静电场边值问题的一个证明

518030910150 方泓杰

Oct. 27th, 2019

1 问题简述

题主的问题本质为静电场边值问题的唯一性定理的证明。这里给出一种我认为合理的证明方法。

2 前置技能

静电学的泊松方程

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

其中，ρ为体电荷密度，ϕ为电势，ε_0为真空电容率。

3 证明[1]

3.1 问题重述

给定区域V内的自由电荷分布ρ和分区均匀的各电介质的性质以及在V的边界面S_0上的以下两条件之一，则V上的电场唯一确定（其中，胡老师上课提的导体所带电荷为第二类边值问题的一种特例）。

- 第一类边值问题：电势ϕ_{S_0}；
- 第二类边值问题：电势的法向导数$\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]_{S_0}$。

3.2 证明

我们利用反证法，归谬的重点是静电场应该具有能量，即$W_e > 0$。

设V内有两组不同电势ϕ'和ϕ''，其中$\phi' \neq \phi''$，则具有两种不同电场。令电势差值$\phi = \phi' - \phi''$，则ϕ也表征着一个合理的静电场。由于$\vec{E} = -\nabla\phi$，则两边用梯度算子作用后有

$$\vec{E} = \overrightarrow{E'} - \overrightarrow{E''} \tag{1}$$

由静电学的泊松方程，有

$$\nabla^2\phi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \nabla^2\phi''$$

从而

$$\nabla^2\phi = \nabla^2\phi' - \nabla^2\phi'' = 0 \tag{2}$$

在区域V的边界上有(3), (4)两式之一（对应两类边值问题）：

$$\phi_{S_0} = \phi'_{S_0} - \phi''_{S_0} = 0 \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]_{S_0} = \left[\frac{\partial\phi'}{\partial n}\right]_{S_0} - \left[\frac{\partial\phi''}{\partial n}\right]_{S_0} = 0 \tag{4}$$

考虑第i个均匀区域内差值描述的静电场的能量：

$$W_{ei} = \int_{V_i} \frac{\varepsilon_i}{2} E_i^2 \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla\phi)^2 \,\mathrm{d}V \tag{5}$$

由于$(\nabla\phi)^2 = \nabla\cdot(\phi\nabla\phi) - \phi\nabla^2\phi$，由(2)则有

$$(\nabla\phi)^2 = \nabla\cdot(\phi\nabla\phi) \tag{6}$$

将(6)代入(5)，由积分的高斯定理有：

$$W_{ei} = \frac{1}{2}\int_{V_i} \varepsilon_i \nabla\cdot(\phi\nabla\phi)\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\oint_{S_i} \varepsilon_i\phi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2}\oint_{S_i} \varepsilon_i\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,\mathrm{d}S \tag{7}$$

若有n个均匀分区，则由(7)总电场能量

$$W_e = \sum_{i=1}^{n} W_{ei} = \frac{1}{2}\left(\oint_{S_0} \varepsilon\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,\mathrm{d}S + \sum_{i,j}\oint_{S_{ij}} \varepsilon\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,\mathrm{d}S\right) \tag{8}$$

容易发现，第二项由于各区域的抵消关系，值为0，而将(3)或(4)代入均有$W_e = 0$，与$W_e > 0$矛盾。

因此，静电场边值定理得证。

参考文献

[1] 漆新民. 关于静电场中唯一性定理的证明[J]. 物理与工程, 1993(1):23-25.