima okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^{n-1}$. Naj bo W evklidska okolica za x v M, $h : W \to \mathbb{R}^n_+$ in $h(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Po zgornjem izreku $h : W \cap \operatorname{int} M \to \mathbb{R}^n_+$ slika v $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$, enako $h^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) \to W \cap \operatorname{int} M$, torej je $h(W \cap \operatorname{int} M) = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$. Tako smo dobili iskano karto pri x:

$$h\big|_{W \cap \partial M} : W \cap \partial M \to \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^{n-1}$$ $\square$

Opomba. Rob ∂M ne deli M: če je M povezana, je $M \setminus \partial M$ povezana.

Rob ∂M je lokalno obrobljen v M. To pomeni, da če vzamemo $x \in \partial M$, $x \in W \cong \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ in $V := W \cap \partial M$, je obrobek del W, ki ustreza $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1]$.



Izrek 3.15.

Obstaja vložitev $c : \partial M \times [0,1] \to M$, *da je* $c|_{\partial M} = id_{\partial M}$.

4. **Produkt mnogoterosti**

Trditev 3.16. *Naj bo* M *m-mnogoterost in* N *n-mnogoterost. Potem je produkt* $M \times N$ $m+n$-*mnogoterost z notranjostjo* $\operatorname{int}(M \times N) = \operatorname{int} M \times \operatorname{int} N$ *in robom*

$$\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N.$$

Dokaz. Vemo, da sta lastnosti T_2 in 2-števnost produktni. Oglejmo si evklidske okolice točk $(x,y) \in M \times N$, kjer je U_x evklidska okolica točke $x \in M$ in V_y evklidska okolica točke y v N.

- Če sta x in y notranji, velja $U_x \cong \mathbb{R}^m$, $V_y \cong \mathbb{R}^n$ in (x,y) ima okolico $U_x \times V_y \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{m+n}$, zato je notranja točka.
- Če je $x \in \operatorname{int} M$ in $y \in \partial N$, potem je $U_x \cong \mathbb{R}^m$ in $V_y \cong \mathbb{R}^n_+$ in

$$(x,y) \in U_x \times V_y \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{m+n} \times [0,\infty) = R^{m+n}_+.$$

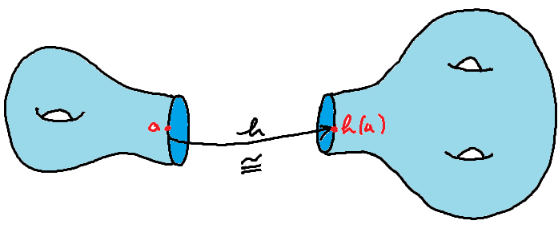
- Če je $x \in \partial M$ in $y \in \partial N$, potem je $U_x \cong \mathbb{R}^m$ in $V_y \cong \mathbb{R}^n_+$ in

$$(x,y) \in U_x \times V_y \cong \mathbb{R}^{m+n-2} \times [0,\infty)^2 \cong \mathbb{R}^{m+n-1} \times [0,\infty) = \mathbb{R}^{m+n}_+$$

□

Zgled 3.17.
- *Kvadrat* $I \times I$ *je mnogoterost z robom* $\partial I \times I \cup I \times \partial I$.
- *Torus* $S^1 \times S^1$ *je mnogoterost brez roba, saj ima* S^1 *prazen rob.*
- *Poln torus* $S^1 \times B^2$ *je mnogoterost z robom* $\partial(S^1 \times B^2) = S^1 \times S^1$.

5. **Zlepek mnogoterosti**



Definicija 3.18. Naj bo L l-mnogoterost, N n-mnogoterost, $L \subseteq N$ in $l \leq n$.

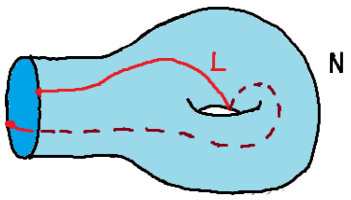
1. Mnogoterost L je prav vložena v N, če je $L \cap \partial N = \partial L$.
2. L je lokalno ploščata ali podmnogoterost v N, če je prav vložena in če za vsak $x \in L$ obstaja

neka evklidska okolica V za x v N ter homeomorfizem

$$h : V \to \begin{cases} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n_+ \end{cases},$$

da je

$$h(V \cap L) = h(V) \cap (\{0\}^{n-l} \times \mathbb{R}^l).$$



Izrek 3.19.

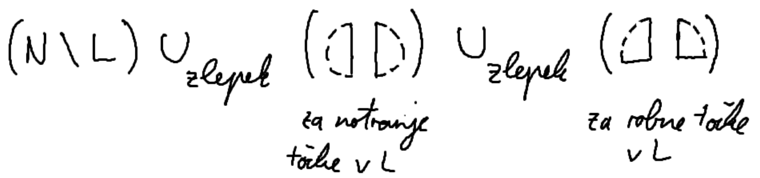
Naj bosta N_1 in N_2 n-mnogoterosti ter $L_1 \subseteq \partial N_1$ in $L_2 \subseteq \partial N_2$ zaprti $(n-1)$-mnogoterosti z lokalno ploščatima roboma. Naj bo $h : L_1 \to L_2$ homeomorfizem. Potem je zlepek $N_1 \cup_h N_2$ n-mnogoterost z robom

$$\partial(N_1 \cup_h N_2) = (\partial N_1 \setminus \operatorname{int} L_1) \cup_{h|_{\partial L_1}} (\partial N_2 \setminus \operatorname{int} L_2).$$

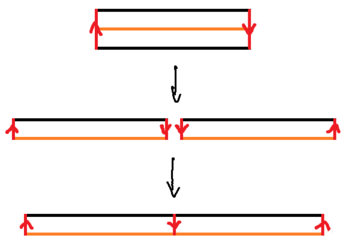
Dokaz. Hausdorffovost in 2-števnost sledita iz trditve 1.42. Lepljenje na enak način kot v dokazu te trditve pa nam da tudi lokalno evklidskost. □

6. **Prerez mnogoterosti**

Naj bo N n-mnogoterost in $L \overset{\text{zap}}{\subseteq} N$ $(n-1)$-mnogoterost, ki je lokalno ploščata (in zato seveda tudi prav vložena). Potem N lahko prerežemo vzdolž L in dobimo novo n-mnogoterost, ki vsebuje po dve kopiji vsake točke iz L. Torej $N \setminus L$ zlepimo s „polovicami“ okolic notranjih točk v L v N in „četrtinami“ okolic robnih točk v L v N.

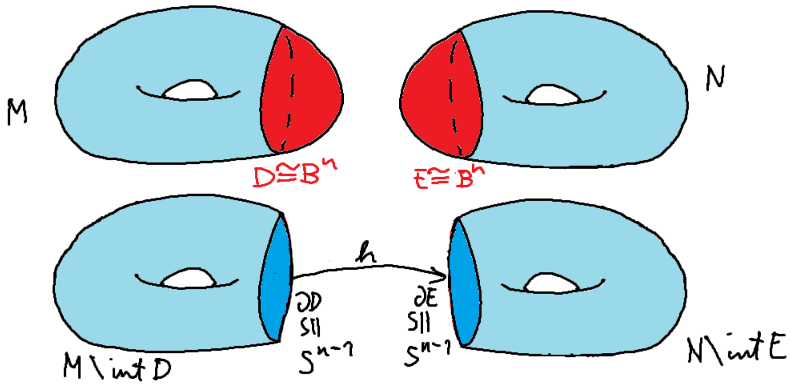


Zgled 3.20. *Razrez mnogoterosti ponazorimo na Möbiusovem traku, ki ga prerežemo po srednji krivulji. Tako dobimo prostor, ki je homeomorfen $S^1 \times I$, njegova geometrijska realizacija pa je enaka kot v zgledu 1.17. Podobno dobimo tudi, če Möbiusov trak razrežemo na tretjini od roba.*



7. Povezana vsota

Definicija 3.21. Naj bosta M, N n-mnogoterosti, $D \subseteq \operatorname{int} M$, $E \subseteq \operatorname{int} N$ in $D, E \cong B^n$. Naj bosta $\partial D \subseteq M$ in $\partial E \subseteq N$ lokalno ploščati sferi in $h : \partial D \to \partial E$ homeomorfizem. Potem zlepek $M\#N$ imenujemo povezana vsota mnogoterosti M in N.



Iz konstrukcije razreza in zlepka mnogoterosti sledi, da je $M\#N$ mnogoterost; zapišemo lahko namreč

$$M\#N := (M \setminus \operatorname{int} D) \cup_h (N \setminus \operatorname{int} E).$$

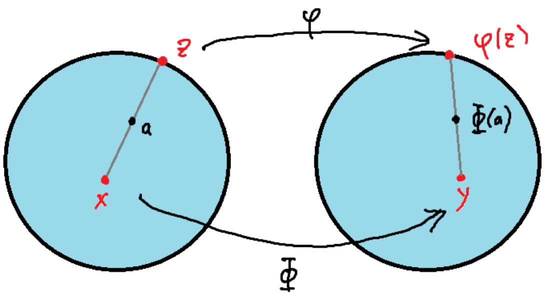
Kljub temu, da je ta zapis pogosto v uporabi, pa vendarle ni povsem korekten, saj bi tako definirana mnogoterost lahko bila odvisna od izbire D znotraj iste komponente M oziroma izbire E znotraj iste komponente N. Vendar pa se izkaže, da ti izbiri ne vplivata na definicijo – osnovni rezultat v tej smeri je homogenost mnogoterosti. Definicija bi lahko bila odvisna tudi od izbire homeomorfizma h. Res, dobimo lahko nehomeomorfne rezultate glede na to, ali h ohranja ali obrne orientacijo. To se lahko zgodi v primeru, ko sta obe mnogoterosti orientabilni in nobena izmed njiju nima homeomorfizma sama vase, ki bi obrnil orientacijo – najpreprostejši primer mnogoterosti z zadnjo lastnostjo je $\mathbb{C}P^2$. Vendar pa je v dveh dimenzijah (torej ploskvah) rezultat povezane vsote neodvisen od izbranega homeomorfizma. V nadaljevanju bomo potrebovali tudi dejstvo, da je povezana vsota sklenjenih ploskev prav tako sklenjena ploskev.

Izrek 3.22 (Homogenost mnogoterosti)**.**

Naj bo M povezana n-mnogoterost. Potem za poljubni točki $x, y \in \operatorname{int} M$ obstaja homeomorfizem

$$h : M \to M, \quad h(x) = y.$$

Lema 3.23. *Poljuben homeomorfizem $\varphi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ lahko razširimo do homeomorfizma $\Phi : B^n \to B^n$, ki poljubno vnaprej izbrano točko $x \in \operatorname{int} B^n$ v poljubno vnaprej izbrano točko $y \in \operatorname{int} B^n$.*



Dokaz. Definirajmo ekvivalenčno relacijo na mnogoterosti M:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \text{ homeomorfizem } h : M \to M,\ h(x) = y.$$

Dovolj je pokazati, da so vsi ekvivalenčni razredi odprti, saj iz povezanosti M sledi tudi povezanost $\operatorname{int} M$. Izberimo $x \in \operatorname{int} M$ in naj bo U njegova evklidska okolica, torej $U \overset{H}{\cong} \mathbb{R}^n$. Definirajmo $V := H^{-1}(\mathring{B}^n)$, ki je okolica za x, in izberimo poljuben $y \in V$. Po lemi obstaja homeomorfizem $\Phi : H^{-1}(B^n) \to H^{-1}(B^n)$, ki je na robu $H^{-1}(S^{n-1})$ identiteta in $\Phi(x) = y$. Sedaj Φ razširimo na preostanek M z identiteto in dobimo $x \sim y$ za vsak $y \in V$, torej je ekvivalenčni razred res odprt. $\square$

Naj bosta M, N n-mnogoterosti, $D \subseteq \operatorname{int} M$ in $E \subseteq N$ topološka n-diska z lokalno ploščatim robom ter $h : \partial D \to \partial E$ homeomorfizem. Potem ima operacija

$$M\#N = (M \setminus \operatorname{int} D) \cup_h (N \setminus \operatorname{int} E)$$

nevtralni element. Res, pokazali bomo, da za poljubno n-mnogoterost M velja $M\#S^n \cong M$. Naj bosta $D \subseteq \operatorname{int} M$, $E \subseteq \operatorname{int} S^n$ in $\partial E \subseteq S^n$ lokalno ploščata $(n-1)$-sfera, zato po Schoenflisu obstaja homeomorfizem S^n, ki E preslika na spodnjo hemisfero S^n_- (in ∂E na ekvator $S^{n-1} \subseteq S^n$). Zato smemo privzeti $E = S^n_-$ in $S^n \setminus \mathring{E} = S^n_+ \cong B^n$. Naš homeomorfizem $h : \partial D \to S^{n-1} = \partial S^n_+$ lahko razširimo do homeomorfizma $H : D \to S^n_+$, ki ga definiramo kot $H = \psi^{-1} \circ \tilde{h} \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
\partial D \arrow[rrrr, bend left, "h"] & \subseteq & D \arrow[r, dashed, "H"] \arrow[d, "\cong"', "\varphi"] & S^n_+ \arrow[d, "\cong"', "\psi"] & \supseteq & S^{n-1} \\
S^{n-1} \arrow[rrrr, bend right, "\psi \circ h \circ \varphi^{-1}"'] & \subseteq & B^n \arrow[r, dashed, "\exists \tilde{h}"'] & B^n & \supseteq & S^{n-1}
\end{tikzcd}$$

S tem pa dobimo naslednji komutativni diagram,

$$\begin{tikzcd}
M & (M \setminus \mathring{D}) \sqcup D \arrow[l] \arrow[r, "id \sqcup H"] \arrow[d, "q"] & (M \setminus \mathring{D}) \sqcup S^n_+ \arrow[d, "p"] \\
& (M \setminus \mathring{D}) \cup_{id_{\partial D}} D \arrow[ul, dashed, "\cong"] \arrow[r, dashed, "\cong", "f"'] & (M \setminus \mathring{D}) \cup_h S^n_+ \arrow[ull, bend left, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

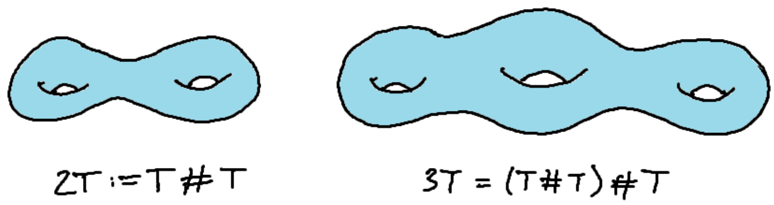
iz katerega je razvidno, da velja

$$M\#S^n = (M \setminus \mathring{D}) \cup_h S^n_+ \cong M.$$

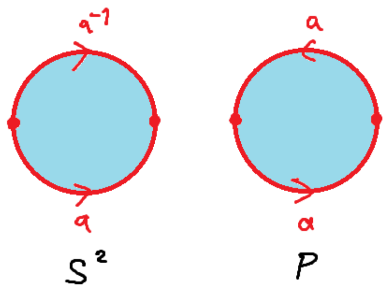
3.3 Sklenjene ploskve

Za nas bo ploskev povezana 2-mnogoterost. V tem razdelku se bomo ukvarjali s klasifikacijo sklenjenih ploskev, torej kompaktnih ploskev brez roba. Našli bomo po enega predstavnika vsakega homeomorfnega razreda sklenjenih ploskev in algoritem za njihovo prepoznavanje.

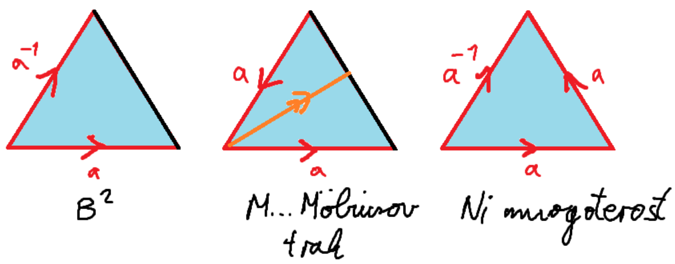
Zgled 3.24. *Primeri sklenjenih ploskev, s katerimi smo se že srečali, so sfera S^2, torus $T := S^1 \times S^1$, projektivno ravnino $P := \mathbb{R}P^1$ in Kleinova steklenica K. Iz teh pa lahko konstruiramo vedno nove ploskve.*



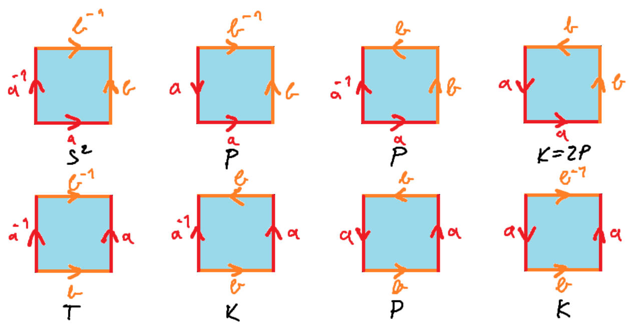
Pri tem pa se nam poraja vprašanje, ali s tem dobimo vse sklenjene ploskve in katere izmed njih so homeomorfne. Zanimale nas bodo ploskve, ki so kvocienti mnogokotnikov, pri katerih zlepimo pare stranic s homeomorfizmi. V primeru $n = 2$ dobimo sfero ali pa projektivno ploskev.



V primeru $n = 3$ je razvidno, da ne dobimo sklenjene ploskve, saj z leplenjem para stranic preostane ena stranica, ki postane rob kvocienta. Če pa skupaj zlepimo več kot dve stranici, sploh ne dobimo mnogoterosti.



Splošen nauk tega je, da če stranice označujemo z množico oznak $A = \{a, b, c, d, \dots\}$, mora vsak izmed njenih elementov nastopati dvakrat ali pa nobenkrat. Te oznake, skupaj z njihovo orientacijo, sestavljajo besedo $a^{\varepsilon_1} b^{\varepsilon_2} c^{\varepsilon_3} \dots$, po kateri zlepimo večkotnik.

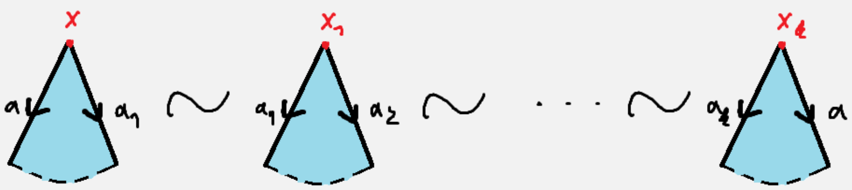


Trditev 3.25. *Naj bo* $K = K_1 \sqcup K_2 \sqcup \cdots \sqcup K_n$ *disjunktna unija mnogokotnikov v ravnini in naj bo* $\sim$ *ekvivalenčna relacija na* K*, ki identificira pare stranic mnogokotnikov z linearnimi homeomorfizmi. Potem je* $K/\sim$ *disjunktna unija kompaktnih ploskev.*

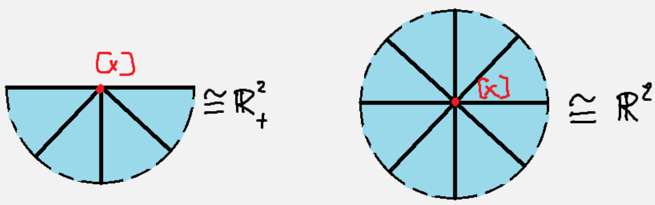
- *Točke iz notranjosti mnogokotnikov so notranje.*
- *Če je* x *notranja točke neke stranice, ki se identificira z neko drugo stranico, je* $[x]$ *v* $K/\sim$ *notranja točka.*
- *Točke iz stranic, ki niso identificirane, so robne.*
- *Ekvivalenčni razredi oglišč lahko vsebujejo več točk.*

Tako ploskev imenujemo poliedrska ploskev.

Dokaz. Okolice točk v $K/\sim$ dobimo na analogen način kot v dokazu trditve 1.42. Od tod sledi tudi to, da je $K/\sim$ Hausdorffov in 2-števen, torej moramo preveriti le obstoj evklidskih okolic. Pa naredimo to le za primer, ko je x oglišče K_i. Identifikacije x sledijo iz identifikacije stranic; privzemimo $[x] = \{x, x_1, \ldots, x_k\}$. Nato najdemo „kompatibilne“ okolice teh oglišč v K, ki so paroma disjunktne.



Tako nastopita dva primera: z obroženo in brez obkrožene identifikacije.



□

Poliedrska ploskev $K/\sim$ ima lahko več komponent. Če pa je povezana, potem pa lahko v $K = \bigsqcup U_i$ najdemo stranico, vzdolž katerih paroma zlepimo komponente tako, da nastane en sam mnogokotnik. Poliedrske ploskve bomo prepoznali s pomočjo dveh topoloških invariant – lastnosti, ki se ohranjajo pri homeomorfizmih: orientabilnosti in Eulerjeve karakteristike. Najprej pa omenimo

Izrek 3.26 (Rádo, 1925)**.**

Vsaka sklenjena ploskev je homeomorfna neki poliedrski ploskvi.

Ta izrek nam zagotovi, da lahko ti invarianti uporabimo na katerikoli sklenjeni ploskvi. Dokaz izpustimo

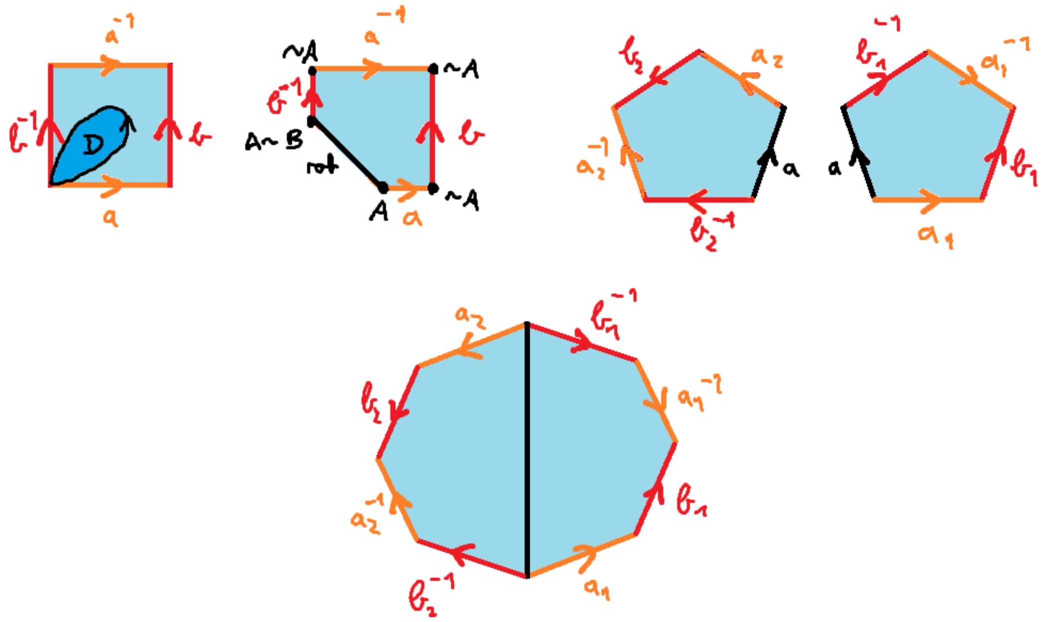
[3].

Izrek 3.27 (Klasifikacijski izrek)**.**

Naj bo M poljubna poliedrska ploskev, potem je M homeomorfna eni od ploskev $S^2 =: 0 \cdot T$, nT ali nP za nek $n \in \mathbb{N}$, zgornje ploskve pa med sabo niso homeomorfne.

Povezano vsoto n torusov dobimo tako, da iz vsake kopije torusa izrežemo odprt disk in zlepimo robova. Iz skice vidimo, da je $2T$ kvocient osemkotnika po kvocientu

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}.$$



Če to induktivno nadaljujemo, dobimo, da je nT kvocient $4n$-kotnika z besedo

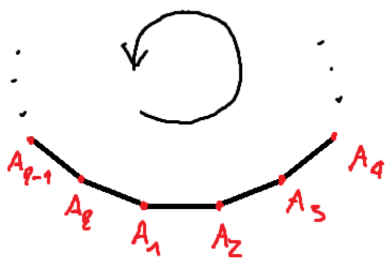
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}.$$

Podobno je $2P$ kvocient štirikotnika z besedo $a_1 a_1 a_2 a_2$ in induktivno je nP kvocient $2n$-kotnika z besedo

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n.$$

1. **Orientabilnost**

Mnogokotnik $K \subseteq \mathbb{R}^2$ je orientabilen, njegova orientacija pa je dana s cikličnim zaporedjem njegovih oglišč.

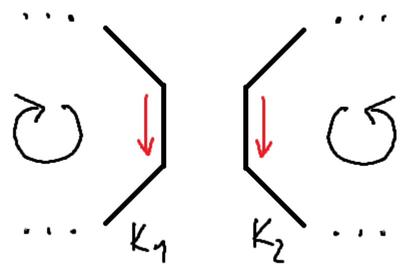


[3]glej: Strle, S.: Izbrane teme iz geometrijske topologije.

Ta določa smer obhoda po ∂K oziroma smer rotacije na K. Hkrati to določa tudi orientacije stranic K, ki jih usmerimo skladno s cikličnim zaporedjem stranic.

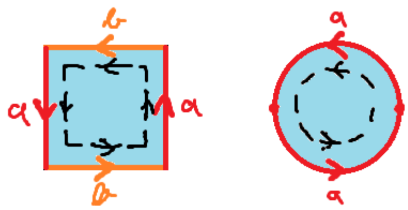
Opomba. Orientacija je v tem primeru podana z izbiro zunanje normale na $K \subseteq \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ po pravilu desnega vijaka.

Včasih se namesto orientacije govori o „strani“ ploskve ali mnogokotnika, ki je tista, kamor kaže normala. Če sta orientirana mnogokotnika K_1 in K_2 zlepljena preko neke stranice, potem rečemo, da sta orientirana skladno, če v skupni stranici določata skladni orientaciji.



Definicija 3.28. Naj bo $M = \left(\sqcup_{j=1}^{k} K_j\right)/_\sim$ poliedrska ploskev, predstavljena kot kvocient disjunktne unije mnogokotnikov, v katerih identificiramo nekatere pare stranic s homeomorfizmi. M je orientabilna, če lahko orientacije mnoogokotnikov K_j izbiramo tako, da so ti orientirani skladno glede na vsak identificiran par.

Zgled 3.29. *Projektivna ravnina P ni orientabilna.*

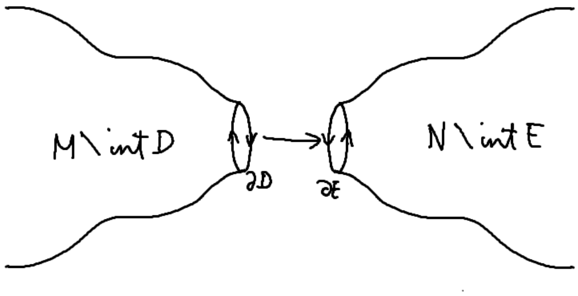


Definicija orientabilnosti je odvisna od poliedrske strukture ploskve, torej predstavitev ploskve kot kvocienta disjunktne unije mnogokotnikov. Takih predstavitev pa je več – če hočemo, da je orientabilnost ploskve sploh dobro definirana, se mora ohranjati s homeomorfizmom.

Izrek 3.30.

Orientabilnost poliedrske ploskve je topološka lastnost.

Trditev 3.31.
1. *Naj bo M poliedrska ploskev in N njena poliedrska podploskev. Potem je tudi N orientabilna.*
2. *Če sta M in N orientabilni poliedrski ploskvi, je tudi $M \# N$ orientabilna.*



Posledica 3.32. *Ploskev M je neorientabilna natanko tedaj, ko vsebuje Möbiusov trak.*

Zgled 3.33. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je nT orientabilna, nP pa neorientabilna ploskev.*

2. **Eulerjeva karakteristika**

Naj bo $M = \left(\bigsqcup_{j=1} K_j \right) /_{\sim}$, kjer relacija $\sim$ paroma identificira nekatere stranice mnogokotnikov K_j. Unija stranic in oglišč mnogokotnikov določa graf Γ v M: oglišča so slike oglišč, povezave so slike stranic, lica grafa pa so slike mnogokotnikov.

- **2-celice** v M so slike odprtih mnogokotnikov K_j v M (torej lica grafa Γ).
- **1-celice** v M so slike odprtih stranic mnokotnikov (torej povezave grafa Γ).
- **0-celice** v M so slike oglišč mnogokotnikov (torej vozlišča grafa Γ).

Definicija 3.34. Eulerjeva karakteristika M je definirana kot

$$\chi(M) = \#(2 - \text{celic}) - \#(1 - \text{celic}) + \#(0 - \text{celic}).$$

Trditev 3.35. *Eulerjeva karakteristika sfere je neodvisna od poliedrske strukture in je enaka $\chi(S^2) = 2$.*

Dokaz. Vemo, da za povezan ravninski graf $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ velja

$$\#\text{lic} - \#\text{povezav} + \#\text{vozlišč} = 2.$$

Za dokaz glej diskretno matematiko. Nato opazimo, da lahko graf ravninsko vložimo natanko tedaj, ko ga lahko vložimo brez sekanja stranic na sfero S^2 – uporabimo kar stereografsko projekcijo. S tem pa je trditev že dokazana. □

Izrek 3.36.

Eulerjeva karakteristika ploskve M je topološka invarianta, torej je neodvisna od izbire poliedrske strukture na M.

Opomba. Eulerjevo karakteristiko lahko definiramo na končnem CW-kompleksu $(X, \mathcal{E})$[4] kot

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \# \mathcal{E}_n.$$

Zgornji izrek velja v splošnem, saj je to število odvisno le od topološkega prostora in ne od celične dekompozicije $\mathcal{E}$: dva končna CW-kompleksa, ki sta homeomorfna kot topološka prostora, imata enako

[4] glej: Mrčun, J.: Topologija

Eulerjevo karakteristiko.

Zgled 3.37. *Z Eulerjevo karakteristiko lahko sedaj karakteriziramo naše tri družine sklenjenih ploskev.*

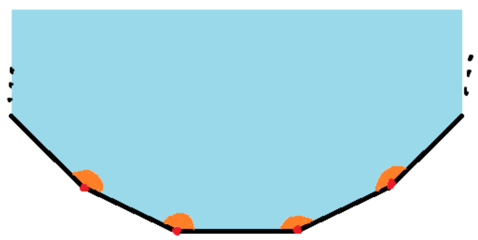
- $\chi(S^2) = 1 - 1 + 2 = 2.$
- $\chi(nT) = 1 - 2n + 1 = 2 - 2n.$
- $\chi(nP) = 1 - n + 1 = 2 - n.$

Opomba. V splošnejši definiciji Eulerjeve karakteristike velja $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.

Trditev 3.38. *Naj bo M poliedrska ploskev in $A, B \subseteq M$ uniji celic, tako da je $M = A \cup B$. Potem je*

$$\chi(M) = \chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

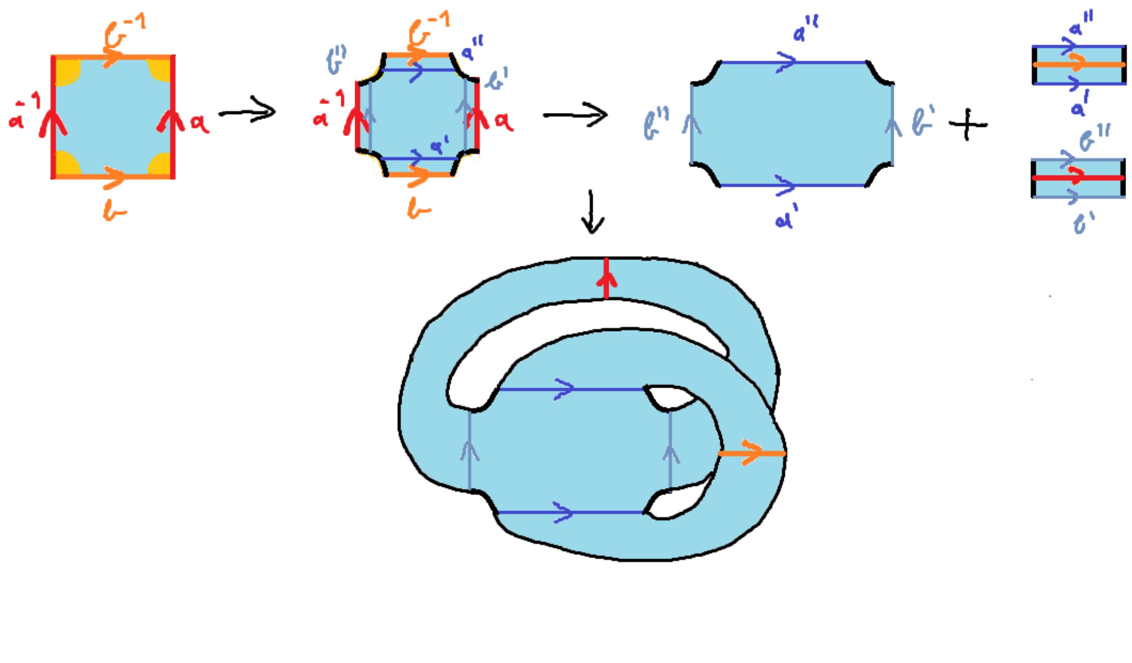
Za dokaz klasifikacijskega izreka moramo še pokazati, da je vsaka sklenjena ploskev homeomorfna S^2, nT ali pa nP za nek $n \in \mathbb{N}$. Naj bo M poljubna poliedrska sklenjena ploskev. Potem je M povezana, zato jo lahko predstavimo kot kvocient nekega mnogokotnika, določenega z neko besedo.



Privzeti smemo, da je M kvocient nekega pravilnega mnogokotnika, v katerem se pari stranic zlepijo z linearnimi homeomorfizmi. Naj bo $\varepsilon > 0$ dovolj majhen, da so zaprti krogi okoli oglišč s polmerom ε paroma disjunktni. Ploskev M prerežemo vzdolž teh krogov, torej definiramo

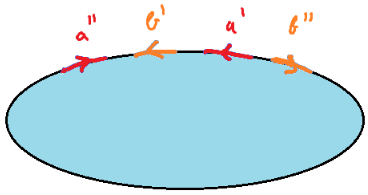
$$N := M \big/ \text{unija odprtih } \varepsilon\text{-krogov okoli vseh oglišč} \cdot$$

Preostanek tvorijo slike teh krogov v M; slike zaprtih krogov se v M zlepijo v zaprte diske s središči v slikah vozlišč. Tako definiran prostor N je kompaktna ploskev z robom – na te se prilepijo diski, tako da tvorijo sklenjeno ploskev M. Oglejmo si primer na torusu.



Opomba. Če bi enak postopek ponovili na projektivni ravnini P, bi dobili Möbiusov trak.

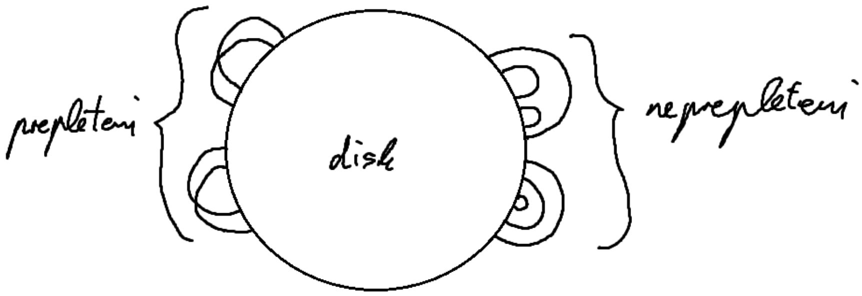
Torus z izrezanim diskom bi si lahko predstavljali kot disk, na katerega prilepimo par prepletenih ročajev.



V splošnem lahko ploskev N predstavimo kot disk s prilepljenimi trakovi, ki jih imenujemo ročaji. Ročaj je orientabilen, če je unija diska in ročaja kolobar oziroma je homeomorfna $S^1 \times I$. V nasprotnem primeru pa je ročaj neorientabilen in tedaj je unija diska in ročaja homeomorfna Möbiusovemu traku. Iz ploskve N spet dobimo nazaj začetno ploskev M, tako da na njene robne komponente prilepimo diske. Od tod naprej ločimo dva primera.

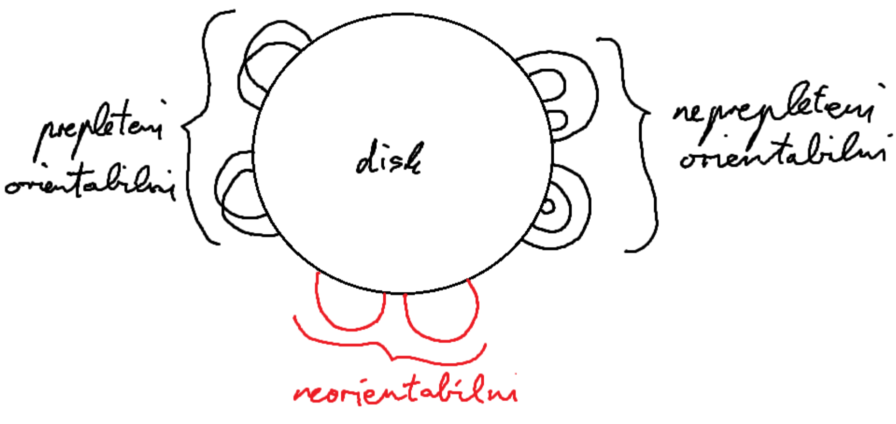
1. **Vsi ročaji so orientabilni.**

V tem primeru lahko vedno izoliramo prepletene pare ročajev.



Neprepleteni ročaji določajo robne krožnice, na katere lahko prilepimo po robu diske. Tako lahko vse neprepletene ročaje odstranimo. Prepleteni pari pa so opisani z besedo $aba^{-1}b^{-1}$, ki ustreza enemu torusu. Število prepletenih parov (označimo ga z n) torej ustreza številu torusov v povezani vsoti. Tako velja $M \cong nT$.

2. **Obstaja neorientabilen ročaj.**



Take ročaje lahko vedno izoliramo od ostalih. Vsak prepleten par lahko s pomočjo enega neorientabilnega ročaja spremenimo v tri ločene neorientabilne ročaje. Od tod sledi $M \cong nP$.

Opomba. $P \# T \cong 3P$.