关于混合高斯分布的相关问题的讨论

518030910150 方泓杰

Nov. 3rd, 2019

1 问题简述

定义 1.1 (混合高斯分布) 设$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则将$Z = X + \eta Y$ 服从的分布称为参数为$\mu_1, \sigma_1; \mu_2, \sigma_2; p$ 的混合高斯分布。其中，η 的分布列如下：

表 1: η 分布列

η	0	1
P	$1-p$	p

问题一

- 自己设定参数，用计算机生成10000 个混合高斯分布的随机数；
- 画出其频率分布直方图；
- 讨论不同参数对其分布“峰”的影响。

问题二

自己设定参数，用计算机生成1000 组，每组n 个混合高斯分布的随机数，设第i 组的随机数为$Z_{i,1}, Z_{i,2}, ..., Z_{i,n}$，且给出

$$U_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} Z_{i,j} - n \cdot E(Z)}{\sqrt{n \cdot D(Z)}} \tag{1}$$

- 画出$U_1, U_2, ..., U_{1000}$ 的频率分布直方图；
- 讨论$n = 10, 20, 50, 100, 1000$ 对频率分布直方图“峰”的影响。
- 你能从中得出何结论。

2 关于混合高斯分布的初步讨论

我们首先讨论混合高斯分布的分布函数以及概率密度函数，来大致了解一下混合高斯分布的一些基本性质以及规律。

$$F_Z(z) = P(X + \eta Y \leq z) = P(X \leq z | \eta = 0) \cdot P(\eta = 0) + P(X + Y \leq z | \eta = 1) \cdot P(\eta = 1)$$

由于X, Y, η 相互独立，上式可化为：

$$F_Z(z) = (1-p)P(X \le z) + pP(X+Y \le z) = (1-p)F_X(z) + pF_{X+Y}(z) \tag{2}$$

其中，$F_{X+Y}(\cdot)$ 为$X+Y$ 的分布函数，由结论知，$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$。于是我们得到了$Z$ 的分布函数如(3) 式所示，再在(2) 中两边对z 求导即得Z 的概率密度函数。

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_Z(z) = (1-p)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_X(z) + p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{X+Y}(z) = (1-p)f_X(z) + pf_{X+Y}(z) \tag{3}$$

在(3) 式中代入$f_X(\cdot), f_{X+Y}(\cdot)$ 的表达式，有

$$f_Z(z) = (1-p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(z-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + p\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \tag{4}$$

3 问题一的解答

3.1 服从混合高斯分布的随机数的生成

算法 3.1 (舍选法[1]) 设$f(\cdot)$ 为密度函数，且$\sup f(x) = f_0 < \infty$，且满足$f(x) = 0(\forall x \notin [a,b])$，那么生成以$f(\cdot)$ 为密度函数的随机变量X 的舍选算法如下：

1. 生成$[0,1]$ 上的独立均匀随机数U 和V，令$u = a + (b-a)U, v = f_0 V$；
2. 若$v \le f(u)$ 则输出u；否则转1。

算法3.1 给出了一种给出密度函数$f(\cdot)$ 生成随机数的方法。容易将其应用在混合高斯分布的生成上，由于混合高斯分布中，$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$，所以可以取一个很小的$a$和很大的$b$（如$a = -10^9, b = 10^9$），则可以近似满足舍选法的条件，从而利用舍选法产生随机数。

舍选法的相关正确性的证明可以参见参考文献[1]，这里不再赘述。

若对于区间$[a,b]$ 中的大部分x，$f(x) < \varepsilon$，其中ε 为一个小量，则舍选法的步骤2 大概率会转到步骤1 继续选取，从而效率较为低下。针对于混合高斯分布，不仅算法效率较低，而且由式(4)，密度函数的描述过于繁琐，因此不作为生成服从混合高斯分布的随机数的首选。

在实际实现过程中，如果我们可以生成服从正态分布的随机数以及服从均匀分布的随机数，我们就可以利用下面这个简单的方法来获得产生随机数。

算法 3.2 生成服从参数为$\mu_1, \sigma_1; \mu_2, \sigma_2; p$ 的混合高斯分布的随机数的算法如下：

1. 生成满足$X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ 的随机变量X；生成满足$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ 的随机变量Y；
2. 生成满足$\eta' \sim U(0,1)$ 的随机变量η'，如果$\eta' \le p$，则令$\eta = 1$；否则$\eta = 0$；
3. 令$Z = X + \eta Y$，则Z 为服从参数为$\mu_1, \sigma_1; \mu_2, \sigma_2; p$ 的混合高斯分布的随机数。
4. 如果生成的随机数数量满足要求则退出，否则转1。

下面我们简要说明一下这个算法的正确性：首先，由于在混合高斯分布中，X, Y, η 三个随机变量相互独立，因此可以独立生成；其次，按照算法流程，生成的随机变量X, Y 可以满足$X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$；然后，我们先生成了一个$(0,1)$ 内均匀分布的随机变量η'，那么，由随机分布的分布函数知，$P(\eta' \le p) = F_{\eta'}(p) = p, P(\eta' > p) = 1 - P(\eta' \le p) = 1-p$，因此

按照算法3.2 所述规则生成的随机变量η 满足表1 所示的分布列，从而生成的随机数$Z = X + \eta Y$ 服从参数为$\mu_1, \sigma_1; \mu_2, \sigma_2; p$ 的高斯混合分布。

由于Matlab 中内置了生成正态分布和平均分布的函数，因此我们可以利用Matlab 非常方便的实现算法3.2，代码“GM_gen.m”如下：

```
close all; clear all; clc

% generate X from normal distribution
mu1 = input('Please input mu1: ');
sigma1 = input('Please input sigma1: ');
X = normrnd(mu1, sigma1, [10000 1]);

% generate Y from normal distribution
mu2 = input('Please input mu2: ');
sigma2 = input('Please input sigma2: ');
Y = normrnd(mu2, sigma2, [10000 1]);

% generate eta
p = input('Please input p: ');
eta_prime = unifrnd(0, 1, [10000 1]);
eta = zeros(10000, 1);
eta(eta_prime ≤ p) = 1;

% generate Z = X + eta * Y
Z = X + eta .* Y;

% graphing
[counts, centers] = hist(Z, 70);
figure
bar(centers, counts / sum(counts))

% printing data to file
fp = fopen('gaussian_mixture_data.csv', 'w');
for i = 1 : 10000
    fprintf(fp, '%d,\n', Z(i, 1));
end
fclose(fp);
```

设置参数为$\mu_1 = 0, \sigma_1 = 2; \mu_2 = 10, \sigma_2 = 5; p = 0.6$，则上述代码运行后产生的10000 组随机数见data 文件夹下的gaussian_mixture_data.csv 文件，所绘制的频率分布直方图如图1 所示。

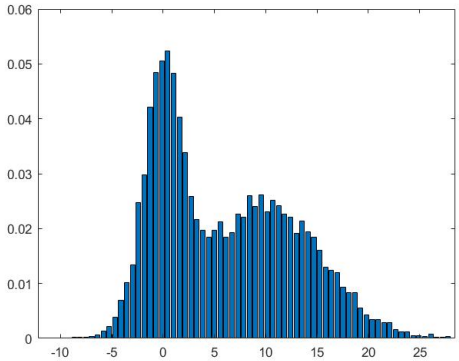
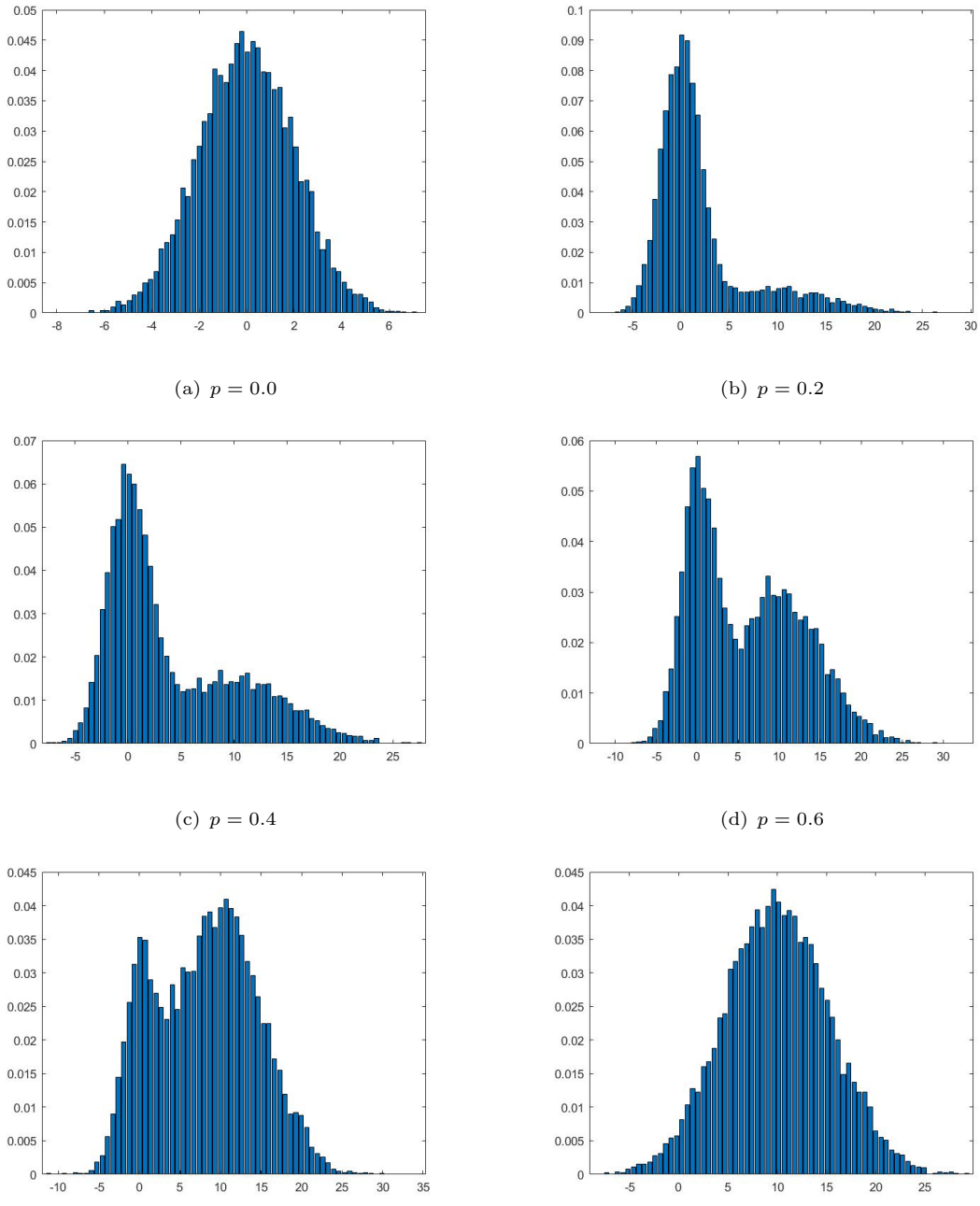


图 1: 参数为$\mu_1 = 0, \sigma_1 = 2; \mu_2 = 10, \sigma_2 = 5; p = 0.6$ 的高斯混合分布的随机数频率分布直方图

3.2 关于各参数对于混合高斯分布的影响的讨论

从式(4)中的密度函数我们可以看出，混合高斯分布的密度函数实际上是两个正态分布密度函数的加权平均，其中权重分别为p 和$(1-p)$；因此权重p 对于混合高斯分布的影响非常重要，因此我们先来讨论参数p 对于混合高斯分布的影响。

我们选取$\mu_1 = 0, \sigma_1 = 2; \mu_2 = 10, \sigma_2 = 5$，分别用上述Matlab 代码在$p = 0, p = 0.2, p = 0.4, p = 0.6, p = 0.8$ 和$p = 1.0$ 时各生成了10000 组随机数，可参见data 文件夹下的data2-0.csv, data2-1.csv, ..., data2-5.csv 文件，并分别绘制了他们的频率分布直方图如下：



(a) $p = 0.0$ (b) $p = 0.2$

(c) $p = 0.4$ (d) $p = 0.6$

(e) $p = 0.8$ (f) $p = 1.0$

图 2: 不同参数p 下生成的随机数的频率分布直方图

由于样本足够大，可以由频率估计概率，因此频率分布直方图的边缘曲线和混合高斯分布的

概率密度曲线近似重合，故从图2 中我们也可以观察不同参数下混合高斯分布的概率密度曲线。

当$p = 0.0$时，显然$Z = X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，图像只有单峰且峰值在$\mu_1$附近，为正态分布；当$p = 1.0$时，显然$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$，图像也只有单峰且峰值在$\mu_1 + \mu_2$附近，为正态分布；观察图像可知，理论推导和实际结果相吻合。

当$0 < p < 1$时，图像出现了两个不同的峰值，分别在μ_1 和$\mu_1 + \mu_2$ 附近，且随着p 的增大，μ_1 这个峰的高度逐渐降低，$\mu_1 + \mu_2$ 这个峰的高度逐渐增高；即μ_1 附近的点的概率密度下降，而$\mu_1 + \mu_2$ 附近的点的概率密度上升。事实上，由式(4) 我们也可以清晰的认识到，其概率密度函数由两个正态分布函数以权重p和$1 - p$加权平均后构成，因此当p增大时，加权p的一项正态分布的参数为$\mu_1 + \mu_2$，这个正态分布出现的概率增大，因此$\mu_1 + \mu_2$ 这个峰的高度增高；同时，加权为$1 - p$的一项正态分布参数为μ_1，这个正态分布出现的概率减小，因此μ_1 这个峰的高度降低。这个理论推导的结果同样与图2 相符。

结论 3.1 一般地，当σ_1, σ_2较小时，参数μ_1, μ_2, p 决定了峰的位置、数量，当$p = 0$ 或$p = 1$ 或$\mu_2 = 0$ 时，图像仅有一个峰在μ_1 附近；否则，图像有两个不同的峰，分别在μ_1 附近和$\mu_1 + \mu_2$ 附近。

结论 3.2 若图像有两个峰，参数p 决定了两个峰的高度变化关系，当p 增大时，μ_1 峰的高度降低，$\mu_1 + \mu_2$ 峰的高度增高。

由于图像的峰对应着概率密度函数的极大值，因此我们可以将结论3.1, 3.2 表述如下：

结论 3.3 一般地，当σ_1, σ_2较小时，参数μ_1, μ_2, p 决定了混合高斯分布中概率密度函数的极大值点的位置、数量，当$p = 0$ 或$p = 1$ 或$\mu_2 = 0$ 时，概率密度函数仅有一个极大值点μ_1；否则，概率密度函数有两个不同的极大值点，分别为μ_1 和$\mu_1 + \mu_2$。

结论 3.4 若概率密度函数有两个极大值，参数p 决定了两个极大值的变化关系，当p 增大时，$f(\mu_1)$ 减小，$f(\mu_1 + \mu_2)$ 增大。

由于混合高斯分布本质上为两个正态分布$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 的加权平均，因此参数σ_1, σ_2 的作用与正态分布基本相同，有：

结论 3.5 参数σ_1, σ_2 表征峰的陡峭程度，σ_1 越小，μ_1 附近的峰与$\mu_1 + \mu_2$ 附近的峰都越陡峭；σ_2 越小，$\mu_1 + \mu_2$ 附近的峰越陡峭，而不改变μ_1 附近的峰的陡峭程度。特别地，当参数σ_1, σ_2 过大时，两理论峰均过于平缓，因此在图像中无法明显体现出两个“峰”，而只能观察到一个“峰”如图3所示。

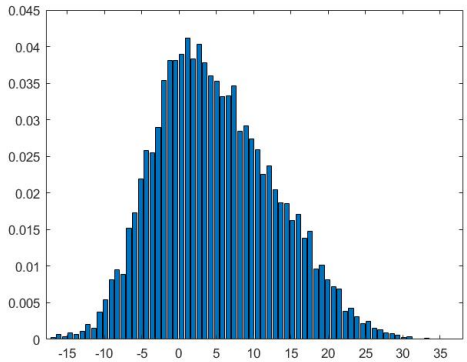


图 3: 参数为$\mu_1 = 0, \sigma_1 = 5; \mu_2 = 10, \sigma_2 = 5; p = 0.5$ 的高斯混合分布的随机数频率分布直方图

4 问题二的解答

4.1 初次尝试

在问题二中，我们初步选用参数$\mu_1 = 0, \sigma_1 = 2; \mu_2 = 10, \sigma_2 = 3; p = 0.6$。利用Matlab，按照第三节的方法可以生成服从混合高斯分布的矩阵，再对每行计算U_i，代码“GM_gen_U_try1.m”如下：

```
close all; clear all; clc

% input n
n = input('Please input n:');

% initializing data
mu1 = 0; sigma1 = 2; mu2 = 10; sigma2 = 3; p = 0.6;

% generating Z = X + eta * Y
X = normrnd(mu1, sigma1, [1000 n]);
Y = normrnd(mu2, sigma2, [1000 n]);
eta_prime = unifrnd(0, 1, [1000 n]);
eta = zeros(1000, n); eta(eta_prime ≤ p) = 1;
Z = X + eta .* Y;

% computing E(Z_i) and D(Z_i) for each group
EZ = mean(mean(Z)); DZ = 0;
for i = 1 : 1000
    for j = 1 : n   DZ = DZ + (Z(i, j) - EZ) .^ 2; end
end
DZ = DZ / (n * 1000);

% calculating U
for i = 1 : 1000
    tem = 0;
    for j = 1 : n   tem = tem + Z(i, j); end
    U(i) = (tem - n * EZ) / sqrt(n * DZ);
end


% graphing
[counts, centers] = hist(U, 100);
figure
bar(centers, counts / sum(counts))

% printing data to file
fp = fopen('U_data.csv','w');
for i = 1 : 1000
    fprintf(fp, '%d,', U(i));
    for j = 1 : n   fprintf(fp, '%d,', Z(i, j)); end
    fprintf(fp, '\n');
end
fclose(fp);
```

首先我们解释一下为什么选用了如上参数。由问题一的讨论我们知道，在问题二中，选择的参数应该能够尽可能反映出混合高斯分布的特点，即Z 的频率分布直方图可以出现两个“峰”。因此我们选用了一系列参数，并用问题一的代码生成了10000 个随机数存储在data 文件夹下的data4.csv 文件中，并画出了Z 的频率分布直方图如图4 所示。

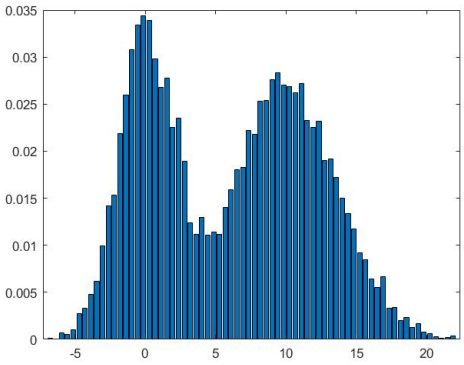
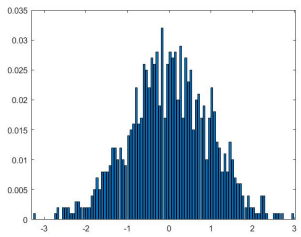
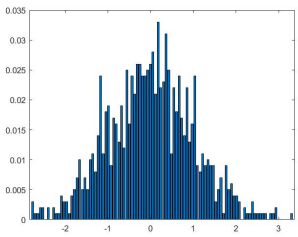


图 4: 参数为$\mu_1 = 0, \sigma_1 = 2; \mu_2 = 10, \sigma_2 = 3; p = 0.6$ 的高斯混合分布的随机数频率分布直方图

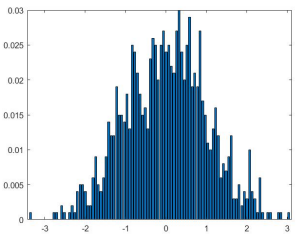
对于问题二，我们用以上参数，分别选取了$n = 10, n = 20, n = 50, n = 100$ 和$n = 1000$ 进行生成并计算，得到的数据全部存储在data 文件夹下的data5-1.csv, data5-2.csv, ..., data5-5.csv 中，并画出U_i 的频率分布直方图如图5 所示。



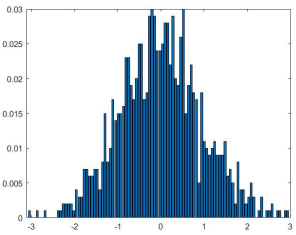
(a) $n = 10$



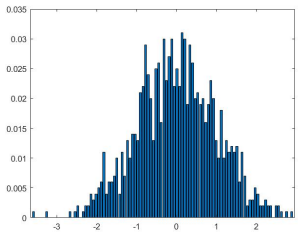
(b) $n = 20$



(c) $n = 50$



(d) $n = 100$



(e) $n = 1000$

图 5: 不同参数n 下U_i 的频率分布直方图（初次尝试）

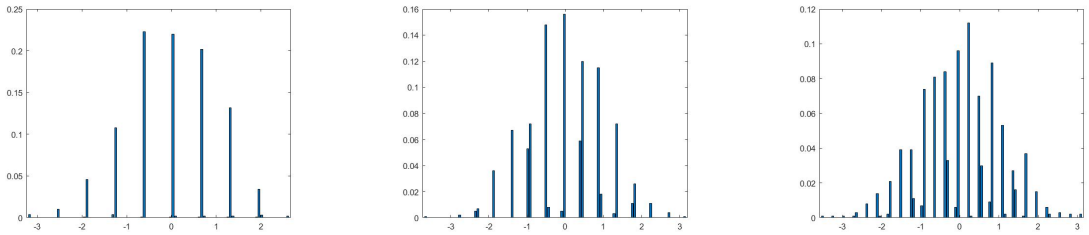
我们似乎并不能从中看出峰之间的明显的差距，于是我们对参数做了一些调动。

4.2 再次尝试

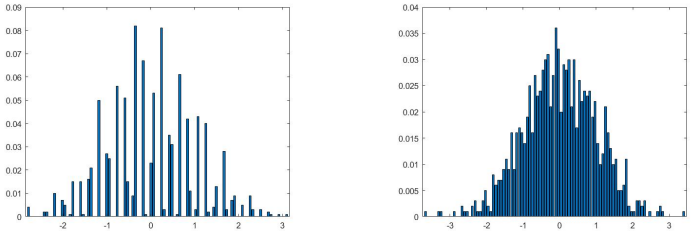
经过初次尝试，我们发现参数选为$\mu_1 = 0, \sigma_1 = 2; \mu_2 = 10, \sigma_2 = 3; p = 0.6$ 并不能很好的看出U_i 的频率分布直方图和n 的关系。经过多次尝试，我们发现，当两个峰的距离较远时，n 的改变对于U_i 的频率分布直方图有着比较明显的影响。此次尝试，我们选取$\mu_1 = 0, \sigma_1 = 2; \mu_2 = 500, \sigma_2 = 3; p = 0.6$，同样利用Matlab 生成随机数并计算$U_i$ 并统计频率分布直方图，代码如“GM_gen_U.m”所示，事实上仅需将“GM_gen_U_try1.m”的第7 行改为如下代码即可：

```
1       mu1 = 0; sigma1 = 2; mu2 = 500; sigma2 = 3; p = 0.6;
```

对于问题二，我们用以上参数，分别选取了$n = 10, n = 20, n = 50, n = 100$ 和$n = 1000$ 进行生成并计算，得到的数据全部存储在data 文件夹下的data6-1.csv, data6-2.csv, ..., data6-5.csv 中，并画出U_i 的频率分布直方图如图6 所示。



(a) $n = 10$ (b) $n = 20$ (c) $n = 50$



(d) $n = 100$ (e) $n = 1000$

图 6: 不同参数n 下U_i 的频率分布直方图（再次尝试）

这次，我们可以清晰的看出来n 对于U_i 的频率分布直方图的影响，我们将在4.4 节进行进一步讨论。

4.3 关于混合高斯分布的进一步讨论

在第2 节中我们初步讨论过混合高斯分布的一些性质，这里我们对混合高斯分布的数学期望和方差进行进一步的讨论。

由混合高斯分布的定义，我们知道X, Y, η 互相独立，于是有

$$E(Z) = E(X + \eta Y) = E(X) + E(\eta)E(Y) = \mu_1 + p\mu_2 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= E(X^2 + 2X\eta Y + \eta^2 Y^2) \\ &= E(X^2) + 2E(X)E(Y)E(\eta) + E(\eta^2)E(Y^2) \\ &= (D(X) + E^2(X)) + 2E(X)E(Y)E(\eta) + E(\eta^2)(D(Y) + E^2(Y)) \\ &= (\sigma_1^2 + \mu_1^2) + 2p\mu_1\mu_2 + p(\sigma_2^2 + \mu_2^2) \end{aligned}$$

$$D(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = \sigma_1^2 + p\sigma_2^2 + p(1-p)\mu_2^2 \tag{6}$$

4.4 关于参数n 对于U_i 的频率分布直方图的影响的讨论

通过图6 我们可以看出随机变量U_i 的频率分布直方图实际上是由一个一个“峰”组成的，而且“峰”与“峰”之间存在一定的间隔，当n 较小时比较明显。随着n 的增大，峰之间的间隔变小，且峰的高度均变低。对于相同的n，峰的高度随$|U_i|$ 的增大而降低，最后趋近于0，在$U_i = 0$ 附近峰的高度达到最大值。并且，随着n 的增大，U_i 的分布近似于标准正态分布。

我们不加证明的地给出下面的一个重要定理。

定理 4.1 (Lindeberg-Lévy中心极限定理) 设X_n 为独立的随机序列，且$E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 > 0, (i = 1, 2, ...)$，记

$$Y_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

则对任意实数y，有

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n^* \leq y) = \Phi(y)$$

其中，$\Phi(y)$ 为标准正态分布的分布函数，因此即$n \to \infty$ 时，$Y_n^* \sim N(0, 1)$。

根据定理2，当n 很大时候$(n \geq 50)$，$\sum_{i=1}^{n} Z_i$ 的近似分布为正态分布[2]，U_i 的近似分布为标准正态分布。

随着n 的增大，由于U_i 的分布逐渐接近$N(0, 1)$，因此随着n 的增大，图像中“峰”之间的距离逐渐减小，最后趋近于0；且峰的高度逐渐减小，最后趋近于标准正态分布的概率密度函数值。对于相同的n，由于其分布和标准正态分布的近似性，因此有峰的最大值在$U_i = 0$ 附近，且峰的分布随着$|U_i|$ 增大而降低，最后趋近于0。

我们将上述现象总结为下面几个结论。

结论 4.1 U_i 的频率分布直方图实际上是由一个一个“峰”组成的，而且“峰”与“峰”之间存在一定的间隔。随着n 的增大，峰之间的距离逐渐减小；当$n \to \infty$ 时，峰之间距离趋近于*0*。

结论 4.2 随着n 的增大，U_i 分布逐渐近似于标准正态分布$N(0, 1)$，故其的最大值出现在$U_i = 0$ 附近，且U_i 近似关于$U_i = 0$ 对称分布。

同时，由于初次尝试的失败，考虑两个不同参数的高斯分布的差异，我得出了如下结论。

结论 4.3 随着混合高斯分布的两个峰之间的距离的增大，在n 较小的情况下$(n \leq 50)$，相邻峰之间的间隔逐渐增大。

关于结论4.3，利用目前的知识并没有办法很好的阐述，在此略去说明过程。

5 总结与感想

本文主要讨论了混合高斯分布的一些性质，并给出了利用Matlab 生成服从混合高斯分布的随机数的算法与具体实现；同时利用混合高斯分布讨论了Lindeberg-Lévy 中心极限定理，得出了一些普遍的结论。通过本文的讨论，我对于混合高斯分布有了更加深刻的认识，并且熟悉了利用Matlab 生成随机数辅助研究的方法，自学了关于中心极限定理的相关内容。总而言之，我获益颇丰。

6 致谢

感谢熊德文老师在概率统计课堂上的认真教学与对于本课题的启发性提示。

感谢助教抽出时间认真阅读本文。

感谢谢哲同学对于问题2中相关参数选取给予的帮助。

参考文献

[1] 李曙雄,杨振海. 舍选法的几何解释及其应用[J]. 数理统计与管理(4):40-43.

[2] 上海交通大学数学系.《概率论与数理统计》.上海交通大学出版社.2011