לוגיקה בתל-חי
סמסטר ב' – 2026

אביב הופמן

<u>תמסיר 2</u>

התחביר של PL

אוצר הסימנים של PL כולל:

<u>אותיות פסוקיות</u> האותיות הלטיניות הגדולות 'A' עד 'Z', עם או בלי מספרים שלמים חיוביים בכתב תחתי:

$A, B, C, \ldots, Z$

$A_1, B_1, C_1, \ldots, Z_1$

<u>פרדיקטים</u> האותיות הלטיניות הגדולות 'A' עד 'Z', עם או בלי מספרים שלמים חיוביים בכתב תחתי, ואחריהן תג אחד או יותר:

$A', B', C', \ldots, Z'$

$A_1', B_1', C_1', \ldots, Z_1'$

<u>מונחים יחידאיים</u>

<u>קבועים יחידאיים</u> האותיות הלטיניות הקטנות 'a' עד 'v', עם או בלי מספרים שלמים חיוביים בכתב תחתי:

$a, b, c, \ldots, v$

$a_1, b_1, c_1, \ldots, v_1$

<u>משתנים יחידאיים</u> האותיות הלטיניות הקטנות 'w' עד 'z', עם או בלי מספרים שלמים חיוביים בכתב תחתי:

$w, x, y, z,$

w_1, x_1, y_1, z_1

<u>קשרים פסוקיים שהם פונקציות-אמת</u> $\sim, \&, \vee, \supset, \equiv$

<u>כמתים</u> $\forall, \exists$

<u>סימני פיסוק</u> ( )

האותיות הפסוקיות של PL הן בדיוק האותיות הפסוקיות של SL. לכן כל משפט ב-SL הוא גם משפט ב-PL.

העובדה שפרדיקט ב-PL הוא n-מקומי מסומנת על-ידי n תגים. כך A' הוא פרדיקט חד-מקומי ו-B'' דו-מקומי. באופן בלתי-פורמלי נאמץ מוסכמה המתירה להשמיט תגים כאשר ברור מההקשר אם הפרדיקט הוא חד-מקומי, דו-מקומי, וכן הלאה. כך נוכל לכתוב 'Ax' (או 'Ay' או 'Az') במקום'$A'x$', וכן הלאה.

<u>ביטוי</u> ב-PL הוא סדרה של סימנים (לא בהכרח שונים) מאוצר הסימנים של PL. הסדרות הבאות הן ביטויים ב-PL:

Lab

$(\forall\exists xy$

$(\forall w)(\exists y)Fwy$

$((a \supset B)$

הסדרות הבאות אינן ביטויים ב-PL:

$\{AbcB$

$(A \supset \pi)$

$(\forall x/W$

כל סדרה כוללת סימן שאינו שייך לאוצר הסימנים של PL: בהתאמה, '{', 'π', ו-'/'.

נשתמש באותיות המודגשות הגדולות '**P**', '**Q**', '**R**', ו- '**S**' כמטא-משתנים שהטווח שלהם הוא הביטויים של PL. נשתמש ב-'**a**' (מודגשת) כמטא-משתנה החל על קבועים יחידאיים של PL וב-'**x**' (מודגש) כמטא-משתנה החל על משתנים יחידאיים של PL.

<u>כמת</u> ביטוי ב-PL מהצורה (∀x) או (∃x). ביטוי מהצורה (∀x) הוא כמת **כולל** וביטוי מהצורה (∃x) הוא כמת ישי. נאמר שכמת <u>מכיל</u> משתנה. כך הכמתים '(∀y)' ו-'(∃y)' מכילים את המשתנה 'y' (והם 'כמתי-y'); והכמתים '(∀z)' ו-'(∃z)' מכילים את 'z' (והם 'כמתי-z').

<u>נוסחאות אטומיות</u> כל ביטוי ב-PL שהוא אות פסוקית (למשל, 'A') או פרדיקט n-מקומי שאחריו מופיעים n מונחים יחידאיים (למשל, 'Fab').

<u>נוסחה (נב"כ)</u>

1. כל נוסחה אטומית היא נוסחה.
2. אם **P** היא נוסחה, אז גם ~**P** היא נוסחה.
3. אם **P** ו- **Q** הן נוסחאות, אז גם (**P** ⊃ **Q**), (**P** ∨ **Q**), (**P** & **Q**) ו- (**P** ≡ **Q**) הן נוסחאות.
4. אם **P** היא נוסחה הכוללת לפחות מופע אחד של **x** ואינה כוללת כמת-x, אז (∀**x**)**P** וגם (∃**x**)**P** הן נוסחאות.
5. ביטוי הוא נוסחה רק אם ניתן ליצור אותו באמצעות החלות חוזרות של סעיפים 1–4 מספר סופי של פעמים.

<u>אופרטור</u> ביטוי של PL שהוא כמת או קשר פסוקי שהוא פונקציית-אמת.

<u>תת-נוסחה</u>

1. כל נוסחה היא תת-נוסחה של עצמה.
2. אם **P** היא נוסחה אטומית של PL, אז **P** אינה כוללת אופרטורים, ולכן אין לה אופרטור ראשי. ל-P אין תת-נוסחה מיידית.
3. אם **P** נוסחה מהצורה ~**Q**, אז הטילדה ('~') המקדימה את **Q** היא האופרטור הראשי של **P**, ו- **Q** היא התת-נוסחה המיידית של **P**.
4. אם **P** נוסחה מהצורה (**Q** ⊃ **R**), (**Q** ∨ **R**), (**Q** & **R**), או (**Q** ≡ **R**), אז הקשר הדו-מקומי שבין **Q** ל-**R** הוא האופרטור הראשי של **P**. **Q** ו-**R** הן התת-נוסחאות המיידיות של **P**.
5. אם **P** נוסחה מהצורה (∀**x**)**Q** או מהצורה (∃**x**)**Q**, אז הכמת המקדים את **Q** הוא האופרטור הראשי של **P**. **Q** היא התת-נוסחה המיידית של **P**.

תתי-הנוסחאות של נוסחה **P** הן:

- **P**
- התת-נוסחאות המיידיות של **P**
- התת-הנוסחאות של התת-נוסחאות המיידיות של **P**

להלן ארבע נוסחאות וכל תתי-הנוסחאות שלהן:

Rabz

- Rabz—אין אופרטור ראשי (נוסחה אטומית)

~(Rabz & Hxy)

- ~(Rabz & Hxy) אופרטור ראשי ~
- (Rabz & Hxy) — אופרטור ראשי &
- Rabz אין אופרטור ראשי
- Hxy אין אופרטור ראשי

(Hab ≡ (∀z)(Fz ⊃ Gza))

- (Hab ≡ (∀z)(Fz ⊃ Gza)) — אופרטור ראשי ≡
- Hab — אין אופרטור ראשי

- (∀z)(Fz ⊃ Gza) — אופרטור ראשי (∀z)
- (Fz ⊃ Gza) — אופרטור ראשי ⊃
- Fz — אין אופרטור ראשי
- Gza — אין אופרטור ראשי

(∀y)(Hay ∨ (Fy ⊃ Gya))

- (∀y)(Hay ∨ (Fy ⊃ Gya)), אופרטור ראשי (∀y)
- (Hay ∨ (Fy ⊃ Gya)), אופרטור ראשי ∨
- Hay — אין אופרטור ראשי
- (Fy ⊃ Gya) אופרטור ראשי ⊃
- Fy אין אופרטור ראשי
- Gya אין אופרטור ראשי

<u>תחום של כמת</u> תחום הכמת בנוסחה **P** הוא הכמת עצמו ותת-הנוסחה **Q** המופיעה מיד אחריו. דוגמאות:

- (∃y)(Fyz & Gzy) תת הנוסחה המופיעה אחרי הכמת (∃y) היא (Fyz & Gzy), ולכן תחום הכמת הוא הנוסחה (∃y)(Fyz & Gzy). כל המשתנים בנוסחה זו (כולל ה-y שאחרי ∃) נמצאים בתחום הכמת.
- בנוסחה Hx ⊃ (∀y)Fxy הנוסחה המופיעה מיד אחרי הכמת (∀y) היא Fxy, ולכן תחום הכמת הוא הנוסחה (∀y)Fxy. המופע הראשון של x ב-Hx אינו בתחום של (∀y).
- בנוסחה (∃w)(Gwa ⊃ Fa) ≡ Hw התחום של (∃w) אינו כולל את כל הנוסחה, כי הנוסחה המופיעה מיד אחרי הכמת היא Gwa ⊃ Fa. לכן, המופעים הראשון והשני של w בתחום הכמת, אך המופע השלישי, ב- Hw, אינו בתחום הכמת.

<u>מופע קשור של משתנה</u> מופע של משתנה x הנמצא בתחום של כמת-x.

<u>מופע חופשי של משתנה</u> מופע של משתנה שאינו קשור.

<u>פסוק של PL</u> נוסחה היא פסוק אם (אם ורק אם) אין בה מופע חופשי של משתנה.

הנוסחה Hx ⊃ (∀y)Fxy) אינה פסוק כי היא כוללת מופעים חופשיים של משתנים—שני המופעים של x בנוסחה הם חופשיים. המופע הראשון של x אינו בתחום של כמת ולכן הוא חופשי. המופע השני של x הוא בתחום של כמת, אבל לא בתחום של כמת-x, ולכן גם המופע השני של x הוא חופשי.

הנוסחה ~Hz ⊃ (∀z)Gz אינה פסוק כי המופע השלישי של z אינו בתחום של כמת-z. התחום של (∀z) מוגבל לתת-הנוסחה שהכמת הוא האופרטור הראשי שלה—(∀z)Gz.