CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. GRUPO C.

1. **(2 ptos.)** Calcula los números reales que verifican que

$$a)\frac{2x-3}{x^2-3x+2}<1. \qquad b)\,|x-1|+|x-4|<5$$

Solución.

a) Si restamos 1 en los dos miembros de la desigualdad nos queda que

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2}<1 \Longleftrightarrow \frac{2x-3}{x^2-3x+2}-1<0 \Longleftrightarrow \frac{2x-3-(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2}=\frac{-x^2+5x-5}{x^2-3x+2}<0.$$

Para que el cociente sea negativo el signo de numerador y denominador deber ser distintos. Teniendo en cuenta que $-x^2+5x-5=0 \Longleftrightarrow x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ o $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ y que $x^2-3x+2=0 \Longleftrightarrow x=1$ o $x=2$ tendremos que discutir qué ocurre en los distinto intervalos que determinan los números anteriores.

- Si $x<1$ entonces el numerador es negativo y el denominador positivo con lo que se verifica la condición.
- Si $1<x<\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ tanto numerador como denominador son negativos y el cociente es positivo.
- Si $\frac{5-\sqrt{5}}{2}<x<2$ el numerador es positivo y el denominador negativo con lo que se verifica otra vez la condición.
- Si $2<x<\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ tanto denominador como numerador son positivos y el cociente también.
- Finalmente, si $x>\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ el numerador es negativo y el denominador positivo con lo que el cociente es negativo.

Resumiendo, los números reales que verifican la condición son

$$]-\infty,1[\cup]\frac{5-\sqrt{5}}{2},2[\cup]\frac{5+\sqrt{5}}{2},+\infty[.$$

b) Según las propiedades del valor absoluto tenemos que

$$|x-1|=\begin{cases} 1-x, & x-1<0 \Longleftrightarrow x<1 \\ x-1, & x-1\geq 0 \Longleftrightarrow x\geq 1. \end{cases}$$

Análogamente

$$|x-4|=\begin{cases} 4-x, & x-4<0 \Longleftrightarrow x<4 \\ x-4, & x-4\geq 0 \Longleftrightarrow x\geq 4. \end{cases}$$

Tenemos que estudiar entonces en los siguientes intervalos.

- Si $x < 1$ entonces $x < 4$ también y la desigualdad queda

$$1 - x + 4 - x < 5 \Longleftrightarrow -2x < 0 \Longleftrightarrow x > 0$$

y nos queda solución el intervalo $]0,1[$.

- Si $1 \leq x < 4$ entonces la desigualdad queda

$$x - 1 + 4 - x < 5 \Longleftrightarrow 3 < 5,$$

que se cumple en todo el intervalo por lo que todo el intervalo $[1,4[$ es solución.

- Finalmente, si $x \geq 4$ entonces la desigualdad queda

$$x - 1 + x - 4 < 5 \Longleftrightarrow 2x < 10 \Longleftrightarrow x < 5$$

que nos da de solución el intervalo $[4,5[$.

Juntando todas las soluciones tenemos que la respuesta es el intervalo $]0,5[$.

2. **(2.5 ptos.)** Estudia el crecimiento, extremos relativos y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \arctan(x) - \frac{x}{2} - \log(x^2 + 1)$$

Solución.

La función f es claramente continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser suma y composición de funciones continuas y derivables. Para estudiar el crecimiento, extremos relativos y la imagen tendremos que estudiar el signo de la derivada y el comportamiento de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

La derivada de la función vale

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} - \frac{2x}{1+x^2} = -\frac{x^2+4x-1}{2(1+x^2)}.$$

Por lo tanto la derivada vale 0 en los puntos en los que $x^2 + 4x - 1 = 0$ que son $x_1 = -\sqrt{5} - 2$ y $x_2 = \sqrt{5} - 2$.

Además se tiene entonces que

$$f'(x) = -\frac{\left(x - (-\sqrt{5} - 2)\right)\left(x - (\sqrt{5} - 2)\right)}{2(1+x^2)},$$

y con esta expresión obtenemos claramente que la función es decreciente en $]-\infty, -\sqrt{5}-2[$ y en $]\sqrt{5}-2, +\infty[$ y creciente en $]-\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-2[$ (estudiando el signo de la derivada, que en los dos primeros intervalos es negativo y en el último es positivo), y la función alcanza un mínimo relativo en x_1 y un máximo relativo en x_2.

Para calcular la imagen basta hay que comprobar si estos extremos relativos son absolutos o no. Como no tenemos más puntos críticos hay que estudiar el comportamiento de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) - \frac{x}{2} - \log(x^2+1)$$

presenta una indeterminación de la forma $\infty - \infty$ pero por la escala de infinitos el polinomio $(x/2)$ "puede" más que el logaritmo $(\log(x^2+1))$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

En $+\infty$ no hay ni tan siquiera ninguna indeterminación y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ con lo que los extremos relativos no son absolutos y la imagen es todo $\mathbb{R}$.

3. **(2 ptos.)** Calcula los siguiente límites

a) $\lim_{x\to0}\left(\sin(x)+e^{-x}\right)^{\frac{\cos(x)}{x^2}}$, b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^3}{2\log(1+x^3)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Solución.

a) Claramente el límite a estudiar presenta una indeterminación de la forma 1^∞. Usando la regla del número e tenemos que

$$\lim_{x\to0}\left(\sin(x)+e^{-x}\right)^{\frac{\cos(x)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{x^2}(\sin(x)+e^{-x}-1)} = e^{\lim_{x\to0}\cos(x)\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)+e^{-x}-1}{x^2}}.$$

Como $\lim_{x\to0}\cos(x) = 1$ sólo tendremos que estudiar el segundo límite que aparece en el exponente, que presenta una indeterminación de la forma $0/0$. Estamos en condiciones de aplicarle la primera regla de L'Hôpital y tendremos

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-e^{-x}}{2x},$$

otra vez aplicamos la primera regla de L'Hôpital y

$$\lim_{x\to0}\frac{-\sin(x)+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2},$$

con lo que $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)+e^{-x}-1}{x^2} = \frac{1}{2}$ y

$$\lim_{x\to0}\left(\sin(x)+e^{-x}\right)^{\frac{\cos(x)}{x^2}} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

b) Dentro del paréntesis existe ya una indeterminación ya que, cuando $x\to+\infty$, tanto x^3 como $2\log(1+x^3)$ divergen positivamente, por lo que estamos ante una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Bien por la escala de infinitos o aplicando la segunda regla de L'Hôpital tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2\log(1+x^3)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\frac{6x^2}{1+x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^3}{2} = +\infty,$$

con lo que estamos ante una indeterminación de la forma ∞^0. Tenemos entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^3}{2\log(1+x^3)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x^3}{2\log(1+x^3)}\right)}{x^2}}$$

y en el exponente tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ que intentaremos resolver ahora. Una forma de resolverla es usando la segunda regla de L'Hôpital, pero a poco que nos fijemos, nos daremos cuenta de que si la aplicamos así sin más el cociente se complicará y habrá que aplicarla varias veces.

Quizá sea el momento de fijarnos en que ese cociente, para x suficientemente grande, es positivo y que, otra vez apelando a que $x\to+\infty$ y podemos suponer que es tan grande como necesitemos; entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x^3}{2\log(1+x^3)}\right)}{x^2} \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^3)}{x^2},$$

y, si aplicamos la segunda regla de L'Hôpital a este cociente nos queda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2}{2+x^3}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x^4+4x} = 0,$$

y entonces también $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x^3}{2\log(1+x^3)}\right)}{x^2} = 0$

y

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^3}{2\log(1+x^3)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1.$$

4. **(1.5 ptos.)** Dado un cono recto que tiene de base una circunferencia de radio 6 y altura 12, encontrar el cono inscrito en éste, invertido de forma que el vértice está apoyado en el centro de la base del cono y la circunferencia base paralela a la base del cono grande, y que tenga volumen máximo.

Solución.

Si llamamos r al radio de la base del cono del que tenemos que calcular el volumen máximo y h a su altura tenemos que el volumen es $V=\frac{\pi r^2 h}{3}$ que es una función que depende de dos variables r y h pero que están relacionadas ya que, por triángulos semejantes, tenemos que $\frac{r}{12-h}=\frac{6}{12}$ y despejando h obtenemos que $h=12-r$. Si sustituimos en la fórmula del volumen ya tenemos la función a la que tenemos que calcularle el máximo, que es $V(r)=\frac{\pi r^2(12-2r)}{3}=\frac{2\pi}{3}(6r^2-r^3)$. Esta función está definida en el intervalo $[0,6]$ pero tanto en 0 como en 6 el valor de la función es 0. Además la función en el intervalo $]0,6[$ es positiva. Estos comentarios sobre el valor vienen al caso porque si la función tuviera un único punto crítico en $]0,6[$ entonces en ese punto se alcanzaría máximo relativo que además sería absoluto.

Veamos la derivada

$$V'(r) = \frac{2\pi}{3}(12r - 3r^2) = 0 \Longleftrightarrow 12r = 3r^2 \Longleftrightarrow r = 0 \quad \text{ó} \quad r = 4.$$

Así que en $r = 4$ se alcanza el máximo relativo y absoluto. En cualquier caso para ver que en ese punto se alcanza un máximo relativo también es fácil calcular la segunda derivada y comprobar que en $r = 4$ toma un valor negativo.

La altura correspondiente sería $h = 12 - 2r = 4$ también.

5. **(2 ptos.)** Calcula una aproximación de $\sqrt[3]{28}$ con un error menor que 10^{-3}.

   Solución.

   En este caso se considera la funcion $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Haremos su polinomio de Taylor centrado en $a = 27$ y evaluaremos en $x = 28$. Comenzamos con $f(27) = 3$.

   Vamos a calcular las derivadas sucesivas de $f(x) = x^{1/3}$ y evaluaremos en 27.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \qquad f'(27) = \frac{1}{3 \cdot 3^2}$$

$$f''(x) = \frac{1 \cdot (-2)}{3^2}x^{-5/3}, \qquad f''(27) = \frac{-2}{3^2 \cdot 3^5}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot (-2) \cdot (-5)}{3^3}x^{-8/3}, \qquad f'''(27) = \frac{10}{3^3 \cdot 3^8}.$$

   Para un natural n arbitrario quedaría

$$f^{n)}(x) = \frac{1 \cdot (-2) \cdot (-5) \cdots (-(3n-4))}{3^n}x^{-(3n-1)/3} = (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{3^n x^{(3n-1)/3}}.$$

   Si evaluamos en 27 obtendremos

$$\sqrt{28} = f(28) = f(27) + f'(27)(28-27) + \frac{f''(27)}{2!}(28-27)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(27)}{n!}(28-27)^n +$$

$$+\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(28-27)^{(n+1)},$$

   donde $c \in]27, 28[$.

   Esta última expresión es el resto, que tenemos que hacer que sea (en valor absoluto) menor que 10^{-3}.

$$\left|\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(28-27)^{(n+1)}\right| = \left|(-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1}c^{(3n+2)/3}(n+1)!}\right| = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1}c^{(3n+2)/3}(n+1)!}.$$

   Para acotar teniendo en cuenta el intervalo dónde se encuentra c podemos hacer, por ejemplo

$$
\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{3^{n+1}c^{(3n+2)/3}(n+1)!} \leq \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{3^{n+1}27^{(3n+2)/3}(n+1)!} \leq \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{3^{n+1}27^{(3n)/3}(n+1)!}
$$
$$
= \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{3^{n+1}3^{3n}(n+1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}{3^{4n+1}(n+1)!}
$$

Para $n = 2$ obtenemos que

$$
\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^9 3!} < \frac{1}{1000} \iff \frac{10}{19683\cdot 6} < \frac{1}{1000} \iff 10000 < 118098,
$$

así que $n = 2$ nos sirve y entonces

$$
\sqrt[3]{28} \simeq 3 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^7}
$$

Granada, 30 de noviembre de 2015