缝宽周期性变化的光栅的衍射光强分析

518030910150 方泓杰

Dec. 19th, 2019

1 问题简述

光栅是常用的光学元器件。在我们的《大学物理》课程中讨论的都是等缝距光栅的衍射问题。那么缝宽周期性变化的光栅的衍射光强是怎么样的呢？

2 衍射光强的分析

缝宽周期性变化的一维光栅中中，相邻缝的间距d 是常值，缝宽a 则随缝的空间位置做周期性变化。由于其具有周期性，我们讨论光栅上一个周期内的多个缝的衍射光强分布。

设波长为λ 的入射光垂直照射光栅，光栅在一个周期内共有k 条狭缝，缝宽分别为$a_1, a_2, ..., a_n$，且$a_i < d (i = 1, 2, 3, ..., n)$。

为方便讨论，令$s = \sum_{i=1}^{n} a_i$。

对于第i 条狭缝，根据单缝衍射强度分布公式，其在接受屏处振幅大小为

$$A_i = A_{0i} \frac{\sin \beta_i}{\beta_i} \tag{1}$$

其中，$\beta_i = \frac{\pi a_i \sin\theta}{\lambda}$，$\theta$ 为衍射角。

由矢量图解法知A_{0i} 为第i 条狭缝在衍射角$\theta = 0$ 处的振幅，相当于狭缝在接收屏处的振幅的代数和，与狭缝宽度a_i 成正比，若设比例系数k，则$A_{0i} = k a_i$。

将上两式代入式子(1)，则

$$A_i = k a_i \frac{\lambda \sin \beta_i}{\pi a_i \sin\theta} = \frac{k\lambda \sin\beta_i}{\pi \sin\theta} \tag{2}$$

由于缝间距是定值，因此相邻两狭缝出射的光在光屏中相位差δ 为定值，$\delta = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}$。

从而，有

$$A = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} A_i \cos{(i-1)\delta}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \sin{(i-1)\delta}\right)^2} \tag{3}$$

代入式(2)，有

$$A = \frac{k\lambda}{\pi \sin\theta} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \sin\beta_i \cos{(i-1)\delta}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \sin\beta_i \sin{(i-1)\delta}\right)^2} \tag{4}$$

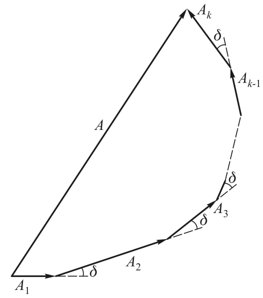

图 1: 一个周期内的狭缝在接收屏处引起的振幅矢量图

为方便叙述，令$p_{cos} = \sum_{i=1}^{n} \sin\beta_i \cos{(i-1)\delta}, p_{sin} = \sum_{i=1}^{n} \sin\beta_i \sin{(i-1)\delta}$，则

$$A = \frac{k\lambda}{\pi \sin\theta}\sqrt{p_{cos}^2 + p_{sin}^2} \tag{5}$$

所以，式(5) 即为一个周期内的狭缝引起的衍射光的振幅。将一个周期内的狭缝引起的衍射视作一个整体，那么整个光栅的强度分布即为若干个相同振幅，相位差相同的光的叠加。

整体周期的相位差为$\gamma = k\delta = \frac{2k\pi d \sin\theta}{\lambda}$，振幅$A' = A\frac{\sin{(n\gamma/2)}}{\sin{(\gamma/2)}}$。

由于光强和振幅的平方成正比，设比例系数k'，则有：

$$I = k'\left(\frac{k\lambda}{\pi\sin\theta}\right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{n\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\right)^2 \left(p_{cos}^2 + p_{sin}^2\right) \tag{6}$$

取$\theta = 0$，有

$$I_0 = k^2 k' n^2 s^2 \tag{7}$$

从而，可以得出系数因子

$$k_0 = \frac{I}{I_0} = \left(\frac{\sin\left(\frac{n\gamma}{2}\right)}{n\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\right)^2 \frac{p_{cos}^2 + p_{sin}^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right)^2} \overset{def}{=} k_{Interfere}k_{Diffraction} \tag{8}$$

其中，$k_{Interfere}$ 为干涉因子，$k_{Diffraction}$ 为衍射因子。

综上，$I = k_{Interfere}k_{Diffraction} \cdot I_0$。

3 参考文献

曹驰宇, 王文玲, and 黄安平. ”缝宽周期性变化的光栅的衍射光强分析.” 大学物理第38卷.5(2019):57-62.