**מבוא ללוגיקה ב'**
**סמסטר ב' – 2026**
אביב הופמן

**תמסיר 11**

נגדיר את תנאי-האמת של פסוקים מכומתים — כגון '$(\forall x)(Fx \vee Gx)$' — באמצעות תנאי-האמת של תת-הנוסחאות שלהם. אבל תת-הנוסחה '$Fx \vee Gx$' היא פסוק פתוח: נוסחה הכוללת משתנה חופשי. לפסוק פתוח אין ערך-אמת לפי פירוש, כי פירוש כלל לא מתייחס מה עושים?

***

את הפסוק '$(\forall x)(Ex \rightarrow Gxx)$' נקרא כך: <u>כל דבר</u> x הוא כזה שאם ל-x יש את התכונה E, אז x עומד ביחס G לעצמו. כשקובעים תחום דיון (כחלק מפירוש) קובעים מה נכלל ב-'כל דבר': כל איבר של תחום הדיון. חלק הפסוק שמופיע אחרי הכמת הכולל $(\forall x)$, הפסוק הפתוח '$Ex \rightarrow Gxx$' מבטא תנאי העשוי להתקיים או שלא להתקיים <u>לגבי איברים ספציפיים של תחום הדיון</u>. הכמת הכולל קובע שתנאי זה אמור להתקיים לגבי <u>כל</u> איבר של תחום הדיון. כלומר, הפסוק אמיתי אם ורק אם כל איבר של תחום הדיון מספק את התנאי (התנאי שאם לאותו איבר יש את התכונה E אז הוא עומד ביחס G לעצמו).

כמתים ישיים מאפשרים לומר שלפחות איבר אחד של תחום הדיון מספק תנאי מסוים. למשל, הפסוק '$(\exists x)(Gxx \ \& \ Ex)$' אומר שלפחות איבר אחד של תחום הדיון גם עומד ביחס G לעצמו וגם בעל התכונה E. פסוק זה אמיתי ביחס לפירוש הבא (המוכר לנו מהתמסיר הקודם):

<u>פירוש 1</u>
תחום הדיון: הקבוצה $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
a: 1
b: 2
c: 3
d: 4
e: 5
E: $\{\langle 2\rangle, \langle 4\rangle\}$
G: $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 1\rangle, \langle 5, 2\rangle, \langle 5, 3\rangle, \langle 5, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle\}$
P: $\{\langle u_1, u_2, u_3\rangle$: הסכום של $u_1$, $u_2$ ו-$u_3$ הוא אי-זוגי$\}$.

למעשה, יש שני איברים בתחום הדיון — 2 ו- 4 — המספקים את '$Gxx$' ואת '$Ex$': כל אחד מהם גם גדול מעצמו או שווה לעצמו וגם זוגי. לעומת זאת, הפסוק '$(\exists x)(Ex \ \& \ Pxxx)$' שקרי בפירוש 1, כי אין אפילו איבר אחד **u** של תחום הדיון המספק את התנאי שמבטא הפסוק הפתוח '$Ex \ \& \ Pxxx$'. 1, 3, ו-5 לא מספקים את התנאי כי הם לא זוגיים. 2 ו-4 לא מספקים את התנאי כי לא 2 + 2 + 2 ולא 4 + 4 + 4 הם אי-זוגיים.

כדי להביא בחשבון את הערכים השונים שמשתנים עשויים לקבל כערכים, נשתמש ב**השמה למשתנים**. השמה למשתנים, ביחס לפירוש **I**, מתאימה לכל משתנה יחידאי ב-PL איבר של תחום הדיון. למשל, ביחס לפירוש 1, כל השמה למשתנים תתאים למשתנים היחידאיים ב-PL ערכים מהקבוצה $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

נשתמש בסימון $\mathbf{d_I}$ כדי לציין השמה למשתנים ביחס לפירוש I (נחשוב על '$\mathbf{d_I}$' כקיצור של 'מציין ביחס ל- **I**), ונשתמש בסימון $\mathbf{d_I(x)}$ כדי לסמן את <u>הערך ש-$\mathbf{d_I}$ מתאימה ל-**x**</u>. כך הביטויים הבאים:

$d_I(x) = 5$
$d_I(y) = 1$

$d_1(z) = 3$
$d_1(x_1) = 2$
$d_1(y_1) = 5$

אומרים שההשמה למשתנים $d_1$ מתאימה את הערך 5 ל-'x', את הערך 1 ל-'y', את הערך 3 ל-'z', את הערך 2 ל-'$x_1$', ואת הערך 5 ל-'$y_1$'. נקבע באופן שרירותי ש-$d_1$ מתאימה את הערך 3 לכל שאר המשתנים היחידאיים של PL.

- השמה למשתנים מתאימה ערכים <u>לכל</u> משתנה בשפה.
- השמה למשתנים עשויה להתאים את אותו ערך ליותר ממשתנה אחד. מאחר שבשפה PL יש אינסוף משתנים, זה יקרה בהכרח ביחס לפירושים שתחומי הדיון שלהם סופיים.
- השמה למשתנים לא נדרשת להתאים <u>כל</u> איבר של תחום הדיון למשתנה אחד לפחות.

בהגדרת תנאי-האמת של פסוקים של PL, נגדיר את התנאים שבהם השמה למשתנים **מספקת** פסוק או פסוק פתוח. להלן תנאי הסיפוק עבור נוסחה אטומית שבה כל המונחים היחידאיים הם משתנים:

אם **P** היא נוסחה אטומית מהצורה $\mathbf{Ax_1 \ldots x_n}$ (**A** פרדיקט **n**-מקומי), אז ההשמה למשתנים $\mathbf{d_I}$ מספקת את **P** בפירוש **I** אם ורק אם $\langle \mathbf{d_I(x_1), d_I(x_2), \ldots, d_I(x_n)} \rangle \in \mathbf{I(A)}$.

למשל, ההשמה למשתנים $\mathbf{d}_1$ מספקת את 'Gxy' בפירוש 1: הזג הסדור $\langle \mathbf{d}_1(x), \mathbf{d}_1(y) \rangle$ שהוא $\langle 1, 5 \rangle$, הוא איבר של $I_1(G)$. לעומת זאת, השמה למשתנים שמתאימה את 2 ל-'x' ואת 3 ל-'y' <u>לא</u> מספקת את 'Gxy'.

נדון בפסוק המכומת '$(\exists x)(\forall y)Gxy$'. כדי לבטא את התנאי שבו ההשמה למשתנים $\mathbf{d_I}$ מספקת את הפסוק, יש לדעת אם הנוסחה הפנימית '$(\forall y)Gxy$' מסתפקת על-ידי לפחות השמה למשתנים אחת הזהה לחלוטין להתאמה $\mathbf{d_I}$ <u>פרט לכך</u> שהיא עשויה להתאים ל-'x' ערך כלשהו (ובלבד שיהיה בתחום הדיון). אינטואיטיבית, אם לפחות איבר אחד x של תחום הדיון מספק את '$(\forall y)Gxy$', אז הפסוק '$(\exists x)(\forall y)Gxy$' מסתפק.

כדי לנסח את הרעיון האינטואיטיבי הזה באופן פורמלי, נציג את הסימון $\mathbf{d_I[u/x]}$ שפירושו: השמה למשתנים ביחס לפירוש **I** המתאימה לכל המשתנים פרט ל-x את אותם ערכים ש-$\mathbf{d_I}$ מתאימה להם, ו<u>מתאימה את הערך **u** ל-**x**</u>. $\mathbf{d_I[u/x]}$ נקרא <u>תיקון</u> של ההשמה $\mathbf{d_I}$. למשל, בהינתן ההשמה למשתנים $d_1$, התיקון $d_1[2/x]$ מבצע את ההתאמות הבאות:

$d_1[2/x](x) = 2$
$d_1[2/x](y) = 1$
$d_1[2/x](z) = 3$
$d_1[2/x](x_1) = 2$
$d_1[2/x](y_1) = 5$.

כמו-כן, $d_1[2/x]$ מתאימה את הערך 3 לכל שאר המשתנים היחידאיים ב-PL, כי כך $d_1$ עושה.

נזכור את שתי הנקודות הבאות לגבי תיקונים של ההשמה למשתנים $\mathbf{d_I}$:

- $\mathbf{d_I[u/x](x)}$ הוא **u**.
- לכל משתנה y השונה מ-x, ההשמה $\mathbf{d_I[u/x]}$ מתאימה ל-y את אותו איבר של תחום הדיון ש-$\mathbf{d_I}$ מתאימה ל-y; כלומר $\mathbf{d_I[u/x](y)}$ הוא $\mathbf{d_I(y)}$.

ולבסוף, סעיפי הסיפוק עבור נוסחאות מכומתות הם:

- אם **P** היא נוסחה מהצורה $(\forall \mathbf{x})\mathbf{Q}$, אז $\mathbf{d_I}$ מספקת את **P** בפירוש I אם ורק אם <u>כל</u> איבר **u** של תחום הדיון הוא כזה ש-$\mathbf{d_I[u/x]}$ מספקת את **Q** בפירוש **I**.
- אם **P** היא נוסחה מהצורה $(\exists \mathbf{x})\mathbf{Q}$, אז $\mathbf{d_I}$ מספקת את **P** בפירוש **I** אם ורק אם <u>יש לפחות איבר אחד</u> **u** של תחום הדיון כך ש-$\mathbf{d_I[u/x]}$ מספקת את **Q** בפירוש **I**.