海森堡不确定性关系的一个证明

518030910150 方泓杰

Dec. 18th, 2019

1 问题简述

题主的问题即为对海森堡不确定性关系（精确形式）的证明。其中海森堡不确定性关系的表达式如下：

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

2 前置技能

高斯型波函数：

$$\psi(x) = Ce^{\frac{-x^2}{2(\delta x)^2}} \tag{1}$$

其中，C 是常数，δx 表示一个距离范围。上面的波函数式可以理解为其满足标准差为δx ，均值为0 的正态分布。那么根据概率统计知识，δx 和测不准量$\Delta x = \langle x - \langle x \rangle \rangle$ 之间有如下关系：

$$\delta x = \sqrt{2}\Delta x \tag{2}$$

交换理论和傅里叶变换：交换理论表明，动量的分布$|\varphi(p)|^2$ 满足：

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{2\pi ipx}{h}} \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

3 证明

联立式(1),(3) 进行整理，有

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\delta x} + \frac{2\pi ip\delta x}{h}\right)^2} e^{-\frac{2\pi^2 p^2 (\delta x)^2}{h^2}} \, \mathrm{d}x \tag{4}$$

令$y = \frac{x}{\delta x} + 2\pi\frac{ip\delta x}{h}$，对式(4) 进行化简后，有（此处省略化简过程）

$$\varphi(p) = C' e^{-\frac{2\pi^2 p^2 (\delta x)^2}{h^2}} \tag{5}$$

根据式(1) 可以知道高斯型波函数的一般形式，将式(5) 形式与其对应可得：

$$-\frac{2\pi^2 p^2 (\delta x)^2}{h^2} = \frac{-p^2}{2(\delta p)^2}$$

化简后，有

$$(\delta x)^2(\delta p)^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} \tag{6}$$

从式(2) 可知类似地，对于动量也有关系：

$$\delta p = \sqrt{2}\Delta p \tag{7}$$

将式(6) 开根并将式(2), (7) 代入，得到

$$\Delta x \Delta p = \frac{h}{4\pi} = \hbar \tag{8}$$

上面推导的情况为临界情况，因此海森堡不确定性关系即为

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$