Cálculo

1. Comprueba que la ecuación $x = 4\log(x)$ tiene una única solución, c, en el intervalo $]1/2, 2[$. (1 pto.)

   Solución: Presentamos la función con la que vamos a trabajar. Dado que:

   $$x = 4\log(x) \iff x - 4\log(x) = 0$$

   vamos a estudiar la función $f(x) = x - 4\log(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Tendremos que justificar que f se anula en un único punto del intervalo $]1/2, 2[$.

   En primer lugar, la función f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}^+$. Además:

   $$f(1/2) = 1/2 - 4\log(1/2) = 1/2 + 4\log(2) > 0$$
   $$f(2) = 2 - 4\log(2) = 2\left(1 - 2\log(2)\right) = 2\left(1 - \log(4)\right) < 0$$

   Utilizando el teorema de Bolzano deducimos de f admite al menos un cero en dicho intervalo. La cuestión es ¿es único?

   Para responder a dicha pregunta, analizamos la derivada de f:

   $$f'(x) = 1 - \frac{4}{x} = \frac{x-4}{x} \;\text{ y }\; f''(x) = \frac{4}{x^2}$$

   $$f'(x) = \iff x = 4 \;\text{ y }\; f''(4) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} > 0$$

   Por tanto, en $x = 4$ se tiene un mínimo relativo que, por ser el único punto crítico de la función, es el punto de mínimo absoluto de f. Es decir, en el intervalo $]1/2, 2[$ la función es estrictamente decreciente, por lo que sólo existe un único punto $c \in]1/2, 2[$ donde la función f se anula.

2. Calcula la imagen de la función $f \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida como (2.25 ptos.)

   $$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\, e^{1/x}.$$

   Solución: La función dada es continua y derivable en su dominio. Estudiamos la derivada:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}\, e^{1/x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x}\, \frac{x^2}{x^2+1} \\
&= \frac{2x}{(x^2+1)^2}\, e^{1/x} - \frac{1}{x^2+1}\, e^{1/x} = e^{1/x} \left(\frac{2x-(x^2+1)}{(x^2+1)^2}\right) \\
&= e^{1/x} \left(-\frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}\right) = -e^{1/x}\, \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \iff x = 1$. Pero, observamos que la derivada siempre es negativa, por lo que f es decreciente en todo $\mathbb{R}^*$.

Para calcular la imagen de f necesitamos calcular los siguientes límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1}\, e^{1/x} = 1 = \lim_{x\to-\infty} f(x)\,; \\
\lim_{x\to0_+} f(x) &= \lim_{x\to0_+} \frac{x^2}{x^2+1}\, e^{1/x} = \lim_{x\to0_+} \frac{1}{x^2+1} \lim_{x\to0_+} x^2\, e^{1/x}
\end{aligned}$$

Para calcular este último límite (presenta una indeterminación del tipo “$0 \cdot \infty$”) hacemos un cambio de variable: $\frac{1}{x} = y$, y así:

$$\lim_{x\to0_+} x^2\, e^{1/x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^2}\, e^y = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty \ \text{(por la escala de infinitos)}\,.$$

Calculamos ahora el límite en el cero por la izquierda:

$$\lim_{x\to0_-} f(x) = \lim_{x\to0_-} \frac{x^2}{x^2+1}\, e^{1/x} = 0\,.$$

Finalmente:

$$f\left(\mathbb{R}^*\right) = f\left(]-\infty,0[\right) \cup f\left(]0,+\infty[\right)$$

(f es estrictamente decreciente)

$$\begin{aligned}
&= \left]\lim_{x\to0_-} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[\cup \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to0_+} f(x)\right[\\
&=]0,1[\cup]1,+\infty[= \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\,.
\end{aligned}$$

3. *a*) Calcula $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx$.

b) Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de la función $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \cos(t^2)\,dt$. (2.25 ptos.)

Solución:

a) Se trata de una integral de tipo trigonométrico donde las potencias, tanto de la función seno, como de la función coseno, son enteras. Además, la función seno está sometida a una potencia impar. Por tanto, aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$t = \cos(x) \;\Rightarrow\; dt = -\operatorname{sen}(x)\,dx$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)\ \operatorname{sen}(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2(x))\ \operatorname{sen}(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx \\ &\text{(aplicamos el cambio de variable establecido más arriba)} \\ &= -\int \frac{(1-t^2)}{\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{t^2-1}{\sqrt{t}}\,dt = \int (t^{3/2} - t^{-1/2})\,dt \\ &= \frac{2}{5}t^{5/2} - 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{5}\cos^{5/2}(x) - 2\sqrt{\cos(x)} + C\,.\end{aligned}$$

b) La función $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \cos(t^2)\,dt$ es una función definida a través de una integral. Utilizando el teorema fundamental del Cálculo sabemos que esta función es derivable. Y a la vista de la derivada que obtengamos, deduciremos que también se pude derivar dos veces.

Nos piden el polinomio de Taylor en el origen ($a = 0$) de orden 2; es decir, hay que calcular:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2$$

Que, en nuestro caso, al ser $a = 0$, nos quedaría:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2$$

Vamos entonces a calcular los coeficientes de este polinomio. En primer lugar,

$$f(0) = \int_0^0 \cos(t^2)\,dt = 0\,.$$

Para calcular $f'(x)$, aplicamos el teorema Fundamental del Cálculo; por tanto:

$$f'(x) = \cos(x^4)\,2x - \cos(x^2) \;\Rightarrow\; f'(0) = -1$$

$$f''(x) = 2\cos(x^4) - 8x^4\,\operatorname{sen}(x^4) + 2x\,\operatorname{sen}(x^2) \;\Rightarrow\; f''(0) = 2$$

Por tanto, el polinomio pedido es:

$$P_2(x) = 0 - x + \frac{2}{2!}\,x^2 = x^2 - x$$

4. Estudia el límite de la función $f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x$ en 0 y en $+\infty$. (2 ptos.)

Solución: Comenzamos con el límite en 0.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\right)^x \lim_{x\to 0}\,(\arctan(x))^x$$

El primer factor no presenta ningún problema ($\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\right)^x = 1$); pero el segundo factor presenta una indeterminación del tipo "0^0". Para resolverla, aplicamos la fórmula del número e; esto es:

$$\lim_{x\to 0}\,(\arctan(x))^x = \lim_{x\to 0} e^{x\,\log(\arctan(x))}$$

Vamos a ocuparnos de calcular $\lim_{x\to 0} x\,\log(\arctan(x))$. Como presenta una indeterminación de "$0\cdot\infty$", arreglamos el producto y lo ponemos en forma de cociente:

$$\lim_{x\to 0} x\,\log(\arctan(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(\arctan(x))}{1/x}$$

Ahora tenemos una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$", por lo que podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x^2)\,\arctan(x)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{\arctan(x)}$$

donde el primer factor tiende a -1, y el segundo factor es el problemático puesto que ahora presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital al segundo factor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\arctan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} 2x(1+x^2) = 0\ .$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \left(x\ \log\left(\arctan(x)\right)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \left(\arctan(x)\right)^x = e^0 = 1$$

y entonces,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\pi}\right)^x \lim_{x\to 0} \left(\arctan(x)\right)^x = 1\cdot e^0 = 1$$

Vamos ahora a calcular el límite en infinito. En este caso, como es sabido que $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ tenemos una indeterminación del tipo "1^∞". Aplicamos ahora la regla del número e; esto es:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2}{\pi}\arctan(x) - 1\right] = L \iff \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x = e^L$$

Nos ocupamos entonces de calcular $\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2}{\pi}\arctan(x)-1\right]$. Para ello,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2}{\pi}\arctan(x) - 1\right] &= \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2\arctan(x)-\pi}{\pi}\right]\\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty} x\left(2\arctan(x)-\pi\right)\end{aligned}$$

donde se presenta una indeterminación del tipo "$\infty\cdot 0$". Arreglamos la expresión para poder aplicar la regla de L'Hôpital :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\left(2\arctan(x)-\pi\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\arctan(x)-\pi}{1/x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2\,x^2}{1+x^2} = -2\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2}{\pi}\arctan(x)-1\right]=\frac{-2}{\pi} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^{x}=e^{-2/\pi}\,.$$

5. *a*) Estudia la convergencia de la serie $\sum\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2+7}\right)^{-n^3}$.

   b) Calcula $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^{n+2}+3^{-n}}{5^n}$. (2.5 ptos.)

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+7}\right)^{-n^3}}=\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+7}\right)^{-n^2}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞"; por tanto, aplicamos la regla del número e:

$$\begin{aligned}-n^2\left[\frac{2n^2+1}{2n^2+7}-1\right]&=-n^2\left[\frac{2n^2+1-2n^2-7}{2n^2+7}\right]\\&=-n^2\frac{-6}{2n^2+7}=\frac{6n^2}{2n^2+7}\to\frac{6}{2}=3\end{aligned}$$

Con lo que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+7}\right)^{-n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+7}\right)^{-n^2}=e^3>1\,,$$

de lo que se deduce que la serie dada es no es convergente.

b) Se trata de una serie que se puede descomponer en la suma de dos series geométricas. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq3}\frac{2^{n+2}+3^{-n}}{5^n}&=\sum_{n\geq3}2^2\frac{2^n}{5^n}+\sum_{n\geq3}\frac{3^{-n}}{5^n}\\&=4\sum_{n\geq3}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n\geq3}\frac{1}{3^n\,5^n}=4\sum_{n\geq3}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n\geq3}\left(\frac{1}{15}\right)^n\,.\end{aligned}$$

Las dos series que aparecen son convergentes ya que son geométricas con razón menor que 1. Para sumarlas aplicaremos la fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$. Aunque en este caso hemos que tener en cuenta que se nos pide la suma a partir de $n = 3$, por lo que usaremos que:

$$\sum_{n=3}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - \left(1 + r + r^2\right) = \frac{1}{1-r} - (1 + r + r^2) \, .$$

Con todo esto terminamos de sumar la serie propuesta:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n+2} + 3^{-n}}{5^n} &= 4 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{15}\right)^n \\
&= 4 \left[\left(\frac{1}{1-\frac{2}{5}}\right) - \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{1-\frac{1}{15}}\right) - \left(1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{225}\right)\right] \\
&= 4 \left(\frac{5}{3} - 1 - \frac{2}{5} - \frac{4}{25}\right) + \left(\frac{15}{14} - 1 - \frac{1}{15} - \frac{1}{225}\right) = \frac{269}{630} \, .
\end{aligned}$$

Granada, a 11 de febrero de 2015.