CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. GRUPO B.

1. **(2 ptos.)** Calcula los números reales que verifican que

$$a)\frac{2x-3}{x^2+2x-8}<1.$$

$$b)\,|x-1|+|x-4|<5.$$

Solución.

a) Si restamos 1 en los dos miembros de la desigualdad nos queda que

$$\frac{2x-3}{x^2+2x-8}<1 \Longleftrightarrow \frac{2x-3}{x^2+2x-8}-1<0 \Longleftrightarrow \frac{2x-3-(x^2+2x-8)}{x^2+2x-8}=\frac{-x^2+5}{x^2+2x-8}<0.$$

Para que el cociente sea negativo el signo de numerador y denominador deber ser distintos. Teniendo en cuenta que $-x^2+5=0 \Longleftrightarrow x=\sqrt{5}$ o $x=-\sqrt{5}$ y que $x^2+2x-8=0 \Longleftrightarrow x=-4$ o $x=2$ tendremos que discutir qué ocurre en los distintos intervalos que determinan los números anteriores.

- Si $x<-4$ entonces el numerador es negativo y el denominador positivo con lo que se verifica la condición.
- Si $-4<x<-\sqrt{5}$ tanto numerador como denominador son negativos y el cociente es positivo.
- Si $-\sqrt{5}<x<2$ el numerador es positivo y el denominador negativo con lo que se verifica otra vez la condición.
- Si $2<x<\sqrt{5}$ tanto denominador como numerador son positivos y el cociente también.
- Finalmente, si $x>\sqrt{5}$ el numerador es negativo y el denominador positivo con lo que el cociente es negativo.

Resumiendo, los números reales que verifican la condición son

$$]-\infty,-4[\cup]-\sqrt{5},2[\cup]\sqrt{5},+\infty[.$$

b) Según las propiedades del valor absoluto tenemos que

$$|x-1|=\begin{cases} 1-x, & x-1<0 \Longleftrightarrow x<1 \\ x-1, & x-1\geq 0 \Longleftrightarrow x\geq 1. \end{cases}$$

Análogamente

$$|x-4|=\begin{cases} 4-x, & x-4<0 \Longleftrightarrow x<4 \\ x-4, & x-4\geq 0 \Longleftrightarrow x\geq 4. \end{cases}$$

Tenemos que estudiar entonces en los siguientes intervalos.

- Si $x < 1$ entonces $x < 4$ también y la desigualdad queda

$$1 - x + 4 - x < 5 \Longleftrightarrow -2x < 0 \Longleftrightarrow x > 0$$

y nos queda solución el intervalo $]0,1[$.

- Si $1 \leq x < 4$ entonces la desigualdad queda

$$x - 1 + 4 - x < 5 \Longleftrightarrow 3 < 5,$$

que se cumple en todo el intervalo por lo que todo el intervalo $[1,4[$ es solución.

- Finalmente, si $x \geq 4$ entonces la desigualdad queda

$$x - 1 + x - 4 < 5 \Longleftrightarrow 2x < 10 \Longleftrightarrow x < 5$$

que nos da de solución el intervalo $[4,5[$.

Juntando todas las soluciones tenemos que la respuesta es el intervalo $]0,5[$.

2. **(2.5 ptos.)** Estudia la continuidad, derivabilidad e imagen de la función $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log(1 - x^2) - 2\arctan(1/x^2), & x \neq 0 \\ \pi, & x = 0 \end{cases}$$

Solución.

Un primer paso es darse cuenta que la función verifica que $f(-x) = f(x)$ para cualquiér $x \in]-1,1[$, es decir, la función es par. Esto nos facilitará calcular la imagen ya que sólo tendremos que calcular la imagen del intervalo $[0,1[$.

Para estudiar la continuidad está claro que la función es continua $]-1,1[\setminus\{0\}$ por ser composición de funciones continuas.

Para estudiar la continuidad en 0 estudiamos el límite en 0 de la función. Al ser la función par el comportamiento de la función en 0 da igual que lo estudiemos por la izquierda o por la derecha.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \log(1 - x^2) - 2\arctan(1/x^2) = -\pi,$$

al ser $\log(1) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \pi/2$.

Como $\lim_{x \to 0} f(x) = -\pi \neq \pi$ entonces la función no es continua en 0, de hecho tiene una discontinuidad de salto.

Para la derivabilidad, en el resto del intervalo si es derivable por ser composición de funciones derivables y en 0, al no ser continua, tampoco es derivable.

Para calcular la derivada, que nos va a servir para estudiar el crecimiento, tenemos que , para $x \in]0,1[$ (en $]-1,0[$ no es necesario estudiarlo por paridad)

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} - 2\frac{(-2/x^3)}{1+(1/x^2)^2} = \frac{-2x}{1-x^2} + \frac{4x}{1+x^4} = \frac{(-2x)(x^4+2x^2-1)}{(1-x^2)(x^4+1)},$$

y el numerador vale 0 si $x = 0$ (que no nos interesa por no ser la función derivable en 0) o si $x = \sqrt{\sqrt{2}-1}$. También nos saldría el opuesto a este número pero por paridad no lo estudiamos.

Para estudiar si en el punto $x = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ se alcanza algún extremo relativo se puede estudiar el signo de la derivada a derecha e izquierda de este número (siempre dentro del intervalo $]0,1[$) o estudiar el signo de la segunda derivada. Vamos a hacer la segunda derivada. Si llamamos $g(x) = \frac{(-2x)}{(1-x^2)(x^4+1)}$ y $h(x) = x^4+2x^2-1$ tenemos que $f'(x) = g(x)h(x)$ y, no olvidemos que, por una parte, $g(\sqrt{\sqrt{2}-1}) < 0$ y, por otra parte, $h(\sqrt{\sqrt{2}-1}) = 0$ con lo que

$$f''(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = g'(x)h(x) + g(x)(4x^3+4x).$$

Como la función $h'(x) = 4x^3+4x$ evaluada en el punto crítico $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ vale

$$h'(\sqrt{\sqrt{2}-1}) = 4\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^3 + 4\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

$$= 4(\sqrt{2}-1)\sqrt{\sqrt{2}-1} + 4\sqrt{\sqrt{2}-1} = 4\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1} > 0.$$

Así $f''(\sqrt{\sqrt{2}-1}) < 0$ y la función f alcanza en el punto $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ un máximo relativo. Ya hemos comprobado el comportamiento de f en 0 y en 1 se tiene que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \log(1-x^2) - 2\arctan(1/x^2) = -\infty.$$

La imagen entonces nos queda $]-\infty, f(\sqrt{\sqrt{2}-1})] \cup \{\pi\}$. Hay que tener en cuenta que $f(\sqrt{\sqrt{2}-1}) \simeq -2.8909...$

3. **(2 ptos.)** Calcula los siguiente límites

a) $\lim_{x\to 0} (\sin(x)+e^{-x})^{\frac{\cos(x)}{x^2}}$, b) $\lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\log(2x^2+1) - \log(2x^2-3)\right)$.

Solución.

a) Claramente el límite a estudiar presenta una indeterminación de la forma 1^∞. Usando la regla del número e tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \left(\sin(x)+e^{-x}\right)^{\frac{\cos(x)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x^2}(\sin(x)+e^{-x}-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\cos(x)\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+e^{-x}-1}{x^2}}.$$

Como $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$ sólo tendremos que estudiar el segundo límite que aparece en el exponente, que presenta una indeterminación de la forma $0/0$. Estamos en condiciones de aplicarle la primera regla de L'Hôpital y tendremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^{-x}}{2x},$$

otra vez aplicamos la primera regla de L'Hôpital y

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x) + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2},$$

con lo que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+e^{-x}-1}{x^2} = \frac{1}{2}$ y

$$\lim_{x\to 0} \left(\sin(x) + e^{-x}\right)^{\frac{\cos(x)}{x^2}} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

b) Teniendo en cuenta las propiedades del logaritmo se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\log(2x^2+1) - \log(2x^2-3)\right) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right) = \log(1) = 0,$$

y estamos ante una indeterminación de la forma $\infty \cdot 0$. Para resoverla se puede hacer de varias formas. Una primera es convertirla en una indeterminación de tipo cociente para poder aplicar las reglas de L'Hôpital. En este caso la intervención más lógica es hacer

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\log(2x^2+1) - \log(2x^2-3)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log(2x^2+1) - \log(2x^2-3)\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

y aplicar la primera regla de L'Hôpital.

Otra forma de hacerlo (aquí lo vamos a hacer así) es utilizar las reglas del logaritmo y el criterio del número e.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\log(2x^2+1) - \log(2x^2-3)\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right)^{x^2} = \log\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right)^{x^2}\right).$$

Teniendo en cuenta que la expresión dentro del logaritmo tiene en $+\infty$ una indeterminación de la forma 1^∞ tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right)^{x^2} = e^{\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}-1\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{2x^2+1-((2x^2-3)}{2x^2-3}\right)}$$
$$= e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x^2-3}} = e^2,$$

y el límite buscado es

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\log(2x^2+1) - \log(2x^2-3)\right) = 2.$$

4. **(1.5 ptos.)**Calcula las dimensiones del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse dentro de una esfera de radio 2.

Solución.

Si llamamos r al radio de la circunferencia base del cilindro y h a su altura tenemos que el volumen del cilindro es el área de la base por la altura, que quedará $\pi r^2 h$, pero claramente r y h están relacionados ya que $r^2 + (\frac{h}{2})^2 = 2^2$, por lo que $r^2 = 4 - \frac{h^2}{4}$ con lo que la función a la que tenemos que calcularle el máximo es $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(h) = \pi(4 - \frac{h^2}{4})h$ que es una función que en los extremos del intervalo dominio vale 0 y en el interior del intervalo es positiva. Si tuviera un único punto crítico en ese interior tendría que ser necesariamente un máximo relativo y también absoluto. Veamos los puntos críticos de dicha función.

$$f'(h) = \pi \left(\frac{-2h}{4} h + (4 - \frac{h^2}{4}) \right) = \pi \left(\frac{16 - 3h^2}{4} \right).$$

que es igual a 0 si, y sólo si, $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Según los comentarios que hemos hecho antes este último valor es la altura del cilindro de mayor volumen. El radio correspondiente sería $r = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

5. **(2 ptos.)** Calcula una aproximación de $\sqrt[5]{31}$ con un error menor que 10^{-3}.

Solución.

En este caso se considera la funcion $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Haremos su polinomio de Taylor centrado en $a = 32$ y evaluaremos en $x = 31$. Claramente $f(32) = 2$.

Vamos a calcular las derivadas sucesivas de $f(x) = x^{1/5}$ y evaluaremos en 32.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{5}x^{-4/5}, \qquad f'(32) = \frac{1}{5 \cdot 2^4} \\
f''(x) &= \frac{1 \cdot (-4)}{5^2}x^{-9/5}, \qquad f''(32) = \frac{-4}{5^2 \cdot 2^9} \\
f'''(x) &= \frac{1 \cdot (-4) \cdot (-9)}{5^3}x^{-14/5}, \qquad f'''(32) = \frac{36}{5^3 \cdot 2^9}.
\end{aligned}$$

Para un natural n arbitrario quedaría

$$f^{n)}(x) = \frac{1 \cdot (-4) \cdot (-9) \cdots (-(5n-6))}{5^n} x^{-(5n-1)/5} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdots (5n-6)}{5^n x^{(5n-1)/5}}.$$

Si evaluamos en 31 obtendremos

$$\sqrt[5]{31} = f(31) = f(32) + f'(32)(31-32) + \frac{f''(32)}{2!}(31-32)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(32)}{n!}(31-32)^n +$$

$$+\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(31-32)^{(n+1)},$$

donde $c \in]31,32[$.

Esta última expresión es el resto, que tenemos que hacer que sea (en valor absoluto) menor que 10^{-3}.

$$\left|\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(31-32)^{(n+1)}\right| = \left|(-1)^n(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots(5n-1)}{5^{n+1}c^{(5n+4)/5}(n+1)!}\right| = \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots(5n-1)}{5^{n+1}c^{(5n+4)/5}(n+1)!}.$$

Para acotar teniendo en cuenta el intervalo dónde se encuentra c podemos hacer, por ejemplo

$$\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots(5n-1)}{5^{n+1}c^{(5n+4)/5}(n+1)!} \leq \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots(5n-1)}{5^{n+1}31^{(5n+4)/5}(n+1)!} \leq \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots(5n-1)}{5^{n+1}31^{(5n)/5}(n+1)!} = \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots(5n-1)}{5^{n+1}31^{n}(n+1)!}.$$

Para $n=2$ obtenemos que

$$\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3 31^2 3!} < \frac{1}{1000} \Longleftrightarrow \frac{36}{125\cdot 961\cdot 6} < \frac{1}{1000} \Longleftrightarrow \frac{36}{125\cdot 961\cdot 6} < \frac{1}{1000} \Longleftrightarrow 125\cdot 961 = 24025 > 6000,$$

así que $n=2$ nos sirve y entonces

$$\sqrt[5]{31} \simeq 2 - \frac{1}{5\cdot 2^4} - \frac{4}{5^2\cdot 2^9\cdot 2!}$$

Granada, 3 de diciembre de 2015