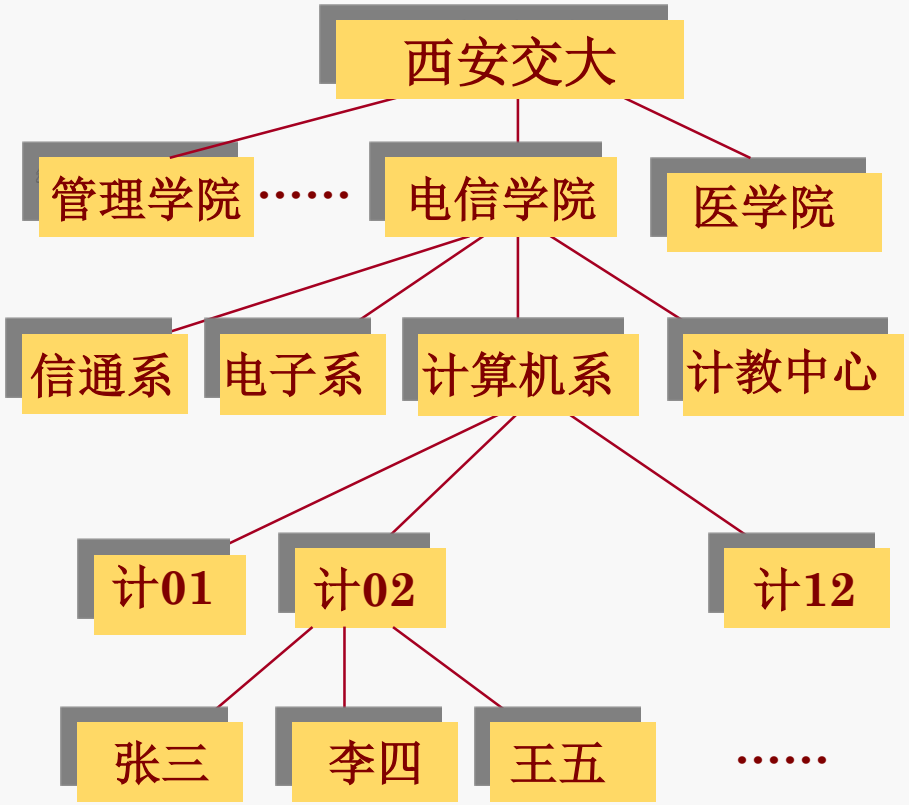
问题求解与实践
——树和二叉树

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

树的基本概念

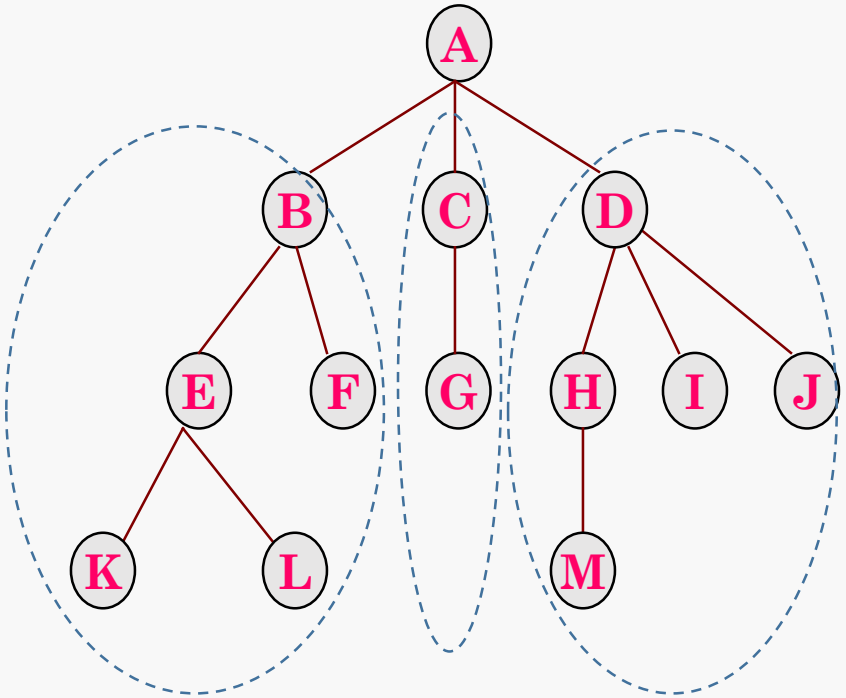
- 树形结构是逐层向下分支定义的层次结构
- 树形结构广泛存在客观世界中：家谱、行政区域划分、各种社会组织机构、操作系统中的目录等



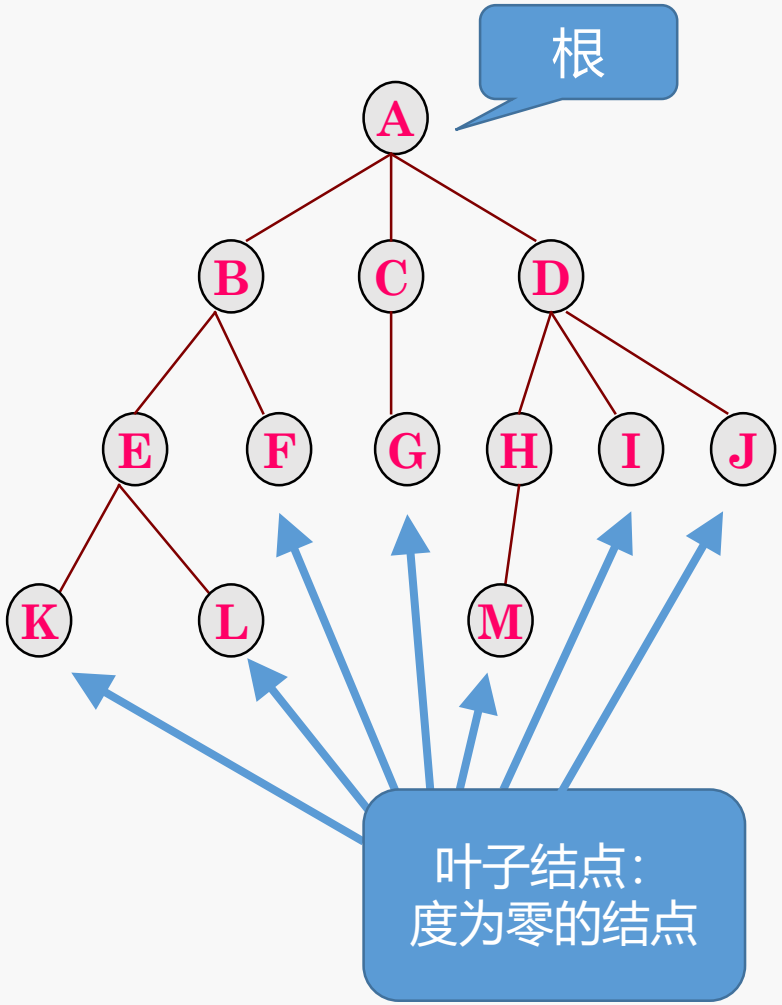
树的定义

树是一个或多个结点组成的有限集合T，有一个特定结点称为根，其余结点分为m（m≥0）个互不相交的集合T1，T2，…,Tm。每个集合又是一棵树，被称为这个根的子树。

一般的树



树的有关术语



- 结点的度：结点拥有的非空子树的个数。

  结点 A 度=3　　结点 C 度=1

- 树的度：树中所有结点的度中的最大值。

  这颗树 度=3

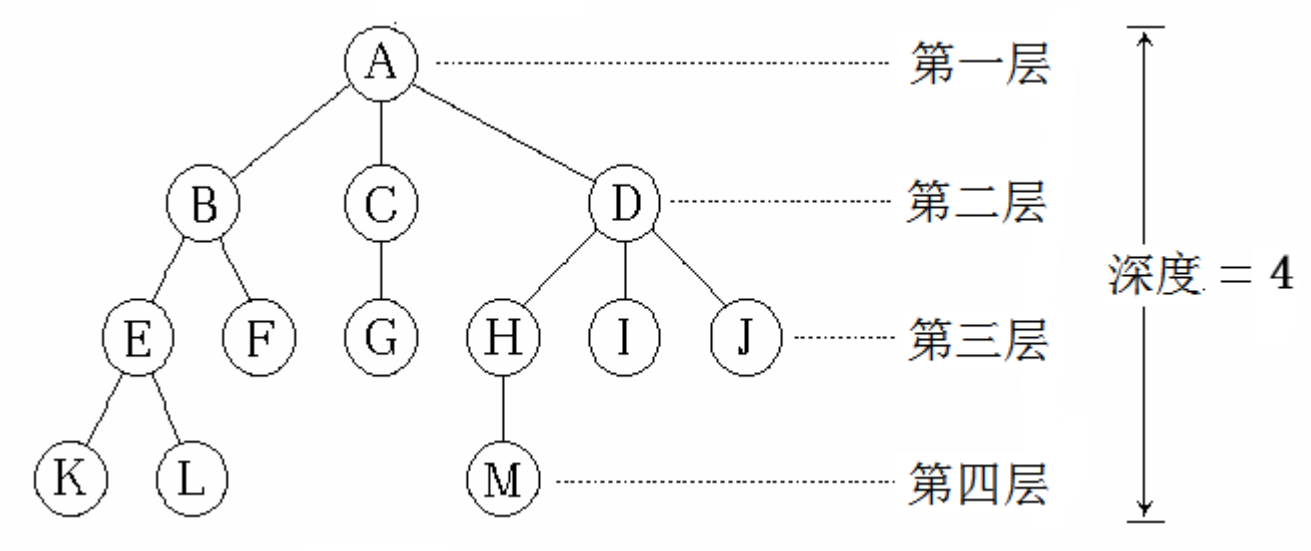
- 孩子结点和父结点：某结点所有子树的根结点都称为该结点的孩子结点，同时该结点也称为其孩子结点的父结点或双亲结点。

  A 的子结点 有B、C、D

  A是B、C、D父结点

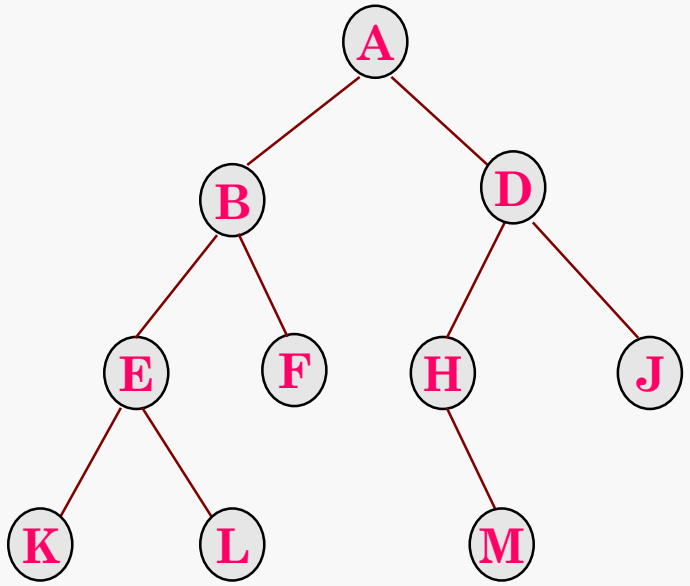
树的有关术语

- 结点的层次：根结点的层次为1,其子结点的层次为2。依次类推。
- 树的深度：树中结点所在的最大层次。
- 有序树和无序树：树中各结点的子树看成自左向右有序的，则称该树为有序树，否则称为无序树。



二叉树

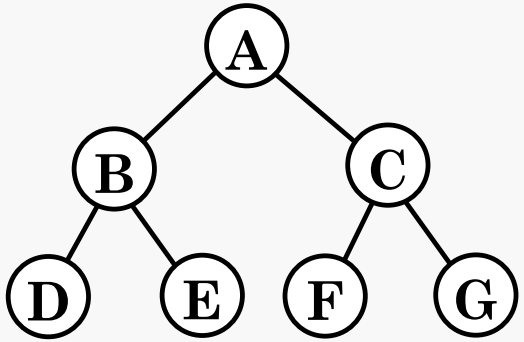
- 二叉树是每个节点最多有两个子树的树结构



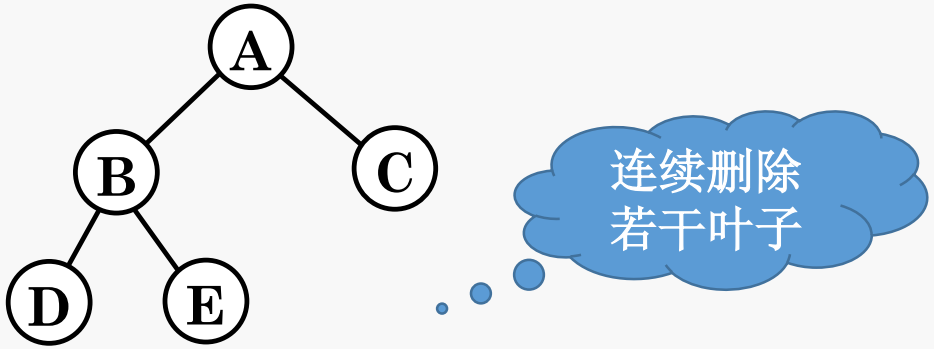
- 二叉树是有序树，结点的子树分别称为根的左子树和右子树

特殊形式的二叉树

- 满二叉树：当二叉树每个分支结点的度都是2，且所有叶子结点都在同一层上，则称其为满二叉树。
- 完全二叉树：从满二叉树叶子所在的层次中，自右向左连续删除若干叶子所得到的二叉树被称为完全二叉树。满二叉树可看作是完全二叉树的一个特例。



满二叉树



完全二叉树

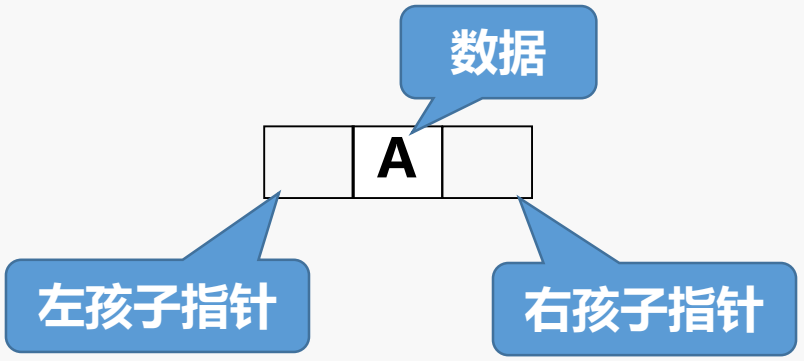
二叉树的实现——链式存储

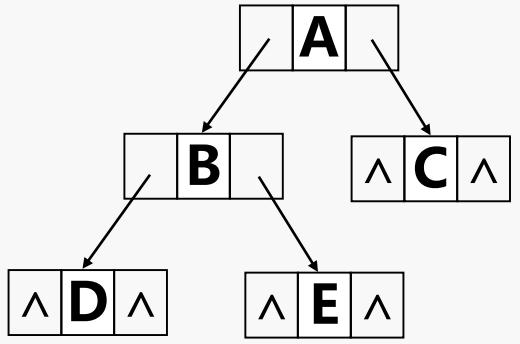
- 二叉树是一种非线性数据结构，描述的是元素间一对多的关系，这种结构最常用、最适合的描述方法是用链表的形式

- 首先定义结点

  每个结点都包含一个数据域和两个指针域。一般可采用下面的形式定义结点：

```
struct BinTreeNode {
        char data;                  // 这里以字符型的数据为例
        struct BinTreeNode  *leftChild,  *rightChild;
};
```





二叉树的实现——链式存储

- 定义一颗二叉树就是定义一个空树，也就是定义一个空指针，可描述如下：

```
BinTreeNode *root;      //定义根结点指针
root=NULL;              //定义空树
```

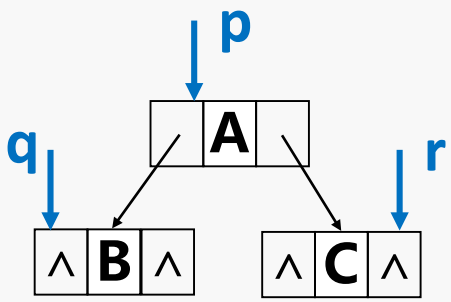
- 新建一个结点

```
BinTreeNode  *p = new BinTreeNode;
p->data =  'A' ;        //给数据域赋值
p->leftChild=NULL;      //左子树为空
p->rightChild=NULL;     //右子树为空
```

必须通过结点指针操作

- 建立二叉树

```
…… 建立结点A、B、C（方法如上面所示）
…… 指针p、q、r 分别指向结点A、B、C
p->leftChild=q;         //左孩子为B
p->rightChild=r;        //右孩子为C
```



问题求解与实践
——二叉树生成

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

完全二叉树的一个特性

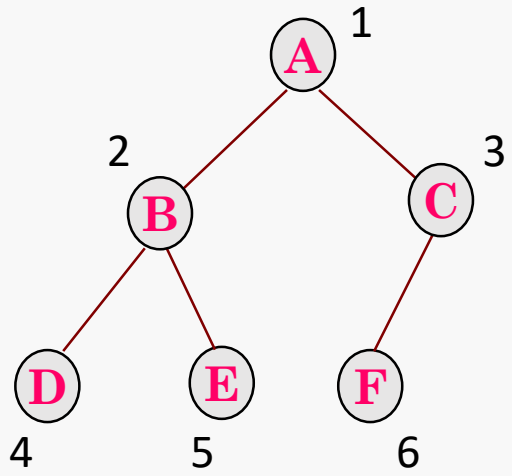
将完全二叉树的每个结点从上到下、每一层从左至右进行1至n的编号

- 性质：

① 若i=1，则该结点是二叉树的根，否则，编号为[i/2]的结点为结点 i 的父结点；

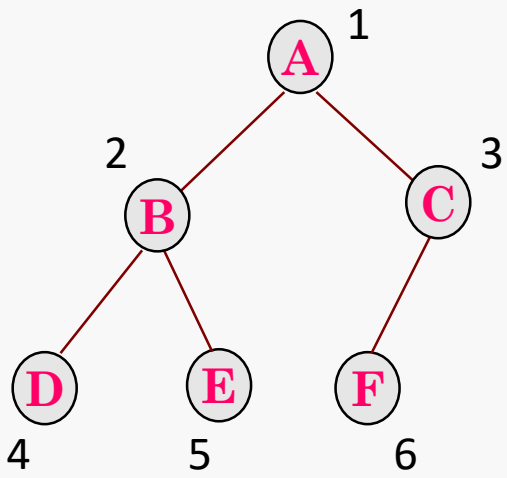
② 若2*i>n，则该结点无左孩子。否则，编号为2*i的结点为结点 i 的左孩子；

③ 若2*i+1>n，则该结点无右孩子。否则，编号为2*i+1的结点为结点 i 的右孩子。



完全二叉树的顺序存储

可以用一维数组存储：空出数组下标为0的位置，将结点存储在**下标为其编号的位置**。

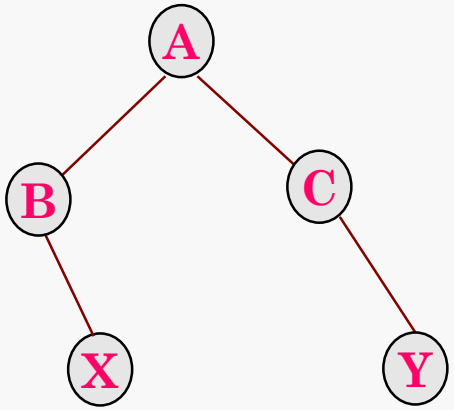


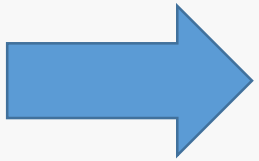
左孩子

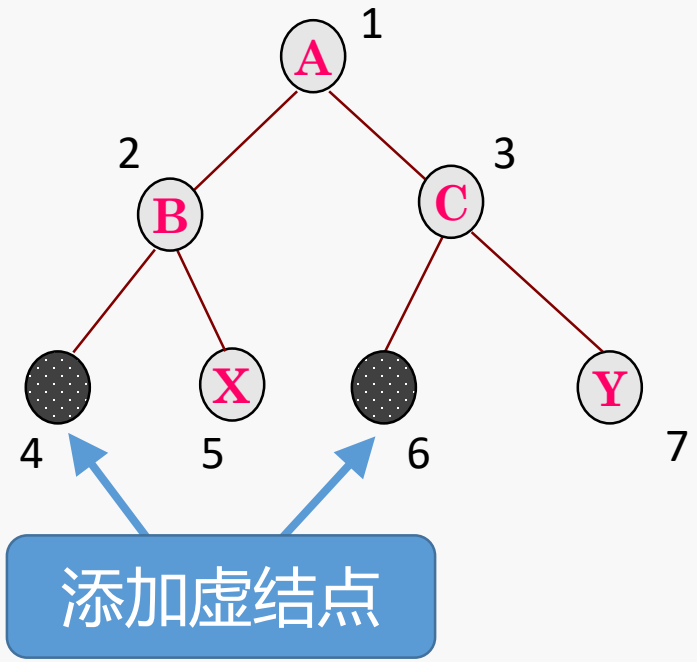
0	1	2	3	4	5	6
	A	B	C	D	E	F

左孩子

二叉树转换为完全二叉树后存储







存储情况

0	1	2	3	4	5	6	7
	A	B	C	#	X	#	Y

生成一个二叉树

可以有很多方式生成一个二叉树，这里我们讨论的问题为：

根据数组中存储的完全二叉树，生成一个链式结构的二叉树

比如将下面数组转换为链式结构的二叉树

0	1	2	3	4	5	6	7
	A	B	C	#	X	#	Y

其中#代表虚结点

生成一个二叉树

- **算法：**

  下标为1的元素作为根结点生成；

  依次处理数组中的其他元素：下标为 i 的元素，若 i 为偶数就作为 [i/2] 结点的左孩子，若 i 为奇数就作为 [i/2] 结点的右孩子生成；

  遇到虚元素就跳过，继续处理下一个元素。

- **问题：**

  1. 依次处理数组中元素，循环结束条件是什么？

     方法一：预先得到结点总数n（包括虚结点），循环n次

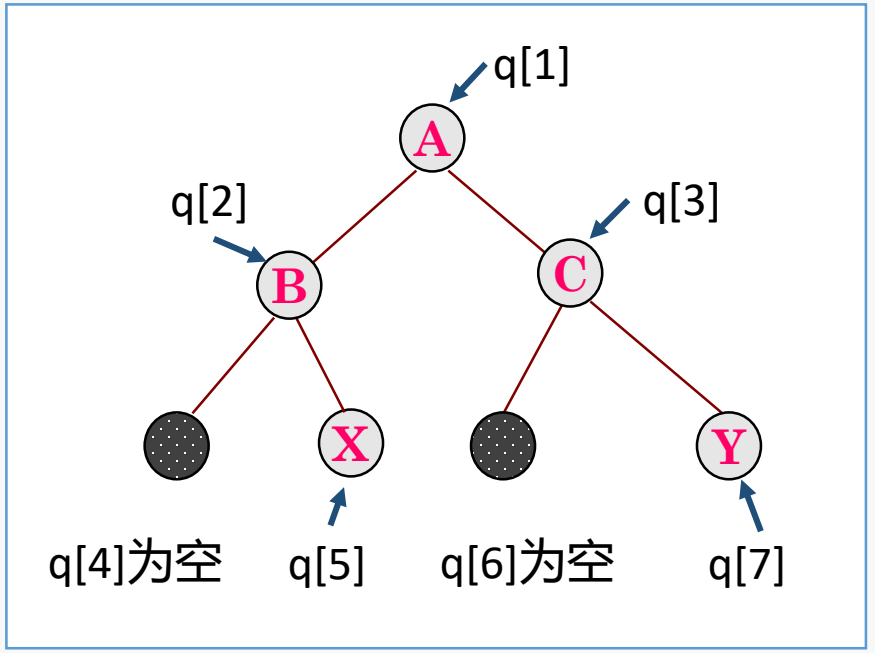
     方法二：在数组末尾加一个特殊符号（比如$），循环遇到该符号则停止

  2. 如何让结点 i 和父结点 [i/2] 连接起来？

     在链式结构中，由于对结点的操作要通过指针进行，所以先要得到结点 [i/2]和结点 i 的指针p和q，而后可利用p->leftChild=q或p->rightChild=q连接即可

生成一个二叉树伪代码

```
BinTreeNode* create( char  ch[] )  {
    BinTreeNode* q[100];          //定义结点指针数组，存放完全二叉树结点指针
    BinTreeNode *s, *root;        //定义结点指针s、根结点指针root;
    设下标 i 为 1;
    while( ch[i] !='$' ) {        // 字符 '$' 在数组中最后一个元素后面，结束循环
        if (ch != '#' ) {         // 不是虚结点时
            生成新结点( 指针为s )，设初值，并令 s->data = ch[i];
            if(i==1)   root = s;   // s就是根指针
            else {
                if(i为偶数)   q[i/2]->leftChild = s;
                else          q[i/2]->rightChild = s;
            }
            q[i] = s;      // 将指针s 保存在q[i]中
        } else  q[i] = NULL;
        i++;                //计数器i加1，准备处理下一个元素
    }
   返回root值;
}
```



问题求解与实践
——二叉树遍历

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

二叉树的遍历

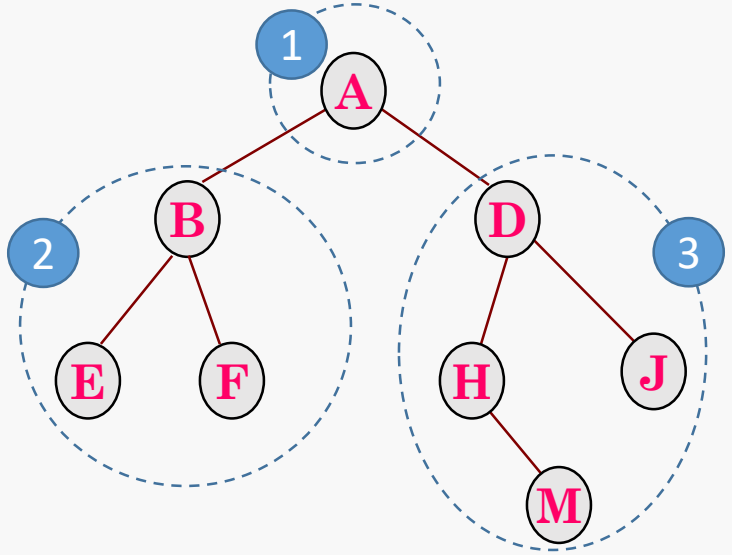
- 二叉树遍历是按照某种顺序访问二叉树的每个结点，并且每个结点只被访问一次

- 这里“访问”的含义是指取出结点数据计算、输出等，或对结点数据进行修改等操作

二叉树的三种遍历方式

1. 先序遍历

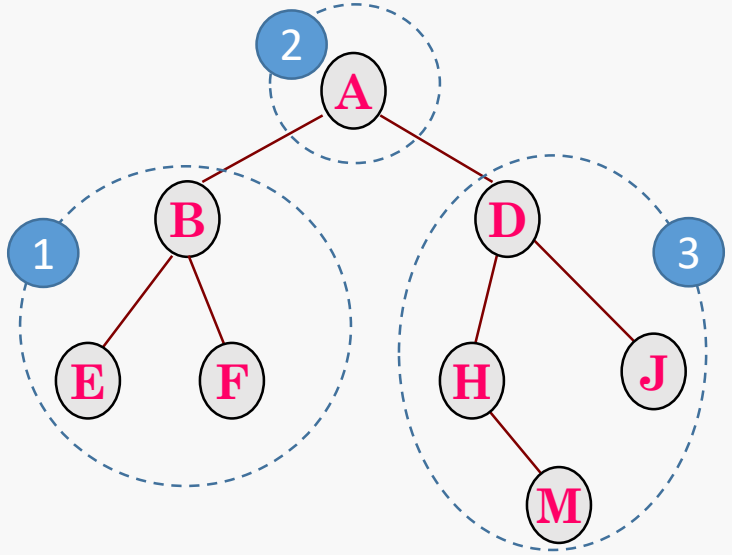
首先访问根，然后按先序遍历方式访问左子树，再按先序遍历方式访问右子树



二叉树的三种遍历方式

2. 中序遍历

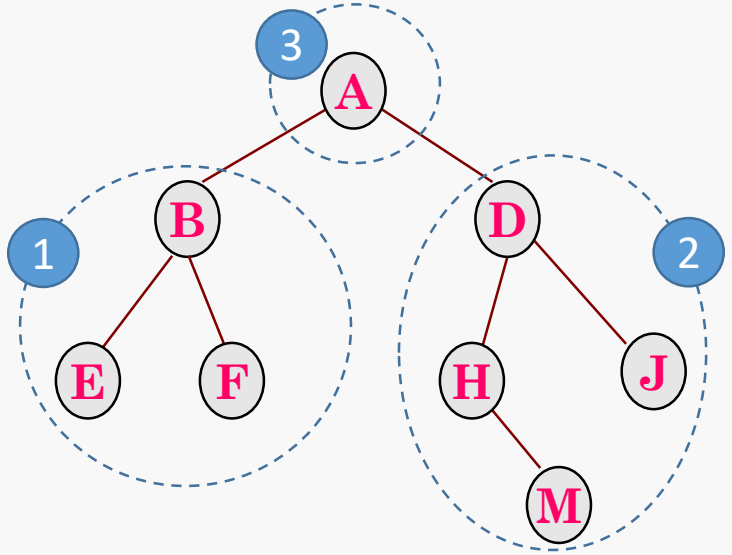
首先按中序遍历访问左子树，再访问根，最后按中序遍历方式访问右子树



二叉树的三种遍历方式

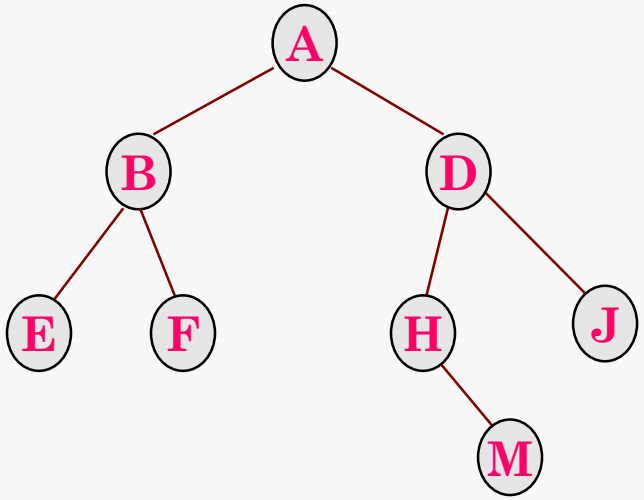
3. 后序遍历

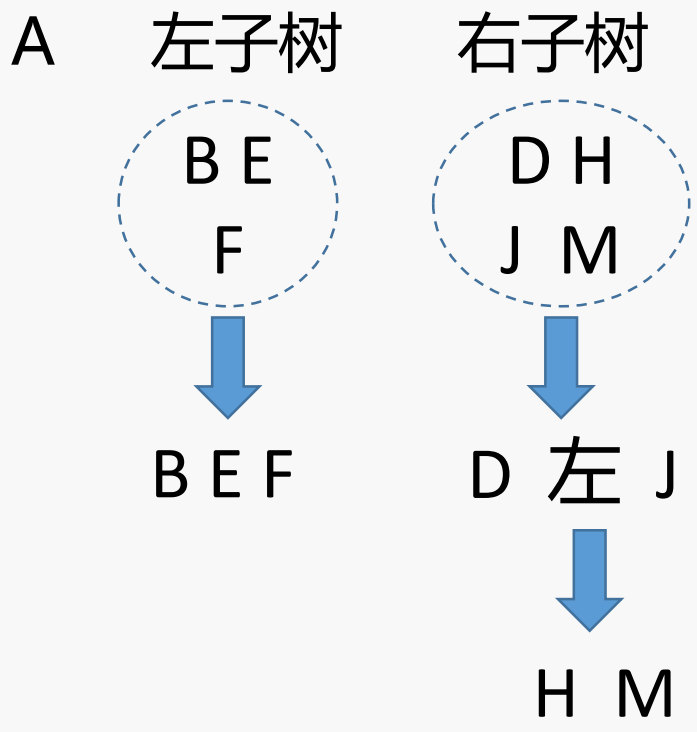
首先按后序遍历访问左子树，再按后序遍历方式访问右子树，最后访问根



二叉树先序遍历

- 如何确定先序遍历的访问顺序?

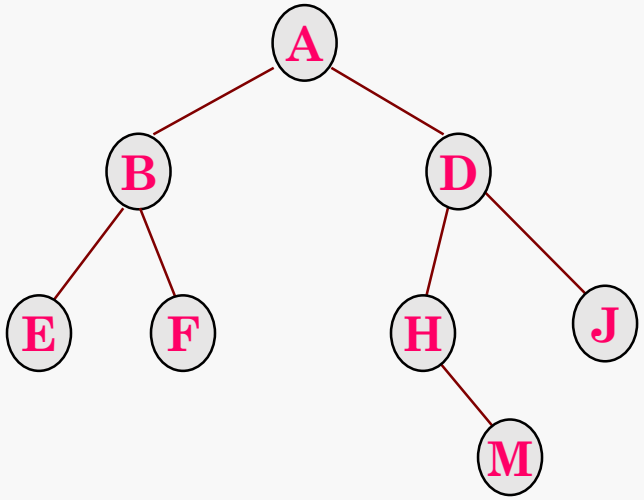


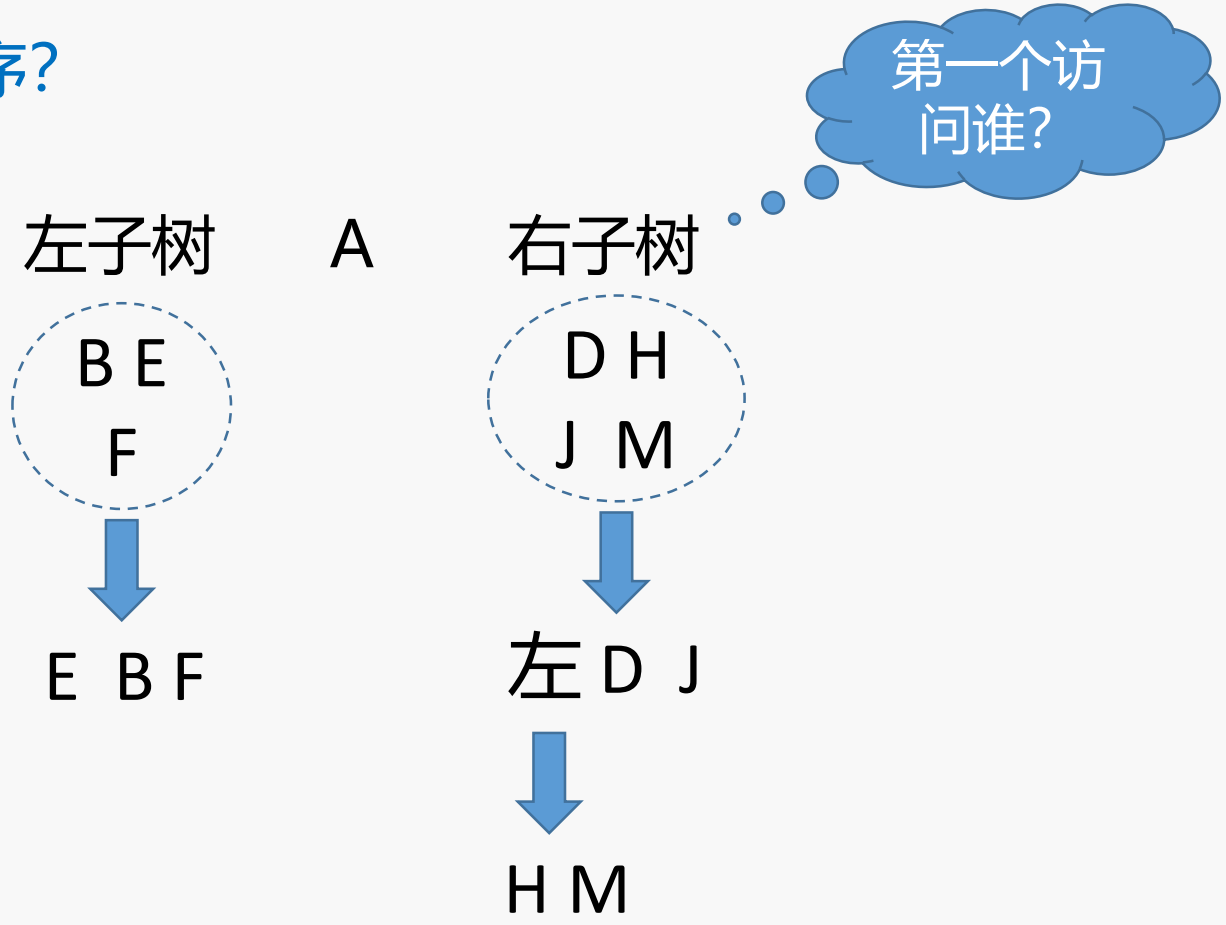


先序遍历：ABEFDHMJ

二叉树中序遍历

- 如何确定中序遍历的访问顺序?



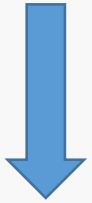


中序遍历：EBFAHMDJ

二叉树后序遍历顺序请自行练习

二叉树先序遍历的实现

1. 首先访问根
2. 然后按先序遍历方式访问左子树
3. 再按先序遍历方式访问右子树

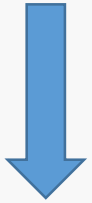


将以上步骤写成一个函数

```
先序遍历（根指针p）                    //只能通过根的指针进入二叉树
{
    visit（p结点）；                   // p结点——指针p指向的结点
    先序遍历（p->leftChild）；              // 先序遍历左子树
    先序遍历（p->rightChild）；             // 先序遍历右子树
}
```

二叉树先序遍历的实现

1. 首先访问根
2. 然后按先序遍历方式访问左子树
3. 再按先序遍历方式访问右子树



将以上步骤写成一个函数

这个递归函数能终止吗?

```
PreOrder（指针p）                    //访问以p为根的二叉树
{
    visit（p结点）；                 // 指针p指向的结点
    PreOrder （p->leftChild）；      // 先序遍历左子树
    PreOrder（p->rightChild）；      // 先序遍历右子树
}
```

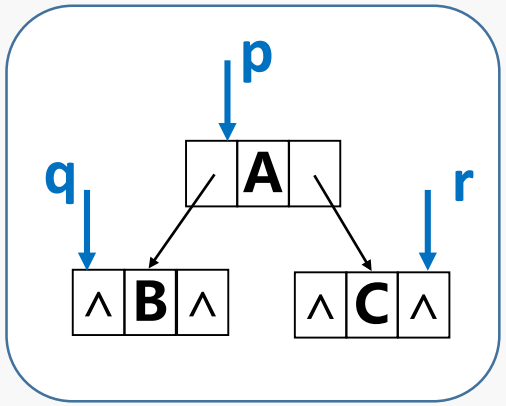
二叉树先序遍历的实现

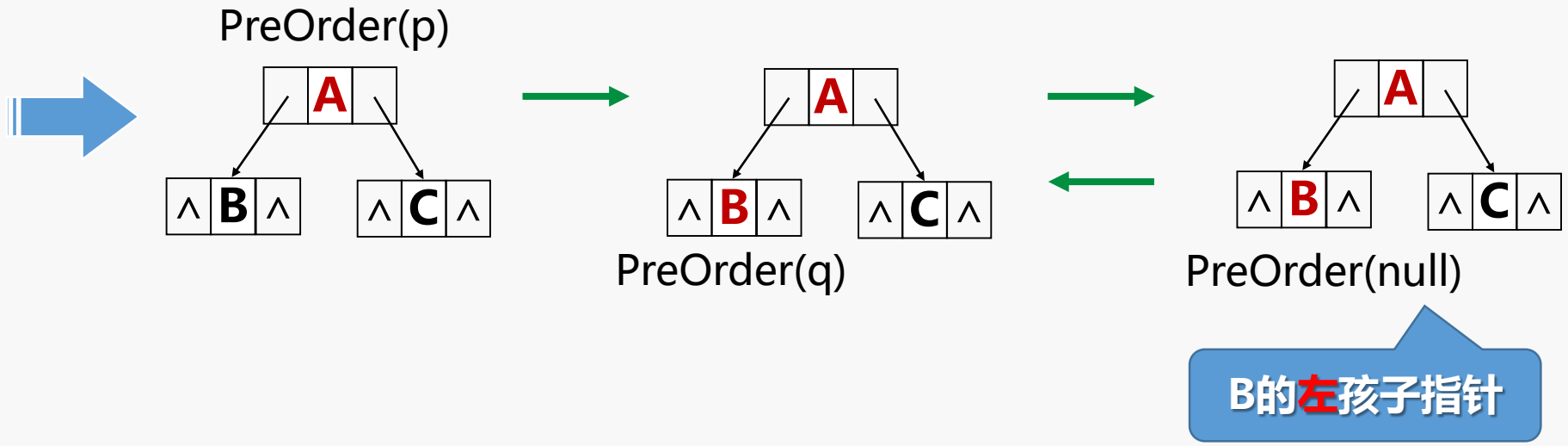
先序遍历算法如下：

```
void PreOrder(BinTreeNode *p)  {
    if (p) {
            Visit(p );                          //访问根结点
            PreOrder(p->leftChild );            //先序遍历左子树
            PreOrder(p->rightChild );           //先序遍历右子树
    }
}
```

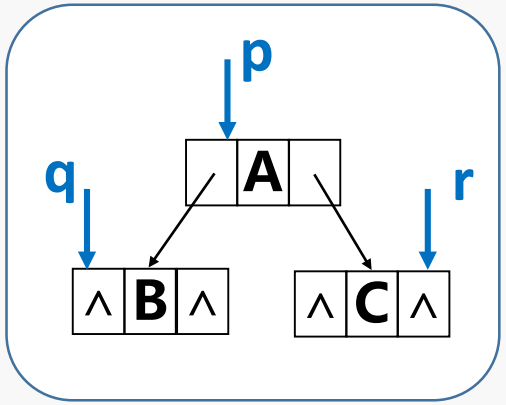
若遇到空指针则返回上一层函数

二叉树先序遍历执行过程

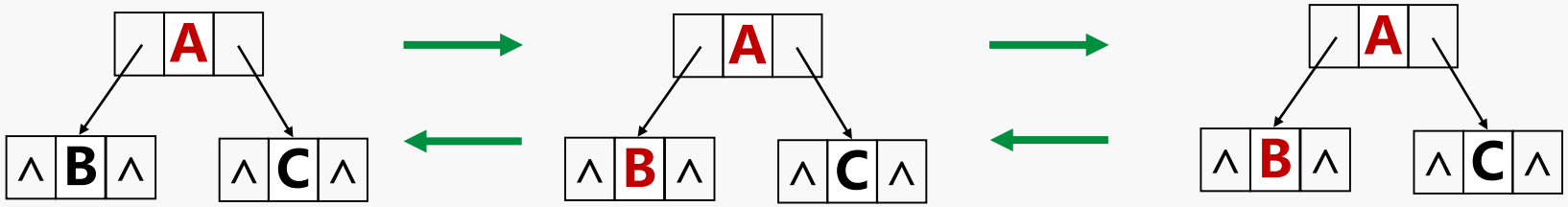




二叉树先序遍历执行过程



PreOrder(p)

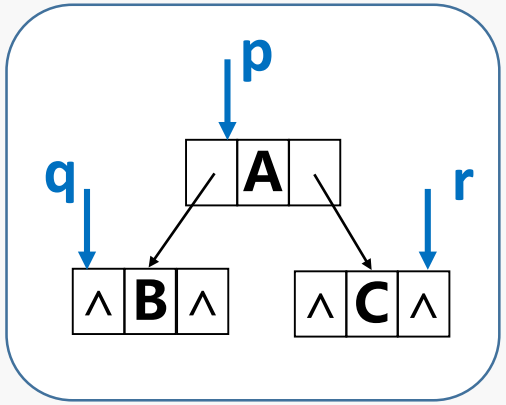


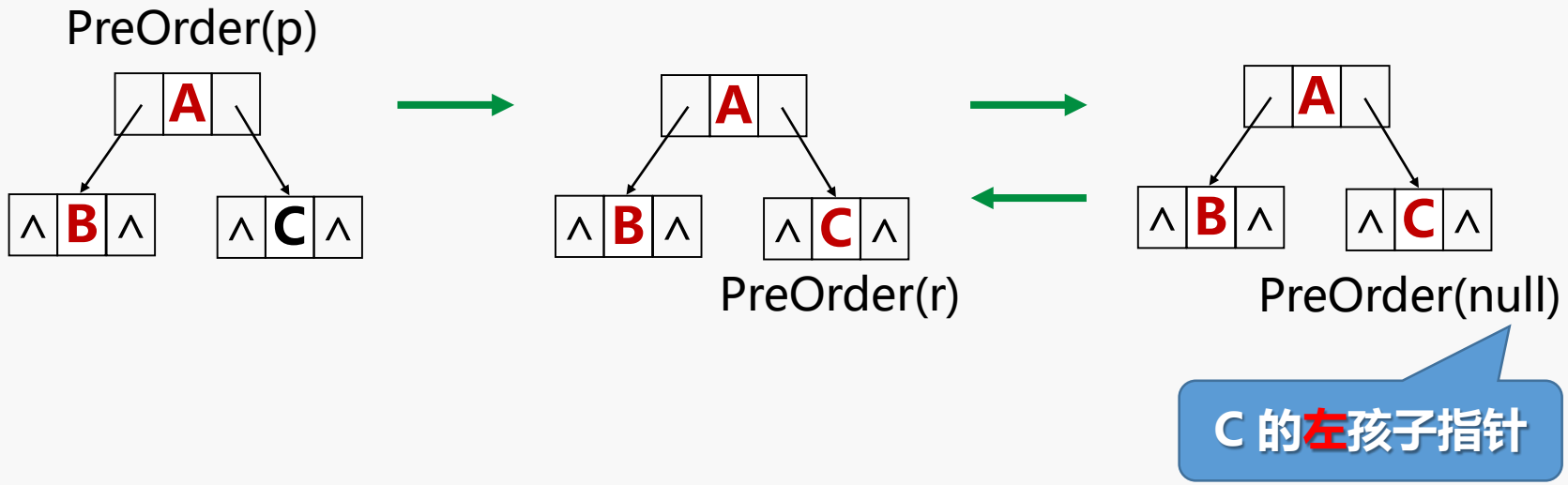
PreOrder(q)

PreOrder(null)

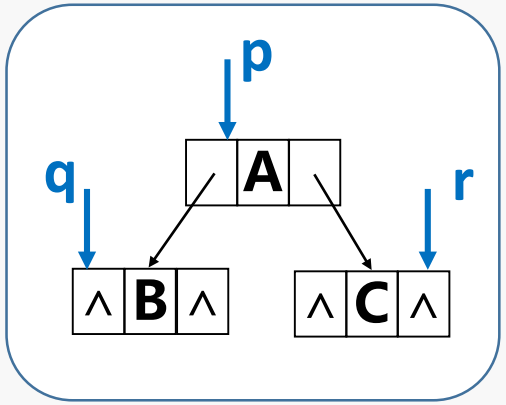
B的右孩子指针

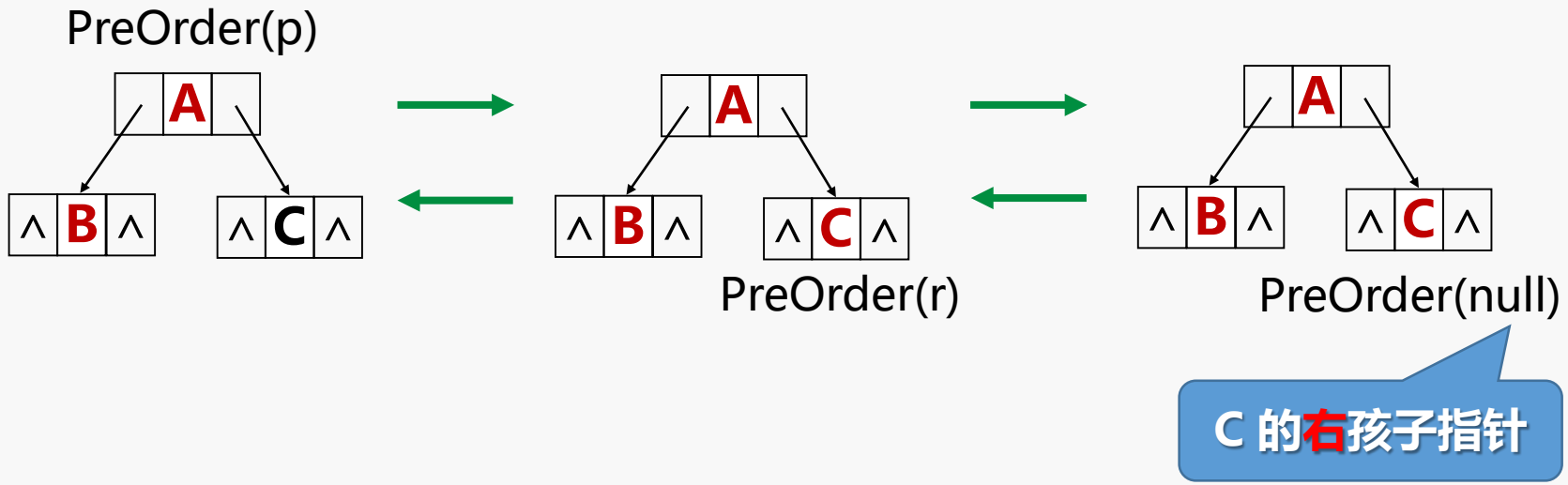
二叉树先序遍历执行过程



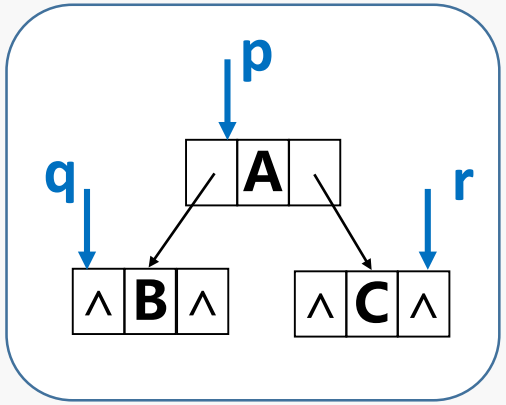


二叉树先序遍历执行过程



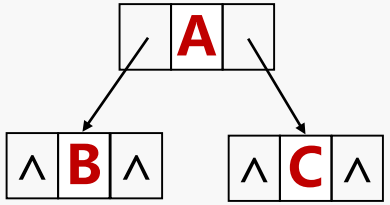


二叉树先序遍历执行过程



PreOrder(p)

运行结束



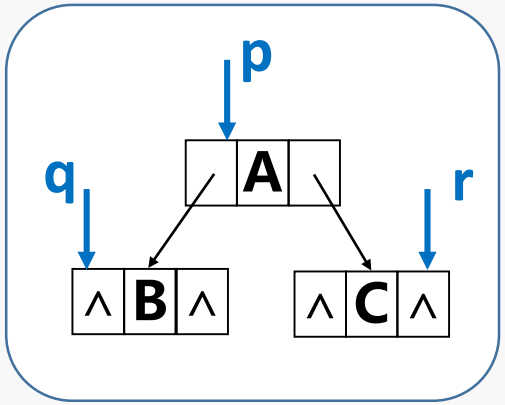
二叉树中序遍历实现

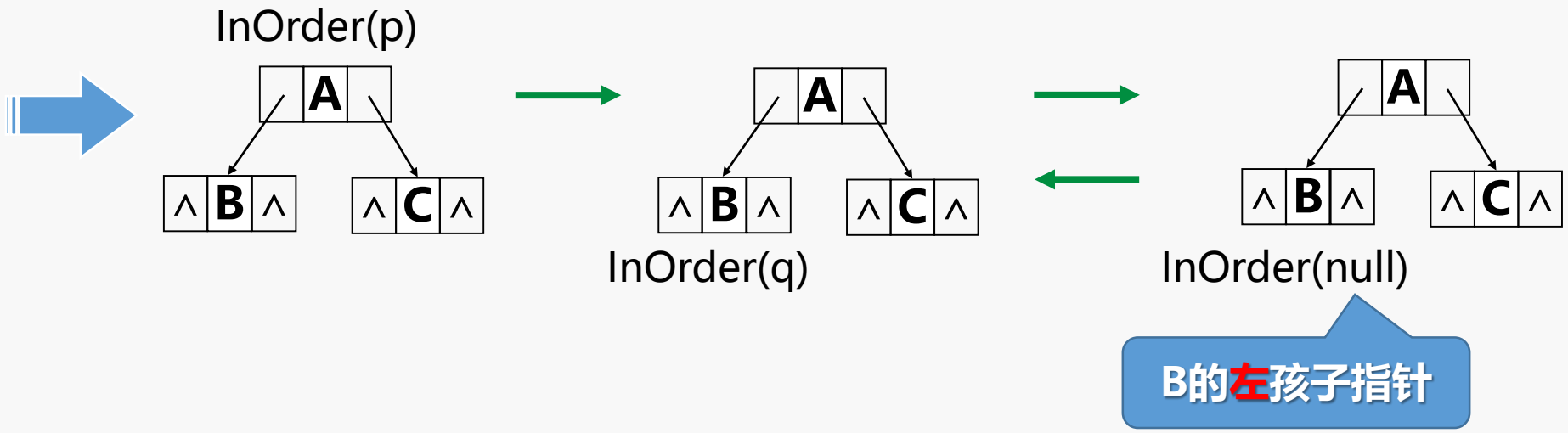
中序遍历算法如下：

```
void InOrder(BinTreeNode *p)
{
   if (p) {
      InOrder( p->leftChild );
      Visit( p );
      InOrder( p->rightChild );          //中序遍历右子树
   }
}
```

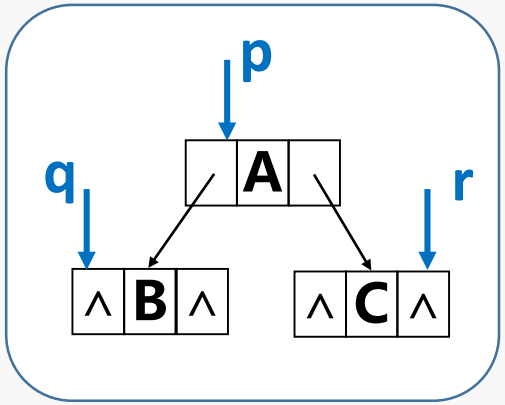
与先序遍历的不同是
这两句交换了位置

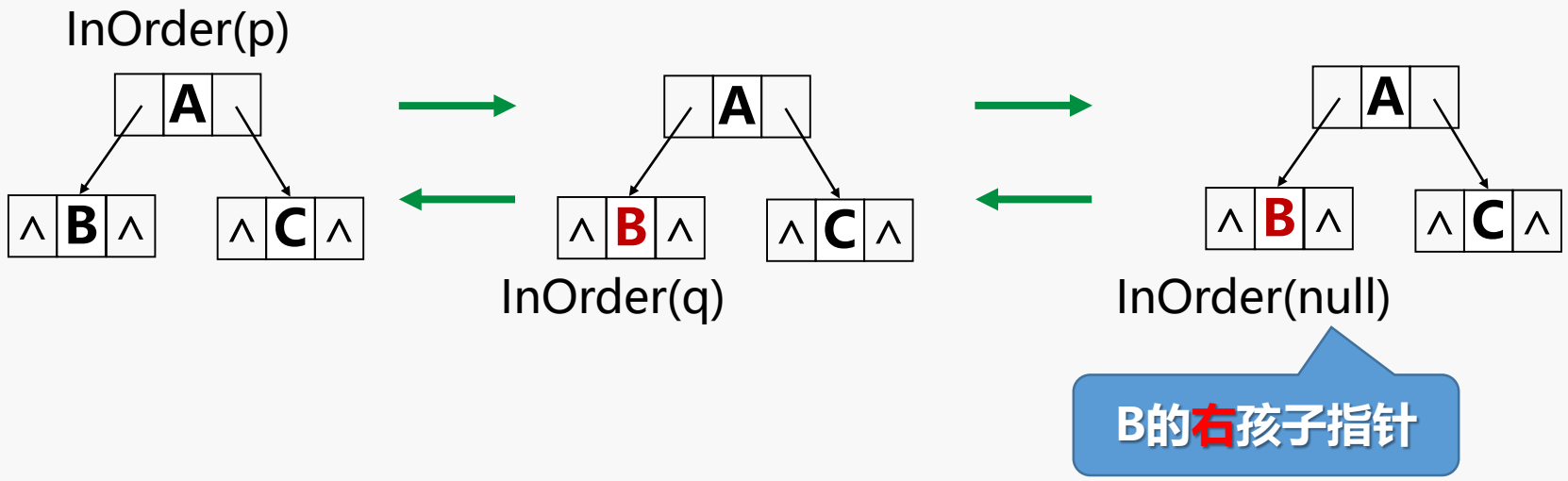
二叉树中序遍历执行过程



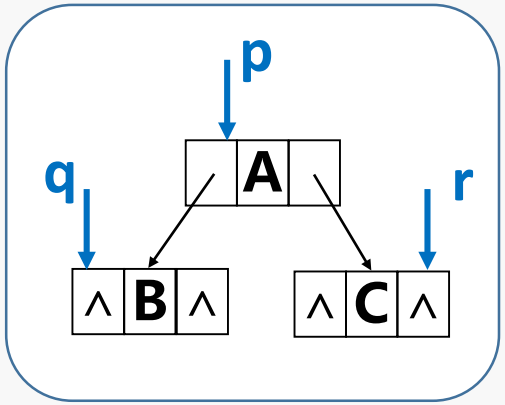


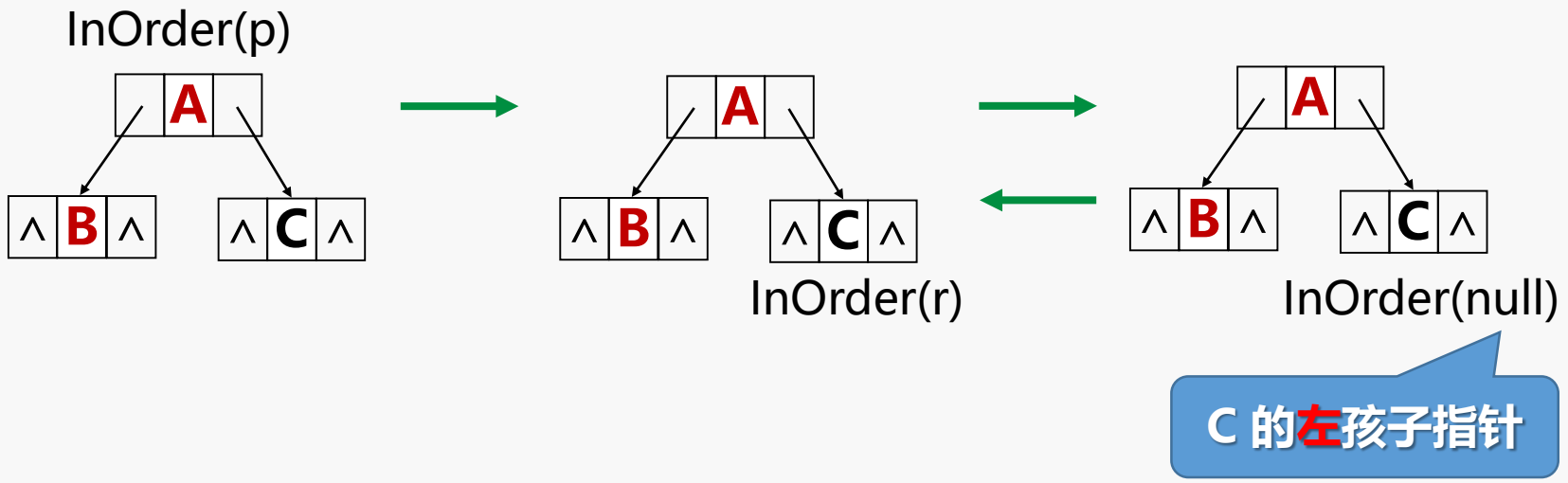
二叉树中序遍历执行过程



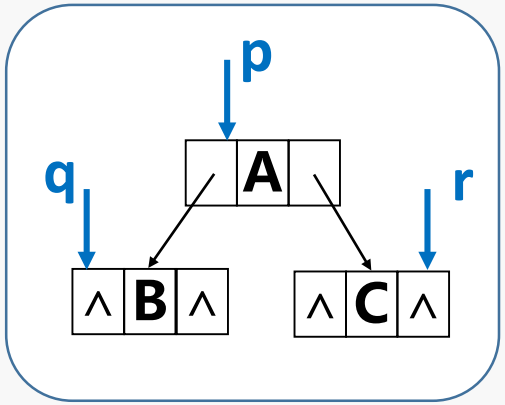


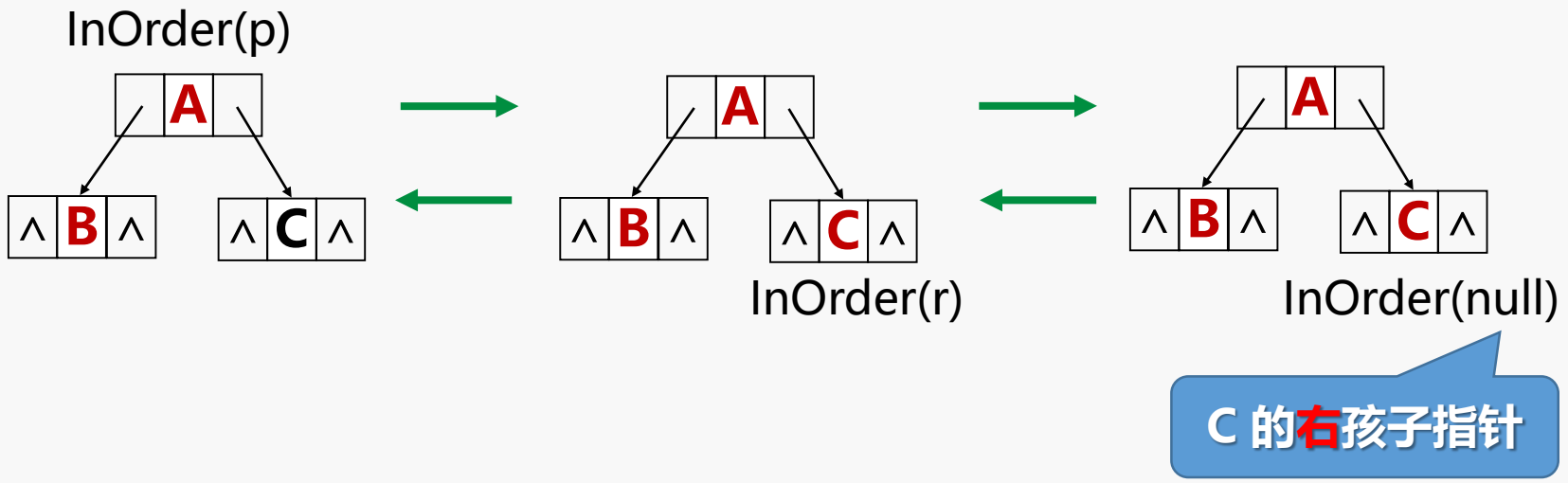
二叉树中序遍历执行过程



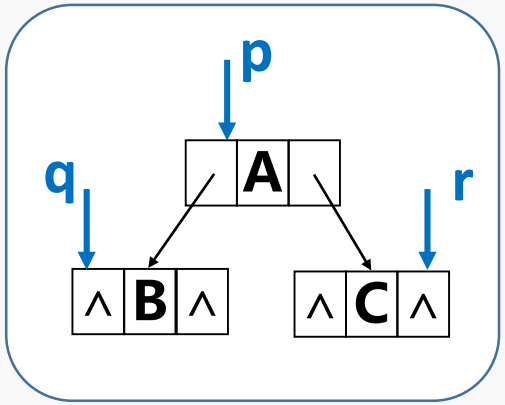


二叉树中序遍历执行过程



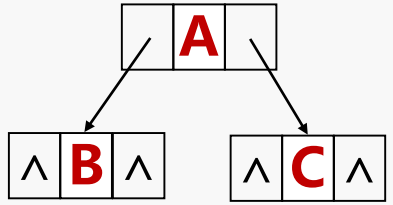


二叉树中序遍历执行过程



InOrder(p)

运行结束



二叉树后序遍历实现

后序遍历算法如下：

```
void InOrder(BinTreeNode *p)
{
   if (p) {
       InOrder( p->leftChild );          //后序遍历左子树
       InOrder( p->rightChild );         //后序遍历右子树
       Visit( p );                       //访问根结点
   }
}
```

请同学们自己分析一下程序执行过程

问题求解与实践
——哈夫曼树

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

哈夫曼树

- **什么是路径、路径长度?**

  在一棵树中，从一个结点往下到另一个结点之间的通路，称为路径。通路中分支的数目称为路径长度。

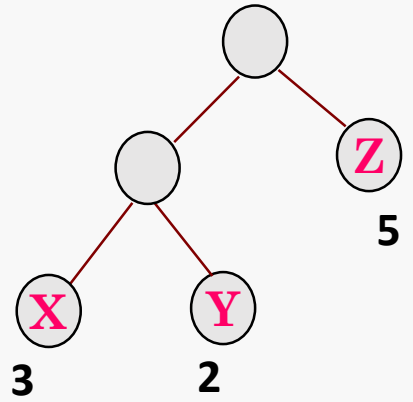
- **二叉树带权路径长度**

  设二叉树有n个带有权值的叶子结点，每个叶子到根的路径长度乘以其权值之和称为二叉树带权路径长度。记作：

$$WPL = \sum_{i=1}^{n} w_i * l_i$$

w_i —第 i 个叶子的权重

l_i —第 i 个叶子到根的路径长度



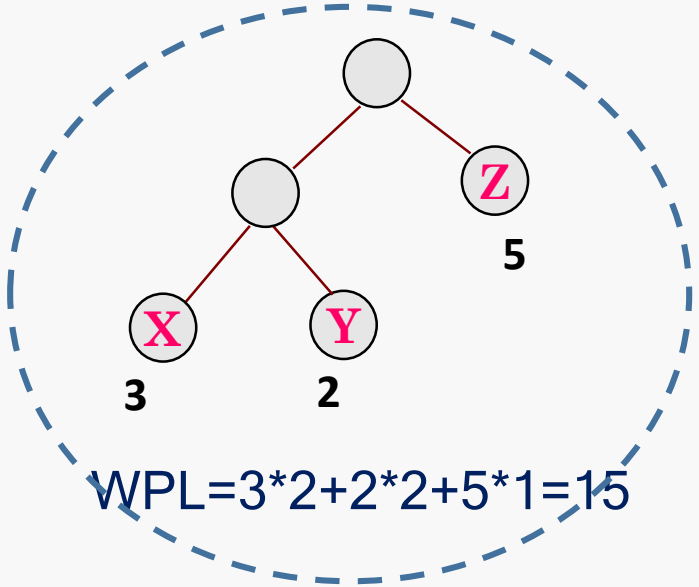
WPL=3*2+2*2+5*1=15

哈夫曼树

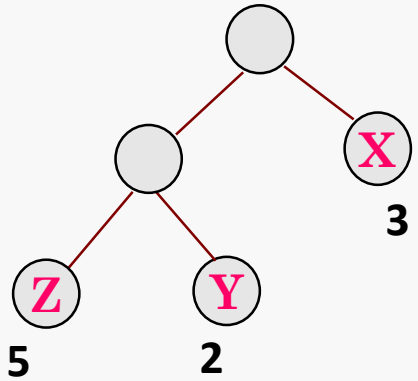
- **什么哈夫曼树?**

  以一些带有固定权值的结点作为叶子所构造的，具有最小带权路径长度的二叉树。

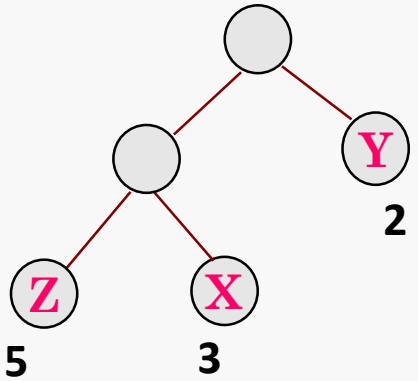
  设X、Y、Z权值为3、2、5，可以构造多种叶子含权的二叉树，例如



WPL=3*2+2*2+5*1=15



WPL=5*2+2*2+3*1=17



WPL=5*2+3*2+2*1=18

哈夫曼树的构造过程

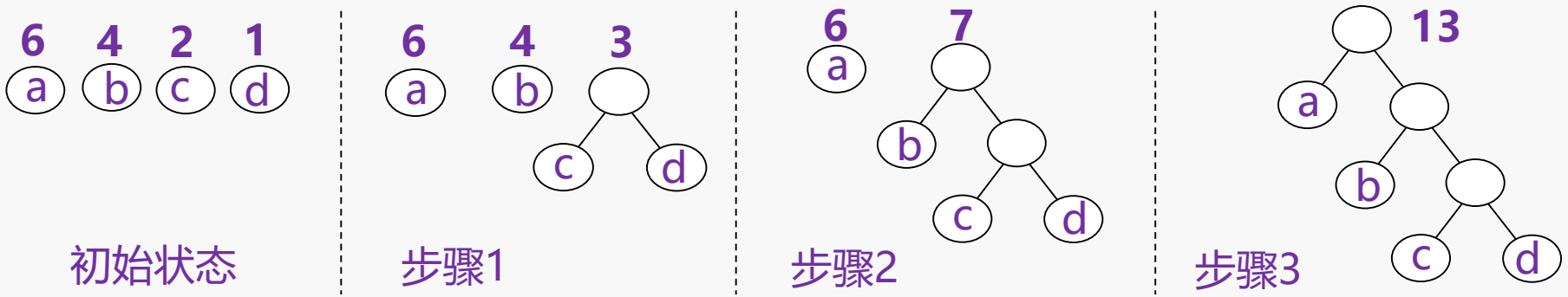
假定有n个具有权值的结点，则哈夫曼树的构造算法如下：

① 根据n个权值，构造n棵二叉树，其中每棵二叉树中只含一个权值为w_i的根结点；

② 在所有二叉树中选取根结点权值最小的两棵树，分别作为左、右子树构造一棵新的二叉树，这棵新的二叉树根结点权值为其左、右子树根结点的权值之和；删去原来的两棵树，留下刚生成的新树；

③ 重复执行②，直至最终合并为一棵树为止。

假定有a、b、c、d四个字符，它们的使用权重比为6：4：2：1



哈夫曼树与哈夫曼编码

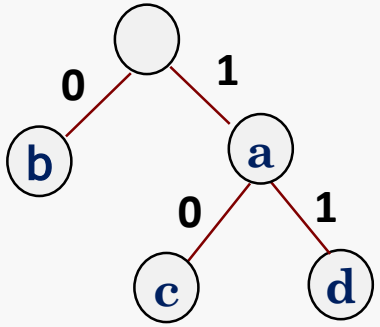
问题

假定有一段报文由a、b、c、d四个字符构成，它们的使用频率比为6：4：2：1，请构造一套二进制编码系统，使得报文翻译成二进制编码后**无二义性**且**长度最短**

任一编码方案

a -1 b-0 c-10 d-11

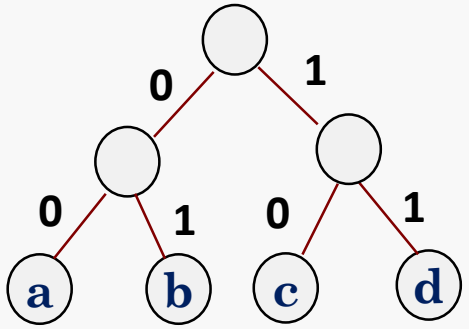
一一对应



无二义性要求任一编码不能是另一个编码的前缀；

若a为1, d为11,则a为d的前缀。这时111可以理解为 ad, da, aaa

无二义性编码对应



- 字符为叶子
- 其他结点不包含字符

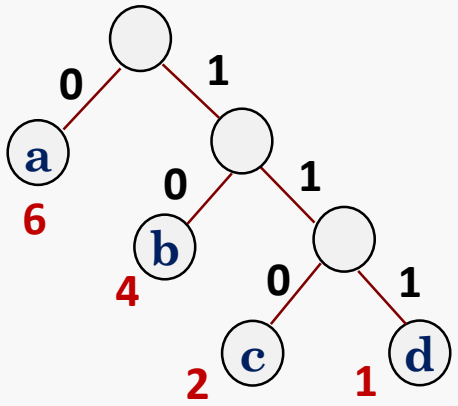
哈夫曼树与哈夫曼编码

问题

假定有一段报文由a、b、c、d四个字符构成，它们的使用频率比为6：4：2：1，请构造一套二进制编码系统，使得报文翻译成二进制编码后**无二义性**且**长度最短**

最优编码方案

对应



哈夫曼树

哈夫曼编码
a-0　　b-10
c-110　d-111

长度最短 要求
下面式子的值最小

加权平均
长度的4倍

$$\sum_{i=1}^{4} w_i * l_i$$

$\sum_{i=1}^{4} w_i * l_i$ **最小**

w_i：第 i 个字符权重
l_i：第 i 个字符编码长度

w_i：第 i 个叶子权重
l_i：第 i 个叶子到根的路径长度

问题求解与实践
——哈夫曼树编程实现

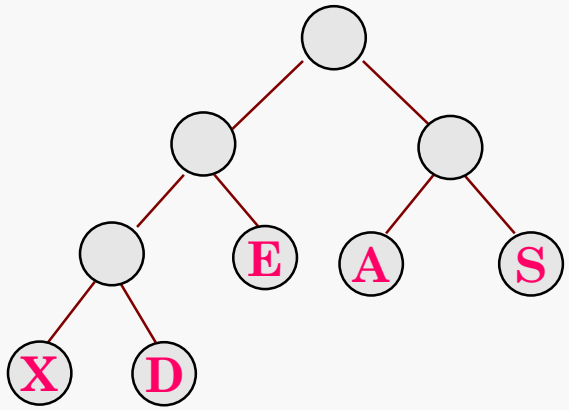
主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

哈夫曼树编程分析

- **以下面的问题为例进行分析**

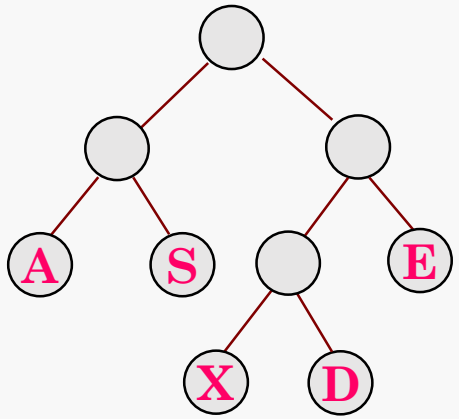
  设一段文本由字符 X, S, D, E, A构成，它们的使用权重为2：9：5：7：8， 请以这些字符构造哈夫曼树，并求出它们的哈夫曼编码

- **注意：**哈夫曼树及哈夫曼编码不是唯一的



X 000
D 001
E 01
A 10
S 11

WPL=69



X 100
D 101
E 11
A 00
S 01

WPL=69

哈夫曼树结点定义

◆结点要存储字符、权重

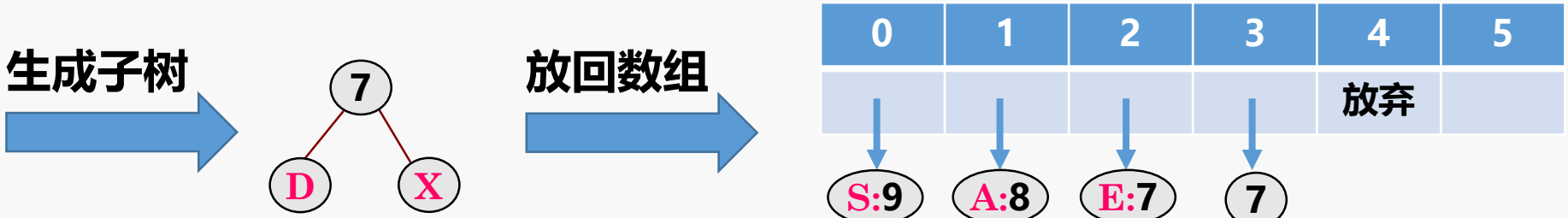
```
struct HNode
{
    char        data;                   //字符数据
    int         weight;                 //权重
    struct      HNode *lchild;          //左孩子指针
    struct      HNode *rchild;          //右孩子指针
};
```

初始 n 棵单根树构造

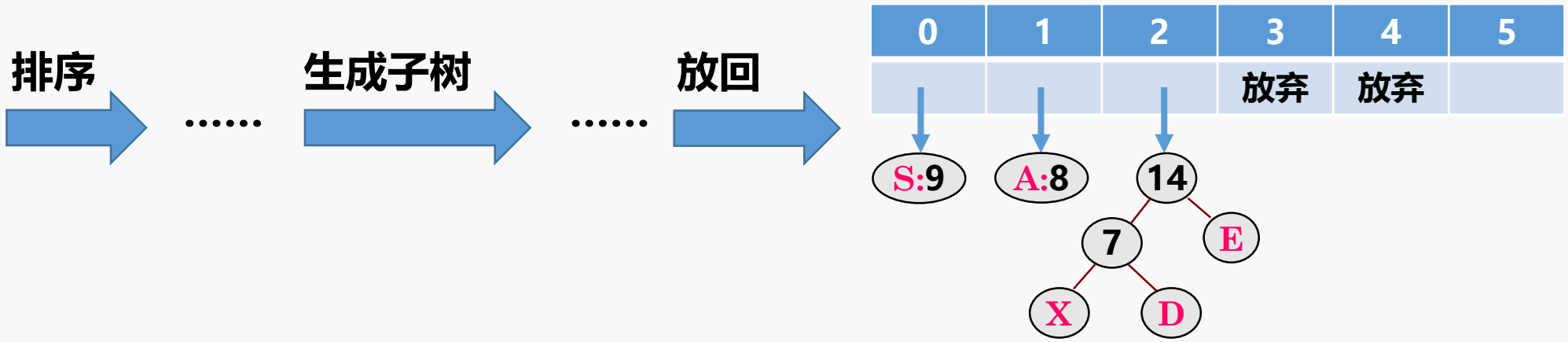
```
//假定结点数不超30（只用前 5 棵树）
HNode *h[30],  *root;
//让h[i]指向第i棵单根树
for (int i = 0; i<30; i++)   h[i] = new HNode;
//为每个单根树赋权值、字符
char ch[] = { 'X','S','D','E','A' };
int    weight[] = { 2,9,5,7,8 };
for (int i = 0; i<5; i++) {
     h[i]->data = ch[i];
     h[i]->weight = weight[i];
     h[i]->lchild = NULL;
     h[i]->rchild = NULL;
}
```

哈夫曼树合并生成过程

第一周期



第二周期



按权值排序函数Sort

将数组 h[] 前 n 项按权值排序 （冒泡）

```
void Sort(HNode* h[], int n)
{
    for(int i=1; i<n; i++)
        for (int j = 0; j < n - i; j++)
        {
            if (h[j]->weight < h[j + 1]->weight)
            {
                HNode *t = h[j];
                h[j] = h[j + 1];
                h[j + 1] = t;
            }
        }
}
```

合并生成哈夫曼树

- **关键代码分析**

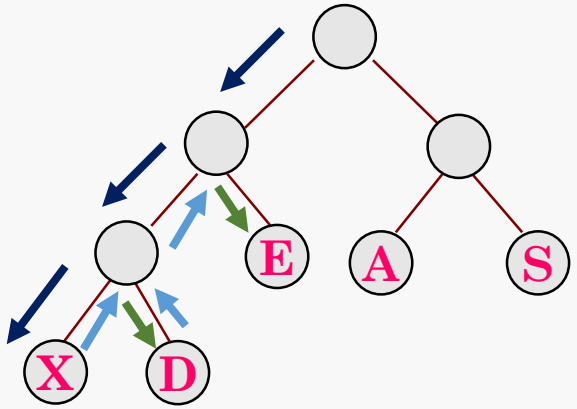
```
……
while(n>1)          // 合并 n-1 次
{
    Sort(h, n);    //将数组 h[] 前 n 项按权值排序

    HNode* s = new HNode;              //生成子树的根
    s->data = ' ';
    s->lchild = h[n-1];                //插入左子树
    s->rchild = h[n-2];                //插入右子树
    s->weight = h[n-1]->weight + h[n-2]->weight;     //子树权值

    h[n - 2] = s;                      //放回数组 h[] 中
    n = n - 1;
}
```

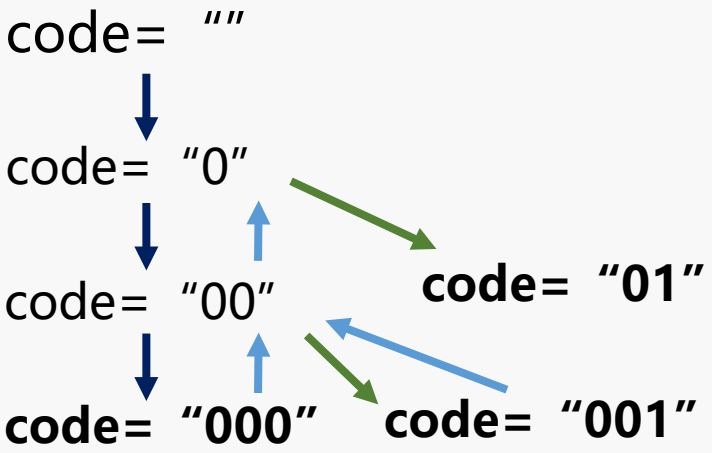
//哈夫曼树的根指针就是 h[0]

生成哈夫曼编码

- **利用二叉树先序遍历构造编码**

X 000
D 001
E 01
A 10
S 11





每次进入左孩子 code 尾部添加 0
每次从左孩子退回上一级 code 尾部截掉1位数

每次进入右孩子 code 尾部添加 1
每次从右孩子退回上一级 code 尾部截掉1位数

生成哈夫曼编码

- **关键代码分析**

```
char code[100] = "";
void PreOrder( HNode *t )                    // 对二叉树t进行先序遍历
{
        if (t) {
                PreOrder(t->lchild);                    //先序遍历左子树
                PreOrder(t->rchild);                    //先序遍历右子树
        }
}
```

生成哈夫曼编码

- **关键代码分析**

```
char code[100] = "";
void PreOrder( HNode *t )                    // 对二叉树t进行先序遍历
{
        if (t) {
                进入左孩子  code 尾部添加 0
                PreOrder(t->lchild);                    //先序遍历左子树
                退回上一级  code 尾部截掉1位数

                进入右孩子  code 尾部添加 1
                PreOrder(t->rchild);                    //先序遍历右子树
                退回上一级  code 尾部截掉1位数

                如果t指向叶子，则
                        输出 字符 和 code
        }
}
```

生成哈夫曼编码

- **关键代码分析**

```
char code[100] = "";
void PreOrder( HNode *t )                    // 对二叉树t进行先序遍历
{
        if (t) {
                进入左孩子  code 尾部添加 0
                PreOrder(t->lchild);                    //先序遍历左子树
                退回上一级  code 尾部截掉1位数

                进入右孩子  code 尾部添加 1
                PreOrder(t->rchild);                    //先序遍历右子树
                退回上一级  code 尾部截掉1位数

                如果t指向叶子，则
                        输出 字符 和 code
        }
}
```