

תרגיל בית 11 – משוואות דיפרנציאליות סטוכסטיות

שאלה 1 – תהליך וינר

הריצו 1000 סימולציות של תהליך וינר, מזמן $t = 0$ ועד לזמן $t = 5$. עבור כל צעד זמן, חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של המיקום (על פני כל התהליכים). ציירו גרף של הממוצע כפונקציה של הזמן, ושל סטיית התקן כפונקציה של הזמן. הוסיפו לגרף גם ציור של \sqrt{t} כפונקציה של t , והראו כי הממוצע נשאר סביב 0, וסטיית התקן היא \sqrt{t} . היעזרו בפונקציות המובנות בפיתון ובמטלב np.mean ו- np.std. שימו לב: אם מכניסים לפונקציה מערך דו מימדי, יש להגדיר לה באיזה כיוון לבצע את המיצוע, על השורות או על העמודות, בעזרת axis=0 או axis=1 (בפיתון). תוכלו לקרוא על זה בתיעוד של הפונקציות ברשת.

שאלה 2 – שיטת אוילר-מרויאמה ונוסחת איטו

נתונה המשוואה הבאה:

$$dx = -bx \ln x \, dt + cx \, dw$$

תנאי ההתחלה הוא $x_0 = 1$

סעיף א

השתמשו בנוסחת Ito, ומצאו פתרון אנליטי של המשוואה.

הדרכה: הציבו $y(x, t) = e^{bt} \ln x$ בנוסחת איטו, בצעו אינטגרציה לפי הזמן, וחלצו את הנוסחה עבור x . שימו לב: באינטגרציה על $h(t)dw$, הפתרון הוא $\text{cumsum}(h(t) \cdot \Delta w)$. בנוסף, במהלך האינטגרציה על dy , שימו לב שתנאי ההתחלה המתאים ל- y הוא $y(0) = e^0 \ln x_0 = 0$.

סעיף ב

פתרו את המשוואה נומרית בשיטת אוילר-מרויאמה, וציירו את הפתרון הנומרי ואת הפתרון האנליטי (שמתקבלים עם אותם Δw) על אותו הגרף (ריאליזציה אחת).

הפרמטרים הם $b = c = 1$, תנאי ההתחלה הוא $x_0 = 1$, טווח הזמנים הוא $t = 0 \dots 10$.

הראו שהפתרונות מתקרבים כאשר מקטינים את Δt .