CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. EXAMEN FINAL.

1. Demuestra que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$2x\arctan(x) \geq \log(1+x^2).$$

Solución:

La desigualdad que se pide demostrar es equivalente a demostrar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica que $2x\arctan(x) - \log(1+x^2) \geq 0$. Consideramos entonces la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x\arctan(x) - \log(1+x^2)$. Se trata de estudiar su imagen y comprobar que su imagen se queda contenida en $\mathbb{R}_0^+$. Claramente la función cumple que es par ($f(-x) = f(x)$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$), con lo que basta considerar como dominio $\mathbb{R}_0^+$.

La función es derivable y para estudiar su crecimiento analizamos el signo de su derivada,

$$f'(x) = 2\left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}\right) - \frac{2x}{1+x^2} = 2\arctan(x).$$

Como $\arctan(x) \geq 0$ para $x \geq 0$ (de hecho $\arctan(x) > 0$ para $x > 0$), tenemos que la función es creciente en $\mathbb{R}_0^+$ (de hecho estrictamente creciente) y como $f(0) = 0$ tendremos que $f(x) \geq f(0) = 0,\ \forall x \geq 0$.

En realidad lo que se verifica es que $f(x) > 0$, $\forall x > 0$, con lo que la igualdad solo se verifica para $x = 0$. También notar aquí que no es necesario estudiar el comportamiento de la función en $+\infty$, aunque en este caso es fácil ver que la función diverge positivamente en $+\infty$.

2. Estudia la función (continuidad, crecimiento, extremos, etc.)

$$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{1/x}(x^2 - x + 1).$$

Como consecuencia calcula su imagen.

Solución:

La función es continua y derivable en todo su dominio por ser composición de funciones que lo son. En 0 no tiene sentido estudiar la continuidad (ni la derivabilidad, evidentemente) ya que no es parte del dominio de la función.

Para estudiar el crecimiento vamos a estudiar el signo de la derivada de la función.

$$f'(x) = e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(x^2 - x + 1\right) + e^{1/x}(2x-1) = e^{1/x}\left(\frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2}\right).$$

Teniendo en cuenta que la exponencial siempre es positivo y, descomponiendo el polinomio

$2x^3-2x^2+x-1=(x-1)(2x^2+1)$,se tiene que

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=1,$$

así que la función tiene un único punto crítico, $x=1$. Para terminar de estudiar el crecimiento de la función y decidir si se alcanza algún extremo en el punto 1 y, en su caso, qué tipo de extremo se alcanza, podemos calcular la segunda derivada y evaluarla en 1 o estudiar el signo de la primera derivada en distintos puntos para estudiar el crecimiento y, a la postre, la posible existencia de extremo en 1. Con este segundo método se tiene que $f'(-1)=\frac{-6}{e}<0$ con lo que $f'(x)<0$ en todo el intervalo $\mathbb{R}^-$ y la función es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$. Si evaluamos en $1/2$ se tiene que $f'(1/2)=-3e^2<0$ con lo que $f'(x)<0$ en el intervalo $]0,1[$ y la función es decreciente en dicho intervalo. Finalmente $f'(2)=\frac{9\sqrt{e}}{4}>0$ y la función es creciente en $]1,+\infty[$. Así la función alcanza un mínimo relativo en $x=1$. El valor de dicho mínimo es $f(1)=e$. Para terminar de estudiar la imagen tendremos que estudiar el comportamiento de f tanto en $+$ como en $-$ infinito y en 0.

Claramente se tiene que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{1/x}(x^2-x+1)=+\infty.$$

En este caso no se presenta ninguna indeterminación.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}(x^2-x+1)=0.$$

Tampoco presenta ningún problema ya que, cuando $x\to 0^-$, $1/x\to-\infty$ y la exponencial en $-\infty$ tiene límite 0, mientras que el polinomio tiene límite 1. En 0 por la derecha la única diferencia es que, cuando $x\to 0^+$, $1/x\to+\infty$ y la exponencial en $+\infty$ diverge positivamente con lo que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}(x^2-x+1)=+\infty.$$

Finalmente en $+\infty$ si se presenta una indeterminación pero, por la escala de infinitos tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{1/x}(x^2-x+1)=+\infty.$$

Para concluir la imagen tenemos que

$$Im(f)=f(\mathbb{R}^-)\bigcup f(\mathbb{R}^+)=]0,+\infty[\bigcup[e,+\infty[=]0,+\infty[.$$

3. *a*) Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x)=\log(\mathrm{sen}(x)+1)$ de grado 3 centrado en 0.

Solución:

El polinomio de Taylor de la función $f(x) = \log(\operatorname{sen}(x)+1)$ de grado 3 centrado en 0.

En primer lugar, notamos que la función f está bien definida en torno a 0. En concreto, $f(x)$ es infinitamente derivable en 0, con lo que podemos calcular el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en 0.

Para ello vamos a calcular las tres primeras derivadas.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)+1},\\
f''(x) &= \frac{-\operatorname{sen}(x)(\operatorname{sen}(x)+1)-\cos^2(x)}{(\operatorname{sen}(x)+1)^2} = \frac{-1}{\operatorname{sen}(x)+1},\\
f'''(x) &= \frac{\cos(x)}{(\operatorname{sen}(x)+1)^2.}
\end{aligned}$$

Ahora las evaluamos en 0

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = -1, \qquad f'''(0) = 1.$$

Consecuentemente, el polinomio de Taylor pedido es

$$P_{3,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

b) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+1}{x^3+x^5}$.

Solución:

Una posibilidad es resolver el límite aplicando convenientemente la regla de L'Hôpital de forma sucesiva, aprovechando que tenemos calculadas las primeras derivadas de f en el apartado anterior. Aquí aprovecharemos que tenemos calculado el polinomio de Taylor calculado en el ejercicio anterior y, mediante la fórmula infinitesimal de Taylor de f en 0, se tiene que

$$0 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P_{3,0}(x)}{x^3} = 0 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P_{3,0}(x)}{x^3(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P_{3,0}(x)}{x^3+x^5}.$$

Por tanto, sabemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+1}{x^3+x^5} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P_{3,0}(x)+P_{3,0}(x)-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+1}{x^3+x^5}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{P_{3,0}(x)-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+1}{x^3+x^5}.
\end{aligned}$$

Análogamente, si calculamos los polinomios de Taylor de orden 3 centrados en 0 de $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+1}{x^3+x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^3}{6}-1+\frac{x^2}{2}+1}{x^3+x^5} = \frac{1}{3}.$$

4. *a*) Calcula $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \arctan(t^2)\,dt}{\sqrt{x}\,\operatorname{sen}(x)}$.

Solución:

Estamos ante una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. El teorema fundamental del cálculo nos garantiza la derivabilidad de la función del numerador. Aplicando la primera regla de L'Hôpital tenemos que estudiar el límite del cociente de las derivadas

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\arctan(\sqrt{x}^2)}{2\sqrt{x}}}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)}{\operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x)}.$$

Estamos otra vez ante una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la primera regla de L'Hôpital otra vez tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos(x) + 2\cos(x) - 2x\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{3},$$

y ese es el valor del límite buscado también.

b) Calcula $\displaystyle \int \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}\,dx$.

Solución:

En primer lugar, se debe notar que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2\cos^2(x) - 1,$$

por tanto

$$\int \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{2\cos^2(x) - 1}{\cos(x)}\,dx = 2\int \cos(x)\,dx - \int \frac{1}{\cos(x)}\,dx.$$

Ahora nos centramos en calcular la segunda integral,

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{\cos(x)}{1 - \operatorname{sen}^2(x)}\,dx$$

Aplicando el cambio de variable $y = \operatorname{sen}(x)$, $dy = \cos(x)\,dx$, se tiene que

$$\int \frac{\cos(x)}{1 - \operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\,dy\right) = \frac{1}{2}\log\frac{|1+y|}{|1-y|} + C.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable y hallando la primera integral inmediata, podemos concluir que

$$\int \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}\,dx = 2\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\log\frac{|1+\operatorname{sen}(x)|}{|1-\operatorname{sen}(x)|} + C.$$

5. *a*) Estudia la convergencia de la serie $\sum \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2n+1}\right)^{n^2}$.

Solución:

Para estudiar la convergencia de la serie aplicamos el criterio de la raíz. Si llamamos $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+1}\right)^{n^2}$, tendremos que estudiar

$$\begin{aligned}
\text{lím}\,(\sqrt[n]{a_n}) &= \text{lím}\left(\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+1}\right)^{n^2}}\right) = \text{lím}\left(\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}}\right)\\
&= \text{lím}\left(\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+1}\right)^{n}\right).
\end{aligned}$$

Este último límite presenta una indeterminación de la forma 1^∞ y podemos aplicar la regla del número e con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \text{lím}\left(\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+1}-1\right)^{n}\right)\\
&= e^{\text{lím}\left(n\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+1}-1\right)\right)} = e^{\text{lím}\left(\frac{-2n^2}{n^2+2n+1}\right)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{e^2} < 1$ la serie es convergente.

b) Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+3^{n+4}}{4^{n+1}}$. (1 pto.)

Solución:

Esta serie se puede poner como suma de dos series que son, básicamente, series geométricas. Haciendo algunos cálculos obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+3^{n+4}}{4^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}+\frac{3^{n+4}}{4^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+4}}{4^{n+1}}$$

$$\frac{-1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n + \frac{3^4}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Como tanto $\frac{-1}{4}$ como $\frac{3}{4}$ son números cuyo valor absoluto es menor que 1, entonces ambas series son convergentes, lo que justifica la convergencia de la serie con la que estamos trabajando. Además hemos visto en clase que, si $|r| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r},$$

con lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}.$$

En nuestros casos tendremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n = \frac{\frac{-1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{-1}{5},$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3,$$

con lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+3^{n+4}}{4^{n+1}} = \left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)+\left(\frac{3^4}{4}\right)\cdot 3 = \frac{1}{20}+\frac{243}{4} = \frac{304}{5}.$$