Cálculo
Examen de septiembre 2015

1. Calcula los siguientes límites:

   a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \displaystyle\int_0^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\, dt}{x}$ (1 pto.)

   b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2 + \operatorname{sen}(x)\ \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^{1/x}$ (1 pto.)

   Solución:

   a) Se presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Aplicamos la regla de L’Hôpital, y a su vez, el teorema fundamental del Cálculo (debido a que hay que derivar la función $\int_0^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\, dt$) y nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(2\sqrt{x})\right)\ \frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = 1 - \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(2\sqrt{x})\right)}{\sqrt{x}}$$

   El segundo sumando de la expresión anterior presenta, a su vez, una indeterminación del tipo “0/0”, por lo que volvemos a aplicar la regla de L’Hôpital.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(2\sqrt{x})\right)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(\operatorname{sen}(2\sqrt{x})\right)\ \cos(2\sqrt{x})\ \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x\to 0} 2\ \cos\left(\operatorname{sen}(2\sqrt{x})\right)\ \cos(2\sqrt{x}) = 2\end{aligned}$$

   Por tanto, el límite pedido es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \displaystyle\int_0^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\, dt}{x} = 1 - 2 = -1\ .$$

   b) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Para resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L’Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \operatorname{sen}(x)\ \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + \cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2}{\cos(x)} = 1,$$

   con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo “1^∞”.
   Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2 + \operatorname{sen}(x)\ \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^{1/x} = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{x^2 + \operatorname{sen}(x)\ \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} - 1\right) = L.$$

   Para resolver el límite que se plantea con la regla del número e:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{x^2 + \operatorname{sen}(x)\ \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} - 1\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \operatorname{sen}(x)\ \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x\ \operatorname{sen}(x)}$$

   aplicamos la regla de L’Hôpital, ya que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Nos queda entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{2x + \cos(x)^2 - \operatorname{sen}(x)^2 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x\operatorname{sen}(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 4\cos(x)\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)}{2\cos(x) - x\operatorname{sen}(x)} = \frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

Observemos que hemos aplicado dos veces consecutivas la regla de L'Hôpital ya que volvía a haber indeterminación del tipo "0/0".

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+\operatorname{sen}(x)\,\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^{1/x}=e^1=e\ .$$

2. *a*) Determina el número de ceros de $f(x)=2x^3-9x^2+12x+7$. (1 pto.)

   b) Calcula $f([1,3])$. (1 pto.)

Solución:

a) La función f es polinómica de grado impar, por tanto, aplicando el teorema de Bolzano, al menos tendrá un cero. Y por tratarse de una función polinómica de grado 3 tendrá, a lo sumo, tres ceros. Vamos a precisar exactamente cuantos ceros tiene estudiando la derivada.

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)=6(x-1)(x-2).$$

Tenemos por tanto dos puntos críticos de f: $x=1$ y $x=2$. Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si los puntos críticos son puntos de extremo relativo o no:

$$\begin{array}{r}
\text{Si } x<1\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}\\
\text{Si } 1<x<2\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}\\
\text{Si } x>2\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}
\end{array}$$

Se deduce entonces que en el punto $x=1$ se alcanza un máximo relativo y en el punto $x=2$ se alcanza un mínimo relativo. Además, $f(1)=12$, $f(2)=11$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. De lo anterior se deduce que f sólo tiene un cero para un valor de la variable <1, y a partir de dicho valor, la función siempre es positiva.

b) Para calcular la imagen de f sobre el intervalo compacto $[1,3]$ nos apoyamos en todos los cálculos realizados en el apartado anterior y en la propiedad de Compacidad, que nos asegura que $f([1,3])$ ha de ser otro intervalo compacto. Como en el punto $x=2$ teníamos un punto crítico y además:

$$\begin{aligned}
f(1)&=12\,,\\
f(2)&=11\,,\\
f(3)&=16\,,
\end{aligned}$$

tenemos entonces que $f([1,3]=[f(2),f(3)]=[11,16]$.

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ una función cuyo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero es $P_2(x)=1+x-x^2$. (1.25 ptos.) Calcula el polinomio de Taylor de igual orden y centro de la función $g(x)=\log(f(x))$.

Solución: El polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero de f es:

$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=1+x-x^2$$

Igualando coeficientes obtenemos:

$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-2.$$

Para construir el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero de g, es decir:

$$T_2(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2!}x^2,$$

tendremos que calcular $g(0)$, $g'(0)$ y $g''(0)$. Para ello:

$$g(x) = \log(f(x)) \Rightarrow g(0) = \log(f(0)) = \log(1) = 0\,,$$
$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{1} = 1\,,$$
$$g''(x) = \frac{f''(x)\,f(x) - f'(x)\,f'(x)}{f(x)^2} \Rightarrow g''(0) = \frac{-2-1}{1} = -3\,.$$

Por tanto, el polinomio pedido es:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 = x - \frac{3}{2}x^2\,.$$

4. Se considera $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2\,e^{-x}$.

   a) Calcula una primitiva, F, de f. (1 pto.)

   b) Calcula, si existen, los puntos donde la pendiente de la recta tangente de F es mínima y donde es máxima. (1 pto.)

Solución:

a) Aplicamos el método de integración por partes para calcular $F(x)$:

$$F(x) = \int x^2\,e^{-x}\;dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2\,x\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{bmatrix}$$
$$= -\,x^2\,e^{-x} + 2\int x\,e^{-x}\,dx$$

Nos vuelve a quedar una integral que haremos también por partes:

$$\int x\,e^{-x}\;dx = \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{bmatrix}$$
$$= -\,x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x}$$

Volviendo a la que teníamos en principio:

$$F(x) = \int x^2\,e^{-x}\,dx = -x^2\,e^{-x} - 2(x\,e^{-x} + e^{-x}) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$$

b) La pendiente de la recta tangente de F viene dada por $F'(x)$; pero como F es una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x)$, se trata entonces de calcular, si existen, el máximo y mínimo absolutos de la función f.

f es una función derivable definida en todo $\mathbb{R}$. Calculamos su derivada:

$$f'(x) = 2x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x} = e^{-x}\,x(2-x)$$

La función f tiene dos puntos críticos: $x = 0$ y $x = 2$. Estudiando el signo de la derivada calculamos los intervalos de monotonía:

$$\begin{aligned} \text{Si } x < 0 &\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente} \\ \text{Si } 0 < x < 2 &\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente} \\ \text{Si } x > 2 &\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente} \end{aligned}$$

Por tanto, en el punto $x = 0$ se alcanza un mínimo relativo, y en el punto $x = 2$ se alcanza un máximo relativo. Además $f(0) = 0$ y $f(2) = \frac{4}{e^2}$. Vamos a estudiar el comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\,e^{-x} = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\,e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0\,.$$

Por tanto, $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$, de donde deducimos que la función f sí alcanza su mínimo absoluto y vale 0, pero no alcanza su máximo absoluto.

5. Se considera la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} - \frac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Prueba que $x_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. (0.75 ptos.)

b) Prueba que $\{x_n\}$ es convergente y calcula su límite. (1 pto.)

Solución:

a) Para comprobar que $x_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, aplicamos el método de inducción:

- Para $n = 1$, es cierto que $x_1 = 1 \geq 0$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \geq 0$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \geq 0$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} + x_n \geq \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} - \frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

Como, $\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \geq 0$, entonces:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} - \frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \geq 0$$

b) Vamos a probar que la sucesión dada es monótona y acotada. Comenzamos con la monotonía. Como $x_1 = 1 > x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \approx 0{,}724$, vamos a probar que es monótona decreciente. En efecto,

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 > x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n > x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} > x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n > x_{n+1} \ \Rightarrow \ 1/2 + x_n > 1/2 + x_{n+1} \ \Rightarrow \ \sqrt{1/2 + x_n} > \sqrt{1/2 + x_{n+1}}$$

$$\sqrt{1/2 + x_n} - 1/2 > \sqrt{1/2 + x_{n+1}} - 1/2 \Rightarrow \quad x_{n+1} > x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona decreciente.

Al ser decreciente, ya sabemos que la sucesión está acotada superiormente por $x_1 = 1$. Además, por el apartado (a) sabemos que está acotada inferiormente por 0. Esto es, $0 \leq x_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim x_n = x$ con lo que nos queda:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} + x} - \frac{1}{2}.$$

Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} + x} - \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + x \ \Rightarrow \ x^2 + x + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \ \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 1/2$ y $x = -1/2$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 0. El motivo es que $0 \leq x_n \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim x_n = 1/2$.

6. Estudia la convergencia de la serie $\sum \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}$. (1 pto.)

Solución: Aplicamos el criterio del cociente para determinar el carácter de la serie propuesta. Llamamos $a_n = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}$, entonces:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)(4n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = \frac{2n+3}{4n+2}$$

Entonces, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$, de lo que se deduce que la serie dada es convergente.

Granada, a 1 de septiembre de 2015.