תרגיל בית 3 – גזירה נומרית ובעיות יציבות

שאלה 1 – גזירה נומרית

מצאו נוסחה המחשבת נגזרת ראשונה עם שגיאה מסדר $O(h^4)$, העושה שימוש בנקודות:

$$f(x-2h)\,,f(x-h)\,,f(x+h)\,,f(x+2h)$$

שאלה 2 – שיטות לגזירה נומרית

בהרצאה למדתם שתי שיטות לחישוב הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x באופן נומרי:

שיטה א, לפי הגדרת הנגזרת:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+O(h)$$

שיטה ב, נגזרת סימטרית:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+O(h^2)$$

א. כתבו שתי פונקציות המחשבות נגזרת של פונקציה בנקודה מסוימת, על פי שתי השיטות שלמדתם בהרצאה. כל פונקציה מקבלת:

- פונקציה f
- נקודה x_0
- גודל h

ומחזירה את ערך הנגזרת $f'(x_0)$ בנקודה x_0, תוך שימוש ב-h שהתקבל.

ב. ודאו את נכונות הפונקציות שכתבתם: בחרו פונקציה ותחום כרצונכם, וציירו את הנגזרת שלה בתחום בשלושה דרכים: אנליטית, ובחישוב עם כל אחת מהפונקציות. ודאו שהתוצאות מתאימות.

שאלה 3 – מציאת h^* לשיטות הגזירה

נרצה למצוא נומרית את h האופטימלי עבור כל אחת מהשיטות. לשם כך, נצייר את השגיאה של כל אחת מהן. ניעזר בנגזרת של הפונקציה $f(x)=\sin(x)$ בנקודה $x=1$.

עבור כל אחת מהפונקציות שכתבתם בשאלה 2:

- בחרו הרבה ערכי h מסדרי גודל שונים (עד סדר גודל שקרוב לאי דיוק המכונה, $\epsilon_m \propto 10^{-16}$). כדאי לבחור אותם מ-logspace.
- עבור כל h, חשבו את הנגזרת של $f(x)=\sin(x)$ בנקודה $x=1$, תוך שימוש ב-h.
- חשבו את השגיאה – גודל ההפרש בין הפתרון הנומרי לפתרון האמיתי, עבור כל h.
- ציירו את השגיאה כפונקציה של h, בסקאלת loglog. מה סדר הגודל של h^* האופטימלי?

שאלה 4 – בעיות יציבות

בהרצאה ראיתם שהמספר $\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ מקיים את נוסחת הרקורסיה: $\phi^n=\phi^{n-2}-\phi^{n-1}$.

א. כתבו פונקציה שמקבלת n ומחזירה את ϕ^n, כאשר החישוב נעשה באופן רקורסיבי. (ניתן גם להחזיר סדרה של ϕ^n, כלומר מערך של $\phi^n \dots \phi^0$, אם זה יותר נוח לכם).

ב. ציירו גרף של ϕ^n כפונקציה של n, כאשר בגרף מוצגים הפתרון הרקורסיבי והפתרון המדויק. הראו שבשלב מסוים, הפתרון הרקורסיבי מתחיל לסטות בצורה משמעותית מהפתרון המדויק. מומלץ להציג את ציר y בסקאלה לוגריתמית.