Cálculo
1º Grado en Ingeniería Informática
Examen de Septiembre
Curso 2015/16

1. Calcula:

   a) **(1.25 puntos)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)^{1/x^2}$.

   b) **(1.25 puntos)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)+x$.

Solución:

a) Se presenta una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que aplicamos la regla del número e. Tendremos que calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{e^x-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\operatorname{sen}(x)-1-\operatorname{sen}^2(x)}{x^2\left(1+\operatorname{sen}^2(x)\right)}$$

Pero como $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}^2(x))=1$, nos limitaremos a calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\operatorname{sen}(x)-1-\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}$$

donde se presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Aplicamos entonces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2x}$$

y volvemos a aplicarla ya que se sigue presentando la misma indeterminación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)-2\cos^2(x)+2\operatorname{sen}^2(x)}{2}=\frac{-1}{2}$$

Por tanto el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)^{1/x^2}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

b) En primer lugar, simplificamos la expresión del límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)+x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^2\operatorname{sen}(x)}+x\right)$$

Nos centramos en el primer sumando que presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Aplicamos entonces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{2x\operatorname{sen}(x)+x^2\cos(x)}$$

donde volvemos a aplicar la misma regla.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)+2x\cos(x)-x^2\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\operatorname{sen}(x)+4x\cos(x)-x^2\operatorname{sen}(x)}$$

que vuelve a presentar una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$":

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\operatorname{sen}(x)+4x\cos(x)-x^2\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{6\cos(x)-6x\operatorname{sen}(x)-x^2\cos(x)} = \frac{-1}{6}$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)+x = \frac{-1}{6}$.

2. **(1.25 puntos)** Comprueba la desigualdad siguiente: $x-1 \leq \log(x^x)$, para todo $x>0$.

Solución: Utilizando propiedades de la función logaritmo tenemos:

$$x-1\leq \log(x^x), \forall x>0 \Leftrightarrow x-1\leq x\log(x)\ , \forall x>0$$

Vamos entonces a estudiar la función $f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x\log(x)-x+1$$

Para comprobar la desigualdad propuesta tendremos que comprobar que $f(x)\geq 0$, para todo $x>0$. La función f es derivable en su dominio. Calculamos su derivada:

$$f'(x) = \log(x)+x\frac{1}{x}-1 = \log(x)+1-1 = \log(x)$$

Por tanto, $f'(x)=\log(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. La función f tiene un único punto crítico en $x=1$. Si volvemos a derivar:

$$f''(x) = 1/x \ \Rightarrow\ f''(1) = 1 > 0$$

de lo que deducimos que f alcanza en 1 un mínimo relativo, que al ser el único punto crítico, se convierte en el mínimo absoluto. Como además $f(1)=0$ obtenemos que

$$f(x)\geq f(1) = 0\ , \forall x>0\ ,$$

como queríamos demostrar.

3. **(1.5 puntos)** El polinomio de Taylor de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de orden 2 centrado en $a = 0$ es:

$$2 - x - x^2 \ .$$

Calcula el polinomio de Taylor de igual orden y centro de la función $g(x) = \operatorname{sen}(f(x) - 2)$.

Solución: Sea $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 2 - x - x^2$ el polinomio de Taylor que conocemos. Igualando coeficientes tenemos:

$$f(0) = 2 \ , f'(0) = -1 \ , f''(0) = -2$$

Vamos ahora a calcular $T_2(x)$, el polinomio de Taylor que nos piden. Es decir:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2$$

Para ello, calculamos los coeficientes:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \operatorname{sen}(f(x) - 2) \Rightarrow g(0) = \operatorname{sen}(f(0) - 2) = \operatorname{sen}(0) = 0 \\
g'(x) &= f'(x)\cos(f(x) - 2) \Rightarrow g'(0) = -1 \\
g''(x) &= f''(x)\cos(f(x) - 2) - f'(x)^2 \operatorname{sen}(f(x) - 2) \Rightarrow g''(0) = -2
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$T_2(x) = -x - x^2 \ .$$

4. **(1.25 puntos)** Calcula $\displaystyle\int \tan^5(x)\,dx$.

Solución: Escribimos el integrando en función del seno y del coseno:

$$\int \tan^5(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{\cos^5(x)}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{\cos^5(x)}\operatorname{sen}(x)\,dx$$

Aplicamos el cambio de variable: $t = \cos(x)$ y utilizamos $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - t^2$. De esta forma la integral nos queda:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5(x)\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{\cos^5(x)}\operatorname{sen}(x)\,dx = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^5}\,dt = \int \frac{-t^4 + 2t^2 - 1}{t^5}\,dt \\
&= \int \left(-\frac{1}{t}\right)dt + 2\int t^{-3}\,dt - \int t^{-5}\,dt = -\log(|t|) - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{t^4} + C \\
&= -\log(|\cos(x)|) - \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{4\cos^4(x)} + C
\end{aligned}$$

5. **(1.5 puntos)** Comprueba la siguiente identidad:

$$\int_{1/e}^{\tan(x)} \frac{t}{1+t^2}\,dt + \int_{1/e}^{\operatorname{cotan}(x)} \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt = 1\,, \forall x \in]0,\pi/2[\;.$$

Solución: Definimos la función $f\colon\,]0,\pi/2[\to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \int_{1/e}^{\tan(x)} \frac{t}{1+t^2}\,dt + \int_{1/e}^{\operatorname{cotan}(x)} \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt$$

Tendremos que comprobar que $f(x) = 1$ en todo su dominio; es decir, que f es constante igual a 1. Como se trata de una función derivable (por el teorema fundamental del Cálculo y gracias a que ambos integrandos son funciones continuas), para comprobar que es constante en el intervalo dado, bastará con comprobar que su derivada es constantemente cero. Calculamos, entonces, la derivada de f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}\,(1+\tan^2(x)) - \frac{1}{\operatorname{cotan}(x)(1+\operatorname{cotan}^2(x))}\,(1+\operatorname{cotan}^2(x)) \\ &= \tan(x) - \frac{1}{\operatorname{cotan}(x)} = \tan(x) - \tan(x) = 0\;, \forall x \in]0,\pi/2[\;. \end{aligned}$$

Sabemos entonces que f es constante. Evaluamos en el punto $x = \pi/4$ para comprobar que es constante igual a 1. En efecto,

$$\begin{aligned} f(\pi/4) &= \int_{1/e}^{\tan(\pi/4)} \frac{t}{1+t^2}\,dt + \int_{1/e}^{\operatorname{cotan}(\pi/4)} \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt = \int_{1/e}^{1} \frac{t}{1+t^2}\,dt + \int_{1/e}^{1} \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt \\ &= \int_{1/e}^{1} \left(\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{t(1+t^2)}\right) dt = \int_{1/e}^{1} \frac{t^2+1}{t(1+t^2)}\,dt = \int_{1/e}^{1} \frac{1}{t}\,dt \\ &= [\log(t)]_{1/e}^{1} = \log(1) - \log(1/e) = \log(e) = 1 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que la identidad es cierta.

6. *a*) **(1 punto)** Estudia la convergencia de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n}$.

   b) **(1 punto)** Calcula $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{6^{n+1}}$.

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} 3^{-1} \to \frac{e}{3} < 1$$

Por tanto, la serie es convergente.

b) Descomponemos el término general de la serie:

$$\frac{(-1)^n+2^n}{6^{n+1}} = \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{6}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{6}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Se trata de una combinación lineal de dos series convergentes (son geométricas de razón -1/6 y de razón 1/3), por lo que la serie dada también es convergente.

Para calcular la suma de la serie:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{6^{n+1}} &= \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{6}\right)^n + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{6}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ &= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{1+1/6}-1\right)+\left(\frac{1}{1-1/3}-1\right)\right] = \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{84}\end{aligned}$$

Granada, 6 de septiembre de 2016