מבוא ללוגיקה ב'
סמסטר ב' – 2026
אביב הופמן

תמסיר 8

המשפטים הבאים מורכבים מאלה שטיפלנו בהם עד כה. נשתמש במילון הבא:

תחום הדיון: קבוצת כל הספרים וכל בני האדם

Uxy: x מבין את y

Lxy: x מחבב את y

Axy: x מעריץ את y

Rxy: x קורא את y

Lx: x לוגיקן

Px: x אדם

p: *פרינקיפיה מתמטיקה*

a: *אליס בארץ הפלאות*

g: *לא רעב ולא אוהב*

מאחר ותחום הדיון לא כולל רק בני אדם, כשנרצה לומר משהו בפרט על בני אדם נשתמש בפרדיקט 'Px'.

- מישהו מבין את *פרינקיפיה מתמטיקה* ואת *אליס בארץ הפלאות*. (משפט-I)

<u>יש x כך ש</u>-[x אדם <u>וגם</u> (x מבין את *פרינקיפיה מתמטיקה* <u>וגם</u> x מבין את *אליס בארץ הפלאות*)].

(∃x)[Px & (Uxp & Uxa)]

- מישהו מבין את *פרינקיפיה מתמטיקה* ומישהו מבין את *אליס בארץ הפלאות*. (קוניונקציה של משפטי-I)

<u>יש x כך ש</u>-(x אדם <u>וגם</u> x מבין את *פרינקיפיה מתמטיקה*) <u>וגם</u> <u>יש x כך ש</u>-(x אדם <u>וגם</u> x מבין את *אליס בארץ הפלאות*.)

(∃x)(Px & Uxp) & (∃x)(Px & Uxa)

המשפט הראשון אומר שיש אדם <u>אחד</u> שמבין את שני הספרים, ואילו המשפט השני אומר שיש מישהו שמבין את *פרינקיפיה מתמטיקה* ויש מישהו שמבין את *אליס בארץ הפלאות* (זה לא בהכרח אותו אדם.)

- כל מי שקורא את *לא רעב ולא אוהב* גם מבין אותו וגם אוהב אותו. (משפט-A)

<u>כל y הוא כזה ש</u>-[<u>אם</u> (y אדם <u>וגם</u> y קורא את *לא רעב ולא אוהב*) <u>אז</u> (y מבין את *לא רעב ולא אוהב* <u>וגם</u> y אוהב את *לא רעב ולא אוהב*)].

(∀y)[(Py & Ryg) → (Uyg & Lyg)]

- אף אחד שקורא את *פרינקיפיה מתמטיקה* לא מבין אותו או אוהב אותו.(שלילת משפט-I)

<u>לא נכון ש</u>-<u>יש w כך ש</u>-[(w אדם <u>וגם</u> w קורא את *פרינקיפיה מתמטיקה*) <u>וגם</u> (w מבין את *פרינקיפיה מתמטיקה* <u>או</u> w אוהב את *פרינקיפיה מתמטיקה*)].

~(∃w)[(Pw & Rwp) & (Uwp ∨ Lwp)]

- כל מי שקורא את *לא רעב ולא אוהב* ואוהב אותו אינו מבין אף אחד שקורא אותו ואינו אוהב אותו. (משפט-E)

<u>כל z הוא כזה ש</u>-<u>אם</u> ([z הוא אדם <u>וגם</u> (z קורא את *לא רעב ולא אוהב* <u>וגם</u> z אוהב את *לא רעב ולא אוהב*)] <u>אז</u> <u>לא נכון ש</u>- <u>יש w כך ש</u>- ([w הוא אדם <u>וגם</u> w קורא את *לא רעב ולא אוהב*) <u>וגם</u> <u>לא נכון ש</u>- w אוהב את *לא רעב ולא אוהב*] <u>וגם</u> z מבין את w)]).

(∀z)([Pz & (Rzg & Lzg)] → ~(∃w)([(Pw & Rwg) & ~Lwg] & Uzw))

- כל מי שמבין גם את *פרינקיפיה מתמטיקה* וגם את *אליס בארץ הפלאות* נערץ על-ידי כל לוגיקן. (משפט-A)

כל x הוא כזה ש- אם ([x הוא אדם וגם (x מבין את *פרינקיפיה מתמטיקה* וגם x מבין את *אליס בארץ הפלאות*)
אז כל y הוא כזה ש- (אם y לוגיקן אז y מעריץ את x))

(∀x)([Px & (Uxp & Uxa)] → (∀y)(Ly → Ayx))

- אף מי שאינו לוגיקן אינו מבין את *פרינקיפיה מתמטיקה* או את *אליס בארץ הפלאות*. (שלילת משפט-I)

לא נכון ש- יש x כך ש- [x אדם וגם לא נכון ש- x לוגיקן וגם (x מבין את *פרינקיפיה מתמטיקה* או x מבין את *אליס בארץ הפלאות*)].

~(∃x)[(Px & ~Lx) & (Uxp ∨ Uxa)]

- יש לוגיקנים שמבינים אך אינם אוהבים את *פרינקיפיה מתמטיקה*, אך אין לוגיקנים שמבינים אך אינם אוהבים את *אליס בארץ הפלאות*. קוניונקציה של משפט-O ושל שלילת משפט-O.

יש z כך ש- [(z לוגיקן וגם z מבין את *פרינקיפיה מתמטיקה*) וגם לא נכון ש- z אוהב את *פרינקיפיה מתמטיקה*]
וגם לא נכון ש- יש y כך ש- [(y לוגיקן וגם y מבין את *אליס בארץ הפלאות*) וגם לא נכון ש- y אוהב את *אליס בארץ הפלאות*].

(∃z)[Lz & (Uzp & ~Lza)] & ~(∃y)[Ly & (Uya & ~Lya)]

- לא כולם מעריצים את אלה שמבינים את *פרינקיפיה מתמטיקה*, אך אלה שכן מעריצים גם את אלה שמבינים את *אליס בארץ הפלאות*. (קוניונקציה שהקוניונקט השמאלי שלה הוא שלילה של משפט-A, והקוניונקט הימני שלה הוא משפט-A).

לא נכון ש- כל w הוא כזה ש- [אם w אדם אז כל z הוא כזה ש-(אם (z אדם וגם z מבין את *פרינקיפיה מתמטיקה*)
אז w מעריץ את z)] ***וגם*** כל x הוא כזה ש- [אם [x אדם וגם כל y הוא כזה ש-[אם (y אדם וגם y מבין את
פרינקיפיה מתמטיקה) אז x מעריץ את y]] אז כל z הוא כזה ש- [אם (z אדם וגם z מבין את *אליס בארץ הפלאות*)
אז x מעריץ את z]].

~(∀w)[Pw → (∀z)((Pz & Uzp) → Awz)] **&**
(∀x)[[Px & (∀y)[(Py & Uyp) → Axy]] → (∀z)[(Pz & Uza) → Pxz]]

(הקשר הראשי **מודגש** לשם נוחות).

השפה PLE – לוגיקת פרדיקטים מורחבת

PLE מרחיבה אתPL: PLE כוללת את כל אוצר הסימנים של PL. בנוסף עליהם, PLE כוללת פרדיקט דו-מקומי המוגדר כפרדיקט הזהות, וסימני פונקציה (סימנים המשמשים לביטוי פונקציות).

- יש לפחות שני תפוחים בסל.

נוכל לפרש את אחד הפרדיקטים הדו-מקומיים של PL כמבטא את יחס הזהות. למשל, נוכל לפרש את 'Ixy' כ- 'x זהה ל-y'. נתבונן במילון הבא:

תחום הדיון: קבוצת הפריטים בסל פירות מסוים
Nxy: x נמצא בתוך y
Ixy: x זהה ל-y
Ax: x אדם
b: הסל

הפסוקים

(∃x)(Ax & Nxb)
(∃x)[(Ax & Nxb) & (∃y)(Ay & Nyb)]

אומרים שיש לפחות תפוח אחד בסל. הפסוק האחרון פשוט אומר את פעמיים. לעומת זאת, הפסוק:

$(\exists x)(\exists y)([(Ax \& Ay) \& (Nxb \& Nyb)] \& \sim Ixy)$

אומר שיש <u>לפחות</u> שני תפוחים בסל. ניתן לפרפרז פסוק-PL זה כך:

<u>יש x ויש y כך ש</u>-([(x תפוח <u>וגם</u> y תפוח) <u>וגם</u> (x בסל <u>וגם</u> y בסל)] <u>וגם</u> <u>לא נכון ש</u>-x זהה ל-y.

החלק האחרון במשפט אינו מיותר, כי שימוש במשתנים שונים אינו מחייב שיש יותר מדבר אחד מהסוג המצוין.

פרדיקט הזהות

במקום שאחד הפרדיקטים הדו-מקומיים של PL יבטא זהות, נוסיף פרדיקט דו-מקומי מיוחד, =, ונקבע שהוא תמיד יבטא את יחס הזהות. למשל, 'ab =' אומר ש-a זהה ל-b. במקום זה, מקובל לכתוב 'a = b',כלומר לכתוב מונח יחידאי אחד לפני הפרדיקט ואחד אחריו. כך נעשה. במקום 'ab =' נכתוב 'a = b' ובמקום '~ =ab' נכתוב '~(a = b)'. מכיוון שהפירוש של '=' קבוע, לא נכלול פירוש של פרדיקט זה במילון.

את 'יש לפחות שני תפוחים בסל' נצרין כך:

$(\exists x)(\exists y)([(Ax \& Ay) \& (Nxb \& Nyb)] \& (x = y))$

נוכל לומר שיש בדיוק תפוח אחד בסל. פרפראזה מתאימה היא:

<u>יש y כך ש</u>-[(y תפוח <u>וגם</u> y בסל) <u>וגם</u> <u>כל דבר z הוא כזה ש</u>-[<u>אם</u> (z תפוח <u>וגם</u> z בסל) <u>אז</u> z זהה ל-y]].

$(\exists y)[(Ay \& Nyb) \& (\forall z)[(Az \& Nzb) \rightarrow z = y]]$

זה אומר שיש לפחות תפוח אחד בסל, ושכל דבר שהוא תפוח ובסל הוא *אותו תפוח*.

- הדס לא קראה את *אליס בארץ הפלאות*, אך כל שאר התלמידים בכיתה קראו אותו.

אם נגביל את תחום הדיון לתלמידים בכיתה של הדס, 'h' יציין את הדס, ונפרש את 'Ax' כ-'x קרא את *אליס בארץ הפלאות*', נצרין טענה זו כך:

$\sim Ah \& (\forall y)[\sim(y = h) \rightarrow Ay]$

כאשר 'b' מציין את בני, נצרין את 'רק הדס ובני לא קראו את <u>אליס בארץ הפלאות</u>' כך:

$\sim(Ah \vee Ab) \& (\forall x)[\sim(x = h \vee x = b) \rightarrow Ax]$

פסוק זה אומר שלא הדס ולא בני קראו את *אליס בארץ הפלאות*, ושכל שאר התלמידים, כלומר כל אדם בכיתה שאינו זהה להדס ואינו זהה לבני, קרא אותו.

נשתמש בפרדיקט הזהות כדי להצרין את הפסוקים הבאים ב-PLE:

1. יש תפוחים ואגסים בסל.
2. האגס היחיד בסל רקוב.
3. יש לפחות שני תפוחים בסל.
4. יש שני תפוחים, ושני תפוחים בלבד, בסל.
5. יש לכל היותר שני אגסים בסל.
6. יש לפחות שלושה תפוחים בסל.

מילון:

תחום הדיון: קבוצת הפריטים בסל פירות מסוים

Ax: x תפוח

Nxy: x נמצא ב-y

Px: x אגס

Rx: x רקוב

b: הסל

אפשר לנסח מחדש את פסוק 1 כ-'יש לפחות תפוח אחד ולפחות אגס אחד בסל', ולהצרין אותו בלי פרדיקט הזהות:

$(\exists x)(\exists y)[(Ax \& Py) \& (Nxb \& Nyb)]$.

כשמבינים את פסוק 1 כאומר *שיש לפחות שני תפוחים ולפחות שני אגסים בסל*, יש להשתמש בפרדיקט הזהות:

$(\exists x)(\exists y)[((Ax \& Ay) \& (Nxb \& Nyb)) \& \sim(x = y)]$

$\&$

$(\exists x)(\exists y)[((Px \& Py) \& (Nxb \& Nyb)) \& \sim(x = y)]$

פסוק 2 אומר *שיש אגס אחד ואגס אחד בלבד בסל* (כלומר, יש בסל בדיוק אגס אחד), ושאותו אגס הוא רקוב:

$(\exists x)[((Px \& Nxb) \& Rx) \& (\forall y)[(Py \& Nyb) \rightarrow y = x]]$

פסוק 3 אומר *שיש לפחות שני תפוחים בסל* (לא *שיש בדיוק שניים*):

$(\exists x)(\exists y)[((Ax \& Ay) \& (Nxb \& Nyb)) \& \sim(x = y)]$

כדי להצרין את פסוק 4 נצרין את פסוק 3 ונוסיף סעיף האומר שאין תפוחים נוספים בסל:

$(\exists x)(\exists y)([((Ax \& Ay) \& (Nxb \& Nyb)) \& \sim(x = y)]$

$\&$

$(\forall z)[(Az \& Nzb) \rightarrow (z = x \vee z = y)])$

החלק הנוסף אומר 'וכל דבר שהוא תפוח ובסל הוא או x או y'.

פסוק 5 לא אומר *שיש אגסים בסל*, אלא *שיש לכל היותר שני אגסים בסל*. נוכל לנסח את זה ב-PLE: כל אגסים y, x ו-z בסל הם לכל היותר שניים; כלומר, או ש-x זהה ל-y או ש-x זהה ל-z, או ש-y זהה ל-z:

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[([(Px \& Py) \& Pz] \& [(Nxb \& Nyb) \& Nzb]) \rightarrow ((x = y \vee x = z) \vee y = z)]$

את פסוק 6 נצרין על בסיס הרעיון שמאחורי ההצרנה של פסוק 3:

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(([(Ax \& Ay) \& Az] \& [(Nxb \& Nyb) \& Nzb]) \& [(\sim(x = y) \& \sim(y = z) \& \sim(x = z)])$

***

נחזור לדון במספרים השלמים החיוביים.

מילון:

תחום הדיון: קבוצת המספרים השלמים החיוביים

Bxyz: x בין y ל-z

Lxy: x גדול מ-y

Sxy: x עוקב של y

Ex: x זוגי

Px: x ראשוני

a: 1

b: 2

c: 10

d: 14

1. אין מספר שלם חיובי גדול ביותר.
2. יש מספר שלם חיובי קטן ביותר יחיד.
3. 2 הוא המספר הראשוני הזוגי היחיד.
4. לכל מספר שלם חיובי יש עוקב אחד בדיוק.
5. 2 הוא המספר הראשוני היחיד שהעוקב שלו ראשוני.

ראינו שאפשר להצרין את פסוק 1 בלי להשתמש בפרדיקט הזהות: כדי לומר שאין מספר שלם חיובי גדול ביותר די לומר שלכל מספר שלם יש מספר שלם גדול ממנו: $(\forall x)(\exists y)Lyx$.

לעומת זאת, כדי להצרין את פסוק 2 יש להשתמש בפרדיקט הזהות. לומר שיש מספר שלם חיובי קטן ביותר זה לומר שיש מספר שלם שאינו גדול מאף מספר שלם: $(\exists x)\sim(\exists y)Lxy$. הבעיה היא שנוסחה זו אינה אומרת שיש מספר שלם חיובי קטן ביותר <u>יחיד</u>. נאמר זאת כך $(\exists x)(\forall y)(\sim(y = x) \rightarrow Lyx)$.

פסוק 3 אומר שהמספר 2 ראשוני וזוגי, ושכל שאר המספרים הראשוניים אינם זוגיים. נפרפרז ונצרין זאת כך:

2 ראשוני <u>וגם</u> 2 זוגי, <u>וגם</u> <u>כל z הוא כזה ש</u>- <u>אם</u> z ראשוני <u>וגם</u> z אינו זהה ל-2, <u>אז</u> z <u>לא</u> זוגי.

$(Pb \& Eb) \& (\forall z)[(Pz \& \sim(z = b) \rightarrow \sim Ez]$

זה שקול ל-

$(Pb \& Eb) \& (\forall z)[(Pz \& Ez) \rightarrow z = b]$

אפשר לפרפרז ולהצרין את פסוק 3 גם כך:

2 ראשוני <u>וגם</u> 2 זוגי, <u>וגם</u> <u>לא נכון ש</u>-<u>יש z כך ש</u>- z ראשוני <u>וגם</u> z זוגי, <u>וגם</u> z אינו זהה ל-2.

$(Pb \& Eb) \& \sim(\exists z)[(Pz \& Ez) \& \sim(z = b)]$

את פסוק 4 ניתן להצרין כך:

$(\forall x)(\exists y)[Syx \& (\forall z)(Szx \rightarrow z = y)]$

פסוק זה אומר שלכל מספר שלם חיובי x יש עוקב y, ושכל מספר שלם שהוא עוקב של x זהה ל-y, כלומר שלכל מספר שלם חיובי יש עוקב אחד בדיוק.

את פסוק 5, ניתן לפרפרז כקוניונקציה (הדגשתי את האופרטור הראשי):

(2 הוא ראשוני <u>וגם</u> <u>יש x כך ש</u>- [(x הוא העוקב של 2 <u>וגם</u> <u>כל y הוא כזה ש</u>- (<u>אם</u> y הוא העוקב של 2 <u>אז</u> (y = x)) <u>וגם</u> x ראשוני]) **<u>וגם</u>** <u>כל x וכל y</u> הם כאלה ש-[(<u>אם</u> x הוא העוקב של y <u>וגם</u> ראשוני <u>וגם</u> <u>לא נכון</u> <u>ש</u>- (y = b)) <u>אז</u> <u>לא נכון ש</u>- x ראשוני]

את הקוניונקט הראשון נצרין כך:

$Pb \& (\exists x)[(Sxb \& (\forall y)(Syb \rightarrow y = x)) \& Px]$

את הקוניונקט השני נצרין כך:

$(\forall x)(\forall y)[(Sxy \& (Py \& \sim(y = b))) \rightarrow \sim Px]$

בצירוף הקוניונקטים נקבל:

$(Pb \& (\exists x)[(Sxb \& (\forall y)(Syb \rightarrow y = x)) \& Px]) \& (\forall x)(\forall y)[(Sxy \& (Py \& \sim(y = b))) \rightarrow \sim Px]$