תרגיל בית 2 – אינטגרציה נומרית

שאלה 1

בתרגול למדנו איך לחשב באופן פורמלי את השגיאה עבור שיטת המלבנים השמאליים. הראו באותו אופן שהשגיאה של שיטת הטרפז היא $O(h^2)$.

שאלה 2

פתרו שאלה זו באופן ידני (בלי כתיבת קוד):

א. חשבו באופן נומרי את האינטגרל הבא:

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln^3(1+x)}{x^{1/3}}\,dx$$

הגדירו $h=\frac{1}{4}$, חשבו את השטח של ארבעת המקטעים, וסכמו אותם.

שימו לב: הפונקציה לא מוגדרת בנקודה $x=0$, ולכן עליכם להשתמש בשיטה שלמדתם עבור אינטגרל בו הפונקציה מתבדרת בגבולות (למרות שכאן היא מתכנסת).

ב. אם תרצו לשפר את דיוק האינטגרל בעזרת הקטנת h, מה ה-h החדש שתבחרו? מה תהיה הנקודה הראשונה (x הכי קטן) אותה תוסיפו לחישוב?

שאלה 3

כתבו (במחשב) שתי פונקציות לחישוב אינטגרלים: פונקציה אחת שמחשבת בשיטת הטרפז, ופונקציה שניה שמחשבת בשיטת Romberg, שמגדילה את הדיוק של שיטת הטרפז.

כל פונקציה מקבל כקלט את:

- פונקציה f
- גבול ימני a
- גבול שמאלי b
- מספר מקטעים N

ומחזירה את תוצאת האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$

שימו לב: בפונקציה שמחשבת בשיטת Romberg, בחישוב של S_{2N}, יש להשתמש בתוצאה של S_N, ולא לחשב מחדש את כל $2N$ הנקודות.

שאלה 4

נרצה להראות נומרית שהשגיאה של שיטת הטרפז הולכת כמו $O(h^2)$, והשגיאה של שיטת Romberg הולכת כמו $O(h^4)$.

ניעזר באינטגרל: $I = \int_0^1 e^x\,dx$

עבור כל אחת מהשיטות:

- חשבו (בעזרת הפונקציה שכתבתם בשאלה הקודמת) את האינטגרל עם מספר מקטעים N, כאשר N הוא 2^k, ו-$k \in \{2 \dots 8\}$.
- חשבו את השגיאה, שהיא ההפרש בין הפתרון הנומרי לפתרון האמיתי, עבור כל N.
- ציירו את השגיאה כפונקציה של N, בסקאלת loglog. (ציירו על אותו הגרף את השגיאה של שתי השיטות).
- הראו שמתקיים $Error = O(h^2)$, עבור שיטת הטרפז, או $O(h^4)$ עבור שיטת Romberg.

שאלה 5

בעזרת אחת מהפונקציות שכתבתם, חשבו את האינטגרל:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

כך שהשגיאה שתקבלו תהיה מסדר $O(10^{-6})$.

עשו זאת בשתי דרכים:

א. באמצעות קטיעת האינטגרל ב-x_1 גדול כלשהו, כלומר: חישוב האינטגרל $I = \int_0^{x_1} \frac{1}{1+x^4}\,dx$. בחרו את x_1 כך שהשגיאה תהיה בגודל שביקשנו.

ב. באמצעות חלוקת האינטגרל לשני תחומים, וביצוע החלפת משתנים $t = 1/x$.

בשתי הדרכים, בחרו את אחת משיטות האינטגרציה, ובהתאם לשיטה ולשגיאה הרצויה בחרו את h המתאים. הבחירה של h (ושל x_1) תתן לכם את מספר המקטעים הנדרשים, N, עבור כל דרך.

השוו את התוצאות לתוצאה האמיתית של האינטגרל.