תרגיל בית 9 – מד"ח – דיפוזיה ושרדינגר

שאלה 1 – משוואת הדיפוזיה

מוט באורך $L = 1$ עם מקדם דיפוזיה תרמית $D = 0.1$ מתחיל כאשר חציו הימני בטמפרטורה $T = 1$ וחצי השמאלי בטמפרטורה $T = 0$. הבעיה היא חד מימדית: החום זורם רק ימינה ושמאלה. נרצה למצוא את הטמפרטורה לאורך המוט לאורך הזמן $t = 0 \dots 2$.

פתרו את הבעיה (כלומר: ציירו מפת צבע של הטמפרטורה לאורך המוט לפי הזמן), בעזרת שלוש שיטות:

א. שיטת FTCS.
ב. שיטת fully implicit.
ג. שיטת Crank-Nicholson.

בכל שיטה, פתרו את הבעיה עבור שלושה תנאי שפה שונים:

א. תנאי שפה דיריכלה (טמפרטורה 0 מחוץ למוט).
ב. תנאי שפה נוימן (התאפסות של הנגזרת בשפות, בקצוות המוט).
ג. תנאי שפה מחזוריים (המוט הוא בעצם מעגלי, ושני קצותיו מחוברים).

בכל השיטות, הגדירו $\Delta x = 0.01$. בשיטת FTCS, שימו לב לבחור Δt קטן מספיק כדי שהאלגוריתם יהיה יציב.

הערה: במערך התרגול יש דוגמה לפתרון הבעיה בעזרת שיטת Crank-Nicholson, עם שלושת תנאי השפה הללו.

שאלה 2 – משוואת שרדינגר

חלקיק קוונטי נמצא בקופסה ברוחב $2L$, בין $x \in [-L, L]$ (הפוטנציאל מחוץ לקופסה הוא אינסוף, ולכן תנאי השפה הם שפונקציית הגל בקצוות היא 0). בזמן $t = 0$, הוא מתואר ע"י חבילת גלים גאוסיאנית שמרכזה בנקודה x_0, ותנאי ההתחלה הם:

$$\psi_0(x) = Ae^{-(x-x_0)^2}e^{ikx}$$

בתוך הקופסה, ישנו פוטנציאל:

$$V(x) = V_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

פתרו את המשוואה בזמנים $t = 0 \dots 2$, בתוך הקופסה, עם הפרמטרים:

$$\hbar = m = 1 \, , x_0 = -5 \, , k = 2 \, , L = 20 \, , V_0 = 10$$

ציירו את צפיפות ההסתברות בכל מקום ובכל זמן $|\psi(x,t)|^2$ בעזרת מפת צבע.

תזכורת: את משוואת שרדינגר יש לפתור בעזרת שיטת Crank-Nicholson.

שאלה 3 – Operator Splitting

משוואת KPP-Fisher היא מודל לגידול בזמן של אוכלוסיה על פני שטח (חד מימדי, במקרה שלנו):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(1-u)$$

האיבר $ru(1-u)$ מתאר גידול לוגיסטי מקומי של האוכלוסיה, והאיבר $D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ מתאר התפשטות של האוכלוסיה על פני שטח (דיפוזיה).

נפתור את המשוואה בתחום $x \in [-10,10]$, עם תנאי שפה נוימן (התאפסות של הנגזרת בשפות), בזמנים $t = 0 \dots 10$, עם מקדם דיפוזיה $D = 2$ וקצב גידול $r = \frac{1}{2}$. תנאי ההתחלה הוא $u_0(x) = e^{-x^2}$.

פתרו את המשוואה באמצעות Operator Splitting, ועם $\Delta t = 0.1$, $\Delta x = 0.1$.

בכל צעד זמן, בצעו:

א. צעד בגודל Δt עבור איבר הדיפוזיה בשיטת Crank-Nicholson.
ב. צעד בגודל Δt עבור האיבר הלוגיסטי, בשיטת Euler לפתרון מד"ר.

ציירו את $u(x,t)$ באמצעות מפת צבע.