问题求解与实践
——多项式插值问题

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

多项式插值问题

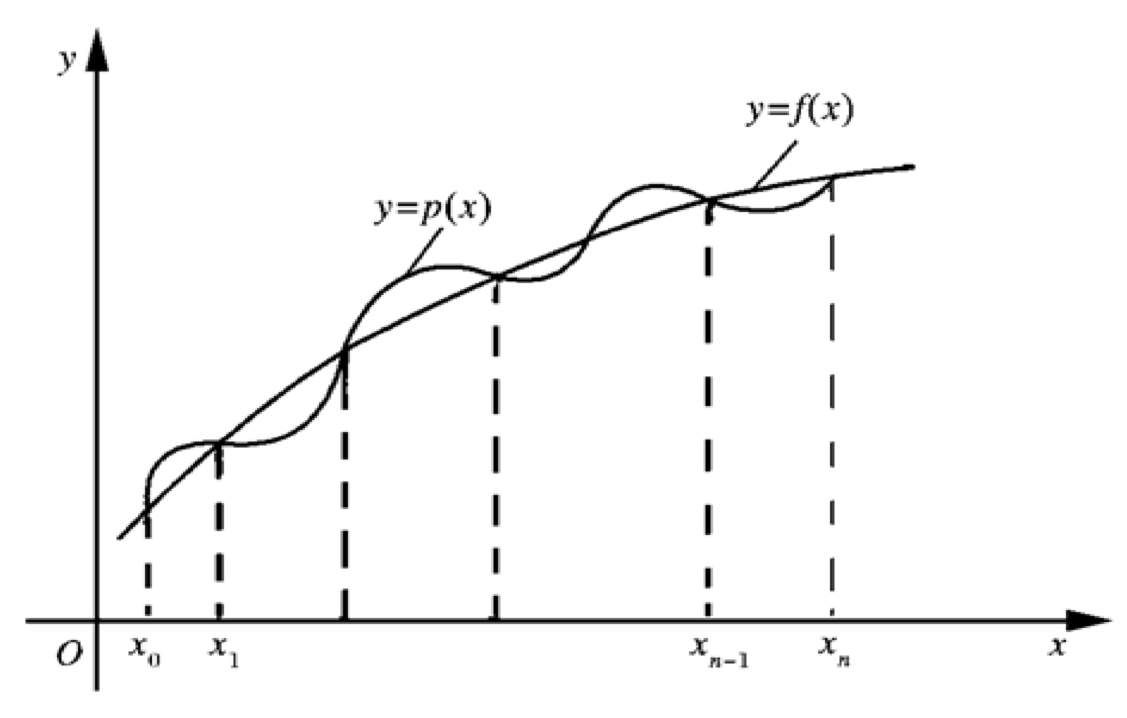
- 设 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个实函数，$x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 是区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个互异实数，已知 $f(x)$ 在 x_i 的值 y_i，求一个次数不超过 n 的多项式 $P_n(x)$ 使其满足 $P_n(x_i)=y_i$，这就是多项式插值问题

$P_n(x)$ 称为 $f(x)$ 的 n 次插值多项式，

(x_i, y_i) 称为插值点

多项式插值问题

◆ 插值问题几何解释



$P_n(x)$ 是一条多项式曲线，

它通过已知的 $P_n(x)$ 个点

(x_i, y_i) ， $(i = 0,1,\cdots,n)$

多项式插值问题——拉格朗日插值

- 基函数法基本思路：

如果找到一系列多项式函数 $l_k(x)$，使得该函数在 x_k 处取值为**1**，在其他插入点x_j 处（这里 $j \neq k$）为**0**，那么函数 $P(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)$在 x_k 处的值仅仅由 $l_k(x)$ 决定，且数值为**1**。

- 那么函数

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$$

就是我们要找的插值多项式。

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x_k) \\ &= y_k l_k(x_k) \\ &= y_k \end{aligned}$$

多项式插值问题——拉格朗日插值

插值多项式的构造过程:

首先构造:
$$l_k(x) = \begin{cases} 1 & x = x_k \\ 0 & x = x_j \quad j \neq k \end{cases}$$

$l_k(x)$ 为次数不超过 n 的多项式

进一步构造:
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$$

多项式插值问题——拉格朗日插值

■ $l_k(x)$ 如何构造呢?

由于 $l_k(x)$ 有 n 个零点 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$ 个零点

又因为 $l_k(x_i)$ 为次数不超过 n 的多项式

$$l_k(x) = c(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$$

其中，c 为常数待定系数。

又由于 $l_k(x_k)=1$ 故 $c = \dfrac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

最后 $$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

多项式插值问题——拉格朗日插值

■ 实际使用拉格朗日插值方法时

一般不考虑得到插值多项式的解析形式（即求解下面多项式的系数)

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

因为得到系数是一个很麻烦的过程。

直接用 $l_k(x)$ 计算某个位置的近似值是最常见的应用方式

■ 用拉格朗日插值解决下面问题

已知： x 轴上 $x[0], x[1],\ldots, x[n]$

函数值： $y[0], y[1],\ldots, y[n]$

利用插值函数求在 xx 处的近似值

多项式插值问题——拉格朗日插值

■ 编程思路——如何计算 $l_k(xx)$？

利用循环累乘即可

```
S=1;
for(j=0;j<=n;j++)
    if(j!=k) S =S * (xx-x[j])/(x[k]-x[j]);
```

注意这里！！

改为计算 $y[k]l_k(xx)$，则

```
S= y[k];
for(j=0; j<=n; j++)
    if(j!=k) S =S * (xx-x[j])/(x[k]-x[j]);
```

得到的 S 只是多个需要被累加的数值之一

多项式插值问题——牛顿插值

- 从理论上讲，一个n次多项式一定可以写成任何一个0次、一个1次、一个2次、……、一个n次多项式的线性组合

- 于是插值多项式的形式一定可以写成

  1、x-x_0、(x-x_0)(x-x_1) 、 …、 (x-x_0)(x-x_1)(x-x_{n-1})

  的线性组合，这就是牛顿多项式插值

- 牛顿插值多项式的形式可以写成:

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

多项式插值问题——牛顿插值

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

只讨论一种简化的问题，假定 $x_k=x_0+kh\ (k=0,1,\cdots,n)$ 是等距节点

$$N_n(x_0)=a_0=y_0 \quad \longrightarrow \quad a_0=y_0$$

$$N_n(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)=y_1 \quad \longrightarrow \quad a_1=(y_1-y_0)/h=\frac{\Delta y_0}{h}$$

$$N_n(x_2)=\cdots\cdots=y_2 \quad \longrightarrow \quad a_2=\frac{\Delta y_1-\Delta y_0}{2h^2}=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$ $\quad a_k=\dfrac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}$

多项式插值问题——牛顿插值

$$N_n(a+th)=y_0+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}h^k\prod_{i=0}^{k-1}(t-i)\right)=y_0+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\Delta^k y_0}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(t-i)\right)$$

函数差分表

x	$f(x)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	…
x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_0			
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$		……
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
…	…	…	…	…	

初值

多项式的系数