תרגיל בית 5 – פתרון מד"ר עם תנאי התחלה

שאלה 1 – פתרון מד"ר באמצעות פונקציות מובנות

בשאלה זו, יש לפתור את המשוואות הדיפרנציאליות בעזרת פונקציות מובנות בפייתון או במטלב, הפותרות בעזרת שיטת Runge-Kutta 45. במטלב זוהי הפונקציה ode45, בפייתון זו הפונקציה המיובאת מתוך ספריית scipy, שנקראת solve_ivp.

סעיף א – (חימום)

פתרו את המד"ר הבאה:

$$\dot{y} = y$$

עם תנאי התחלה: $y(0) = 1$, עבור הזמנים $t = 0 \dots 2$.

ציירו את התוצאה יחד עם הפתרון האנליטי $y(t) = e^t$ על גרף אחד.

סעיף ב – Lotka-Volterra

משוואות Lotka-Volterra מייצגות את גודל האוכלוסיות של טורף ונטרף, לדוגמה: שועלים וארנבות.
נסמן ב-$x(t)$ את כמות הארנבות, וב-$y(t)$ את כמות השועלים.

ככל שיש יותר ארנבות, כך אוכלוסיית השועלים תגדל, כי יהיה להם מה לאכול. אך כשאוכלוסיית השועלים גדלה, יותר שועלים אוכלים ארנבות, ואוכלוסיית הארנבות קטנה. כתוצאה מכך, לשועלים יש פחות מה לאכול, והאוכלוסיה שלהם קטנה, מה שמאפשר לאוכלוסיית הארנבות לפרוח שוב, וחוזר חלילה.

המשוואות המתארות את הדינמיקה הזו הן:

$$\dot{x} = ax - bxy$$

$$\dot{y} = -cy + dxy$$

פתרו את מערכת המשוואות המצומדות, עבור הפרמטרים:

$$a = 1.1\,, b = 0.4\,, c = 0.4\,, d = 0.1$$

ועבור תנאי התחלה: $x_0 = 10\,, y_0 = 10$, עבור הזמנים $t = 0 \dots 100$

ציירו שני גרפים:

א. גרפים של אוכלוסיית השועלים ואוכלוסיית הארנבות כפונקציה של הזמן (על גרף אחד).
ב. גרף של אוכלוסיית השועלים כפונקציה של אוכלוסיית הארנבות (בדומה למרחב הפאזה).

שאלה 2 – Pythagorean Three Body Problem

מערכת של שלושה כוכבים, הנעים בהשפעה כבידתית זה על זה, לא ניתנת לפתרון אנליטי, והמסלולים של הכוכבים יכולים להיות כאוטיים.

בעיית שלושת הגופים הפיתגוריים מתארת שלושה כוכבים (בדו מימד) המתחילים ממנוחה על קודקודיו של משולש פיתגורי, כאשר המסות שלהם שוות לאורך הצלע שמולם.

הכוכב עם המסה $m_1 = 5$ נמצא במיקום $(0,0)$.

הכוכב עם המסה $m_2 = 4$ נמצא במיקום $(3,0)$

הכוכב עם המסה $m_3 = 3$ נמצא במיקום $(0,4)$.

כל הכוכבים מתחילים ממנוחה, ממהירות 0. נגדיר את קבוע הכבידה להיות $G = 1$.

המשימה:

באמצעות שיטת Verlet-Stormer, מצאו את המסלולים של שלושת הכוכבים מזמן $t = 0$ ועד $t = 15$.
השתמשו ב-$h = 10^{-4}$.

ציירו את שלושת המסלולים על מישור xy, על גרף אחד.

הערות:

תזכורת: האלגוריתם בשיטת Verlet-Stormer הוא:

$$y_{i+1} = 2y_i + h^2 A(y_i) - y_{i-1}$$

כאשר המיקום y_0 נתון, והמיקום y_1 נקבע לפי שיטת אוילר: $y_1 = y_0 + hv_0$, (ואצלנו $v_0 = 0$).

משוואת התנועה בכיוון x עבור גוף m_1 היא:

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2\, \Delta x_{21}}{\left({\Delta x_{21}}^2 + {\Delta y_{21}}^2\right)^{3/2}} + \frac{m_3\, \Delta x_{31}}{\left({\Delta x_{31}}^2 + {\Delta y_{31}}^2\right)^{3/2}}$$

כאשר:

$$\Delta x_{ij} = \left(x_i - x_j\right)$$

וכנ״ל עבור $\ddot{y}_1$, אבל עם Δy במונה, ועבור הגופים האחרים.