Grado en Ingeniería Informática
Examen Final
Curso 2013/2014

1. *a*) Calcula el siguiente límite (1 punto)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

Solución. Dado que la sucesión $\left\{\sqrt{n}\right\}$ es estrictamente creciente y su límite es $+\infty$, podemos aplicar el criterio de Stolz para resolver el límite pedido. En este caso, tenemos que calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = 2.$$

b) Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia por $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, para cualquier número natural n. (1 punto)

Solución.

- En primer lugar vamos a comprobar que la sucesión es decreciente usando el principio de inducción:
  - $x_1 = 3 \geq x_2 = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$.
  - Supongamos que, para un número natural fijo, se cumple que $x_n \geq x_{n+1}$, ¿es cierto que $x_{n+1} \geq x_{n+2}$?. Usando que la función raíz cuadrada es creciente, se comprueba fácilmente:

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \geq \sqrt{2 + x_{n+1}} = x_{n+2}.$$

- Como la sucesión está acotada, ya que $0 \leq x_n \leq x_1 = 3$, para cualquier número natural n, se tiene que la sucesión es convergente.

- No es necesario calcular el límite L de la sucesión aunque se puede comprobar que, por satisfacer la ecuación $L = \sqrt{L+2}$, su valor es $L = 2$.

2. Estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas (2 puntos)

   a) $\sum \frac{1}{n \log\left(\sqrt{n}\right)}$.

   Solución. Vamos a usar el criterio de condensación (el término general es una sucesión decreciente y con límite cero). Éste nos dice que la serie tiene el mismo carácter que la serie

   $$\sum \frac{2^n}{2^n \log\left(\sqrt{2^n}\right)} = \sum \frac{1}{\log\left(2^{n/2}\right)} = \frac{1}{2\log(2)} \sum \frac{1}{n}$$

   que sabemos que no es convergente. Por tanto, la serie original no es convergente.

   b) $\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$.

   Solución. Si aplicamos el criterio del cociente,

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)(2n+2)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1,$$

   obtenemos que el límite es uno y, además, nos estamos acercando a uno por valores más pequeños, con lo que este criterio no da ninguna información. Aplicamos el criterio de Raabe y estudiamos el límite siguiente.

   $$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

   Como el límite es menor que uno, la serie no es convergente.

3. Calcula los siguientes límites (2 puntos)

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{x \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\, dt}{\operatorname{sen}^2(x)}$.

   Solución. Podemos aplicar la primera regla de L'Hôpital y estudiar el límite

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\, dt + x\, e^{-\operatorname{sen}^2(x)} \cos(x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}.$$

Resolvemos cada sumando del límite anterior por separado. El segundo es inmediato si recordamos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x = 1$, con lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\, e^{-\operatorname{sen}^2(x)} \cos(x)}{2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)} = \frac{1}{2}.$$

Para calcular el límite del primer sumando usamos de nuevo la primera regla de L'Hôpital, pero antes observa que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\, dt}{2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\, dt}{2 \operatorname{sen}(x)}$$

ya que $\cos(0) = 1$. Aplicamos primera regla de L'Hôpital a este segundo límite lo que simplifica un poco los cálculos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}^2(x)} \cos(x)}{2 \cos(x)} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\, dt}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1 + \tan(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \frac{x^3}{3} - x\right)^{1/x^2}$.

Solución. Lo resolvemos aplicando la regla del número e ya que estamos ante una indeterminación de la forma 1^∞. El límite que tenemos que estudiar es

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \frac{x^3}{3} - x}{x^2}$$

que se resuelve aplicando la primera regla de L'Hôpital dos veces y se obtiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \frac{x^3}{3} - x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x) + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + x^2}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x)\left(1 + \tan^2(x)\right) + 2\cos^2(x) - 2\operatorname{sen}^2(x) + 2x}{2} = 1.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \tan(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \frac{x^3}{3} - x\right)^{1/x^2} = e.$$

4. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como (2 puntos)

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - m.$$

Estudia la monotonía, la imagen y el número de ceros de la función f en función del parámetro real m.

Solución. La función es derivable en toda la recta real y su derivada es

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6\left(x^2 - x - 2\right).$$

Los puntos críticos de la función son

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1, 2.$$

Como $f'(-2) > 0$, $f'(0) < 0$ y $f'(3) > 0$,

- la función es estrictamente creciente en $]-\infty, -1]$,
- la función es estrictamente decreciente en $[-1, 2]$, y
- la función es estrictamente creciente en $[2, +\infty[$.

Para calcular su imagen y los ceros, calculemos su valor en los puntos críticos y en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ f(-1) = 7 - m,\ f(2) = -20 - m,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, la imagen de la función es $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

En cuanto al número de ceros, estos dependen del valor de la función en -1 y 2. En concreto,

- si $7 - m < 0$ o, lo que es lo mismo $m > 7$, la función sólo se anula una vez y dicho cero está en el intervalo $]2, +\infty[$;
- si $m = 7$, la función tiene dos ceros: uno en -1 y otro en el intervalo $]2, +\infty[$;
- si $-20 < m < 7$, la función tiene tres ceros;
- si $m = -20$, la función tiene dos ceros: uno en 2 y otro en el intervalo $]-\infty, -1[$; y, por último,
- si $m < -20$, la función tiene un único cero y dicho cero está en el intervalo $]-\infty, -1[$.

5. Se considera la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2}{x}$. (2 puntos)

   a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto $(a, f(a))$.

b) Calcula los puntos de corte de la recta tangente del apartado anterior con los ejes de coordenadas.

c) Consideremos el segmento cuyos extremos son los puntos de corte de la recta tangente con los ejes de coordenadas. ¿Para que valor de a dicho segmento tiene longitud mínima?

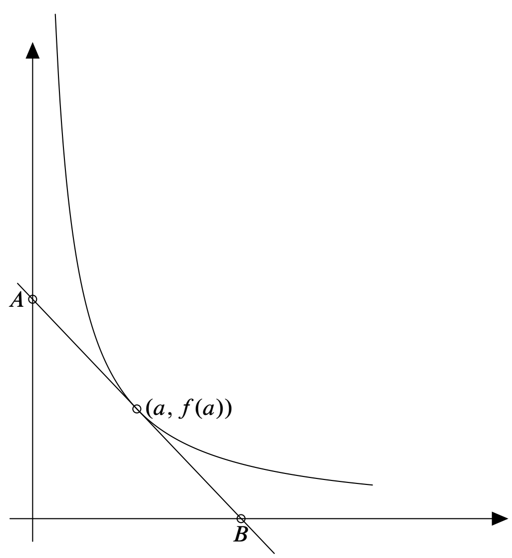
Solución.

La ecuación de la recta tangente a una función f en un punto a es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Como $f(x) = 2/x$ y $f'(x) = -2/x^2$, la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ es

$$y = \frac{2}{a} - \frac{2}{a^2}(x - a).$$



El punto de corte con el eje OX se obtiene haciendo $y = 0$, con lo que

$$0 = \frac{2}{a} - \frac{2}{a^2}(x - a) \iff x = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2}{2} + a = 2a,$$

o, lo que es lo mismo, corta en el punto $B = (2a, 0)$.

El punto de corte con el eje OY se obtiene haciendo $x = 0$, esto es,

$$y = \frac{2}{a} - \frac{2}{a^2}(0 - a) = \frac{4}{a},$$

o, lo que es lo mismo, corta en el punto $A = (0, 4/a)$.

La distancia entre ambos puntos es

$$\operatorname{dist}\big((2a,0),(0,4/a)\big) = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{4}{a}\right)^2} = \frac{2\sqrt{a^4+4}}{a}.$$

Por tanto, estamos buscando el mínimo de la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida como

$$g(a) = \frac{2\sqrt{a^4+4}}{a}.$$

Su derivada es

$$g'(a) = \frac{2a^4-8}{a^2\sqrt{a^4+4}}$$

que se anula en $a = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Podemos comprobar que ese punto es el mínimo absoluto de varias formas:

- Es el único punto crítico y $g''(\sqrt{2}) > 0$.
- Como $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, la función g es decreciente en $]0,\sqrt{2}]$ y creciente $[\sqrt{2},+\infty[$.

Cualquiera de los dos motivos anteriores justifica que la función alcanza su mínimo cuando $a = \sqrt{2}$.

Granada, 28 de enero de 2014