מבוא ללוגיקה ב'
סמסטר ב' – 2026
אביב הופמן

תמסיר 9

המבנה של תיאורים מיידעים (ביטויים כמו 'המצביא הרומי שניצח את פומפיוס') אינו מיוצג ב-*PL*. נתבונן, לדוגמה, בטיעון **התקף** הבא:

המצביא הרומי שניצח את פומפיוס פלש הן לגאליה והן לגרמניה. לכן פומפיוס נוצח על-ידי מישהו שפלש הן לגאליה והן לגרמניה.

הצרנה ב-*PL* אינה מניבה טיעון תקף:

תחום הדיון: קבוצת בני האדם והמדינות
Ixy: x פלש ל-y
Dxy: x הביס את y
Rx: x מצביא רומי
r: המצביא הרומי שניצח את פומפיוס
p: פומפיוס
g: גאליה
e: גרמניה

התייחסות אל התיאור המיידע 'המצביא הרומי שניצח את פומפיוס' כאל יחידה r שאינה ניתנת לניתוח ופרפראזה של המסקנה כ-<u>יש x כך ש</u>-[x ניצח את פומפיוס <u>וגם</u> x פלש לגאליה <u>וגם</u> x פלש לגרמניה)] מניבות את ההצרנה הבאה:

Irg & Ire

(∃x)[Dxp & (Ixg & Ixe)]

טיעון זה ב-*PL* אינו תקף: ההנחה אומרת רק שהדבר שמצוין על-ידי 'r' פלש הן לגאליה והן לגרמניה; היא לא אומרת שדבר זה ניצח את פומפיוס, כפי שהמסקנה טוענת. לעומת זאת, באמצעות פרדיקט הזהות נוכל לשקף את המבנה של תיאורים מיידעים ב-*PLE*. נפרפרז את ההנחה כך:

<u>יש x כך ש</u>-([[x מצביא רומי <u>וגם</u> x ניצח את פומפיוס) <u>וגם</u> <u>כל y הוא כזה ש</u>-[<u>אם</u> (y מצביא רומי <u>וגם</u> y ניצח את פומפיוס) <u>אז</u> y= x]] <u>וגם</u> (x פלש לגאליה <u>וגם</u> x פלש לגרמניה)].

נצרין את ההנחה כך:

(∃x)[[(Rx & Dxp) & (∀y)[(Ry & Dyp) → y = x]] & (Ixg & Ixe)]

אפשר להראות שהמסקנה (∃x)[Dxp & (Ixg & Ixe)] אכן נובעת מהנחה זו.

הצרנת תיאור מיידע כטענת קיום יחיד — יש דבר אחד בדיוק מסוג כזה וכזה — מאפשרת להצרין תיאורים מיידעים בעברית שאינם מציינים דבר. כשתחום הדיון הוא בני האדם, ונשתמש ב-'Dxy' עבור 'x בת של y', ב-'Bx' עבור 'x היא ביוכימאית', וב-'j' כדי לציין את יונתן, נוכל להצרין את 'בתו היחידה של יונתן היא ביוכימאית' כך: (∃x)[(Dxj & (∀y)(Dyj → y = x)) & Bx]. אם ליונתן אין בת, או שיש לו יותר מבת אחת, או שיש לו בת יחידה אבל היא אינה ביוכימאית, הפסוק של *PLE* <u>שקרי</u>, לא חסר משמעות או חסר ערך-אמת.

תכונות של יחסים

ליחס הזהות יש שלוש תכונות מיוחדות:

(1) **טרנזיטיביות**. אם אובייקט x זהה לאובייקט y, ו-y זהה לאובייקט z, אז x זהה ל-z. זהות היא טרנזיטיבית: (∀x)(∀y)(∀z)[(x = y & y = z) → x = z]. הפרדיקטים הבאים מבטאים יחסים טרנזיטיביים:

x גדול מ-y, x גבוה מ-y, x הוא אב קדמון של y, x כבד מ-y, x התרחש לפני y

לעומת זאת, 'x חבר של y' לא מבטא יחס טרנזיטיבי. הפסוק הבא אומר ש-A הוא יחס טרנזיטיבי:
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Axy \ \& \ Ayz) \rightarrow Axz]$.

(2) **סימטריה**. אם אובייקט x זהה לאובייקט y, אז y זהה ל-x. הפסוק הבא אומר ש-A הוא יחס סימטרי:
$(\forall x)(\forall y)(Axy \rightarrow Ayx)$.

הפרדיקטים הבאים מבטאים יחסים סימטריים: x הוא אח או אחות של y, x הוא חבר לכיתה של y, x הוא קרוב משפחה של y, ל-x יש אותו אב שיש ל-y. שימו לב ש-'x היא אחות של y' ו-'x אוהב את y' לא מבטאים יחסים סימטריים.

(3) **רפלקסיביות**. יחס הוא רפלקסיבי אם ורק אם כל אובייקט בתחום הדיון עומד ביחס זה לעצמו. הפסוק הבא אומר ש-A הוא יחס רפלקסיבי: $(\forall x)Axx$. זהות היא יחס רפלקסיבי.

בתחום דיון בלתי מוגבל קשה למצוא יחסים רפלקסיביים. למשל, הנוסחאות הבאות לא מבטאות יחס רפלקסיבי בתחום דיון בלתי מוגבל:

x בן אותו גיל כמו y, x באותו גובה כמו y, x נמצא באותו מקום כמו y

למשל, מאחר ולמספר 17 אין גיל ואין גובה, 17 אינו בן אותו גיל כמו עצמו ואינו באותו גובה כמו עצמו.

פונקציות

פונקציה היא פעולה שמקבלת איבר אחד או יותר מקבוצה נתונה כארגומנטים ומחזירה ערך יחיד. חיבור, חיסור, כפל, ריבוע ועוקב הם פונקציות אריתמטיות. כל אחת מהן מחזירה, עבור כל מספר או זוג מספרים, ערך יחיד. פונקציית החיבור מקבלת זוג מספרים כארגומנטים ומחזירה את סכומם; פונקציית הכפל מקבלת זוג מספרים ומחזירה את מכפלתם; חיסור מחזירה, עבור כל זוג מספרים, את המספר הראשון פחות השני. פונקציית הריבוע מחזירה, עבור כל מספר, את מכפלתו בעצמו; פונקציית העוקב מחזירה, עבור כל מספר שלם חיובי **n**, את המספר השלם **n** + 1. לא כל הפונקציות הן אריתמטיות. בלוגיקה עוסקים בפונקציות-אמת (המיוצגות על-ידי טבלאות אמת). שלילה היא פונקציה של ארגומנט אחד המחזירה F כשהיא מקבלת T כארגומנט, ומחזירה T כשהיא מקבלת Fכארגומנט. קוניונקציה, דיסיונקציה, התנאי המטריאלי והתנאי המטריאלי הכפול הן פונקציות שמקבלות שני ארגומנטים (שני ערכי-אמת) ומחזירות ערך-אמת יחיד.

ב-*PLE* נשתמש באותיות לטיניות קטנות נטויות *a-z*, עם או בלי תת-מספר שלם חיובי, ואחריהן גרש אחד או יותר, כדי להצרין פונקציות. כאשר **n** הוא מספר הגרשיים לאחר סימן הפונקציה, הפונקציה המתאימה מקבלת **n** ארגומנטים. לסימנים אלה נקרא 'סימני פונקציה'.

המילון הבא מתאים את פונקציית העוקב ל-f':
תחום הדיון: קבוצת המספרים השלמים החיוביים
$f'(x)$: העוקב של x
Ex: x זוגי
Ox: x אי-זוגי
a: 2
b: 3
$H''(x, y)$: הסכום של x ו-y

Ob אומר ש-3 אי-זוגי.
$Of'(a)$ אומר שהעוקב של 2 הוא אי-זוגי.
$f'(a) = b$ אומר שהעוקב של 2 הוא 3.

$(\exists x)Of'(x)$ & $(\exists x)Ef'(x)$ אומר שיש מספר שלם חיובי שהעוקב שלו אי-זוגי, ויש מספר שלם חיובי שהעוקב שלו זוגי.

נצרין את 'העוקב של מספר זוגי הוא אי-זוגי'. צעד ראשון הוא הניסוח הכמו-עברי

$(\forall x)(Ex \rightarrow$ העוקב של x הוא אי-זוגי$)$

העוקב של x הוא $f'(x)$, ולכן ההצרנה המלאה היא $(\forall x)(Ex \rightarrow Of'(x))$.

הסכום של מספר זוגי ומספר אי-זוגי הוא אי-זוגי: $(\forall x)(\forall y)[(Ex \ \& \ Oy) \rightarrow Oh''(x, y)]$.

לקבוצת ההצרנות הבאה נשתמש במילון הבא:

תחום הדיון: קבוצת כל התאומים

$f(x)$: התאום של x

Bx: x קירח.

c: כרמל

h: הדס

j: יונתן

s: שמעון

שמעון הוא התאום של הדס: $s = f(h)$

יונתן הוא התאום של כרמל: $j = f(c)$

תאום הוא קירח אם ורק אם התאום שלו או שלה הוא קירח: $(\forall x)[Bx \leftrightarrow Bf(x)]$

לכמה תאומים קירחים יש תאומים שאינם קירחים: $(\exists x)[Bx \ \& \sim Bf(x)]$

הפסוק $(\forall x)(\forall y)[(\exists z)(z = f(x) \ \& \ z = f(y)) \rightarrow x = y]$ אומר, במעין עברית, שכל איברים x ו-y בתחום הדיון הם כאלה שאם יש z שהוא גם התאום של x וגם התאום של y, אז x ו-y זהים. במלים אחרות, איש אינו תאום של שני תאומים שונים.

לכל פונקציה יש שני מאפיינים:

1. פונקציה **n**-מקומית חייבת להתאים ערך אחד ויחיד <u>לכל</u> **n**-יה של ארגומנטים. (**n**-יה היא סדרה הכוללת **n** איברים.)

2. ערך של פונקציה עבור **n**-ית איברים של תחום דיון נתון חייב להיות בעצמו איבר של אותו תחום דיון.

- כשתחום הדיון הוא קבוצת המספרים השלמים, פעולת השורש הריבועי לא מקיימת את תנאי 1: ל-4 יש שני שורשים ריבועיים: 2 ו- 2–. פעולה זו גם לא מקיימת את תנאי (2), כי לא כל השורשים הריבועיים של מספרים שלמים הם מספרים שלמים.
- כשתחום הדיון הוא קבוצת המספרים השלמים החיוביים, פעולת החיסור לא מקיימת את תנאי (2), משום שכאשר y גדול מ-x, x פחות y אינו מספר שלם חיובי. חיסור כן מקיימת את תנאי (2) כאשר תחום הדיון הוא קבוצת כל המספרים השלמים-חיוביים, אפס <u>ושליליים</u>.
- כשתחום הדיון הוא קבוצת המספרים השלמים החיוביים, חילוק אינו מקיים את תנאי (2): 3 חלקי 9 זה 1/3, וזה לא מספר שלם חיובי. חילוק כן מקיים את תנאי (2) כאשר תחום הדיון הוא קבוצת המספרים הרציונליים החיוביים (מספרים שלמים חיוביים בתוספת מספרים הניתנים לביטוי כיחסים בין מספרים שלמים חיוביים).

ראינו שניתן להשתמש בסימני פונקציה כדי ליצור סוג חדש של מונח יחידאי (בנוסף לקבועים ולמשתנים של *PL*) נכנה מונחים חדשים אלה **מונחים מורכבים**. כלומר, מונחים מורכבים הם מהצורה $f(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n)$, כאשר f סימן פונקציה $\boldsymbol{n}$-מקומי ו- $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n$ מונחים יחידאיים.

דוגמאות למונחים מורכבים:

1. f(a, b)
2. h(a, b, c)
3. g(a)
4. f(b, b)
5. f(x, y)
6. f(a, y)
7. f(y, a)
8. g(x)
9. f(g(a), b)
10. f(a, g(x))

מונחים יחידאיים שאינם כוללים משתנים נקראים **מונחים סגורים**. למונחים הכוללים משתנים נקראים **מונחים פתוחים**. מונחים יחידאיים שאינם מורכבים (הקבועים היחידאיים והמשתנים היחידאיים) נקראים **פשוטים**. ברשימה למעלה, (4)-(1) סגורים, (8)-(5) פתוחים, (9) סגור, ו-(10) פתוח. ב-(9) וב-(10), אחד המונחים היחידאיים הוא בעצמו מונח מורכב. זה תקין: מונחים מורכבים הם יחידאיים ויכולים להופיע בכל מקום שבו קבוע יכול להופיע.

הביטויים הבאים הם נוסחאות של *PLE*:

1. F$a$$f$(x)
2. Ff(x)a
3. Ff(a)b
4. (∀x)F$a$$f$(x)
5. (∀x)(∃y)Fxf(y)

בדוגמאות אלה, 'F' הוא פרדיקט — לא סימן פונקציה — דו-מקומי. (1)-(2) הן נוסחאות של *PLE* אך הן לא פסוקים, כי x ב-'f(x)' אינו קשור. (3)-(5) הן פסוקים (ולכן נוסחאות) של *PLE*. (3) אומרת ש-f(a) עומד ביחס F ל-b. (4) אומרת שכל דבר x בתחום הדיון הוא כזה ש-a עומד ביחס F ל-f(x), כלומר לערך שהפונקציה f מתאימה ל-x. (5) אומרת שכל דבר x בתחום הדיון הוא כזה שיש דבר y כך ש-x עומד ביחס F ל-f(y). כל דוגמה מכילה מונח יחידאי מורכב, וכולן חוץ מ-(3) מכילות מונח יחידאי מורכב פתוח.

מילון:

תחום הדיון: קבוצת המספרים השלמים החיוביים

Ox: x אי-זוגי

Ex: x זוגי

Px: x ראשוני

Gxy: x גדול מ-y

h(x,y): הסכום של x ו-y

f(x): העוקב של x

a: 1

b: 2

(∀x)[Ex → Of(x)] אומר שכל מספר שלם חיובי הוא כזה שאם הוא זוגי אז העוקב שלו אי-זוגי.

(∀x)[Ex → Ef(f(x))] אומר שכל מספר שלם חיובי הוא כזה שאם הוא זוגי אז העוקב של העוקב שלו זוגי.

(∀x)(∀y)[(Ex & Ey) → Eh(x, y)] ניתן לקריאה במעין-עברית כך: '<u>כל x וכל y הם כאלה ש</u>-[<u>אם</u> (x זוגי <u>וגם</u> y זוגי) <u>אז</u> הסכום של x ו-y זוגי].

(∀x)(∀y)[Gh(x, y) x & Gh(x, y) y] אומר שעבור כל מספרים שלמים חיוביים x ו-y, הסכום של x ו-y גדול מ-x, והסכום של x ו-y גדול מ-y.

(∃x)Gx*h*(a,b) אומר שיש מספר שלם חיובי x, שהוא גדול מהסכום של 1 ו-2, כלומר, יש מספר שלם חיובי שהוא גדול מ-3.