变折射率的光传播情况

518030910150 方泓杰

Dec. 17th, 2019

1 问题简述

在《大学物理》的课程内，我们讨论的范围是折射率分段不变的介质。即光路可以分成若干段$\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, ..., \overrightarrow{P_{m-1}P_m}$，光在每一段传播的时候，都有一个固定的折射率$n_1, n_2, ..., n_m$。那么我们考虑更一般的情况，如果折射率是一个关于位置$\vec{r}$ 的函数，也就是$n = n(\vec{r})$，会有什么样特殊的性质呢？

在讨论问题前，作如下约定：设光初始从折射率为n_0 的介质以入射角θ_0 入射。

2 情况一：介质沿某方向平移对称

如果介质沿着某个方向平移对称，那么所有界面处的法线方向都沿着这个方向。如果介质折射率满足分段不变，那么在介质的分界面处列写折射定律方程：

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = ... = n_m \sin\theta_m \tag{1}$$

根据上式即可解出光路轨迹方程（若干直线段连接而成），以及最终的出射角θ_m。

如果介质的折射率连续，实质上和上式推导完全类似。我们在平面上建立直角坐标系，其中介质的对称方向沿着y 轴，即介质折射率$n = n(y)$。设光从(x_0, y_0) 处以入射角θ_0 射入，如图1 所示：

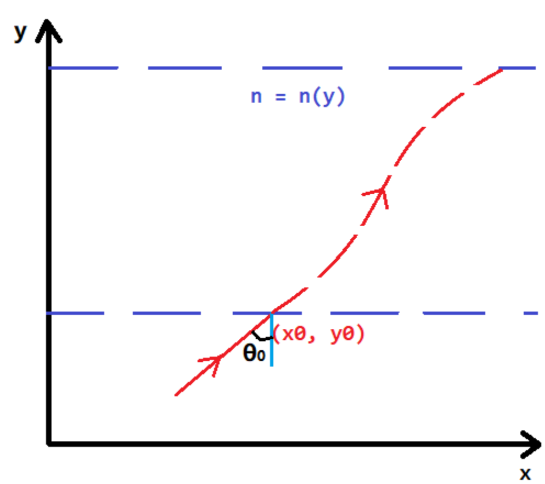

图 1: 介质沿某方向平移对称的情况

那么和式(2) 类似，有

$$n_0 \sin\theta_0 = n(y)\sin\theta(y) \tag{2}$$

同时，由于光的几何性质，最后一次出射时，有

$$k = \cot\theta(y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

化简后有：

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta(y)} - 1 \tag{3}$$

联立式(2), (3) 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{\frac{n^2(y)}{n_0^2\sin^2\theta_0} - 1} \tag{4}$$

若将式(4) 平方后求导，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{n(y)}{n_0^2\sin^2\theta_0}\cdot\frac{\mathrm{d}n(y)}{\mathrm{d}y} \tag{5}$$

根据式(4) 或式(5) 即可解得光路的轨迹方程。

3 情况二：介质满足球对称分布

这种情况下，折射率满足$n = n(r)$，其中r 是讨论的点到对称中心的距离。设第k 次折射时候入射角为i_k，折射角为ϕ_k，如图2 所示。

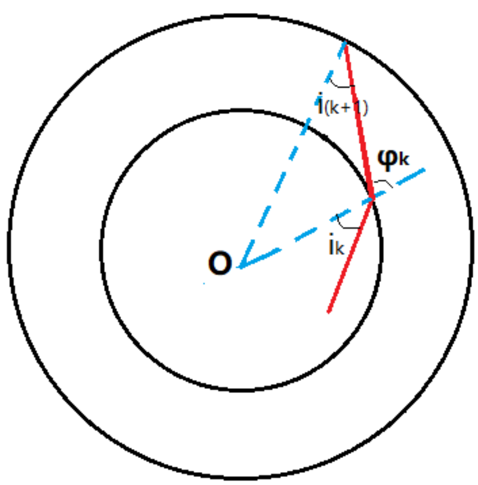

图 2: 介质满足球对称分布的情况

那么由折射定律：

$$n(r_k)\sin i_k = n(r_{k+1})\sin\varphi_k \tag{6}$$

在如图三角形中，列正弦定理：

$$\frac{\sin\varphi_k}{r_{k+1}} = \frac{\sin i_{k+1}}{r_k} \tag{7}$$

联立式(6), (7) 可得：

$$n(r_k)\cdot r_k\cdot\sin i_k = n(r_{k+1})\cdot r_{k+1}\cdot\sin i_{k+1} \tag{8}$$

式(8) 说明，$n\cdot r\cdot\sin i$ 为定值，即

$$r\cdot n(r)\cdot\sin i(r) = Const.$$

上式和角动量守恒式在数学上同构，因此可类比得到，此时轨迹为圆锥曲线。

4 例题

为了更好的展示上述结论的运用，我们给出一个例题来加深理解：

4.1 问题描述

已知光导纤维的折射率n 沿着径向的分布为$n^2 = n_0^2(1-\alpha^2 r^2)$，入射角为$\theta_0$，求光线轨迹。

4.2 解答

由第2节讨论的内容，根据式(5) 有

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\alpha^2}{\sin^2\theta_0} r$$

化简得

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\alpha^2}{\sin^2\theta_0} r = 0$$

解微分方程，有

$$r = A\sin\left(\frac{\alpha}{\sin\theta_0}x + \varphi_0\right)$$

根据初始情况，即$x = 0$ 时，$r = 0$ 且$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \cot\theta_0$，可以解得$\varphi_0 = 0$ 或$\varphi_0 = \pi$，且$A = \frac{\cos\theta_0}{\alpha\cos\varphi_0}$，代入即得轨迹方程

$$r = \frac{\cos\theta_0}{\alpha\cos\varphi_0}\sin\left(\frac{\alpha}{\sin\theta_0}x + \varphi_0\right) \tag{9}$$

其中，$\varphi_0 = 0$ 说明光线向右上方入射；$\varphi_0 = \pi$ 说明光线向右下方入射。

5 拓展问题

根据以上知识，我设计了一个实际问题供各位解决：海洋中得折射率满足$n = n_0 + b|z|$，其中z 为海拔高度（有正、负区分）。如果有一光源放在$x = 0, z = 0$ 处，求光在海洋中的轨迹。

欢迎各位对上面的我设计的问题进行讨论，也欢迎各位提出除上文情况一、二外的其他新情况并进行讨论!