

תרגיל בית 1 – אנליזה נומרית

שאלה 1

א. מצאו את פירוק LU של המטריצה $M = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ באופן ידני.

ב. חשבו (באופן ידני) בעזרת הפירוק שמצאתם את המטריצה ההופכית M^{-1} .

שאלה 2

א. כתבו במטלב / פייתון פונקציה המחשבת את פירוק LU של מטריצה תלת אלכסונית, במספר פעולות שהוא $O(n)$.

ב. צרו מטריצה תלת אלכסונית M בגודל 10×10 , שאיבריה הם -2 על האלכסון הראשי, ו-1 על שני האלכסונים המשניים.

הציגו גרף של הדטרמיננטה $\det(M - \lambda I)$ כפונקציה של λ בתחום $-4 \leq \lambda \leq 0$. את הדטרמיננטה יש לחשב בעזרת פירוק LU, באמצעות הפונקציה שכתבתם בסעיף א.

שאלה 3

א. הלך אקראי הולך על משטח של $N = 10$ נקודות. הוא מתחיל מנקודה n , וצועד ימינה בהסתברות $p = 0.55$, ושמאלה בהסתברות $q = 1 - p$. כאשר הוא מגיע לנקודה N (הימנית ביותר), הוא חוזר מיד לנקודה $N - 1$ (בלי לספור צעד נוסף). ציירו את מספר הצעדים הממוצע T_n שייקח להלך להגיע לנקודה 0, כפונקציה של הנקודה התחלתית n .

ב. כתבו סימולציית מונטה-קרלו של ההלך האקראי מסעיף א. בעזרת הסימולציה, מצאו את מספר הצעדים הממוצע T_n עד שהוא יגיע ל-0, עבור כל n . (עשו מספיק ריאליזציות לסימולציה, עד שנראה שהגעתם לממוצע יציב, פחות או יותר). ציירו את הפתרונות של שני הסעיפים על גרף אחד, ובדקו האם הפתרונות מתאימים.

הדרכה עבור סעיף א:

נוכל לכתוב נוסחת נסיגה עבור T_n :

$$T_n = q(T_{n-1} + 1) + p(T_{n+1} + 1)$$

ומכאן נוכל לקבל מערכת של $N - 1$ משוואות, מהצורה:

$$-qT_{n-1} + T_n - pT_{n+1} = 1$$

עם תנאי שפה $T_0 = 0, T_N = T_{N-1}$.

שימו לב: נקבל מטריצה עם הרבה אפסים, ויש להגדיר אותה כ-sparse.

בסעיף ב, עבור סימולציית מונטה-קרלו, ניתן להיעזר בפונקציה הבאה (הכתובה במטלב):

```
function t = random_walker_time(N, p, n)
    t = 0;
    while n>0
        t = t+1;
        if rand<p
            n = n+1;
        else
            n = n-1;
        end
        if n == N
            n = N-1;
        end
    end
end
```