

# 第五章 图像复原与重建

## 5.1 图像退化/复原过程的模型

**图像退化过程：**图像退化过程被建模为一个退化函数和一个加性噪声项，对一幅输入图像  $f(x, y)$  进行处理，产生一幅退化后的图像  $g(x, y)$ ，即

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y)$$

在频域内进行表示，即为

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

**图像复原过程：**给定  $g(x, y)$  和关于退化函数  $H$  的一些知识，以及关于加性噪声项  $\eta(x, y)$  的一些知识后，图像复原的目的就是获得原始图像的一个估计  $\hat{f}(x, y)$ ，我们希望这一估计尽可能地接近原始图像；并且  $H$  与  $\eta$  知道得越多，所得到的估计就会越来越接近  $f(x, y)$ 。

## 5.2 噪声模型

本章中，我们假设除空间周期噪声外，噪声与空间坐标无关，且噪声与图像本身不相关（像素值与噪声成分的值之间不相关）。

**白噪声：**当噪声的傅立叶谱是常量时，噪声通常称为白噪声，即其以相同比例包含所有频率的函数。

**高斯噪声：**在空间域和频率域中，由于高斯噪声在数学上的易处理性，故实践中常用这种噪声（也称为正态噪声）模型。事实上，该种易处理性非常方便，以至于高斯模型常常应用于在一定程度上导致最好结果的场合。高斯随机变量  $z$  的 PDF（概率密度函数）如下给出：

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\bar{z})^2/2\sigma^2}$$

其中， $z$  表示灰度值， $\bar{z}$  表示  $z$  均值， $\sigma$  表示  $z$  标准差， $\sigma^2$  称为  $z$  的方差；大约有 70% 的  $z$  值落在  $[\bar{z} - \sigma, \bar{z} + \sigma]$  之间；大约有 95% 的  $z$  值落在  $[\bar{z} - 2\sigma, \bar{z} + 2\sigma]$  之间。

**瑞利噪声：**瑞利噪声的 PDF 由下式给出

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

其概率密度的均值和方差分别为  $\bar{z} = a + \sqrt{\frac{\pi b}{4}}$  以及  $\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$ 。

**爱尔兰（伽马）噪声：**爱尔兰噪声的 PDF 由下式给出

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

式中，参数  $a > 0$  并且  $b \in \mathbb{N}^*$ ，其概率密度的均值和方差分别为  $\bar{z} = \frac{b}{a}$ ,  $\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$ 。上式经常称为伽马密度函数，但严格来说，只在坟墓为伽马函数  $\Gamma(b)$  时才正确；当分母如上式所示时，称为爱尔兰密度更合适。

**指数噪声：** 指数噪声的 PDF 由下式给出

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

式中， $a > 0$ ，其概率密度的均值和方差分别为  $\bar{z} = \frac{1}{a}$ ,  $\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$ 。这个 PDF 事实上是爱尔兰噪声的 PDF 中， $b = 1$  的特殊情况，

**均匀噪声：** 均匀噪声的 PDF 由下式给出

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq z \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

该概率密度的均值和方差分别为  $\bar{z} = \frac{a+b}{2}$ ,  $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ 。

**脉冲（椒盐）噪声：** （双极）脉冲噪声的 PDF 由下式给出：

$$p(z) = \begin{cases} P_a & z = a \\ P_b & z = b \\ 1 - P_a - P_b & \text{otherwise} \end{cases}$$

如果  $b > a$ ，则灰度级  $b$  在图像中将显示为一个亮点，灰度级  $a$  将在图像中显示为一个暗点；若  $P_a$  或  $P_b$  为零，则脉冲噪声称为**单极脉冲**。如果  $P_a$  和  $P_b$  都不为 0，尤其是它们近似相等时时，则脉冲噪声值将类似于在图像上随机分布的胡椒和盐粉颗粒。由于这个原因，双极脉冲噪声也被称为**椒盐噪声**（散粒噪声、尖峰噪声）。

脉冲噪声可以为正也可以为负，标定通常是图像数字化处理的一部分；由于与图像信号的强度相比，脉冲污染通常较大，所以一幅图像中脉冲噪声通常被数字化为最大值（即纯黑或纯白），即  $a$  和  $b$  是饱和值（数字图像允许的最大和最小值）。

**各种噪声的概率密度函数：** 如图 26 所示。

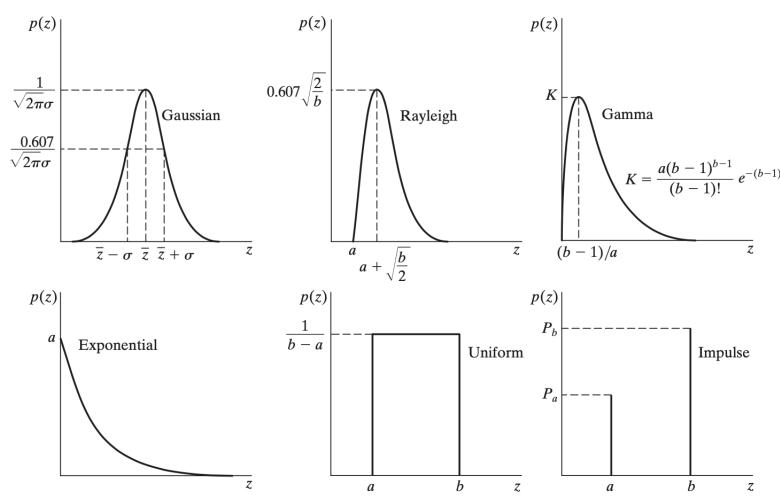
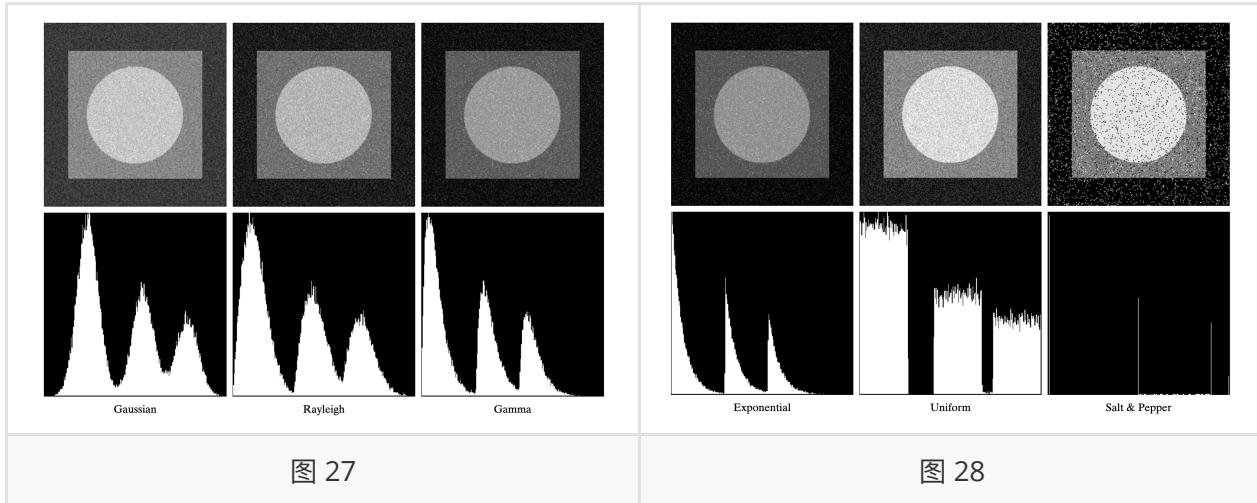


图 26

叠加了各种噪声后的直方图：如图 27~28 所示。



可以看到，样例图片中可以通过直方图的形状确定噪声的类型。

**周期噪声：**图像中的周期噪声是在图像获取期间由电力或机电干扰产生的。这是在本章中讨论的唯一一种空间相关噪声。周期噪声可以通过频率域滤波来显著地减少。

**噪声参数的估计：**周期噪声的参数通常是通过检测图像的傅立叶谱来估计的，因为周期噪声趋向于产生频率尖峰，甚至通过视觉分析也能检测到这些尖峰；另一种方法是试图直接由图像推断噪声成分的周期性，但这仅在非常简单的情况下是可能的。噪声 PDF 的参数一般可以从传感器的技术说明中得知，但对于特殊的成像装置通常需要估计这些参数。如果成像系统可用，那么研究系统噪声特性的一种简单方法是，获取一组“平坦”环境的图像，结果图像是典型的系统噪声的良好之十七。当仅有通过传感器生成的图像可用时，通常可由合理的恒定灰度值的一小部分来估计 PDF 的参数。来自图像条带数据的最简单用途是计算灰度值的均值和方差。考虑由  $S$  表示的一个条带（子图像），并令  $p_S(z_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, L - 1$ ) 表示  $S$  中像素灰度的概率估计（归一化直方图值），其中  $L$  是图像中可能的灰度数。我们可以估计  $S$  的均值和方差如下：

$$\bar{z} = \sum_{i=0}^{L-1} z_i p_S(z_i)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - \bar{z})^2 p_S(z_i)$$

直方图的形状决定其最接近的 PDF 匹配，然后通过均值和参数的估计值来确定对应噪声 PDF 的参数。

### 5.3 只存在噪声的复原——空间滤波

当一幅图像中唯一的退化是噪声时，图像退化模型变为

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

和

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

噪声项未知，所以从  $g(x, y)$  或  $G(u, v)$  中减去它们并不现实。在周期噪声的情况下，通常可以用  $G(u, v)$  的谱估计  $N(u, v)$ ；这种情况下，从  $G(u, v)$  减去  $N(u, v)$  可得到原图像的一个估计；然而，这种做法并不是普遍规律。

当仅存在加性噪声时，我们可以采用空间滤波方法。

**算术均值滤波器：**令  $S_{xy}$  表示中心在点  $(x, y)$  处，大小为  $m \times n$  的矩形子图像窗口（邻域）的一组坐标。算术均值滤波器在  $S_{xy}$  定义的区域中计算被污染图像  $g(x, y)$  的平均值，并简单使用  $S_{xy}$  区域中的像素计算出的算术均值来更新  $(x, y)$  处复原图像  $\hat{f}(x, y)$  的值，即

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)$$

均值滤波平滑一幅图像中的局部变化，虽然模糊了结果，但降低了噪声。

**几何均值滤波器：**使用集合均值滤波器复原的一幅图像由如下表达式给出：

$$\hat{f}(x, y) = \left[ \prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

其中，每个复原的像素由子图像窗口中像素乘积的  $\frac{1}{mn}$  次幂给出。集合均值滤波器实现的平滑可与算术均值滤波器相比，但这种处理中丢失的图像细节更少。

**谐波均值滤波器：**谐波均值滤波操作由如下表达式给出：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}}$$

谐波均值滤波器对于盐粒噪声效果较好，但不适用于胡椒噪声。它善于处理像高斯噪声那样的其他噪声。

**逆谐波均值滤波器：**逆谐波均值滤波器基于如下表达式产生一幅复原的图像：

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$$

其中， $Q$  称为谐波器的阶数。这种滤波器适合减少或在实际中消除椒盐噪声的影响，当  $Q$  为正时，滤波器消除胡椒噪声，当  $Q$  为负时，该滤波器消除盐粒噪声。但其不能同时消除这两种噪声。

- $Q = 0$  时，简化为算术均值滤波器；
- $Q = -1$  时，简化为谐波均值滤波器。

**中值滤波器：**中值滤波器使用像素邻域中的灰度级的中值来替代该像素的值。

$$\hat{f}(x, y) = \text{median}_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

中值滤波器的应用非常普遍，因为对于某些类型的随机噪声，它们可提供良好的去噪能力，且与相同尺寸的线性平滑滤波器相比，引起的模糊更少。在存在单极或双极脉冲噪声情况下，中值滤波器尤其有效。

**最大值和最小值滤波器：**最大值和最小值滤波器分别由下式给出：

$$\hat{f}(x, y) = \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

$$\hat{f}(x, y) = \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

最大值滤波器对发现图像中的最亮点非常有用，同时可以去除或降低胡椒噪声；最小值滤波器对发现图像中的最暗点非常有用，同时可以去除或降低盐粒噪声。最大值滤波器会从黑色物体的边缘去除了一些黑色像素，使得暗物体更小，亮物体更大；最小值滤波器也会从明亮物体的边缘去除一些白色像素，使得亮物体更小，暗物体更大。

**中点滤波器：**中点滤波器简单地计算滤波器包围区域中的最大值和最小值之间的中点，即

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \right]$$

这种滤波器结合了统计排序和均值平均。它最适合于处理随机分布的噪声，如高斯噪声和均匀噪声。

**修正的阿尔法均值滤波器：**假设在邻域  $S_{xy}$  内去掉  $g(s, t)$  最低灰度值的  $d/2$  和最高灰度值的  $d/2$ ，令  $g_r(s, t)$  表示剩下的  $mn - d$  个像素，由这些剩余像素的平均值形成的滤波器称为修正的阿尔法均值滤波器，即

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g_r(s, t)$$

式中， $d$  的值可选  $0, 1, \dots, mn - 1$ 。当  $d = 0$  时，修正的阿尔法均值滤波器退化为算术均值滤波器；当  $d = mn - 1$  时，修正的阿尔法均值滤波器退化为中值滤波器。当  $d$  取其他值时，修正的阿尔法均值滤波器在包括多种噪声的情况下很有用，如混合高斯噪声和椒盐噪声的情况。

**自适应局部降低噪声滤波器：**滤波器作用于局部区域  $S_{xy}$ 。滤波器在该区域中心任意一点  $(x, y)$  上的响应基于以下四个量：

- $g(x, y)$ , 带噪图像在点  $(x, y)$  上的值;
- $\sigma_\eta^2$ , 污染  $f(x, y)$  以形成  $g(x, y)$  的噪声的方差;
- $m_L$ ,  $S_{xy}$  中像素的局部均值;
- $\sigma_L^2$ ,  $S_{xy}$  中像素的局部方差。

我们希望滤波器的性能如下：

1. 如果  $\sigma_\eta^2$  为 0，则滤波器应该简单地返回  $g(x, y)$  的值；在另噪声的情况下， $g(x, y) = f(x, y)$ ；
2. 如果局部方差与  $\sigma_\eta^2$  是高度相关的，则滤波器返回  $g(x, y)$  的一个近似值。高局部方差通常与边缘相关，应该保护这些边缘区域；
3. 如果两个方差相等，我们希望滤波器返回  $S_{xy}$  中像素的算术均值。这种情况发生在局部区域与整个图像有相同特性的条件下，并且局部噪声将通过简单地求平均降低。

故自适应表达式写为：

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_L^2} [g(x, y) - m_L]$$

唯一需要知道或估计的量是全部噪声的方差  $\sigma_\eta^2$ 。其他参数要从每个  $(x, y)$  处的  $S_{xy}$  中的像素来计算， $(x, y)$  是滤波器窗口的中心。上式隐含的假设为  $\sigma_\eta^2 \leq \sigma_L^2$ 。模型中的噪声是加性的和位置无关的，因此这是一个合理的假设（因为  $S_{xy}$  是  $g(x, y)$  的子集。然而，我们很少知道  $\sigma_\eta^2$  的确切知识，因此我们很可能违反这个条件。

**自适应中值滤波器：**中值滤波器对于脉冲噪声的空间密度不大的情况（根据经验， $P_a$  和  $P_b$  小于 0.2）性能就很好；自适应中值滤波可以处理具有更大概率的脉冲噪声。自适应中值滤波器的另一优点是，平滑非脉冲噪声会试图保留细节，这是传统中值滤波器所做不到的。自适应中值滤波器也工作在矩形窗口区域  $S_{xy}$  内。然而，与这些滤波器不同的是，自适应中值滤波器在进行滤波处理时，会根据本节列举的某些条件改变（或增大） $S_{xy}$  的尺寸。考虑如下符号：

$$\begin{aligned}z_{min} &= S_{xy} \text{ 中的最小灰度值} \\z_{max} &= S_{xy} \text{ 中的最大灰度值} \\z_{med} &= S_{xy} \text{ 的灰度值中值} \\z_{xy} &= \text{坐标 } (x, y) \text{ 处的灰度值} \\S_{max} &= S_{xy} \text{ 允许的最大尺寸}\end{aligned}$$

自适应中值滤波算法以两个进程工作，分别表示为进程 A 和进程 B，如下所示：

- 进程 A：
  - $A_1 = z_{med} - z_{min}$ ;
  - $A_2 = z_{med} - z_{max}$ ;
  - 如果  $A_1 > 0$  且  $A_2 < 0$ ，则转到进程 B，否则增大窗口尺寸；
  - 如果窗口尺寸  $\leq S_{max}$ ，则重复进程 A；否则输出  $z_{med}$ 。
- 进程 B：
  - $B_1 = z_{xy} - z_{min}$ ;
  - $B_2 = z_{xy} - z_{max}$ ;
  - 如果  $B_1 > 0$  且  $B_2 < 0$ ，则输出  $z_{xy}$ ；否则输出  $z_{med}$ 。

**理解算法：**算法具有 3 个主要目的，去除椒盐（脉冲）噪声，平滑其他非脉冲噪声，并减少诸如物体边界细化或粗化等失真。值  $z_{min}$  和  $z_{max}$  在算法统计上认为是类脉冲噪声成分，即使他们在图像中并不是最低和最高的可能像素值。进程 A 的目的是确定中值滤波器的输出是否是一个脉冲，如果不是，则转到进程 B 进行测试，看窗口  $z_{xy}$  的中心点是否本身就是一个脉冲；如果是，则用中值替代，否则像素不变。假设进程 A 确实找到了一个脉冲，然后算法会增大窗口尺寸并重复进程 A，如果达到了窗口的最大尺寸，则算法返回  $z_{med}$  值。注意，不能保证该值不是一个脉冲。噪声的概率越小，或  $S_{max}$  在允许的范围内越大，过早退出条件发生的可能性就会越小，随着脉冲密度的增大，我们会需要更大的窗口来消除尖峰噪声。

## 5.4 用频率域滤波消除周期噪声

周期噪声在频率域表现出一个集中的能量脉冲，因此很方便使用滤波器消除。

**带阻滤波器：**可用来消除周期噪声。

**带通滤波器：**可用来提取噪声模式。

**陷波（带阻/带通）滤波器：**可用来消除/提取周期噪声。

**最佳陷波滤波器：**存在几种干扰成分时，就不能采用前面的各种方法，因为他们在滤波中可能会消除太多的图像信息（特别是图像难以获取时，很不希望出现这种现象）。最佳陷波滤波器在一定意义上是最佳的，因为他最小化了复原的估计值  $\hat{f}(x, y)$  的局部方差。该过程由两步组成，第一步是提取干扰的主要成分，第二步从被污染图像中减去该模式的一个可变加权部分。

① 提取干扰模式的主频率成分。可以通过在每个尖峰处放置一个陷波带通滤波器  $H_{NP}(u, v)$  来完成。如果滤波器构建为只可通过与干扰模式相关的成分，那么干扰噪声的傅立叶变换由下式给出：

$$N(u, v) = H_{NP}(u, v)G(u, v)$$

$H_{NP}(u, v)$  的形式需要多方面判断哪些是尖峰噪声干扰。为此，通常要通过观察显示的  $G(u, v)$  的频谱来交互地创建陷波带通滤波器。选择一个特殊滤波器之后，空间域的相应模式只需要进行傅立叶逆变换即可获得，即

$$\eta(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{N(u, v)\}$$

这个滤波过程通常只会得到真实干扰模式的近似值。在  $\eta(x, y)$  的估计中，不存在的那些成分的影响可以被最小化，方法是从  $g(x, y)$  中减去  $\eta(x, y)$  的一个加权成分  $w(x, y)$  来得到  $f(x, y)$  的估计值，即

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)$$

函数  $w(x, y)$  称为**加权函数或调制函数**。这个过程的目的就是选取该函数，以便以某种有意义的方法来优化结果。一种方法是选取  $w(x, y)$ ，使得估计值  $\hat{f}(x, y)$  在每一点  $(x, y)$  的指定邻域上的方差最小。

考虑关于点  $(x, y)$  的大小为  $(2a + 1)(2b + 1)$  的邻域，在坐标  $(x, y)$  处， $\hat{f}(x, y)$  的局部方差可根据样本估计，如下所示：

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b [\hat{f}(x + s, y + t) - \bar{\hat{f}}(x, y)]^2$$

其中， $\bar{\hat{f}}(x, y)$  是该邻域内的  $\hat{f}$  的平均值，即

$$\bar{\hat{f}}(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \hat{f}(x + s, y + t)$$

在图像边缘上或接近图像边缘的点上，可用局部邻域或 0 填充的方法处理。将估计式代入上式，有

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \{[g(x + s, y + t) - w(x + s, y + t)\eta(x + s, y + t)] - [\bar{g}(x, y) - \bar{w}(x, y)\bar{\eta}(x, y)]\}$$

假设  $w(x, y)$  在该邻域内基本保持不变，可以给出邻域内近似式：

$$w(x + s, y + t) = w(x, y) \quad (-a \leq s \leq a, -b \leq t \leq b)$$

那么，上式变为

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \{[g(x + s, y + t) - w(x + s, y + t)\eta(x + s, y + t)] - [\bar{g}(x, y) - w(x, y)\bar{\eta}(x, y)]\}$$

为最小化  $\sigma^2(x, y)$ ，解偏导等于 0 方程得到  $w(x, y)$  如下：

$$w(x, y) = \frac{\bar{g}(x, y)\bar{\eta}(x, y) - g(x, y)\eta(x, y)}{\bar{\eta}^2(x, y) - \bar{\eta}^2(x, y)}$$

要获得复原图像  $\hat{f}(x, y)$ ，可以先根据上式计算  $w(x, y)$ ，再使用图像复原式即可。若  $w(x, y)$  在某一邻域内假设为常量，则不必对图像中的每个  $x$  值和  $y$  值计算该函数，而是在每个非重叠邻域的一点（一般为中心点）计算  $w(x, y)$ ，然后用它来处理该邻域内包含的所有图像点。

## 5.5 线性、位置不变的退化

图像复原前，退化后的图像  $g(x, y)$  与  $f(x, y)$  的关系可以表示为

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

如果  $\eta(x, y) = 0$ , 则  $g(x, y) = H[f(x, y)]$ 。若  $H$  是线性系统, 根据冲激函数筛的特性, 有

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

假设  $\eta(x, y) = 0$ , 代入上式, 并利用  $H$  的线性性, 有

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta$$

令  $h(x, \alpha, y, \beta) = H[\delta(x - \alpha, y - \beta)]$  称为系统  $H$  的冲激响应, 若  $\eta(x, y) = 0$ , 则  $h(x, \alpha, y, \beta)$  是系统  $H$  对坐标  $(x, y)$  处的一个冲激的相应, 通常称为点扩散函数 (PSF)。那么有

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta$$

这称为第一类叠加 (弗雷德霍姆) 积分, 也就是说如果线性系统  $H$  对一个冲激的响应已知, 那么任意输入  $f(\alpha, \beta)$  的响应可用上式计算。即线性系统能够完全由其冲激响应表征。如果线性系统  $H$  又是移不变的, 则

$$H(\delta(x - \alpha, y - \beta)) = h(x - \alpha, y - \beta)$$

那么上积分简化为

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

也就是说, 对线性移不变系统, 如果已知系统冲激响应, 对于任意输入  $f$ , 可卷积计算得到响应  $g$ 。于是, 在存在加性噪声时且  $H$  为移不变的, 线性退化模型变为

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y)$$

假设噪声项与未知无关, 上式为  $g(x, y) = f(x, y) \star h(x, y) + \eta(x, y)$ ; 频率域中表示为

$$G(u, v) = H(u, v) F(u, v) + N(u, v)$$

因此, 具有加性噪声的线性移不变系统, 可以在空间域建模为退化函数与图像的卷积加上噪声, 和我们第一节中建模完全相同。

## 5.6 估计退化函数

在图像复原时, 主要有 3 种用于估计退化函数的方法: 观察法、试验法、数学建模法。使用以某种方式估计的退化函数来复原一幅图像的过程, 有时称为盲去卷积, 因为真正的退化函数很少能完全知晓。

**图像观察估计:** 估计  $H$  的一种方法就是从图像本身来收取信息, 我们可以观察图像中包含样本结构的一个小矩形区域 (为降低噪声影响, 通常是一个具有很强信号内容的区域)。令  $g_s(x, y)$  表示要观察的子图像, 令  $\hat{f}_s(x, y)$  表示处理过的子图像 (现实中, 该图像时原图像在该区域的估计图像)。然后, 假设噪声的影响由于选择了一个强信号区域而可以忽略, 于是有

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

于是，我们可以基于移不变的假设还原换成的退化函数  $H(u, v)$ ；我们可以通过  $H_s(u, v)$  的形状近似估计  $H(u, v)$  的形状。这是仅在特殊情况下使用的繁琐处理。

**试验估计：**如果可以使用与获取与退化图像的设备相似的装置，从理论上讲，得到准确的退化估计是可能的。与退化图像类似的图像可以通过各种系统设置得到，直到这些图像退化到尽可能接近我们希望复原的图像。之后，使用相同的系统对一个冲激成像，得到退化的冲激响应，由于线性移不变系统可以完全由冲激响应表征，那么我们就得到了这个线性移不变系统的传递函数，即退化函数。

一个冲激可以用一个亮点模拟，该点应尽可能亮，以便将噪声的影响降低到可以忽略的程度。回顾可知，由于冲激的傅立叶比那还是一个敞亮，那么

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$

其中， $G(u, v)$  为观察图像的傅立叶变换， $A$  是一个描述冲激强度的常量。

**建模估计：**由于退化建模能解决图像复原问题，因此多年来一直被人们使用。在某些情况下，模型甚至可以考虑引起退化的环境条件，如大气湍流的物理特性导致的退化模型，通式为

$$H(u, v) = e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}$$

其中， $k$  是与湍流性质相关的常数，该式与高斯低通滤波的形式类似。

建模的另一方法是从基本原理开始推导数学模型，比如运动引起的图像模糊。假设图像  $f(x, y)$  进行平面运动，且  $x_0(t)$  与  $y_0(t)$  分别是在  $x, y$  方向上随时间变化的运动分量，那么记录介质上任意点的曝光总数是通过对时间间隔内顺势曝光量的积分得到，假设快门开启和关闭所用时间非常短，而且成像过程完美，隔离了图像运动的干扰。若设  $T$  为曝光时间，则有

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

从而得到模糊后的图像  $g(x, y)$ 。进行傅立叶变换并化简后，得到

$$g(u, v) = F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi[u x_0(t) + v y_0(t)]} dt$$

从而得到  $H(u, v)$  表达式，即

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi[u x_0(t) + v y_0(t)]} dt$$

若  $x_0(t) = at/T, y_0(t) = bt/T$ ，那么

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin[\pi(ua + vb)] e^{-j\pi(ua + vb)}$$

## 5.7 逆滤波

复原由退化函数  $H$  退化的图像的最初手段即逆滤波，我们用退化函数除退化图像的傅立叶变换  $G(u, v)$  得到原始图像傅立叶变换的估计  $\hat{F}(u, v)$ ，即

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$

如果加上噪声，那么情况变得更劣了，因为我们有

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

即使知道退化函数，也不能准确地复原未退化的图像，因为  $N(u, v)$  未知。同时，如果退化函数是零或非常小的值，则  $\frac{N(u, v)}{H(u, v)}$  可能很大，容易支配估计值  $\hat{F}(u, v)$ 。可能的解决方式包括限制退化函数的最小值，或限制滤波的频率，使其接近原点（因为通常来说， $H(0, 0)$  是在频率域中  $H(u, v)$  的最高值，在频率限制在原点附近可以减少遇到零值的概率）。

所以，一般直接逆滤波的性能是较差的。

## 5.8 最小均方误差（维纳）滤波

本节讨论一种综合退化函数和噪声统计特征进行复原处理的方法，该方法建立在图像和噪声都是随机变量的基础上，目标是找到未污染图像  $f$  的一个估计  $\hat{f}$ ，使它们之间的均方误差最小。误差量由下式给出：

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$$

这里假设噪声和图像不相关，其中一个或另一个有零均值，且估计中的灰度级是退化图像中灰度级的线性函数。那么误差函数的最小值在频率域中由以下估计函数达到：

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)} \right] G(u, v)$$

其中， $H(u, v)$  为退化函数， $|H(u, v)|^2 = H(u, v)H^*(u, v)$  为模长， $S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$  为噪声的功率谱； $S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$  为未退化图像的功率谱。方括号中的滤波器通常称为**最小均方误差滤波器**或**最小二乘误差滤波器**。许多有用的度量是以噪声和未退化图像的功率谱为基础的，其中最重要的一个度量是信噪比，在频率域中用下式近似：

$$SNR = \frac{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)|^2}{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |N(u, v)|^2}$$

该比值给出了携带信息的信号功率（原始的或退化的原图像）水平与噪声功率水平的度量。携带低噪声的图像具有较高的 SNR，而携带较高噪声水平的同一幅图像具有较低的 SNR。这一比值是一个有限的值，但在用于表征复原算法的性能时它是一个重要的度量。如果把复原图像考虑为信号，而把复原图像和原图像的差考虑为噪声，那么我们可以将空间域中的信噪比定义为

$$SNR = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{f}^2(x, y)}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\hat{f}(x, y) - f(x, y)]^2}$$

有时，也用这一度量的均方根来代替。这种情况，该比值称为**均方根信噪比**或**均方根误差**。该定量度量与感觉的图像质量并没有很好的必然关系。未退化图像的功率谱很少是已知的，当这些量未知或不能估计时，经常使用的方法使用下面的表达式来近似。

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v)$$

其中， $K$  是一个加到  $|H(u, v)|^2$  的所有项上的特定常数。一般需要交互地选择以达到最好效果。

## 5.9 约束最小二乘方滤波

关于退化函数  $H$  的某些知识必须已知的问题，对本章讨论的所有方法是常见的。然而，维纳滤波存在一些其他的困难：未退化图像和噪声的功率谱必须是已知的；虽然可以用  $K$  近似功率谱的比，然而事实上功率谱比的常数估计并不总是一个合适的解。本节讨论的方法仅要求噪声方差和均值的知识；同时，维纳滤波建立在最小化统计准则的基础上，平均意义上是最优的；本节给出的算法对于其应用到的每一幅图像都能产生最优结果（同样的，这些理论上满足的最优准则与动态的视觉感知并没有关系）；虽然“最优”，但是算法选择往往由结果图像的视觉感知质量决定。

将退化模型表示为向量-矩阵模式，有

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}$$

减少噪声敏感性的方法是以平滑度量的最佳复原为基础的，如一幅图像的二阶导数，因此我们需要找一个最小准则函数  $C$  满足

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 f(x, y)]^2$$

约束为

$$\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2$$

其中， $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{w}$  是欧几里得向量范数， $\hat{\mathbf{f}}$  是未退化图像的估计。这个最佳化问题在频率域内的解决由下面的表达式给出：

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma|P(u, v)|^2} \right] G(u, v)$$

其中， $\gamma$  是一个常数，必须对它进行调整以满足约束条件； $P(u, v)$  是函数

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

的傅立叶变换（注意先进行空间域上的零填充）。当  $\gamma = 0$  时，简化为逆滤波。

交互式地调整参数  $\gamma$  达到可接受的结果是可能的，然而如果我们对最优化感兴趣，就必须调整参数满足约束条件，迭代计算  $\gamma$  的过程如下：定义一个残差向量

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}$$

因为  $\hat{\mathbf{f}}$  是  $\gamma$  的函数，所以  $\mathbf{r}$  也是  $\gamma$  的函数，可以证明， $\phi(\gamma) = \|\mathbf{r}\|^2$  是  $\gamma$  的单调递增函数，我们要做的为调整  $\gamma$  使得

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \pm a$$

其中， $a$  是一个精确度因子，称上式为简化约束。如果  $a = 0$ ，约束即可被严格满足。因为  $\phi(\gamma)$  单调，我们可以如下寻找满足要求的  $\gamma$ ：

- 指定  $\gamma$  的一个初始值；
- 计算  $\phi(\gamma)$ ；
- 若满足简化约束，则停止；否则，根据不等号的方向增大或减小  $\gamma$ ，然后返回步骤 2，根据  $\gamma$  的新值，重新计算最佳估计  $\hat{F}(u, v)$ 。

可以使用类似牛顿-弗拉森算法改进效率。为使用约束最小二乘方滤波，我们需要  $\|\mathbf{r}\|^2$  与  $\|\boldsymbol{\eta}\|^2$  的值。为计算前者，我们由图像退化模型得到

$$R(u, v) = G(u, v) - H(u, v)\hat{F}(u, v)$$

通过计算  $R(u, v)$  的傅立叶逆变换得到  $r(x, y)$ ，则

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} r^2(x, y)$$

为计算后者，我们先考虑政府图像上的噪声方差，即

$$\sigma^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta(x, y) - m_\eta]^2$$

其中， $m_\eta$  为  $\eta$  的均值。展开平方项，可以发现

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 = MN[\sigma_\eta^2 + m_\eta^2]$$

因此，仅仅用噪声均值和方差即可实现最佳复原算法，但要假设噪声和图像灰度值不相关，这也同时是本章内容的基本假设。

约束最小二乘方意义下的最佳复原在视觉效果上并不意味着最好，根据退化和噪声的性质及大小，算法中交互确定最佳估计的其他参数，在最终结果中也起得很重要的作用。通常，自动确定的复原滤波器比人为调整滤波器参数的复原结果要好，特别是约束最小二乘方滤波器完全由单一的标量参数决定时更是如此。

## 5.10 几何均值滤波

可对维纳滤波器稍加推广，得到几何均值滤波器的形式。

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2} \right]^\alpha \left[ \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \beta \left[ \frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)} \right]} \right]^{1-\alpha} G(u, v)$$

其中， $\alpha, \beta$  是正的实常数。

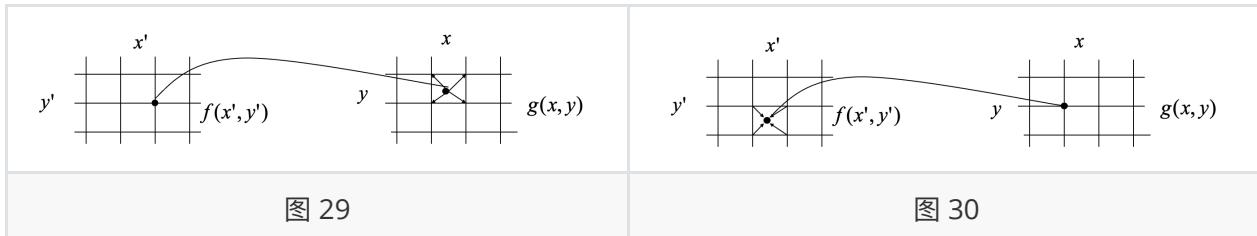
- $\alpha = 1$  时，简化为逆滤波器；
- $\alpha = 0$  时，简化为参数维纳滤波器；再令  $\beta = 1$ ，得到标准维纳滤波器；
- $\alpha = \frac{1}{2}$  滤波器变成相同幂次两个量的积，即“几何均值”；
- $\beta = 1$  时，随着  $\alpha$  减小到  $\frac{1}{2}$  以下，滤波器性能越来越接近维纳滤波器；随着  $\alpha$  增大到  $\frac{1}{2}$  以上，更接近逆滤波器；当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时，称为谱均衡滤波器。

## 5.11 由投影重建图像 (略)

### 补充材料二 图像几何操作

前向内插 (pixel carry-over, forward-mapping interpolation): 将原图的像素对几何变换后图像的若干个点进行贡献，如图 29 所示；不常用，且计算量大。

反向内插 (pixel filling, backward-mapping interpolation): 对变换后的图像的每个像素，寻找原图的若干周围像素进行计算当前像素值，如图 30 所示，经常使用。



最近邻内插：选择离变换后像素最近的原图象素进行赋值；

双线性内插：假设当前坐标  $(x, y)$  附近的四个点为  $f(0, 0), f(0, 1), f(1, 0), f(1, 1)$  (所在单位正方形的四个顶点)，那么双线性内插定义如下

$$f(x, y) = ax + by + cxy + d$$

那么， $a, b, c, d$  由下面方程解得

$$\begin{cases} d = f(0, 0) \\ a + d = f(1, 0) \\ b + d = f(0, 1) \\ a + b + c + d = f(1, 1) \end{cases}$$

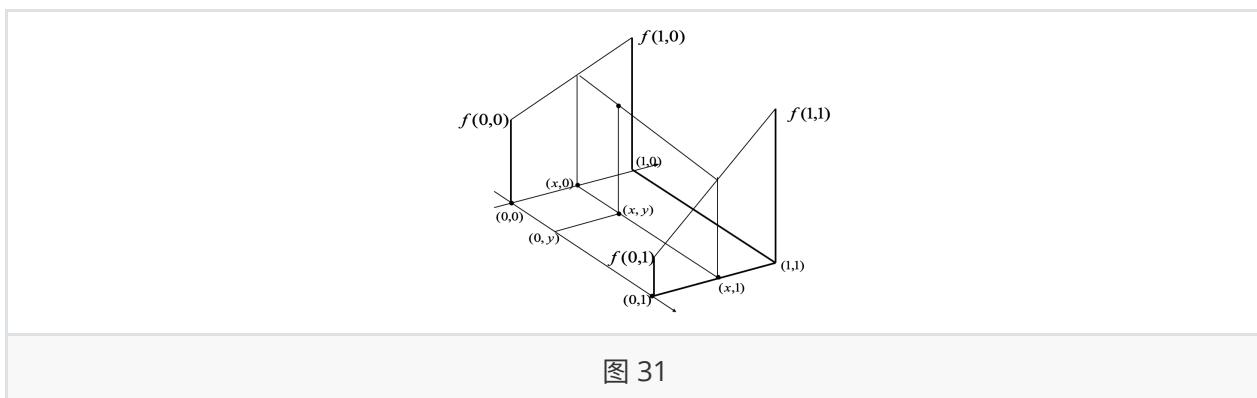
另一种确定系数的方法：先对  $f(x, 0)$  与  $f(x, 1)$  线性插值：

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= f(0, 0) + x[f(1, 0) - f(0, 0)] \\ f(x, 1) &= f(0, 1) + x[f(1, 1) - f(0, 1)] \end{aligned}$$

再对  $f(x, y)$  差值，即

$$f(x, y) = f(x, 0) + y[f(x, 1) - f(x, 0)]$$

即可得到对应参数。如图 31 所示。



**高阶内插：**如双立方内插、立方样条内插、勒让德函数内插、sinc 内插。

**平移变换：**变换后新坐标表达式如下

$$a(x, y) = x + x_0, \quad b(x, y) = y + y_0$$

考虑增广坐标  $[x \ y \ 1]^T$  下的变换，则变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

**尺度变换：**变换后新坐标表达式如下：

$$a(x, y) = x/c, \quad b(x, y) = y/d$$

考虑增广坐标  $[x \ y \ 1]^T$  下的变换，则变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/c & 0 & 0 \\ 0 & 1/d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

**关于原点旋转变换：**变换后新坐标表达式如下：

$$a(x, y) = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad b(x, y) = x \sin \theta + y \cos \theta$$

考虑增广坐标  $[x \ y \ 1]^T$  下的变换，则变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

**关于特定点  $(x_0, y_0)$  旋转变换：**先将旋转中心平移到原点，旋转变换后再平移回即可。

$$\begin{bmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

**旋转的分离实现：**旋转可以分成两步实现：

$$\begin{aligned} \text{Step 1 : } a(x, y) &= x \cos \theta - y \sin \theta, \quad b(x, y) = y \\ \text{Step 2 : } a(x, y) &= x, \quad b(x, y) = [a(x, y) \sin \theta + y] / \cos \theta \end{aligned}$$

**一般变换：**不规则区域的变换，方法包括控制点法以及多项式卷绕法。

**【例】控制点内插：**用双线性的空间变换来模拟  $x, y$  的关系，即

$$G(x, y) = F(x', y') = F(ax + by + cxy + d, ex + fy + gxy + h)$$

**几何变换的应用：**几何标定、图像修正、图像配准、图像格式转换、图像投影、渐变（变形）等。