# 从平方反比律浅谈场论及高斯定理的证明

518030910150 方泓杰

Oct. 27th, 2019

## 1 问题简述

通过老师在上课的介绍，我们知道了由于平方反比律，在一个电荷均匀分布的球壳内的任意一点的电场强度均为**0**，这个结论无论在解题还是推导过程中都十分重要。那么这个结论是如何得到的呢？这个结论又有什么重要的意义呢？

## 2 推导方式一：微元积分法[1]

如图1所示，一个半径为$R$的均匀带电球壳，总带电量为$q$，求P处的电场强度大小，其中P与球心O的距离为$r$，满足$r < R$。

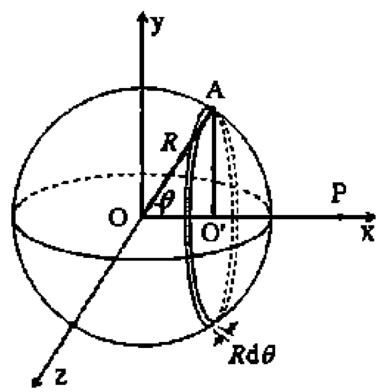


图 1: 均匀带电圆球壳的情况

如图1所示，建立三维直角坐标系。取圆上任一点A，记$\theta = \langle \overrightarrow{OA}, \boldsymbol{i} \rangle$，则取角度微元$\mathrm{d}\theta$，研究角度范围在$(\theta, \theta + \mathrm{d}\theta)$之间的微元圆环，如图阴影区域。则容易知道，环带宽度为$R\,\mathrm{d}\theta$，环带半径$O'A = R\sin\theta$，环心与球心距离$OO' = R\cos\theta$，则

$$\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi R^2} \cdot (2\pi R\sin\theta)(R\,\mathrm{d}\theta) = \frac{1}{2} q \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

圆环对轴线上的点产生的场强在课堂上已经讨论过，因此将(1)代入可得

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{(r - R\cos\theta)\,\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2\cos^2\theta + (r - R\cos\theta)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \boldsymbol{i} \tag{2}$$

为方便，令$\tau = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$，同时代入式子(1)，则(2)化为

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R\cos\theta - r}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}(\cos\theta) \cdot \boldsymbol{i} \tag{3}$$

则整个球壳在P点产生电场为对d$\vec{E}$积分后的值，即

$$\vec{E} = \int_O \mathrm{d}\vec{E} = \left( \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \int_0^\pi \frac{R\cos\theta - r}{\tau^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}(\cos\theta) \right) \boldsymbol{i} \tag{4}$$

经过一系列积分步骤（换元，$u = \cos\theta$）

$$\int_1^{-1} \frac{Ru\,\mathrm{d}u}{\tau^{\frac{3}{2}}} = \left[ \frac{u\tau^{-\frac{1}{2}}}{r} \right]_1^{-1} - \frac{1}{r}\int_1^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \left[ \frac{u}{r\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{Rr^2} \right]_1^{-1}$$

$$\int_1^{-1} \frac{r\,\mathrm{d}u}{\tau^{\frac{3}{2}}} = \left[ \frac{1}{R\sqrt{\tau}} \right]_1^{-1}$$

综上

$$\vec{E} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{u}{r\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{Rr^2} - \frac{1}{R\sqrt{\tau}} \right]_1^{-1} \cdot \boldsymbol{i} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{R - ru}{r^2\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru}} \right]_1^{-1} \cdot \boldsymbol{i} = \mathbf{0} \tag{5}$$

对于圆球壳，我们通过微元积分，得到了球壳内的任一一点场强均为$\mathbf{0}$。

## 3 推导方式二：几何法

以球壳内部一点P为顶点做两个锥面，此锥面就在球壳上割下两个曲面，当锥面张角为微元d$\omega$时，得到两个曲面元d$S_1$, d$S_2$，设$r_1, r_2$分别为P到d$S_1$, d$S_2$的距离，于是根据几何关系，有

$$\frac{\mathrm{d}S_1}{r_1^2} = \frac{\mathrm{d}S_2}{r_2^2} = \mathrm{d}\omega \tag{6}$$

令两块面积微元d$S_1$, d$S_2$在P处场强分别为d$\overrightarrow{E_1}$, d$\overrightarrow{E_2}$，则由(6)有

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}E_2} = \frac{\sigma\frac{\mathrm{d}S_1}{r_1^2}}{\sigma\frac{\mathrm{d}S_2}{r_2^2}} = \frac{\sigma\,\mathrm{d}\omega}{\sigma\,\mathrm{d}\omega} = 1 \tag{7}$$

由场强叠加，d$\overrightarrow{E_1}$ + d$\overrightarrow{E_2} = \mathbf{0}$。根据球的对称性可以知道，球壳在P点产生的合场强

$$\vec{E} = \mathbf{0} \tag{8}$$

我们利用几何分析的方法，得到了相同的结论。

## 4 从平方反比律浅谈场论

物理学中把某个物理量在空间的一个区域内的分布称为场，如温度场、密度场、引力场、电场、磁场等。我们把电场强度$\vec{E}$在空间的分布称为静电场。我们接下来来讨论相互作用场，并从场论的方向简单论证为什么平方反比律是正确的。

我们设场强

$$\vec{E} = K\frac{1}{r^n}\hat{r} \tag{9}$$

其中，$K$为与作用量相关的常数，一般非0。

由散度的意义，对于作用源以外的空间，场的散度应该为0。故

$$\mathrm{div}\vec{E}=\nabla\cdot\vec{E}=K\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^{n+1}}=K\left[\frac{3}{r^{n+1}}-\frac{n+1}{2}\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{r^{n+3}}\right]=K\left(\frac{2-n}{r^{n+1}}\right) \quad (10)$$

仅当$n=2$时候，即平方反比律条件下，$\mathrm{div}\vec{E}=0$，场的散度为0；若$n>2$，则$\mathrm{div}\vec{E}<0$，处处都是汇；若$n<2$，则$\mathrm{div}\vec{E}>0$，处处都是源。从另一个方面说明了平方反比律的合理性。

同时，静电场的旋度$\nabla\times\vec{E}=\mathbf{0}$，说明静电场非涡旋场，而是有心力场。

## 5 高斯定理的证明

对于任一单连通曲面$S$，对场内任一点O，满足O到曲面内各个点的连线都不超出曲面范围。以O为球心做一个球面$s$，使得$s$完全包含在曲面$S$内。从而我们对$s$上的任一面元$\mathrm{d}s$，作一个以O为顶点，面元$\mathrm{d}s$为底的锥体，并延长侧面，交曲面$S$形成面元$\mathrm{d}S$。

由于$\mathrm{d}s, \mathrm{d}S$充分小，因此可设$\mathrm{d}S$曲面上任意一点到O的距离均为$R$，$\mathrm{d}s$曲面上的任意一点到O的距离为$r$，由几何关系有

$$\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E\,\mathrm{d}S\cos\theta=E\frac{R^2}{r^2}\,\mathrm{d}s=\frac{R^2}{r^2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

从而

$$\oint\!\!\!\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint\!\!\!\oint_s\frac{R^2}{r^2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{K}{r^2}\oint\!\!\!\oint_s\mathrm{d}s=4\pi K \quad (11)$$

对曲面$S$中包含的每一个电荷，选取电荷所在位置为O点，均有以上结论，其中$K=\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}$。

利用场强叠加原理，则有

$$\oint\!\!\!\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=4\pi\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{q_{net}}{\varepsilon_0} \quad (12)$$

即高斯定理。

## 6 总结与进一步思考

本文以平方反比律在球壳上的特殊情况为例，对平方反比律的性质进行了讨论，用两种不同的方法（数值积分方法、几何分析方法）对提出的问题进行了解答。并且利用场论的知识说明了平方反比律的合理性。同时我们发现方法二具有可推广性，利用方法二的思想可以方便地证明静电场中的高斯定理，我们进行了推导演绎得出了结论。

为了推动读者进一步思考，本文提出下面这个问题：在一个电荷均匀分布的椭圆球壳内的电场强度如何分布？进一步，在一个电荷均匀分布的单连通区域内的电场强度如何分布？进一步，如果区域是无限的，电场强度又如何分布呢？这些进一步的问题留给大家进一步讨论。

在上述叙述论证过程中，读者如有发现不妥之处，请不吝赐教。

# 参考文献

[1] 李昂, 龚升. 均匀带电球壳内外电场的一种矢量积分求法[J]. 时代教育, 2014(11):196-196.