אינטרפלציית ספליין קובי Cubic Spline

מטרות העבודה:

1. להכיר את עיקרון הקירוב הפולינומיאלי בחלקים ובפרט את שיטת הספליין קובי ואת הרציונל שלה.
2. להכיר את הגדרת ספליין קובי אינטרפולטורי כולל זה הטבעי ואת משפט הקיום והיחידות שלו.
3. להציג את האלגוריתם למציאת ספליין קובי אינטרפולטורי טבעי.
4. יישום ב- matlab של האלגוריתם למציאת ספליין קובי אינטרפולטורי טבעי .

רקע

1. הוכחנו בהרצאה כי בהינתן $n+1$ ערכים של פונקציה $f(x)$ בנקודות $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$, אזי קיים פולינום אינטרפולציה יחיד $L_n(x)$ (ממעלה $n \ge$) המקרב את $f(x)$ בקטע $[a,b]$ ומקיים את תכונות האינטרפולציה $f(x_k) = L_n(x_k)$ לכל $k = 0,1,\cdots,n$.
2. שיטה זו של קירוב מתאימה במקרים רבים. חסרונה נעוץ בעובדה שלפולינום מסדר גבוה אופי תנודתי (בגרף פולינום ממעלה $n+1$ מופיעות n "תנודות") ללא קשר לפונקציה אותה הוא מקרב! גישה אלטרנטיבית לקירוב ע"י פונקציות אינטרפולציה פולינומיאלית הנמנעת מפולינומים ממעלה גבוהה, מתקבלת ע"י חלוקת הקטע לאוסף של תתי קטעים ובניית פולינום אינטרפולציה $S(x)$ לפי קטעים המוגדרים באמצעות נק' האינטרפולציה.
יתרונה של הגדרה זו שהיא מאפשרת שימוש בפולינומים ממעלה נמוכה בכל תת קטע והקטנה של התנודתיות.
קירוב ע"י פונקציות מהצורה הנ"ל נקרא <u>קירוב פולינומיאלי בחלקים</u> או <u>ספליין</u>. (ספליין הינו סרגל גמיש ששימש בעבר לשרטוט עקומים)
3. הסוג הפשוט ביותר של קירוב פולינומיאלי בחלקים נקרא <u>ספליין לינארי</u> והוא מוגדר באמצעות הגדרת פונקציה לינארית בחלקים בין כל שתי נקודות אינטרפולציה עוקבות. קירוב כזה מבטיח רציפות אך לא גזירות (יש "חוד" בנקודת מפגש בין כל שני קוים ישרים) על מנת להבטיח גם גזירות מסדר 1 ניתן להגדיר באופן רציף וגזיר פרבולות בין כל שתי נקודות עוקבות וזה כבר <u>ספליין ריבועי</u> . בעיות רבות בעולם ניתנות למידול באמצעות משוואות דיפרנציאליות מסדר שני (משוואת חום, משוואת גלים , משוואות פואסון, לפלס ועוד) ששם נדרשת בנוסף גזירות מסדר 2 ולכן הסוג הנפוץ ביותר של ספליין הוא מסדר 3 – הנקרא **<u>ספליין קובי</u> (Cubic Spline)** המוגדר בכל תת קטע $\left[x_j, x_{j+1}\right], j = 0,1,\cdots,n-1$ באמצעות פולינומים ממעלה $3 \ge$ ומבטיח רציפות וגזירות מסדר ראשון ושני .

הנחיות לעבודה:

1. הציגו את ההגדרה של **<u>אינטרפולטור ספליין קובי</u>** $S(x)$ המקרב את $f(x)$ ביחס לנקודות $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ואת התנאים שהוא צריך לקיים על מנת שתובטח רציפות וגזירות מסדר ראשון ושני.

2. נתונה הפונקציה בחלקים:

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x) = 1 - \dfrac{7}{12}(x-1) + \dfrac{1}{12}(x-1)^2; & 1 \le x \le 2 \\ s_2(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}(x-2) + \dfrac{1}{4}(x-2)^2 - \dfrac{1}{12}(x-2)^3; & 2 \le x \le 3 \\ s_3(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12}(x-3); & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

הראו כי $S(x)$ מקיימת את הגדרת אינטרפולטור ספליין קובי עבור $f(x)=\frac{1}{x}$ ביחס לנקודות $x_0=1, x_1=2, x_2=3, x_3=4$.

3. ההגדרה בסעיף 1 מאפשרת לקבל למעשה אינסוף פתרונות (יש 2 דרגות חופש)- הסבירו מדוע. (השוו בין מספר הפרמטרים הנדרשים לחישוב $S(x)$ כספליין ממעלה 3 ובין מספר המשוואות הנובעות מהגדרת התנאים על רציפות וגזירות מסדר 1 ו-2 של $S(x)$).
4. על מנת להבטיח יחידות $S(x)$ מגדירים 2 תנאים נוספים באופן המלאכותי הבא $S''(x_0)=S''(x_n)=0$. ספליין קובי אינטרפולטורי המקיים בנוסף תנאים אלו נקרא <u>ספליין טבעי</u>.
5. הוכיחו כי <u>קיים</u> אינטרפולטור ספליין קובי טבעי <u>יחיד</u> $S(x)$ המקרב את $f(x)$ ביחס לנקודות $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ המוגדר בכל תת קטע $[x_j, x_{j+1}],\ j=0,1,\cdots,n-1$ באמצעות פולינום ממעלה 3 מהצורה $s_j(x)=a_j+b_j\cdot(x-x_j)+c_j\cdot(x-x_j)^2+d_j\cdot(x-x_j)^3$

<u>הערה:</u> בהוכחת היחידות, ניתן להשתמש בטענת העזר הבאה:

מטריצה ריבועית בעלת אלכסון שולט לחלוטין (כזכור, מטריצה המקיימת $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n}|a_{ij}|$) היא מטריצה הפיכה.

6. הציגו את האלגוריתם למציאת אינטרפולטור ספליין קובי טבעי המקרב פונקציה נתונה $f(x)$ (קלט) הבנוי על $n+1$ נקודות אינטרפולציה נתונות בקטע $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

7. כתבו תוכנית MATLAB אשר:
מקרבת פונקציה נתונה $f(x)$ (קלט) בקטע $[a,b]$ (קלט) באמצעות ספליין קובי אינטרפולטורי טבעי $S(x)$ הבנוי על $n+1$ נקודות אינטרפולציה שוות מרחק בקטע:
$$e_k=a+\frac{(b-a)k}{n},\ k=0,1,\cdots,n$$
התכנית:
א. תיישם את האלגוריתם עבור כל n נתון (קלט).
ב. תציג את פונקציית הספליין קובי המתאימה $S(x)$.
ג. תחשב את השגיאה היחסית בכל מקרה בנקודה נתונה $x=c$ (קלט)
ד. תציג את הייצוג הגרפי של $f(x)$ למול פונקציית הספליין $S(x)$ בקטע $[a,b]$.
יש להציג כל גרף בצבע אחר.

יש להציג הרצה עבור מספר דוגמאות.

בהצלחה!