



# Análisis de fila de espera a través de teoría de colas en la taquilla de un cine

**Fabián de J Présiga D., Nicoll Albarracín, Sofía García, Tatiana Ruiz**

**Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central  
Bogotá, Colombia**

## Resumen

El presente trabajo tiene como principal objetivo evidenciar la aplicación del modelo de Teoría de Colas, y el asertividad en la realización de las simulaciones, mediante un estudio realizado a un sistema de atención al cliente en un cine para la compra de boletas, el cual está conformado por una fila de espera y dos servidores encargados de atender a los clientes.

**Palabras clave:** modelo; sistema; colas

## Abstract

*The main objective of this paper is to demonstrate the application of the Queuing Theory model, and the assertiveness in the simulations, through a study of a customer service system in a movie theater for the purchase of tickets, which consists of a waiting line and two servers in charge of serving customers.*

**Keywords:** models; system; queuing

## 1. Introducción

La gran mayoría de servicios que hoy en día requerimos y se utilizan están sujetos a un sistema de colas, este sistema es principalmente visto en los servicios ofrecidos en los Centros Comerciales, mercados, restaurantes, bancos, aeropuertos, y como es el caso de estudio, las salas de cine. Este método de generación de un sistema de colas tiende a traer consigo beneficios, uno de los principales es reducir los tiempos de espera de los clientes para recibir un servicio, además que

busca estrategias para que los tiempos de llegada y de salida sean proporcionales y así prestar una buena atención a sus clientes. Todo lo anterior lleva al modelo que se decidió desarrollar, el cual se basa en los tiempos de llegada y de atención al momento de comprar boletas en el cine ubicado en el Centro Comercial Paseo Villa del Rio, para así determinar si el sistema que presta el servicio de venta de taquilla está colapsado o mostrando un buen desempeño. Además de esto, se toma la experticia de las personas que se encuentran manejando las cajas, y la agilidad al momento de ingresar los datos en el sistema.

## **2. Problemática**

Este planteamiento del modelo nace, debido a que en varias visitas al centro comercial, se evidencia demasiada cola en el cine Royal Film, generando no solo poco lugar para transitar, sino también una molestia para los clientes que esperan entrar a ver una película, ya que los tiempos de espera se extienden lo suficiente como para alcanzar los tiempos establecidos para ver las películas, lo cual termina causando que se retiren del lugar sin llegar siquiera a comprar la boleta en taquilla.

## **3. Marco teórico**

### 3.1 Teoría de colas: Para (Render, et al., 2012)

El estudio de líneas de espera, llamado teoría de colas, es una de las técnicas de análisis cuantitativo más antiguas y que se utilizan con mayor frecuencia. Las líneas de espera son un suceso cotidiano, que afecta a las personas que van de compras a las tiendas de abarrotes, a cargar gasolina, a hacer depósitos bancarios, o bien, a quienes esperan en el teléfono a que conteste la primera operadora disponible para hacer su reservación en una aerolínea. Las colas, otro término de las líneas de espera, también podrían tomar la forma de máquinas que esperan a ser reparadas, camiones que esperan para descargar o aeroplanos formados en una pista que aguardan la autorización para despegar. Los tres componentes básicos de un proceso de colas son las llegadas, las instalaciones de servicio y la línea de espera real.

Se emplean los dos modelos básicos de la teoría de colas y se clasifican según (Anderson, et al., 2011) "la notación Kendall, el modelo de línea de espera de canal único con llegadas Poisson y tiempos de servicio exponenciales se clasifica como modelo M/M/1. El modelo de línea de espera de dos canales con llegadas Poisson y tiempos de servicio exponenciales se clasificaría como modelo M/M/2.

Se define como el modelo matemático que permite estudiar el comportamiento de las líneas de espera, las cuales se presentan cuando los clientes llegan a un lugar buscando el préstamo de un servicio usualmente realizado por un servidor. Provocando que, si el servidor no está disponible inmediatamente, el cliente decida esperar, este momento es cuando se forma la línea de espera. Este modelo tiene la potestad de representar cualquier trabajo en el que los clientes tengan que llegar a la espera por un servicio, y salir cuando finalmente este sea resuelto. Esto permite mode-

lar o simular cuánto va a ser el tiempo límite de espera por los clientes, o la cantidad de servidores máximos para que los servicios puedan ser prestados. Pero el principal problema que presenta este modelo es determinar exactamente la capacidad del servicio a prestar, la exactitud al momento de la llegada de los clientes además del tiempo de ejecución de los servicios. Finalmente ayuda a la toma de decisiones basándose en un previo estudio al servicio que se quiere mejorar para la recolección assertiva de los datos posteriores a esto permite saber si solo un servidor es suficiente para abastecer la demanda, o es necesario poner en funcionamiento más de dos servidores para que pueda ayudar a los clientes que llegan a la línea de espera. Estos cálculos varían dependiendo de la cantidad de servidores a desarrollar sea ( $M|M|1$ ) o ( $M|M|2$ ) esto nos garantiza encontrar los servidores apropiados a cada una de las probabilidades planteadas.

3.2 Las pruebas de Bondad de Ajuste dice (Martínez, 2012) "Estas pruebas permiten verificar que la población de la cual proviene una muestra tiene una distribución especificada o supuesta", además dice de las distribuciones de probabilidad que "Son todos los posibles valores que resultan de un experimento aleatorio, junto con la probabilidad asociada a cada valor".

3.3 Un sistema básico de colas lo describen (Hiller, et al., 2008).

En la figura 1 se muestra un sistema de colas típico en el cual los clientes llegan en forma individual para recibir alguna clase de servicio. Si un cliente no puede ser atendido de inmediato, entonces ese cliente forma una cola (fila de espera) hasta que lo atiendan. (La cola no incluye a los clientes que ya están siendo atendidos.) Uno o más servidores en la instalación de servicio son los que dan el servicio. Cada cliente es atendido en forma individual por uno de los servidores y luego se va.



Fig. 1 Modelo de básico de teoría de colas

3.4 Modelos aplicados al caso formulación de los sistemas de colas para un servidor ( $M/M/1$ )

$\lambda$  = Número de promedios de arribos

$\mu$  = Velocidad de servicio

$S$  = Número de servidores

$\rho$  = Factor de utilización del servicio (Probabilidad de que el sistema esté en uso)

$$\rho = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\rho_{(0)}$  = Porcentaje del tiempo de ocio

$$\rho_{(0)} = (1 - \rho) = (1 - \frac{\lambda}{\mu})$$

$L(s)$  = Número promedio de clientes o unidades del sistema  $L(s) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

$W(s)$  = Tiempo promedio que un cliente pasa dentro del sistema  $W(s) = \frac{1}{\mu - \lambda}$

$L(q)$  = Número promedio de clientes en la cola  $L(q) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \rho \times L$

$W(q)$  = Tiempo promedio que el cliente pasa en espera en la cola  $W(q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$

$(n)$  = Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema  $(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times \rho^{(0)}$

Formulación de los sistemas de colas para un servidor (M/M/S)

$\lambda$  = Número de promedios de arribos

$\mu$  = Velocidad de servicio

$S$  = Número de servidores

$\rho$  = Factor de utilización del servicio (Probabilidad de uso)  $\rho = \frac{\lambda}{\mu \times s}$

$\rho^{(0)}$  = Porcentaje del tiempo de ocio  $\rho^{(0)} = \left[ \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \right\} + \left\{ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \times \left( \frac{1}{1-\rho} \right) \right\} \right]^{-1}$

$L(s)$  = Número promedio de clientes o unidades del sistema  $L(s) = \frac{\lambda}{\mu} \times W(s)$

$W(s)$  = Tiempo promedio que pasa dentro del sistema  $W(s) = Wq + \frac{1}{\mu}$

$L(q)$  = Número promedio de clientes en la cola  $L(q) = \frac{\rho^{(0)} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^s \times \rho}{s! (1-\rho)^2}$

$W(q)$  = Tiempo promedio que pasa en espera en la cola  $W(q) = \frac{Lq}{\lambda}$

$P(n)$  = Probabilidad de  $n$  clientes en el sistema  $P(n) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! s^{n-s}} \times \rho^{(0)}$ ; para  $n > S$

$P(n) = \frac{\mu^n}{n!} \times \rho^{(0)}$ ; para  $0 < n < S$

## 4. Metodología

El caso de estudio se abordó por medio de los siguientes pasos:

4.1 Trabajo de campo para determinar el sistema que está fallando y la respectiva toma de los tiempos entre llegada y los de servicio.

4.2 Procesar la información anterior para determinar el tipo de distribución que presentan estos dos tiempos, utilizando el software Stat fit de Promodel y desarrollo de los métodos matemáticos, el software libre y el software Flexsim.

4.4 Contrastar los resultados de los tres modelos y Generar las conclusiones pertinentes de esta investigación.

## 5. Resultados

Con la información tabulada del tiempo de servicio de la caja como y el tiempo para la llegada de los clientes a la cola, se obtiene la siguiente información de entrada. La tabla número 1 muestra los tiempos entre llegadas y de servicio recopilados en el trabajo de campo.

Tabla 1. Información de los tiempos entre llegadas y de servicio.

Tiempo entre Llegadas (s)				Tiempo de Servicio (s)		
1	125	72	192	1	330	136
2	74	25	30	2	391	137
3	10	15	130	3	100	81
4	43	54	245	4	190	135
5	5	171	65	5	296	200
6	22	119	87	6	81	396
7	40	28	202	7	307	101
8	63	20	61	8	187	176
9	52	45	38	9	425	109
46	216	88	38	46	120	135
47	6	14	90	47	86	74
48	154	7	190	48	86	223
49	26	25	65	49	103	390
50	7	80	30	50	86	196

De esta información se puede determinar que el tiempo promedio de llegada de los clientes es de 73,3 segundos y el tiempo promedio de servicio es de 269,5 segundos; lo que evidencia el problema presente en las largas colas. Para poder utilizar esta información como entrada en el software Promodel y su herramienta Stat Fit, se promediaron los 150 datos. Los siguientes son los parámetros que se generaron para alimentar el modelo de simulación de FlexSim.

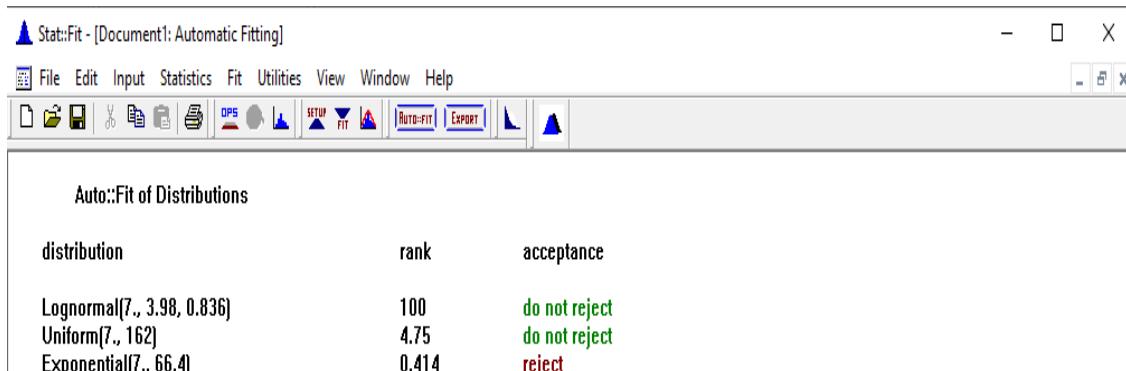


Fig. 2 Tipo de distribución de los tiempos entre llegadas

Esta figura (2) permite ver que los tiempos entre llegada se comportan como una Distribución Lognormal, con parámetros 7., 3,98. 0.836

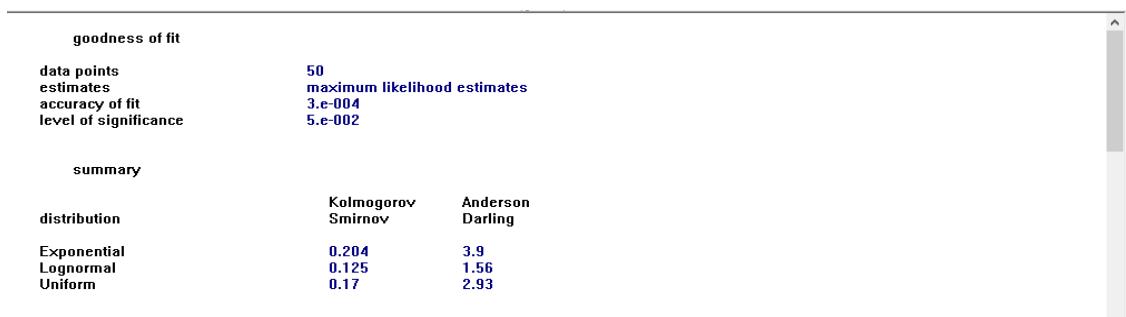


Fig. 3 Prueba de bondad de ajuste del tiempo entre arribos.

Los resultados de las pruebas de bondad de ajuste permiten evidenciar la robustez del modelo y apalancar los resultados del tipo de distribución obtenida. Al igual que para el tratamiento de los tiempos entre llegas, se procede con el tiempo de servicio del sistema de cines.

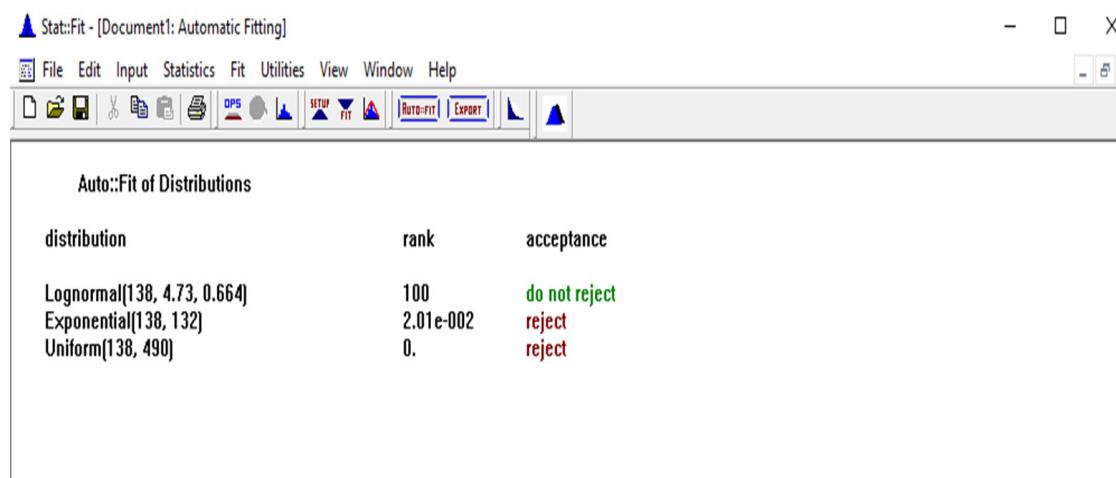


Fig. 4 Tipo de distribución de los tiempos de servicio.

La figura 4 muestra que los tiempos de servicio se comportan como una distribución Lognormal con parámetros 138, 4,73, 0,664.

goodness of fit			
data points	50		
estimates		maximum likelihood estimates	
accuracy of fit	3.e-004		
level of significance	5.e-002		
summary			
distribution	Kolmogorov Smirnov	Anderson Darling	
Exponential	0.216	4.97	
Lognormal	0.115	0.823	
Uniform	0.297	7.	

Fig. 5 Prueba de bondad de ajuste del tiempo de servicio.

Los resultados de las pruebas de bondad de ajuste determinan que los valores de entrada son óptimos para trabajar el modelo. Después de realizar el tratamiento de los datos, se proceden a desarrollar los modelos matemáticos, de software libre y simulación, dando estos resultados. El modelo matemático se resolvió utilizando Excel y una programación de las fórmulas descritas anteriormente y el resultado de M/M/S=1 es:

Tabla 2. Resultados modelo M/M/S=1.

PARAMETROS		
$\lambda$	49,00	P
$\mu$	13,00	P(0)
S	1,00	Ls
n	4,00	Lq
		Ws
		Wq
		P(n)

La tabla número dos muestra que la utilización del sistema está en un 377 %, lo que es inaceptable para un solo servidor; el modelo se replica hasta llegar a un modelo M/M/S=4.

Tabla 3. Resultados modelo M/M/S=4.

PARAMETROS		
$\lambda$	49,00	P
$\mu$	13,00	P(0)
S	4,00	Ls
n	4,00	Lq
		Ws
		Wq
		P(n)

La tabla número 3 muestra que con la utilización de 4 servidores o personas el modelo mejora mucho, pero con un 94 % de utilización el sistema puede colapsar en un futuro.

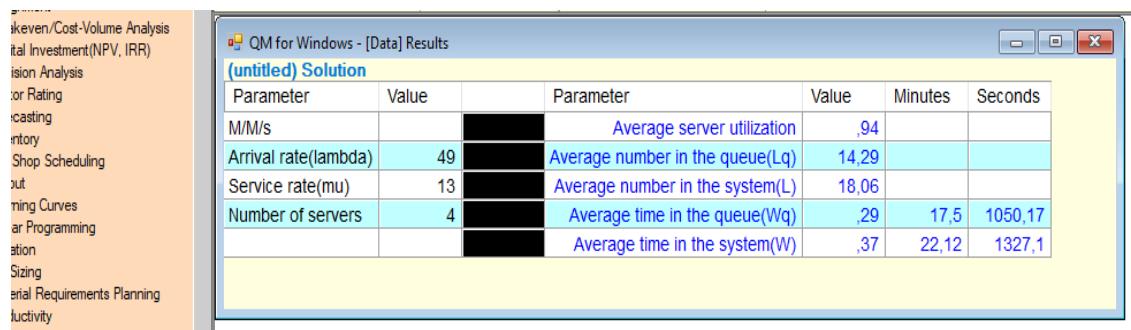


Fig. 6 resultados del programa QS for Windows.

El modelo del programa gratuito muestra la coherencia entre este y la matemática, ya que su formulación está trabajando con los mismos parámetros de entrada. Finalmente, se ingresan al software de simulación Flexsim los valores de las dos distribuciones ya mencionadas y modelamos los 4 escenarios y se pueden observar las siguientes figuras.

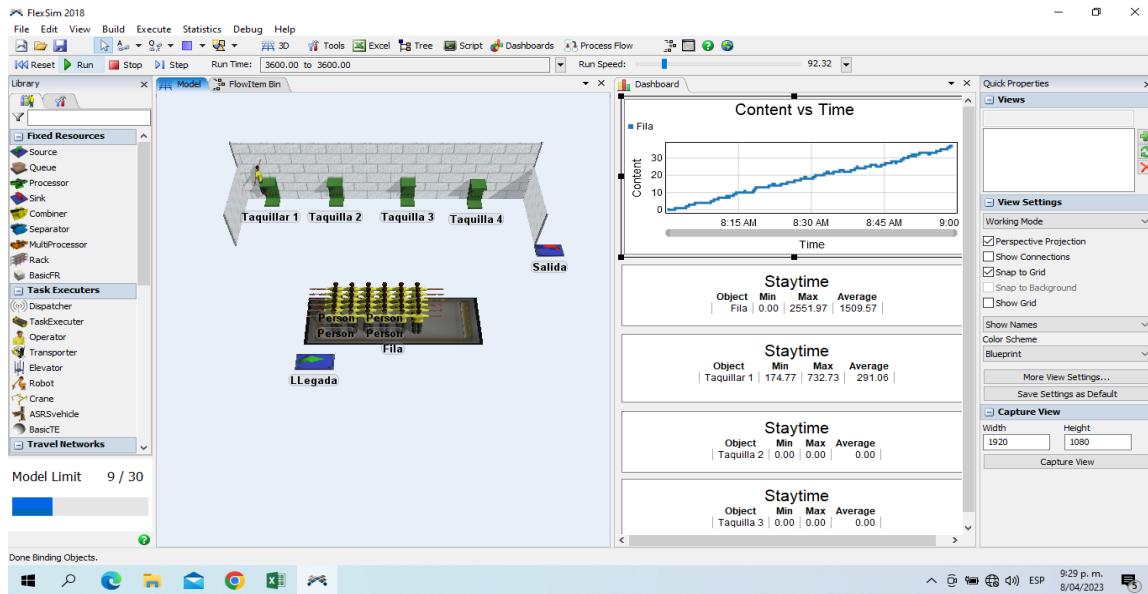


Fig. 7 resultados de la simulación del modelo  $M/M/S=1$ .

La figura 7 muestra el modelo de un solo servidor y se ve que en la fila hay más de 30 personas en promedio, lo cual no es viable para el servicio.

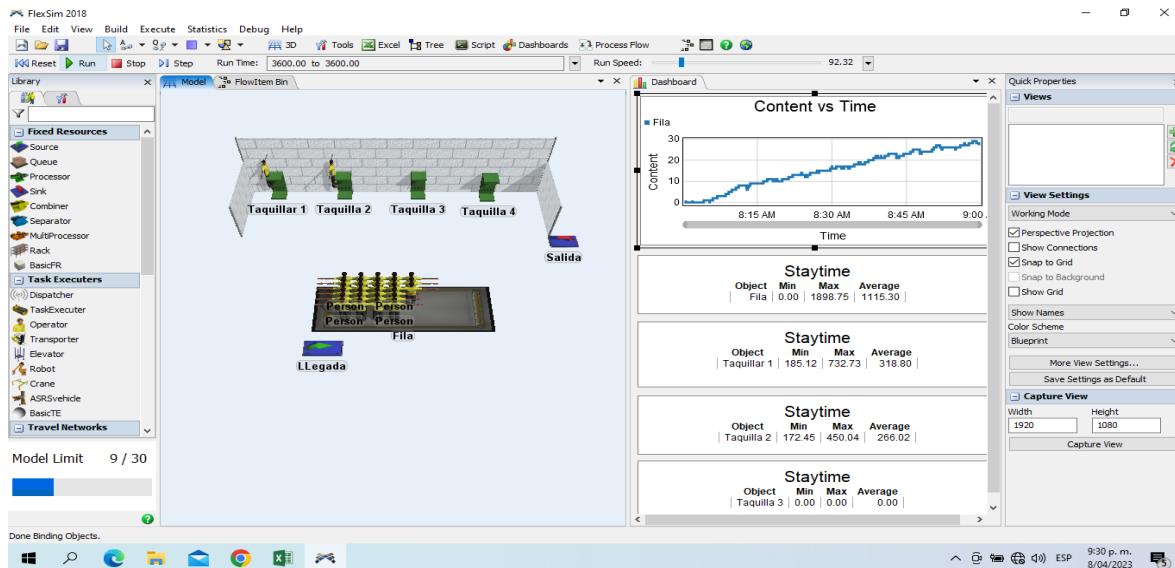


Fig. 8 resultados de la simulación del modelo  $M/M/S=2$ .

La figura 8 muestra el modelo de dos servidores y se ve que la fila hay cerca de 20 personas en promedio, lo cual aún no es viable para el servicio.

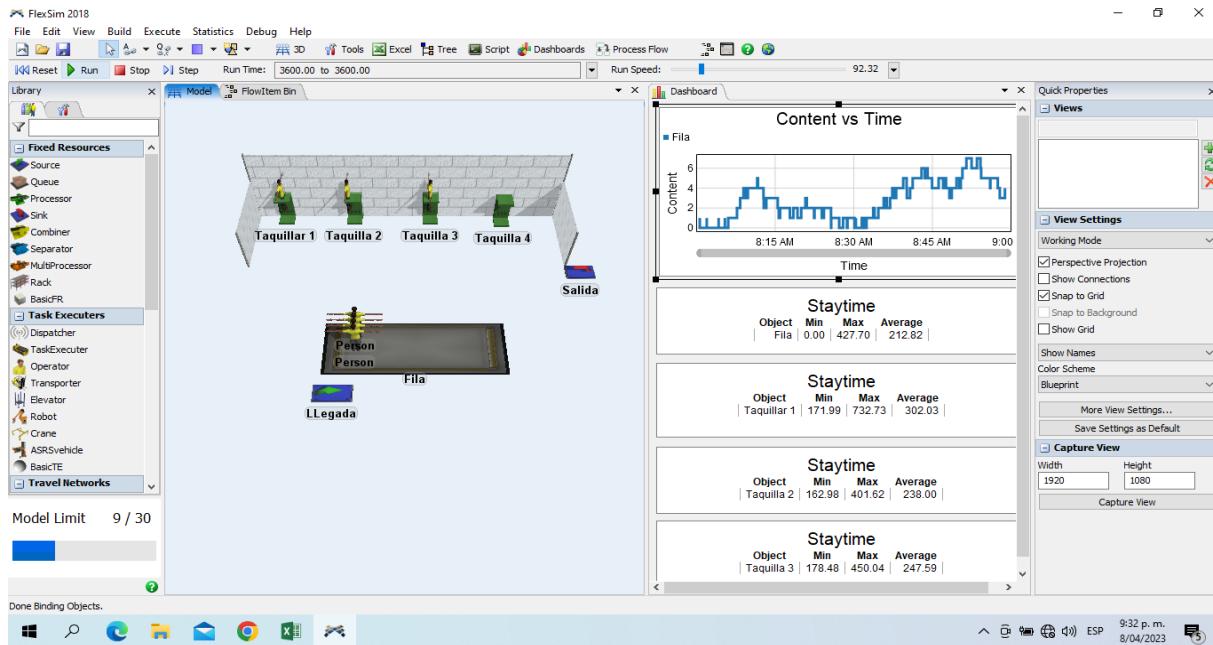


Fig. 9 resultados de la simulación del modelo M/M/S=3.

La figura 9 muestra el modelo de tres servidores y se ve que en la fila hay cerca de 6 personas en promedio, lo cual aún no es viable para el servicio por que el servicio esta sobre el 110 % de ocupación.

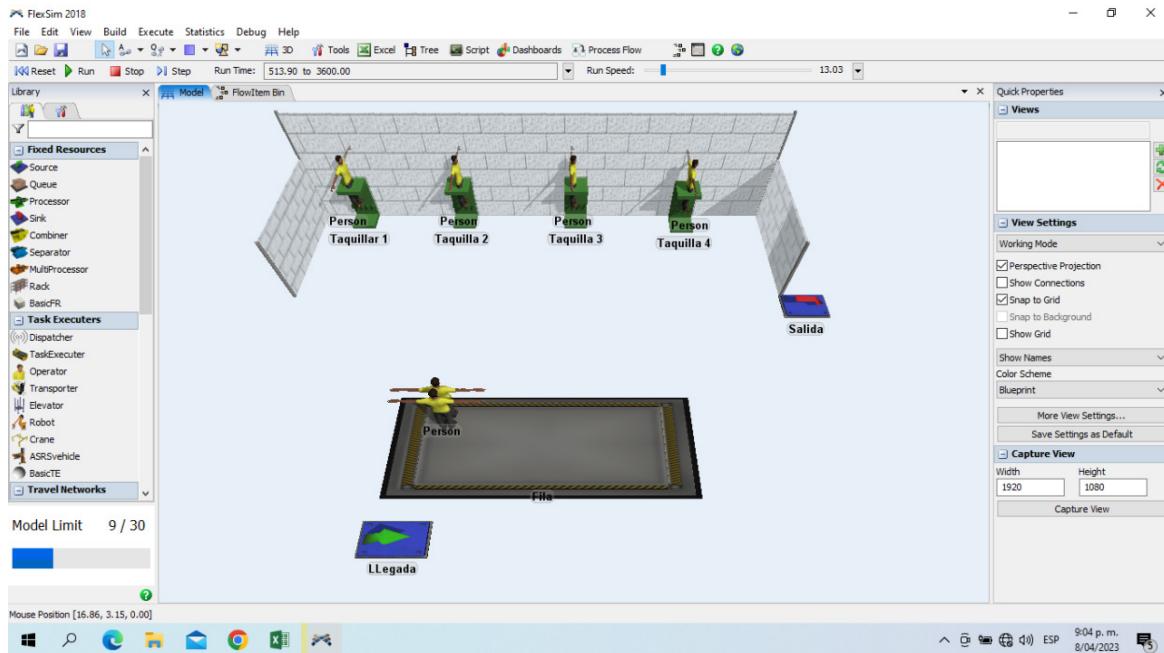


Fig. 10 resultados de la simulación del modelo M/M/S=4.

La figura 10 muestra el modelo de cuatro servidores y se ve que en promedio en la fila hay cerca de 2 personas, lo cual es viable para el servicio por que el servicio esta sobre el 96 % de ocupación.

## 6. Conclusiones

Los tres modelos trabajados en la investigación presentan una congruencia en el número de servidores que debería tener el sistema para ser ideal, las variaciones más importantes se presentan por los datos de entrada al modelo de simulación, ya que son parametrizados cercanos a la realidad que presentan los datos iniciales. Con los resultados obtenidos se entiende que la utilización del sistema para la fila de la compra de boletas es de 94% con 4 servidores, además, se observa que el tiempo promedio que un cliente pasa dentro del sistema es en promedio 27 minutos. Esto nos lleva a que puede ser necesario en un futuro tener una demanda de 5 servidores para bajar de una manera asertiva el factor de utilización.

La simulación con FlexSim permite una mejor interpretación y visualización del modelo, al poder obtener una mayor cantidad de estadísticas, lo cual genera mayor información del sistema que se está tratando de reproducir. Este planteamiento de utilizar 4 servidores para una mejor atención es netamente visto desde el cliente, la discusión fuerte es el punto de vista del dueño del servicio y saber cuál es su expectativa económica. La mayor fortaleza de la simulación es poder ver los diferentes escenarios que se presentan en el modelo de la investigación, se describen los resultados de los cuatro modelos (1, 2, 3,4) servidores, sin invertir más recursos que un servidor o computador y la información que se tomó en campo inicialmente.

## 7. Referencias

- Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camm, J. D., & Martin, K. (2011). Métodos cuantitativos para los negocios. México: Cengage Learning.
- Hiller, F. S., Hillier, M. S., Schmedders, K., & Stephens, M. (2008). Metodos cuantitativos para la administración. México: Mc Graw Hill.
- Martínez Bencardino, C. (2012). Estadística y muestreo. Bogotá: Ecoe Ediciones.
- Render, B., Stair, R. M., & Hanna, M. E. (2012). Métodos Cuantitativos para los negocios. México: Pearson.

## Sobre los autores

- **Fabián de J Présiga D.**: Ingeniero Industrial, Especialista en Ingeniería de Producción, Máster en Ingeniería Industrial. Director grupo de investigación PROMETIC (Giopi). Profesor Ocasional de la ETITC. [fduque@itc.edu.co](mailto:fduque@itc.edu.co)
- **Nicoll Albarracín**: Estudiante de Ingeniería de Procesos Industriales. [snalbarra-cinm@itc.edu.co](mailto:snalbarra-cinm@itc.edu.co)
- **Sofía García**: Estudiante de Ingeniería de Procesos Industriales. [dsgarciai@itc.edu.co](mailto:dsgarciai@itc.edu.co)
- **Tatiana Ruiz**: Estudiante de Ingeniería de Procesos Industriales. [ttruizb@itc.edu.co](mailto:ttruizb@itc.edu.co)

Los puntos de vista expresados en este artículo no reflejan necesariamente la opinión de la  
Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería.

Copyright © 2023 Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería (ACOFI)