

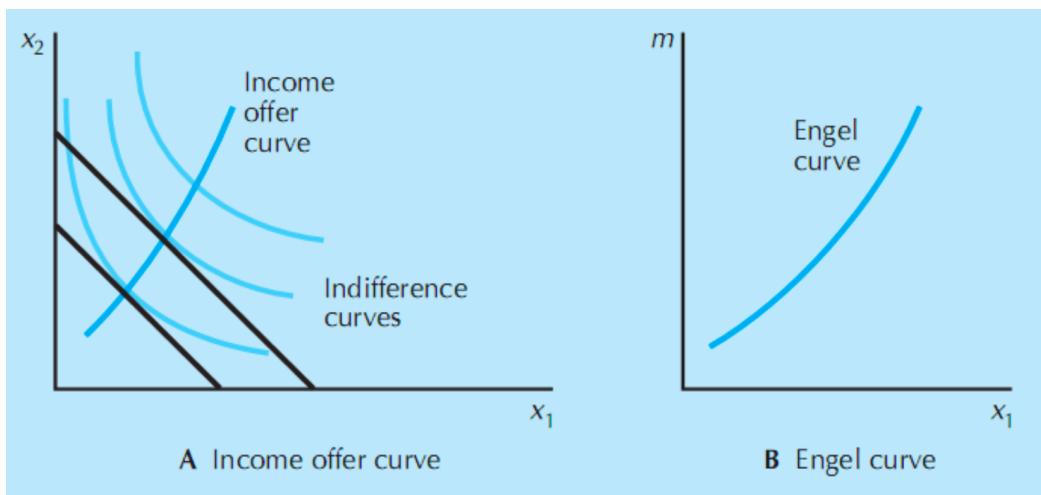
6. 需求

需求 分析收入、价格变化对选择的影响。

收入变化对需求的影响

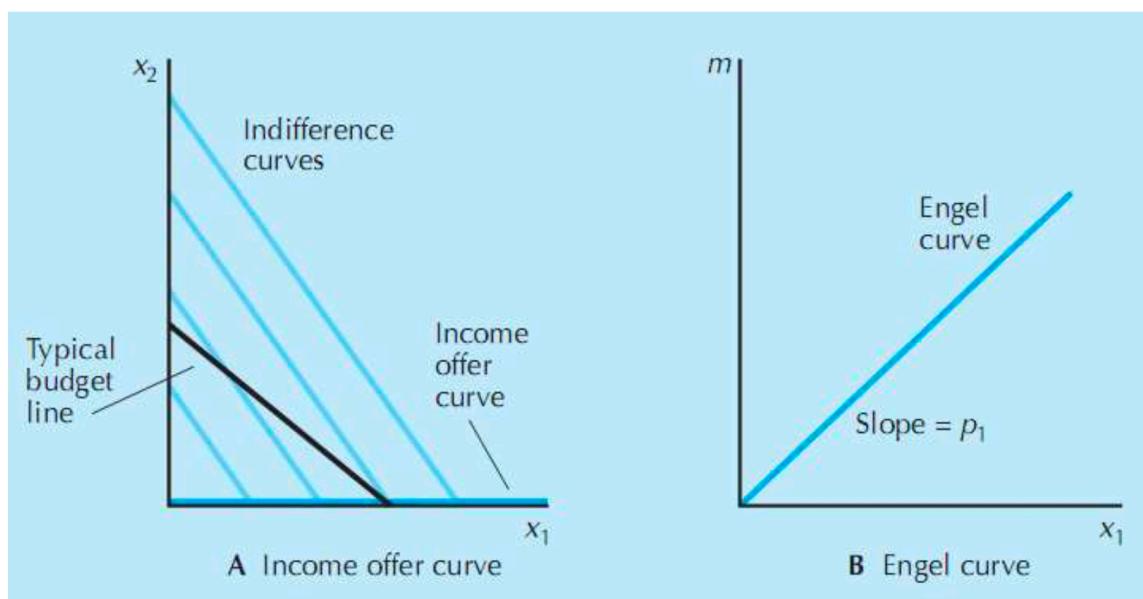
收入分析：给定偏好 $u(x_1, x_2)$ 、 p_1 与 p_2 ，讨论收入变化对需求的影响。

随着收入的变化，选择的消费束也在变化，将这些最优选择 (x_1, x_2) 连起来得到收入提供线；将 (x_1, m) 连起来得到恩格尔曲线。

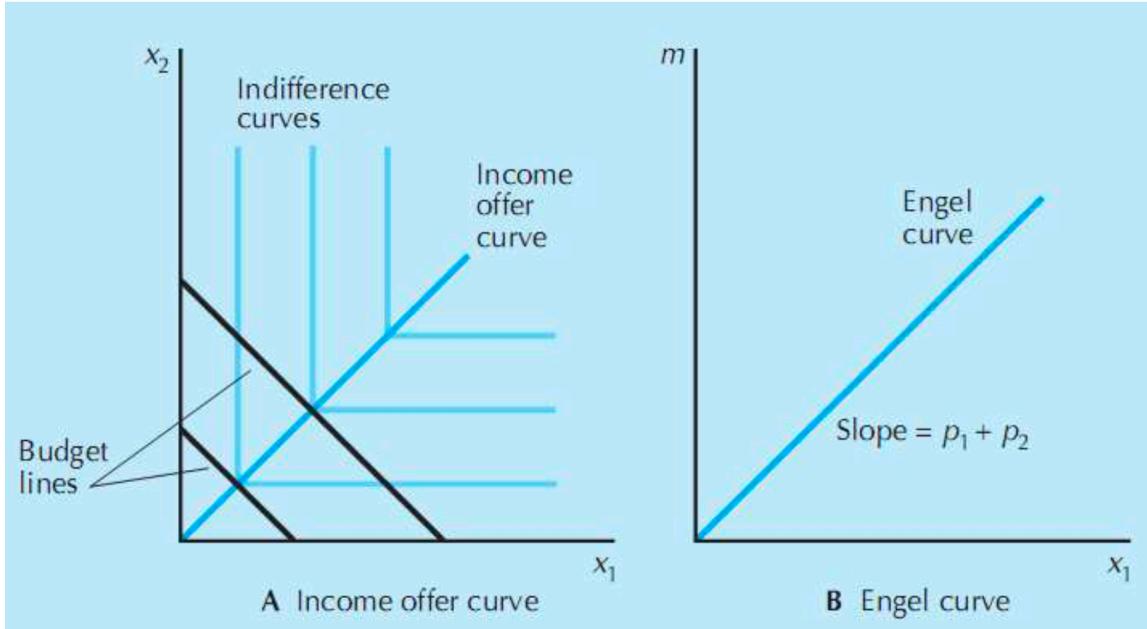


几种常用偏好的曲线

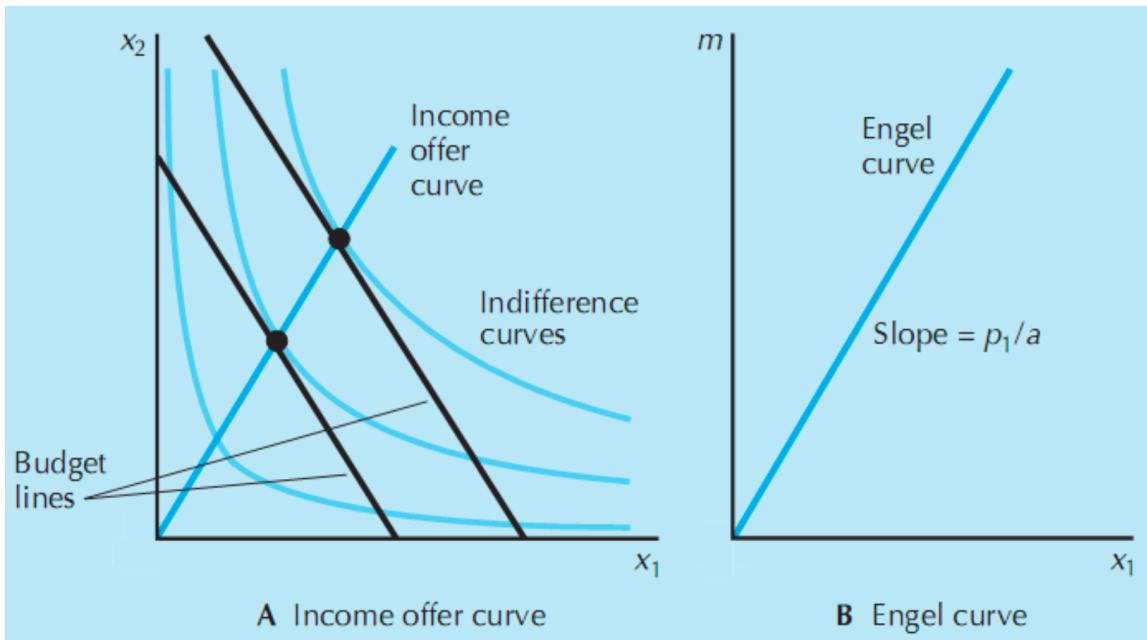
- 完全替代



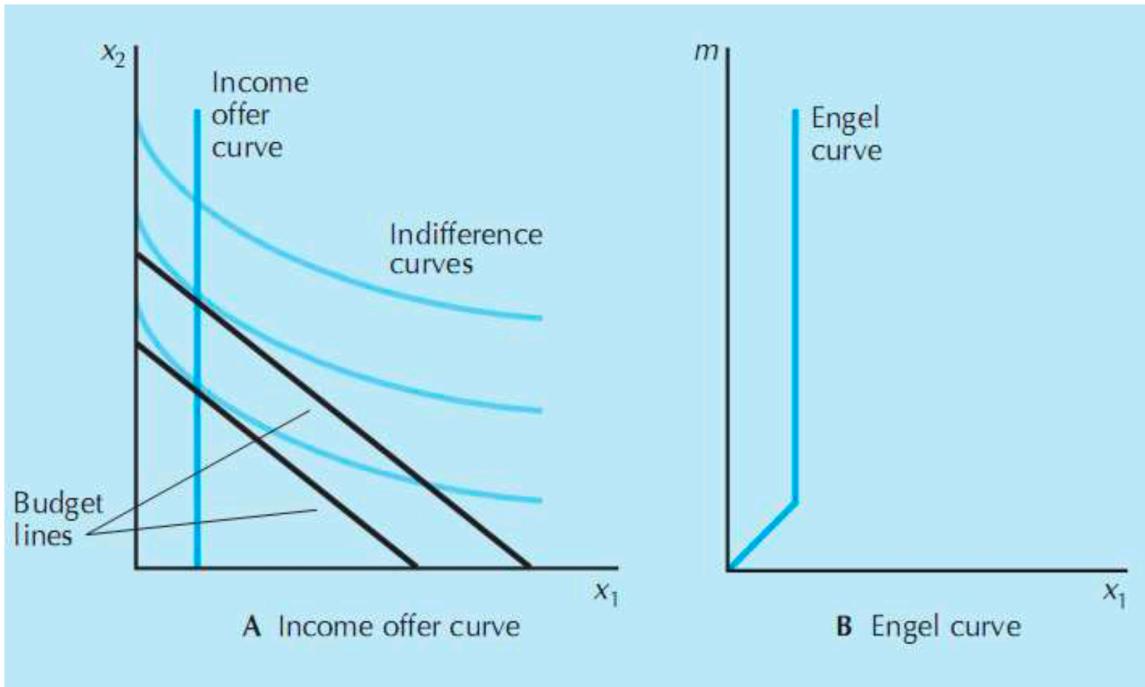
- 完全互补



- Cobb-Douglas效用函数（该图中的“ a ”实际为“ $\frac{a}{a+b}$ ”）



- 拟线性偏好



相似偏好：若 $A(x_1^A, x_2^A) \succ B(x_1^B, x_2^B)$ (也可以为 \succeq)，则 $(\lambda x_1^A, \lambda x_2^A) \succ (\lambda x_1^B, \lambda x_2^B)$ ($\lambda > 0$)；即若 $u(x_1^A, x_2^A) > u(x_1^B, x_2^B)$ ，则 $u(\lambda x_1^A, \lambda x_2^A) > u(\lambda x_1^B, \lambda x_2^B)$ ($\lambda > 0$)，此时 u 为齐次函数。

正常商品：收入增加，需求量也增加的商品，即 $\frac{\Delta x_1}{\Delta m} > 0$ ；

低档商品（劣等品）：收入增加，需求量减少的商品，即 $\frac{\Delta x_1}{\Delta m} < 0$ 。任何商品都不会在一开始（收入为 0）时为低档商品。

奢侈品：需求增长率超过收入增长率，即 $\frac{\Delta x_1/x_1}{\Delta m/m} > 1$ ；

必需品：需求增长率低于收入增长率，即 $0 < \frac{\Delta x_1/x_1}{\Delta m/m} < 1$ 。

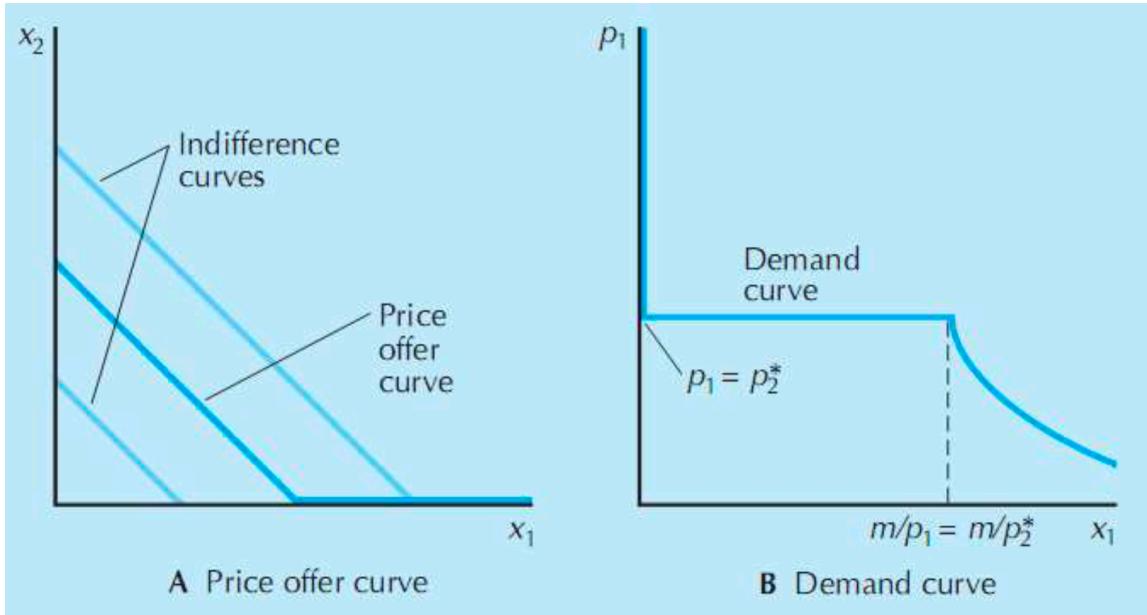
价格变化对需求的影响

价格提供曲线：假设商品 1 的价格发生变动，而 p_2 与收入 m 不变。此时几何上涉及预算线的转动，我们将最优点 (x_1, x_2) 连接为一条价格提供曲线，表示商品 1 在不同价格水平上的需求束。

需求曲线：在上述过程中，将 (p_1, x_1) 连接即可得到需求曲线。

几种常用偏好下的曲线

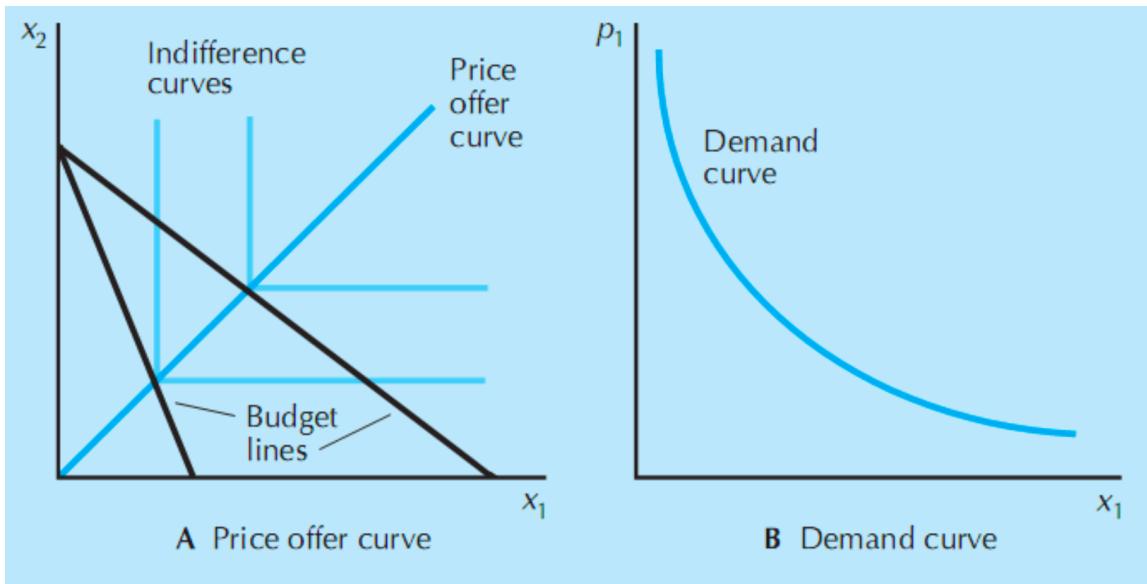
- **完全替代：** $u = bx_1 + ax_2$ (下图中，假设 $a = b$)



事实上，需求曲线为

$$x_1 = \frac{m}{p_1} \quad (p_1 \leq \frac{b}{a}\bar{p}_2)$$

- 完全互补: $u = \min(bx_1, ax_2)$



事实上，需求曲线为

$$x_1 = \frac{a\bar{m}}{ap_1 + b\bar{p}_2}$$

为经过平移后的双曲线，可能与坐标轴相交。

- Cobb-Douglas 效用函数: $u = x_1^a x_2^b$

事实上，价格提供曲线为一条水平线，需求曲线为

$$x_1 = \frac{a}{a+b} \frac{\bar{m}}{p_1}$$

- 拟线性偏好: $u = x_2 + v(x_1)$, 讨论 $v'(\cdot) > 0, v''(\cdot) < 0$ 。

◦ 若 $u = x_2 + \ln x_1$, 则 $v'(x) = \frac{1}{x_1} = \frac{p_1}{\bar{p}_2}$, 则需求曲线为

$$x_1 = \frac{\bar{p}_2}{p_1} \quad (\bar{m} - \bar{p}_2 \geq 0)$$

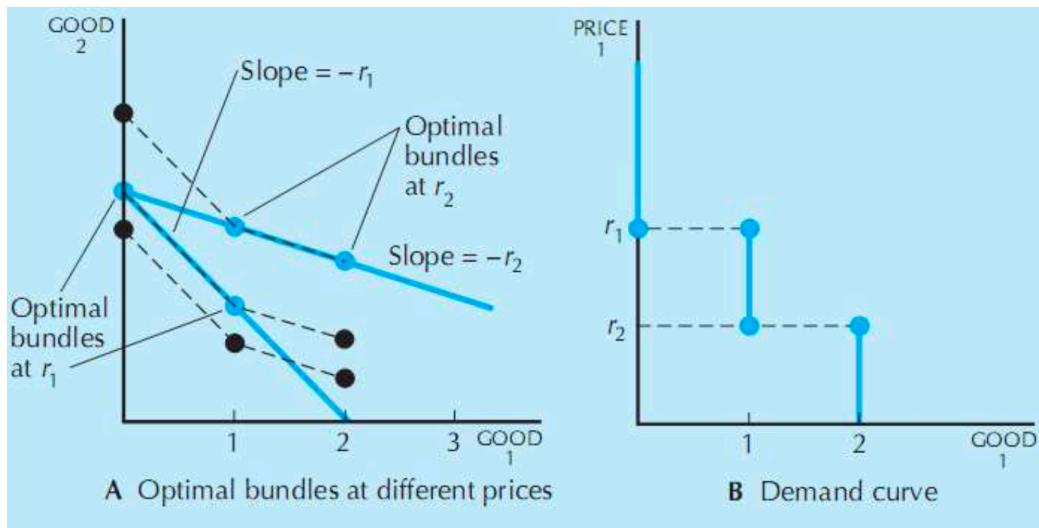
基于 $\bar{m} - p_1 x_1 = \bar{m} - \bar{p}_2 \geq 0$,

若 $\bar{m} < \bar{p}_2$, 则需求曲线为

$$x_1 = \frac{\bar{m}}{p_1} \quad (\bar{m} - \bar{p}_2 < 0)$$

- 取特定参数, 如 $\bar{p}_2 = 1$ 且收入 \bar{m} 足够大, 则 $x_1 = \frac{1}{p_1}$; 取 Cobb-Douglas 效用函数情况下特定参数, 如 $a = 1, b = 1, \bar{m} = 2$, 得到的需求曲线同样为 $x_1 = \frac{1}{p_1}$ 。需求曲线相同时, 偏好不一定相同。

基于离散商品、拟线性偏好下理解保留价格: $u = x_2 + v(x_1)$, 商品 1 为离散商品 (只能取整), 商品 2 为一般计价物 ($p_2 = 1$)。



设 r_1 为第一个商品 1 的保留价格, 则 r_1 对应预算线下, 买一个与不买无差异, 即

$u(1, m - r_1) = u(0)$, 化简得到 $r_1 = v(1) - v(0)$ 。此时预算线斜率 $E = \frac{p_1}{p_2} = r_1$, 无差异曲线的“斜率” $MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{v(1)-v(0)}{1} = v(1) - v(0)$, 在这里 $MU_i = \frac{\Delta u}{\Delta x_i}$ 为离散“导数”。

设 r_2 为第二个商品 1 的保留价格, 则 r_2 对应预算线下, 买两个与买一个无差异, 即

$u(2, m - 2r_2) = u(1, m - r_2)$, 化简得到 $r_2 = v(2) - v(1)$ 。此时预算线斜率 $E = \frac{p_1}{p_2} = r_2$, 无差异曲线的“斜率” $MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{v(2)-v(1)}{1} = v(2) - v(1)$ 。

以此类推， $r_n = v(n) - v(n-1)$ 。

- 这里使用拟线性偏好进行讨论是因为拟线性偏好没有收入效应，方便讨论；事实上对其他偏好的讨论方法类似。

反需求函数：若 $x_1 = D(p_1)$ 为需求函数，则 $p_1 = P(x_1)$ 为反需求函数，因此价格 p_1 度量了边际替代率 MRS 或支付意愿 WTP。

单位需求偏好：超过 1 单位后的商品均为中性品。