

问题求解与实践

——多项式乘法和除法

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

多项式乘法和除法

- 这里仅考虑一元多项式乘法和除法

- 乘法

假定两个多项式 $A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 和 $B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ 相乘, 其结果放到多项式 $C(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$ 中

- 除法

假定两个多项式做除法, $P(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_mx^m$ 为被除式,
 $Q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n$ 为除式, $T(x) = t_0 + t_1x + \cdots + t_{m-n}x^{m-n}$ 为商式,
 $R(x) = r_0 + r_1x + \cdots + r_kx^k$ 为余式

一元多项式的运算

- ◆ 首先需要将多项式存储到计算机中，其次才能谈多项式之间如何运算
- ◆ 最直观的方法是：将多项式对应 x^0, x^1, \dots, x^n 的系数存储在数组的下标为 $0, 1, \dots, n$ 的位置中，这样数组的数据就是系数，而下标的值就是指数

$$1 + 2x + 0x^2 + x^3 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

- ◆ 按这种方式存储，则多项式的加法、减法运算就转化为数组对应项的加减运算。较为复杂的是乘法和除法运算。

一元多项式乘法

已知 $A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 和 $B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$

$$C(x) = A(x) \times B(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$$

$A(x) \times B(x)$ 中所有 $A(x)$ 的系数都要和 $B(x)$ 的系数相乘, 共有 $(m+1) \times (n+1)$ 项, 它们是 $a_i \times b_j$, 其中 $i = 0, 1, \cdots, n$ $j = 0, 1, \cdots, m$

```
for( i = 0; i <= n; i++ )
```

```
    for( j = 0; j <= m; j++ )
```

得到 $a[i] \times b[j]$ 用于计算 $C(x)$ 的系数;

一元多项式乘法

显然： $a_i \times b_j$ 作为对应结果中 x^{i+j} 项的系数的一部分，
一定是会累加到结果系数 c_{i+j} 中

于是，可以到到乘法的核心代码：

```
.....  
for(i=0;i<=m+n;i++) c[i]=0;    //C(x)最高次项为 $x^{m+n}$   
for(i = 0; i <= m; ++i)  
{  
    for(j = 0; j <= n; ++j)  
    {  
        c[i+j]=a[i]*b[j]+c[i+j];  
    }  
}
```

一元多项式除法

◆ 一元多项式除法可仿照整数的竖式除法，用减法实现带余项的除法

被除式 $x^3 - 3x^2 - x - 1$

除式 $3x^2 - 2x + 1$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\ 3x^2 - 2x + 1 \overline{) x^3 - 3x^2 - x - 1} \\ \underline{x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x} \\ -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 \\ \underline{-\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}} \\ -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9} \end{array}$$

■ 转化为数组时执行过程

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\
 3x^2 - 2x + 1 \overline{) x^3 - 3x^2 - x - 1} \\
 \underline{x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x} \\
 -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 \\
 \underline{-\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}} \\
 -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}
 \end{array}$$

Diagram illustrating the elimination of x from the second and third equations:

- Equation 1: $3x - 2y + z = 1$
- Equation 2: $x - 3y - z = -1$
- Equation 3: $x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$
- Equation 4 (Result of $E_3 - E_2$): $\frac{1}{3}y - \frac{4}{3}z = -\frac{2}{3}$
- Equation 5 (Result of $\frac{1}{3}E_1$): $x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$
- Equation 6 (Result of $E_2 + E_5$): $4x - 5y = -\frac{2}{3}$

■ 转化为数组时执行过程

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\
 3x^2 - 2x + 1 \overline{) x^3 - 3x^2 - x - 1} \\
 \underline{x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x} \\
 \frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 \\
 \underline{-\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}} \\
 \phantom{-\frac{7}{3}x^2 + } \frac{26}{9}x - \frac{2}{9}
 \end{array}$$

被除式

除式

$$\text{商式} \quad \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$$

Diagram illustrating the polynomial long division process:

Dividend: $x^3 - 3x^2 - x - 1$ (Coefficients: 3, -2, 1, -1)

Divisor: $x^2 + 1$ (Coefficients: 1, 0, 1)

Quotient: $x - 3$ (Coefficients: 1, -3)

Remainder: $-26x - 2$ (Coefficients: -26, -2)

The diagram shows the division steps, including the subtraction of the product of the divisor and the quotient from the dividend to find the remainder.

一元多项式除法

■ 核心代码

被除式 $x^3 - 3x^2 - x - 1$

$m=3$

除式 $3x^2 - 2x + 1$

$n=2$

商式 $\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$

$m-n=1$

余式 $-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$

.....

//商式 $T(x)$ 最高次项为 x^{m-n}

for(i = m-n; i >= 0; i--)

{

$T[i] = P[i+n]/Q[n];$ // 商式系数

for(j = n; j >= 0; j--)

{

$P[i+j] = P[i+j] - Q[j] * T[i];$

}

}

正确性：考察 $i=m-n, j=n$ 时, $P[i+j]$ 在内部循环中恰好为 $P[m], P[m-1], \dots, P[m-n]$