问题求解与实践
——非线性方程求解

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

非线性方程求解

- 非线性方程是许多学科用来表达客观规律的数学工具；
- 非线性方程求根是个难题，一般无解析方法，仅有数值解法；
- 某些时候，还需要求非线性方程组的根，这就更加困难。

本节介绍只有一个未知数的单个方程求根问题

非线性方程常见类型

一、代数多项式方程

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

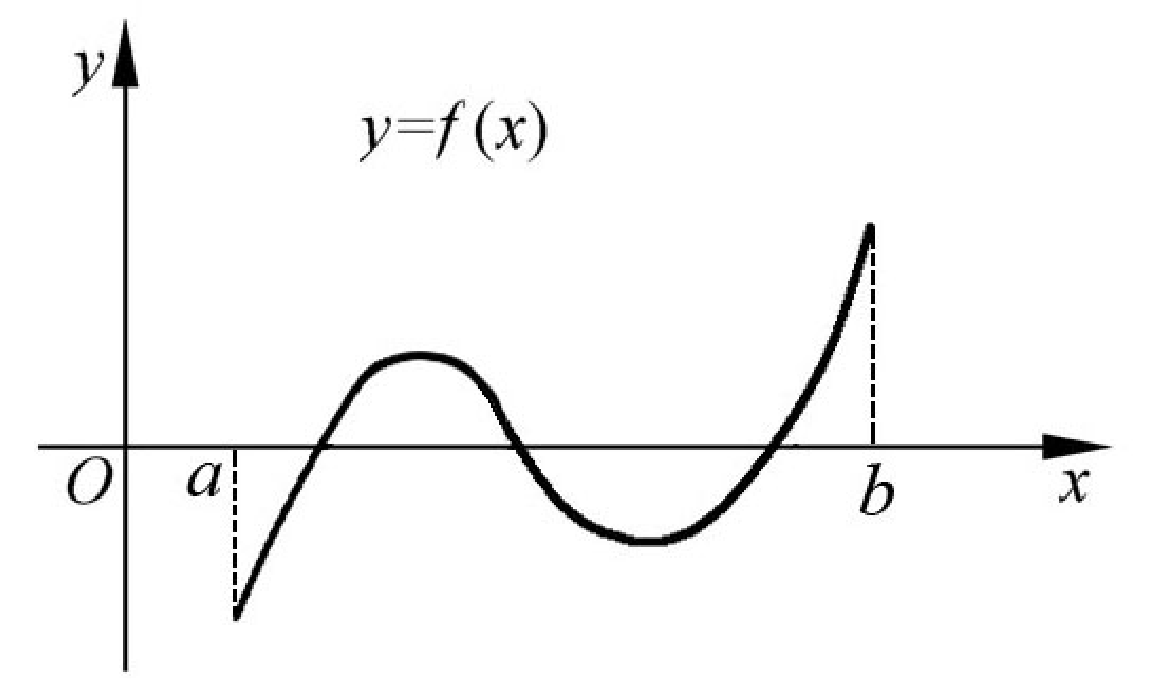
例如：$x^2 - 5x + 1 = 0$

二、超越方程

凡是左侧不是代数多项式的方程，都称为超越方程

例如：$2^x - 5x + 2 = 0$

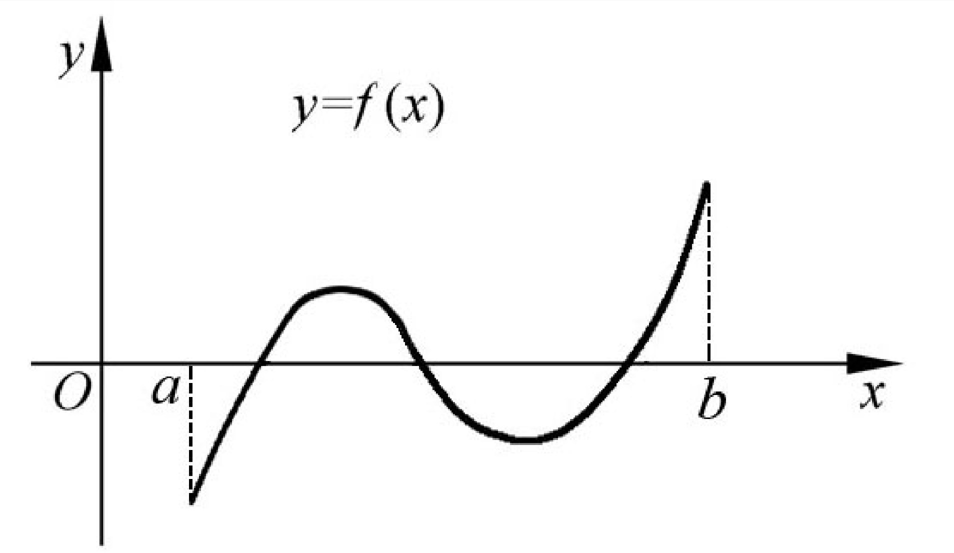
非线性方程求解

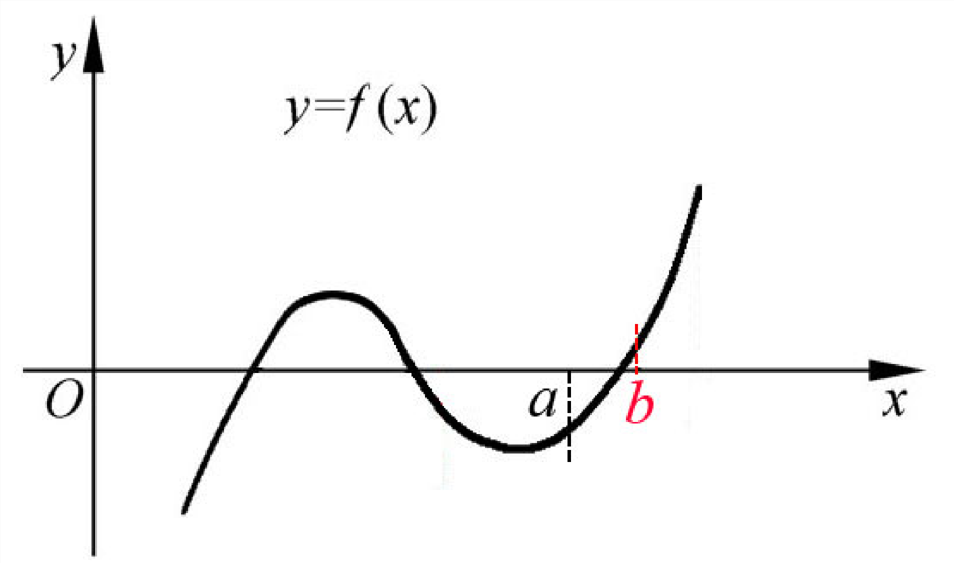


定理 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（即 $f \in C[a,b]$），且 $f(a)f(b)<0$，那么方程 $f(x)=0$ 在区间 (a,b) 内至少有一个根

非线性方程求解——二分法

二分法思想：通过判断函数值的符号，将有根区间逐步二等分，
直到区间长度缩短到容许误差范围之内





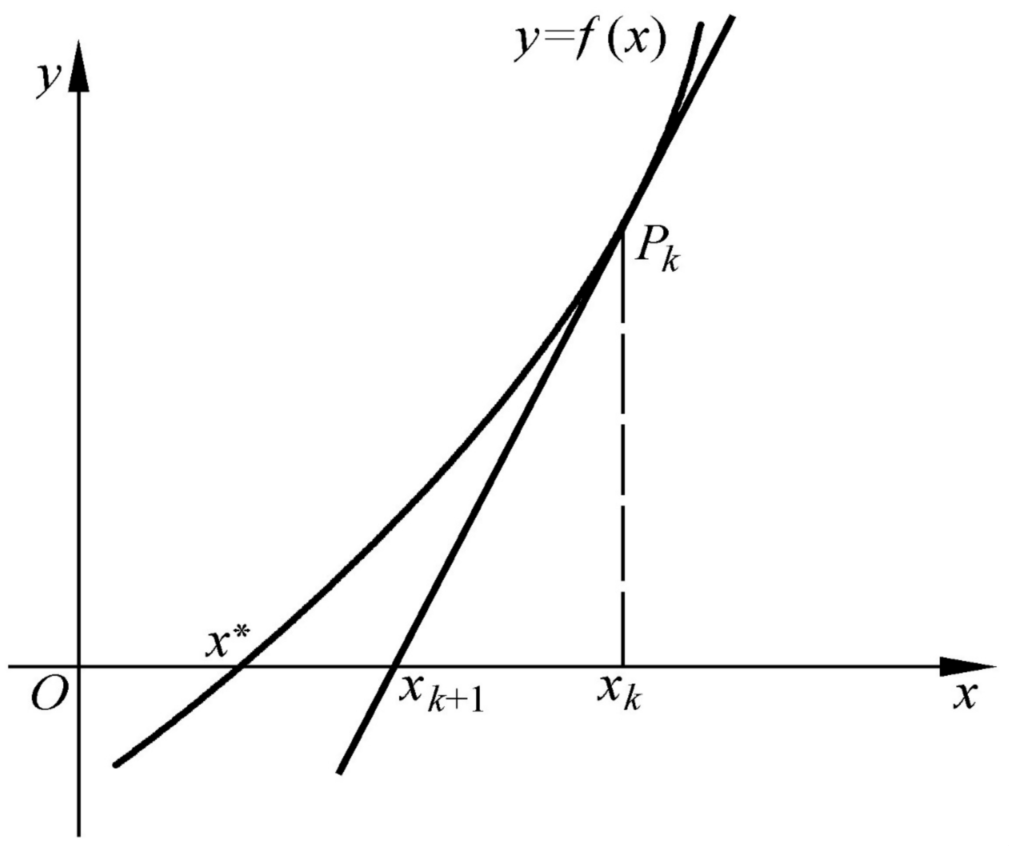
非线性方程求解——二分法

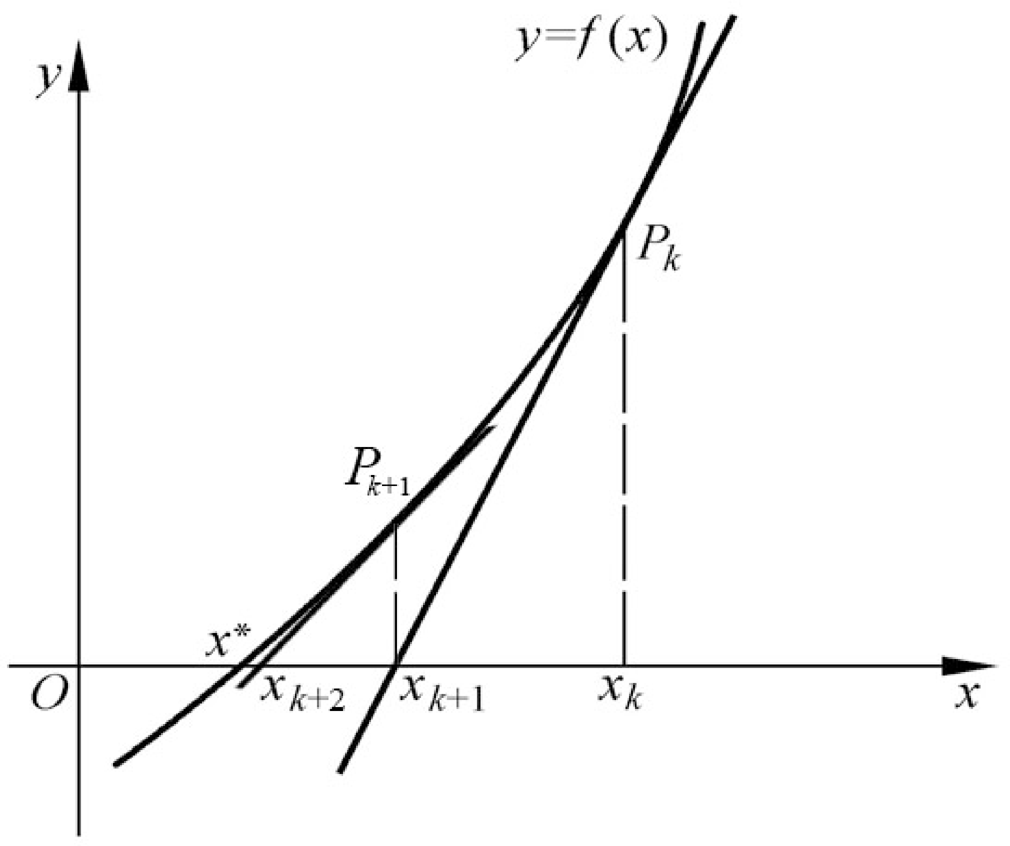
- **求 f(x)=0 的根，二分法核心代码如下：**

```
while ( fabs(a-b)>=0.000001 )
{
        c=(a+b)/2;                  // 计算中点
        fa=f(a);                    // 计算f(a)
        fmid=f(c);                  //计算f(c)
        if ( fmid==0 )              // c 就是根，退出
            break;
        else if (fa*fmid>0)        // f(a)和f(c)同号，移动a
            a=c;
        else                        // f(a)和f(c)异号，移动b
            b=c;
}
printf("方程的解是：%6.6f",(a+b)/2);
```

非线性方程求解——牛顿法

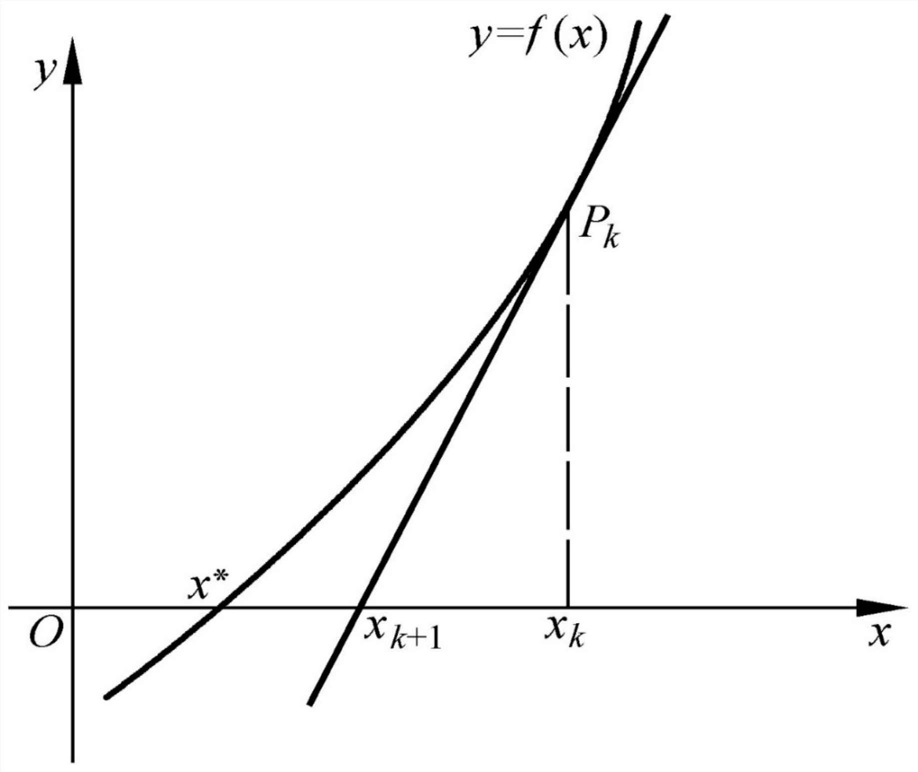
假设求 $f(x)=0$ 的一个近似根，且 $f'(x)\neq 0$ 以及 $f''(x)$ 不变号





非线性方程求解——牛顿法

■ 算法推导



首先给出经过 $(x_k, f(x_k))$ 切线方程：

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

该直线过 x 轴上的点 $(x_{k+1}, 0)$， 于是

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

解得 $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

非线性方程求解——牛顿法

定理 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内存在二阶连续导数，且满足

（1）$f(a)f(b)<0$；

（2）当 $x\in[a,b]$ 时，$f^{'}(x)\neq 0$；

（3）当 $x\in(a,b)$ 时，$f^{''}(x)$ 不变号；

（4）$a-\dfrac{f(a)}{f^{'}(a)}\leq b$，$b-\dfrac{f(b)}{f^{'}(b)}\geq a$；

在 $[a,b]$ 取任意点 x_0，利用迭代公式 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)}$ 可求得近似解