

תרגיל בית 8 – מד"ח – משוואת הגלים

כל השאלות בתרגיל זה עוסקות במשוואת הגלים החד כיוונית בחד מימד:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = c \frac{\partial y}{\partial x}$$

ובכולן r מוגדר להיות: $r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$

שאלה 1 – אנליזת פון-נוימן (ידני)

בצעו אנליזת פון-נוימן לשיטת FTCS. הראו שהשיטה אינה יציבה עבור שום r .

תזכורת: שיטת FTCS היא:

$$y_j^{n+1} = y_j^n + \frac{1}{2} r (y_{j+1}^n - y_{j-1}^n)$$

שאלה 2 איברי דיסיפציה ודיספרסיה בשיטת אוילר (ידני)

מצאו את איברי הדיסיפציה והדיספרסיה (D, E) שמתקבלים בפתרון הנומרי בשיטת אוילר של משוואת הגלים החד כיוונית (והחד-מימדית).

הראו שעבור $r = 1$, איברי הדיסיפציה והדיספרסיה מתאפסים, ושיטת אוילר תתן במקרים האלה פתרון מדויק. הראו גם שעבור $r > 1$ איבר הדיסיפציה D הוא שלילי, מה שגורם להתבדרות.

הדרכה:

שני האגפים של המשוואה בשיטת אוילר כוללים קירוב נומרי לנגזרת ראשונה.

פתחו את שני האגפים עד סדר שלישי בפיתוח טיילור, ולאחר מכן המירו את הנגזרות הגבוהות לפי הזמן לנגזרות גבוהות לפי x , עד להגעה לצורה: $\dot{y} = cy' + Dy'' + Ey'''$.

ההמרה של הנגזרות הגבוהות תיעשה לפי ההגדרה האנליטית של משוואת הגלים, $\dot{y} = cy'$. מתוכה תוכלו לקבל ביטוי שמקשר גם בין \ddot{y} ל- y'' , ובין $\ddot{\ddot{y}}$ לבין y''' , כפי שלמדנו בהרצאה ובתרגול.

שאלה 3 – פתרון משוואת הגלים (קוד)

בשאלה זו נפתור את משוואת הגלים עבור גל מרובע.

טווח ערכי x הוא $-5 \leq x \leq 5$

טווח הזמנים הוא $t = 0 \dots 8$

נתון: $\Delta x = 0.01$, $c = 1$, תנאי ההתחלה הם: $y_0(x) = \begin{cases} 1 & x > 4 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

פתרו את המשוואה (כלומר: ציירו מפת צבע של $y(x, t)$ בכל התחום ולכל זמן), בשלוש שיטות:

- שיטת אוילר.
- שיטת Lax-Friedrichs.
- שיטת Lax-Wendroff.

בכל אחת מהשיטות, פתרו עם שלושה ערכי r שונים: $r = 0.5$, $r = 1$, $r = 1.01$. (את ערכי r תוכלו לשנות באמצעות שינוי Δt).