

# 补充材料一 线性系统理论

**二维线性系统：**有输入  $f(x, y)$  与输出  $g(x, y)$  (表示为  $f(x, y) \rightarrow g(x, y)$ ), 线性系统满足:

1. 若  $f_1(x, y) \rightarrow g_1(x, y), f_2(x, y) \rightarrow g_2(x, y)$ , 则  $f_1(x, y) + f_2(x, y) \rightarrow g_1(x, y) + g_2(x, y)$ ;
2. 若  $f_1(x, y) \rightarrow g_1(x, y)$  且  $a$  为常数, 则  $af_1(x, y) \rightarrow ag_1(x, y)$ 。

**移不变：**若  $f(x, y) \rightarrow g(x, y)$ , 则  $f(x - S, y - T) \rightarrow g(x - S, y - T)$ 。

**线性移不变系统 (LSI)：**满足移不变的线性系统。

下面先讨论一维形式, 二维形式类似。

**谐波信号：**一维谐波信号如下所示

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

其中,  $j^2 = -1$  为虚数单位。

- 在复平面上, 一个起点为原点的单位向量, 以  $\omega$  的角速度, 顺时针旋转  $t$  时间后的坐标。
- 频率与角速度的关系  $\omega = 2\pi f$ 。
- 谐波信号通过 LSI 系统后是一个同频率的谐波信号。
  - 设  $y(t) = K(\omega, t)e^{j\omega t}$ , 由于 LSI 系统满足移不变, 因此  $y(t) = K(\omega)e^{j\omega t}$ 。
  - 因为若  $K$  和  $t$  相关, 那么时间线性移动后,  $K$  不变, 输出不会线性移动。

**传递函数：**上文中,  $K(\omega)$  即为线性系统的传递函数, 可以把  $K(\omega)$  写作

$$K(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

**卷积核与线性系统：**任意线性系统的输入-输出关系可以表示如下:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau)x(\tau)d\tau$$

其中,  $f(t, \tau)$  称为积分核。特别地, LSI 系统有如下输入-输出关系:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

其中,  $g(t - \tau)$  为卷积核。这是一个卷积积分的形式, 可以写作  $y(t) = g(t) \star x(t)$ 。

- 对 LSI 系统, 在时间域上, 输出  $y(t)$  可以写成输入  $x(t)$  与另一信号  $g(t)$  的卷积。LSI 系统中, 另一个信号  $g(t)$  为冲激响应 (给定冲击信号输入得到的响应)。因此, LSI 系统的输出为输入信号与冲激响应的卷积。
- **传递函数** 和 **冲激响应** 是两种刻画线性系统的方式。

## 卷积的性质

- 交换律  $f \star g = g \star f$ ;
- 分配律  $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$ ;
- 结合律  $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$ ;

- 微分:  $\frac{d}{dt}[f \star g] = f' \star g = f \star g'$ ;

### 离散一维卷积

$$h(i) = f(i) \star g(i) = \sum_j f(j)g(i-j)$$

卷积运算需要补 0, 两个长度分别为  $m, n$  的序列卷积后的结果为一个长度为  $m + n - 1$  的序列。

### 连续二维卷积

$$h(x, y) = f \star g = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)g(x-u, y-v) du dv$$

### 离散二维卷积

$$H(i, j) = F \star G = \sum_m \sum_n F(m, n)G(i-m, j-n)$$

### 一些函数

- 1** 矩形脉冲:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \pm \frac{1}{2} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- 2** 高斯函数:

$$G(x) = Ae^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

在高斯函数曲线下的面积为  $\sqrt{2\pi}\sigma$ 。

$$Ae^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} * Be^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma_2^2}} = AB e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma_3^2}}$$

其中,  $c = a + b$  且  $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ 。即两个高斯函数的卷积为高斯函数。

**冲激函数** (狄拉克函数) 满足如下条件的函数为冲激函数。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1$$

其中,  $\delta(x) = 0$  ( $x \neq 0$ ),  $\delta(0)$  未定义。冲激函数可以视为矩形脉冲的特例。

$$\delta(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x}{a}\right)$$

**冲激函数筛性质** (sifting property)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

**冲激函数尺度性质** (scaling property)

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

阶跃函数：形如

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

的函数为阶跃函数。阶跃函数的导数为冲激函数。

## 第四章 频率域滤波

---

### 4.1 背景（略）

### 4.2 基本概念

离散冲激函数：形如

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

的函数为离散冲激函数，离散冲激函数也满足冲激函数定义的等效形式，即

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

离散冲激函数仍然具有筛特性，即

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$$

冲激串：无限多个离散的周期冲激单元  $\Delta T$  之和，即

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

冲激串可以是连续或离散的。

连续变量函数的傅立叶变换：由  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  表示的连续变量  $t$  的连续函数  $f(t)$  的傅立叶变换由下式定义

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt \triangleq F(\mu)$$

由于  $t$  被积分，因此傅立叶变换的结果仅仅是  $\mu$  的函数，又记为  $F(\mu)$ 。相反的，在反傅立叶变换中，给定  $F(\mu)$ ，我们可得到  $f(t)$ ，即

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\mu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} dt$$

根据欧拉公式，我们还可以将傅立叶变换写作

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(2\pi\mu t) + j\sin(2\pi\mu t)]dt$$

根据傅立叶变换、反变换的对称性，我们可以得到

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\mu) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(-t)$$

### 冲激响应的傅立叶变换

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j2\pi\mu t} dt = e^{-j2\pi\mu t_0} = \cos(2\pi\mu t_0) - j\sin(2\pi\mu t_0)$$

特殊地，当  $t_0 = 0$  时， $F(\mu) = 1$ 。

又由傅立叶变换的对称性知  $\mathcal{F}\{e^{-2\pi\mu t_0}\} = \delta(-t - t_0) = \delta(t + t_0)$ ，因此

$$\mathcal{F}\{e^{2\pi\mu_0 t}\} = \delta(\mu - \mu_0)$$

**傅立叶级数：**具有周期  $T$  的连续变量  $t$  的周期函数  $f(t)$  可描述为乘以适当系数的正弦和余弦之和，这个和就是傅立叶级数，它具有如下形式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$$

其中，

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} dt$$

**冲激串的傅立叶变换：**由于冲激串是周期为  $\Delta T$  的函数，因此其可以写成傅立叶级数；根据傅立叶级数，我们有

$$c_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} s_{\Delta T}(t) e^{-j \frac{2\pi n}{\Delta T} t} dt = \frac{1}{\Delta T} e^{-j \frac{2\pi n}{\Delta T} \cdot 0} = \frac{1}{\Delta T}$$

于是，冲激串的傅立叶级数可展开为

$$s_{\Delta T}(t) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi n}{\Delta T} t}$$

傅立叶变换具有线性性（和的傅立叶变换等于傅立叶变换的和），即

$$S(\mu) = \mathcal{F}\{s_{\Delta T}(t)\} = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{j \frac{2\pi n}{\Delta T} t}\} = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

这个结果告诉我们，冲激串的傅立叶变换仍然是冲激串，其周期为  $\frac{1}{\Delta T}$ 。

**傅立叶变换与卷积：**考虑函数  $f(t) \star h(t)$  的傅立叶变换，即

$$\mathcal{F}\{f(t) \star h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \right] e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-j2\pi\mu t} dt \right] d\tau$$

括号内的为  $h(t - \tau)$  的傅立叶变换，根据傅立叶变换的定义可得

$$\mathcal{F}\{h(t - \tau)\} = H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}$$

故

$$\mathcal{F}\{f(t) \star h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}d\tau = F(\mu)H(\mu)$$

事实上，类似上式推导，可以得到时域上的乘法等于频域上的卷积。也可以由对称性推导得到。

### 4.3 取样和取样函数的傅立叶变换

**取样：**考虑连续函数  $f(t)$ ，我们希望以自变量  $t$  的均匀间隔  $\Delta T$  取样，那么相当于以一个  $\Delta T$  单位间隔的冲激串作为取样函数去乘以  $f(t)$ ，即

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

于是，序列的任意取样值  $f_k$  可以写作

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T)dt = f(k\Delta T)$$

**取样函数的傅立叶变换：**由卷积定理，有

$$\tilde{F}(\mu) = \mathcal{F}\{f(t)s_{\Delta T}(t)\} = F(\mu) \star S(\mu) = \dots = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

即为取样函数的傅立叶变换，其中推导过程只需要交换求和与积分即可。容易发现  $\tilde{F}(\mu)$  是周期为  $\frac{1}{\Delta T}$  的周期函数。

**带限函数：**对于以原点为中心的有限区间（带宽） $[-\mu_{max}, \mu_{max}]$  之外的频率值，其傅立叶变换为 0 的函数  $f(t)$  称为带限函数，如图 17 (a) 所示。一个带限函数的取样  $\tilde{f}(t)$  的傅立叶变换  $\tilde{F}(\mu)$  如上式所示，是  $F(\mu)$  的一个副本的无限、周期序列。

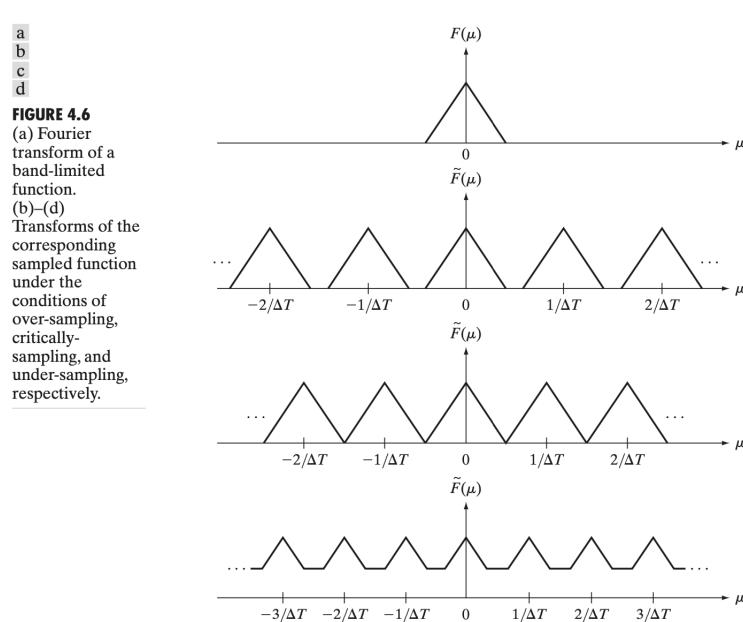


图 17

**取样定理：**我们想从带限函数取样后的傅立叶变换  $\tilde{F}(t)$  中提取出单个周期使其等于  $F(\mu)$ ，需要保证采样副本间距  $\frac{1}{\Delta T}$  不能过小，否则将发生重叠，如图 17 (d) 所示。若以超过函数最高频率的两倍的取样率来获得样本，连续带限函数能完全由其样本集恢复，这个结论即为采样定理，如图 17 (b) 所示。数学上写作

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{max}$$

临界情况如图 17 (c) 所示。临界（取等）的情况下又被称为奈奎斯特取样率；有时，奈奎斯特取样率对于完美函数的恢复是充分的，但也存在导致问题的情况（如对于正弦函数取样）。因此取样定理规定，取样率必须超过奈奎斯特取样率。

**从采样后的傅立叶变换复原图像：**以略高于奈奎斯特取样率的取样率进行取样，同时定义函数  $H(\mu)$  如下所示：

$$H(\mu) = \begin{cases} \Delta T & -\mu_{max} \leq \mu \leq \mu_{max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

那么， $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\mu)\tilde{F}(\mu)\}$ 。

函数  $H(\mu)$  称为低通滤波器，因为它通过频率范围低端的频率，但会滤除所有较高的频率，它还被称为理想低通滤波器，因为它在复数上无线快速地过度，其特性用物理元件是无法实现的。用于从函数的取样来恢复（重建）原始函数的滤波器又被称为重建滤波器。

**混淆：**以低于奈奎斯特取样率取样的最终效果是周期重叠，如图 17 (d) 所示；不管用什么滤波器，都不能分隔出变换的单个周期。由函数欠取样导致的这种效果就是**（频率）混淆**。

- 混淆在实际操作中不可避免，由于取样有时间范围的限制，因此傅立叶变换后必然出现无限的频率成分，从而带来混淆。因此，用有限长度取样和记录工作，混淆将不可避免。
- 可以通过平滑输入函数减少高频成分的方法来降低混淆的影响，这种方法称为**抗混淆**，其必须在函数被取样之前完成。

**由取样后的数据重建（复原）函数：**由前文讨论，我们得到

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\mu)\tilde{F}(\mu)\}$$

根据卷积定理，有

$$f(t) = \tilde{f}(t) \star h(t)$$

代入取样式，有

$$f(t) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \delta(t - n\Delta T) \right) \star h(t)$$

然后对  $H(\mu)$  做傅立叶逆变换，最后得到如下表达式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \text{sinc}[(t - n\Delta T)/\Delta T]$$

其中， $\text{sinc}(m) = \frac{\sin(m\pi)}{m\pi}$ 。重建后的函数恒等于在多个  $\Delta T$  的整数增量处的样本值，也就是说，对于  $t = k\Delta T$ ，其中  $k$  是整数， $f(t) = f(k\Delta T)$ 。而样本点之间的  $f(t)$  值是由 sinc 函数的和形成的内插值。

## 4.4 单变量的离散傅立叶变换 (DFT)

从取样后的函数的连续变换得到 DFT：原始函数取样后的数据变换  $\tilde{F}(\mu)$  可以由采样后的  $\tilde{f}(t)$  傅立叶变换得到，即

$$\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - n\Delta T) e^{-j2\pi\mu t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - n\Delta T) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

由于先前定义  $f_k = f(k\Delta T)$ ，我们有

$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

虽然  $f_n$  是离散函数，但是与连续情况下类似， $\tilde{F}(\mu)$  仍然是一个周期为  $\frac{1}{\Delta T}$  的周期函数，于是我们需要表征  $\tilde{F}(\mu)$  的一个周期。假设我们想要在周期  $\mu = 0$  到  $\mu = \frac{1}{\Delta T}$  之间得到  $\tilde{F}(\mu)$  的  $M$  个等间距样本，可以通过在如下频率处取样得到：

$$\mu = \frac{m}{M\Delta T} \quad (m = 0, 1, \dots, M-1)$$

把  $\mu$  的这一结果代入  $F(\tilde{\mu})$ ，并令  $F_m$  表示所得到的结果，则有

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi m n / M}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

(这里， $f_n$  需要有限采样，因此同样采样  $n = 0, 1, \dots, M-1$ 。因此，DFT 就是先将信号离散化，求其连续傅立叶变换后，再将信号在频域离散化后的结果。

相应的，离散逆傅立叶变换 表达式为：

$$f_n = \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi m n / M}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

接下来，在二维情况下，我们用  $x, y$  代表离散变量，并用  $u, v$  代表频率变量。这些变量均可理解为整数。于是，DFT 与 IDFT 的表达式又可写作：

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi u x / M}$$

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi u x / M}$$

可以证明，傅立叶正变换和反变换都是无限周期的，其周期为  $M$ ，也就是说

$$F(u) = F(u + kM), \quad f(x) = f(x + kM)$$

卷积的离散形式：卷积的离散形式表示为

$$f(x) \star h(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m) h(x-m), \quad x = 0, 1, \dots, M-1$$

由于函数是周期的，因此其卷积也是周期的，上式给出了卷积的一个周期。故这个公式中内在处理通常称为循环卷积。

- 卷积定理同样适用于离散变量！

**取样和频率间隔的关系：**如果  $f(x)$  由函数  $f(t)$  以  $\Delta T$  为单位间隔取样后的  $M$  个样本组成，则取样持续时间为  $T = M\Delta T$ ；根据上文所述，离散频率域中响应的间隔  $\Delta\mu$  也同样为  $\frac{1}{M\Delta T}$ ，即  $\frac{1}{T}$ 。由 DFT 的  $M$  个成分跨越的整个频率范围为  $\Omega = M\Delta\mu = \frac{1}{\Delta T}$ 。

- DFT 的频率分辨率  $\Delta\mu$  取决于连续函数  $f(t)$  被取样的时间  $T$ ；
- DFT 跨越的频率范围取决于取样间隔  $\Delta T$ 。

## 4.5 两个变量的函数的扩展

**二维冲激：**两个连续变量  $t$  和  $z$  的二维连续冲激定义为如图所示的形式

$$\delta(t, z) = \begin{cases} \infty & t = z = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

以及

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, z) dt dz = 1$$

二维冲激在积分下同样呈现取样特性，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t - t_0, z - z_0) dt dz = f(t_0, z_0)$$

二维离散冲激定义为如图所示的形式

$$\delta(t, z) = \begin{cases} 1 & t = z = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其取样特性为

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0)$$

**二维连续傅立叶变换对：**令  $f(t, z)$  为两个连续变量  $t, z$  的两个连续函数，则二维连续傅立叶变换对如下给出：

$$F(\mu, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + v z)} dt dz$$

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, v) e^{-j2\pi(\mu t + v z)} dt dz$$

**二维取样：**类似一维情况中的方式，二维取样可用取样函数（二维冲激串）建模，即

$$s_{\Delta T, \Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$

其中， $\Delta T$  和  $\Delta Z$  是  $f(t, z)$  分别沿  $t, z$  轴的样本间的间隔，有  $\tilde{f}(t, z) = s_{\Delta T, \Delta Z}(t, z)f(t, z)$ 。

**二维带限函数：**如果由区间  $[-\mu_{max}, \mu_{max}]$  和区间  $[-v_{max}, v_{max}]$  建立的矩形之外的傅立叶变换为 0，则称函数  $f(t, z)$  为带限函数。

**二维取样定理：**如果取样间隔满足

$$\Delta T < \frac{1}{2\mu_{max}}, \quad \Delta Z < \frac{1}{2v_{max}}$$

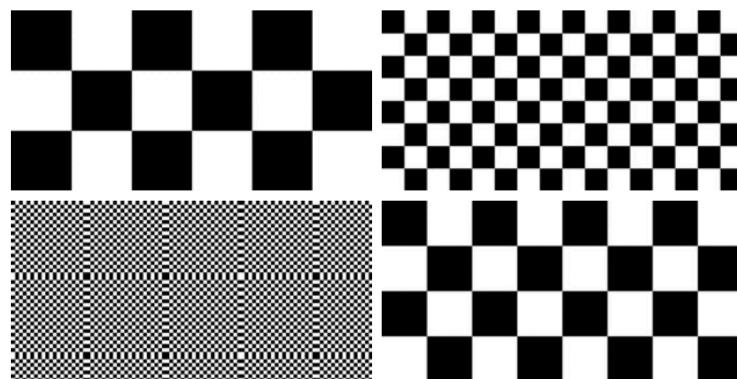
或者关于取样率的表达

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{max}, \quad \frac{1}{\Delta Z} > 2v_{max}$$

则带限函数  $f(t, z)$  可以由一组样本无误地恢复。类似地，我们可以在二维平面上建立二维理想低通盒装滤波器来分离处单个周期，从而复原图像。

**图像中的混淆：**与一维情况类似，只有在两个坐标方向上无限扩展，二维连续变量  $t$  与  $z$  的连续函数通常才可以被带限。正是限制函数时间的行为引入了在频率域无限延伸的受损频率。我们不能对一个函数无限取样，因此在数字图像中，混淆总是存在的。

- 在图像中，存在着两种主要的混淆现象：**空间混淆**和**时间混淆**。时间混淆与图像序列中图像间的时间间隔有关，时间混淆最常见的例子之一是“车轮”效应，即在序列图像（如电影）中具有轮幅的车轮出现倒转，这是由于序列中的帧率低于车轮转动的速度引起。
- 图像中空间混淆的主要表现形式是人为引入的缺陷，如现状特征中的锯齿，伪高光及原图像中不存在的模式。



**FIGURE 4.16** Aliasing in images. In (a) and (b), the lengths of the sides of the squares are 16 and 6 pixels, respectively, and aliasing is visually negligible. In (c) and (d), the sides of the squares are 0.9174 and 0.4798 pixels, respectively, and the results show significant aliasing. Note that (d) masquerades as a “normal” image.

图 18

- 一种图像中混淆的典型例子如图 18 所示，当棋盘方格的边长减小到小于 1 个像素时，就会产生如图 18 (c) 所示的严重混淆图像。然而，当棋盘方格的边长减小到小于 0.5 个像素，就可能会产生如图 18 (d) 所示的结果，此时混淆变得不明显，产生令人误解的结果。
- 重取样（扩大、缩小等）时需要进行内插，此时也会出现混淆现象。当我们处理具有很强边缘内容的图像时，混淆的影响看起来就像是块状图像成分，这称为**锯齿**。
- **莫尔（波纹）模式：**有时是使用周期或近似周期成分对场景取样产生的。在光学领域，莫尔模式指的是在两个近似的等间隔的光栅之间产生的差拍模式。报纸和其他印刷材料使用半色调点，他们是黑色圆点或椭圆点，其大小和变化的连接方式用于模拟灰色调。有时取样格和报纸上图像的点的模式相互作用，使图像看起来像是布满斑点的均匀莫尔模式。可以利用不同色调区域的点的不同大小以

及点的相互连接来防止莫尔效应。

**二维离散傅立叶变换及其反变换：**二维离散傅立叶变换对如下所示：

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

其中， $u, x = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $v, y = 0, 1, \dots, N-1$ 。

## 4.6 二维离散傅立叶变换的一些性质

**空间和频率间隔的关系：**与一维离散傅立叶变换类似地，我们有

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T}, \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta Z}$$

**傅立叶变换的平移特性：**傅立叶变换满足如下平移特性：

$$f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} \iff F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \iff F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$$

平移不影响  $F(u, v)$  的幅度。

**傅立叶变换的旋转：**使用极坐标  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $u = \omega \cos \varphi$ ,  $v = \omega \sin \varphi$ , 可得到下列变换对：

$$f(r, \theta + \theta_0) \implies F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

即如果  $f(x, y)$  旋转  $\theta_0$  角度，则  $F(u, v)$  也旋转相同的角度  $\theta_0$ ；反之亦然。

**傅立叶变换的周期性：**与一位情况类似，二维傅立叶变换及其反变换在任意方向都是无限周期的，即

$$F(u, v) = F(u + k_1 M, v + k_2 N)$$

$$f(x, y) = f(x + k_1 M, y + k_2 N)$$

其中， $k_1, k_2$  为整数。

利用傅立叶变换的周期性以及傅立叶变换的平移特性，我们可以将一个完整周期移到  $[0, M-1] \times [0, N-1]$  范围内，即在平移特性中，令  $u_0 = \frac{M}{2}$ ,  $v_0 = \frac{N}{2}$ ，那么相当于  $f(x, y)$  乘以  $e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$ ，即

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \iff F(u - M/2, v - N/2)$$

如下页图 19 所示。

**函数的奇偶部：**任意实函数或复函数  $w(x, y)$  均可表示为一个技术部分和一个偶数部分的和，其中

$$w_e(x, y) \triangleq \frac{w(x, y) + w(-x, -y)}{2}$$

$$w_o(x, y) \triangleq \frac{w(x, y) - w(-x, -y)}{2}$$

由定义, 有  $w_e(x, y) = w_e(-x, -y)$ ,  $w_o(x, y) = -w_o(-x, -y)$ 。在离散傅立叶变换时候, 对称指的是与阵列中点  $\frac{M}{2}$  或  $\frac{N}{2}$  对称, 于是

$$w_e(x, y) = w_e(M - x, N - y) \quad w_o(x, y) = -w_o(M - x, N - y)$$

由于一个偶函数和一个奇函数的积是奇函数, 我们有

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} w_e(x, y) w_o(x, y) = 0$$

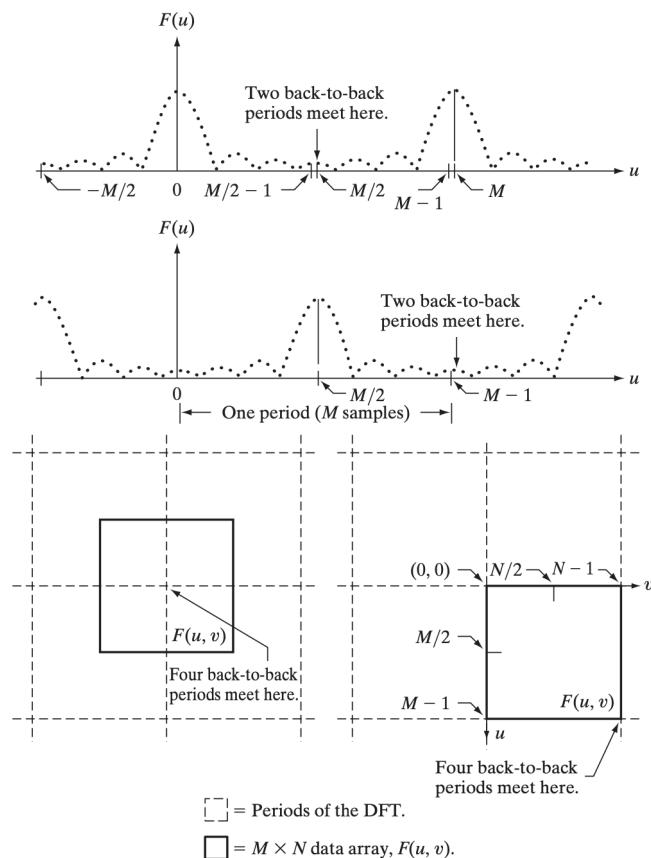


图 19

离散傅立叶变换的对称性: 实函数的傅立叶变换是共轭对称的, 即

$$\begin{aligned} F^*(u, v) &= \left[ \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} \right]^* \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^*(x, y) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi[(-u)x/M+(-v)y/N]} = F(-u, -v) \end{aligned}$$

其他一些性质参见图 20。

	Spatial Domain <sup>†</sup>	Frequency Domain <sup>†</sup>
1)	$f(x, y)$ real	$F^*(u, v) = F(-u, -v)$
2)	$f(x, y)$ imaginary	$F^*(-u, -v) = -F(u, v)$
3)	$f(x, y)$ real	$R(u, v)$ even; $I(u, v)$ odd
4)	$f(x, y)$ imaginary	$R(u, v)$ odd; $I(u, v)$ even
5)	$f(-x, -y)$ real	$F(u, v)$ complex
6)	$f(-x, -y)$ complex	$F(-u, -v)$ complex
7)	$f^*(x, y)$ complex	$F^*(-u - v)$ complex
8)	$f(x, y)$ real and even	$F(u, v)$ real and even
9)	$f(x, y)$ real and odd	$F(u, v)$ imaginary and odd
10)	$f(x, y)$ imaginary and even	$F(u, v)$ imaginary and even
11)	$f(x, y)$ imaginary and odd	$F(u, v)$ real and odd
12)	$f(x, y)$ complex and even	$F(u, v)$ complex and even
13)	$f(x, y)$ complex and odd	$F(u, v)$ complex and odd

<sup>†</sup>Recall that  $x, y, u$ , and  $v$  are discrete (integer) variables, with  $x$  and  $u$  in the range  $[0, M - 1]$ , and  $y$ , and  $v$  in the range  $[0, N - 1]$ . To say that a complex function is even means that its real and imaginary parts are even, and similarly for an odd complex function.

图 20

## 傅立叶谱和相角

二维 DFT 通常是复函数，因此用极坐标表示

$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\phi(u, v)}$$

其中，幅度  $|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{\frac{1}{2}}$ ， $\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$ 。

功率谱定义为  $P(u, v) = |F(u, v)|^2$ .

由于所有计算在离散变量取样范围  $[0, M - 1] \times [0, N - 1]$  内进行，因此上述函数均为大小为  $M \times N$  的阵列。由于实函数的傅立叶变换是共轭对称的，所以谱是关于原点偶对称的，相角是关于原点奇对称的。

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|, \quad \phi(u, v) = -\phi(-u, -v)$$

根据二维 DFT 的定义，有

$$F(0, 0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = MN \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = MN \bar{f}(x, y)$$

即，零频率项与  $f(x, y)$  的均值成正比，从而有  $|F(0, 0)| = MN|\bar{f}(x, y)|$ 。因为比例常数  $MN$  往往很大， $|F(0, 0)|$  通常是频谱的最大成分，可能比其他项大几个数量级。因为原点处频率成分  $u, v$  均为 0，所以  $F(0, 0)$  有时称为变换的直流 (dc) 成分。

DFT 谱决定了正弦波的幅度，这些正弦波结合起来可形成结果图像。在一幅图像的 DFT 中，任意给定频率处，较大幅度意味着图像中该频率的正弦波比较突出；反之，表示图像中该频率的正弦波较少。当二维 DFT 的幅度是一个阵列时，其成分就决定着图像中的灰度；相角是各个正弦成分关于原点的位移的度量，携带较多关于图像可辨别物体定位的信息。（**图像信息大多在相角中**）

**二维卷积定理：**二维卷积定理由下方的表达式给出：

$$f(x, y) \star h(x, y) \iff F(u, v)H(u, v), \quad f(x, y)h(x, y) \iff F(u, v) \star H(u, v)$$

## 关于卷积的讨论

$$f(x) \star h(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m)h(x-m)$$

这个等式对  $x$  的要求是它必须足够大，以使得反转的  $h$  完全滑过  $f$ 。因此  $x$  的范围为  $[0, 2M - 1]$ 。如果我们直接使用 DFT 和卷积定理，就必须考虑 DFT 表达式中固有的周期性。卷积过程相同，但是由于函数是周期函数，卷积的结果也是周期函数；周期的靠近使它们互相干扰而导致所谓的缠绕错误。因此，如果计算两个  $M$  个点的函数  $f$  和  $h$  的 DFT，再相乘后利用卷积定理求 IDFT 得到  $f \star h$ ，那么将会得到缠绕错误的错误卷积。我们运用如下定理解决这个问题：假设  $f$  有  $A$  个样本， $g$  有  $B$  个样本，如果把 0 添加到这两个函数中（这被称为**0 填充**），使它们长度相同，并用  $P$  表示，那么只要

$$P \geq A + B - 1$$

即可防止缠绕。二维情况下类似，假设  $f$  有  $A \times B$  个样本， $g$  有  $C \times D$  个样本，那么只要

$$P \geq A + C - 1, \quad Q \geq B + D - 1$$

如果两个阵列大小相同，均为  $M \times N$ ，则要求

$$P \geq 2M - 1, Q \geq 2N - 1$$

如果两个函数中的其中一个或两个的值在取样区间的尾端不是 0，那么把 0 添加到函数上以消除缠绕错误时，就将创建一个不连续的函数。这类似于用一个“盒子”与一个函数相乘。在频率端意味着原始变换与一个 sinc 函数的卷积。因此，这将造成一个由 sinc 函数的高频成分导致的所谓**频率泄漏**，这将会在图像上产生**块效应**。虽然漏泄从来未被完全消除但是可以用另外一个函数乘以取样函数来明显地加以减少，这个函数在取样数据的两端平滑地过度到接近于 0，从而减弱“盒子”的高频成分（急剧过渡）。当在图像重建中希望保真度高时，这种称为**开窗或切趾**的方法应重点考虑。如果需要开窗，则最好使用二维高斯函数，这样其傅立叶变换也是高斯的，会产生较低的泄漏。

**二维 DFT 性质总结：**如图 21 ~ 22 所示。

Name	Expression(s)
1) Discrete Fourier transform (DFT) of $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$
2) Inverse discrete Fourier transform (IDFT) of $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$
3) Polar representation	$F(u, v) =  F(u, v)  e^{j\phi(u, v)}$
4) Spectrum	$ F(u, v)  = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$ $R = \text{Real}(F); \quad I = \text{Imag}(F)$
5) Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[ \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
6) Power spectrum	$P(u, v) =  F(u, v) ^2$
7) Average value	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$

图 21 二维 DFT 性质总结 (1)

Name	Expression(s)
8) Periodicity ( $k_1$ and $k_2$ are integers)	$F(u, v) = F(u + k_1M, v) = F(u, v + k_2N) \\ = F(u + k_1M, v + k_2N)$ $f(x, y) = f(x + k_1M, y) = f(x, y + k_2N) \\ = f(x + k_1M, y + k_2N)$
9) Convolution	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$
10) Correlation	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n)h(x + m, y + n)$
11) Separability	The 2-D DFT can be computed by computing 1-D DFT transforms along the rows (columns) of the image, followed by 1-D transforms along the columns (rows) of the result. See Section 4.11.1.
12) Obtaining the inverse Fourier transform using a forward transform algorithm.	$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$ <p>This equation indicates that inputting <math>F^*(u, v)</math> into an algorithm that computes the forward transform (right side of above equation) yields <math>MNf^*(x, y)</math>. Taking the complex conjugate and dividing by <math>MN</math> gives the desired inverse. See Section 4.11.2.</p>

图 22 二维 DFT 性质总结 (2)

其中，第 12 点对应了一维傅立叶变换中的“对称性”，其说明了

$$f(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u, v) \longrightarrow F^*(u, v) \xrightarrow{\mathcal{F}} MNf^*(x, y) \longrightarrow MNf(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

证明与一维情况类似。

第 10 点是二维情况下相关的定义。

二维 DFT 对性质总结：如图 23 ~ 24 所示。

Name	DFT Pairs
1) Symmetry properties	See Table 4.1
2) Linearity	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) Translation (general)	$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$
4) Translation to center of the frequency rectangle, $(M/2, N/2)$	$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$
5) Rotation	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$
6) Convolution theorem <sup>†</sup>	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$ $f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$

图 23 二维 DFT 对性质总结 (1)

Name	DFT Pairs
7) Correlation theorem <sup>†</sup>	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v)H(u, v)$ $f^*(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)\star H(u, v)$
8) Discrete unit impulse	$\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$
9) Rectangle	$\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua+vb)}$
10) Sine	$\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $j \frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
11) Cosine	$\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) + \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
The following Fourier transform pairs are derivable only for continuous variables, denoted as before by $t$ and $z$ for spatial variables and by $\mu$ and $\nu$ for frequency variables. These results can be used for DFT work by sampling the continuous forms.	
12) Differentiation (The expressions on the right assume that $f(\pm\infty, \pm\infty) = 0$ )	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t, z) \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$ $\frac{\partial^m f(t, z)}{\partial t^m} \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu, \nu); \frac{\partial^n f(t, z)}{\partial z^n} \Leftrightarrow (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$
13) Gaussian	$A2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \Leftrightarrow Ae^{-(\mu^2+\nu^2)/2\sigma^2}$ ( $A$ is a constant)

图 24 二维 DFT 对性质总结 (2)

## 4.7 频率域滤波

\*\*频率域滤波：频率域滤波技术以如下处理为基础：修改傅立叶变换以得到特殊目的，然后计算逆傅立叶变换回到图像域。相角分量的视觉分析通常不是很有用，然而频谱对反应产生该谱的图像的总体特征具有一定的参考价值。

若给定一幅大小为  $M \times N$  的数字图像  $f(x, y)$ ，那么我们感兴趣的基本滤波公式具有如下形式：

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$

其中， $F(u, v)$  为  $f(x, y)$  的 DFT， $H(u, v)$  称为滤波器或滤波传递函数， $g(x, y)$  为滤波输出图像。各个函数都是大小与输入相同的  $M \times N$  阵列。这种方法相当于在空间域上进行卷积操作，那么一大问题就是如何填充  $H(u, v)$ （当然如果主要是粗略视觉分析，那么填充不是必要的）。注意，填充只在空间域进行，于是一种方法是将  $H(u, v)$  用 IDFT 转化为空间域，填充后再用 DFT 转化到频率域。这种做法的问题在于，空间域的不连续可能在频率域中产生振铃现象。

考虑分析滤波变换的相角。我们将 DFT 表示为实部和虚部，那么

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)R(u, v) + jH(u, v)I(u, v)]$$

设  $H(u, v) = H_R(u, v) + jH_I(u, v)$ ，那么

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H_R(u, v)R(u, v) - H_I(u, v)I(u, v) + j(H_I(u, v)R(u, v) + H_R(u, v)I(u, v))]$$

当

$$\frac{H_I(u, v)R(u, v) + H_R(u, v)I(u, v)}{H_R(u, v)R(u, v) - H_I(u, v)I(u, v)} = \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \implies H_I(u, v)[R^2(u, v) + I^2(u, v)] = 0$$

时,  $H(u, v)$  不会对相角产生影响, 称为零相移滤波器, 这也是我们通常考虑的滤波器类型 (实滤波函数为其中之一)。因为相角的很小变化就会给滤波输出带来很大的影响, 通常是我们所不希望的。

### 频率域滤波步骤小结

- 给定一幅大小为  $M \times N$  的输入图像  $f(x, y)$ , 通常选择填充参数  $P = 2M, Q = 2N$ ;
- 对  $f(x, y)$  添加必要数量的 0, 形成大小为  $P \times Q$  的填充图像  $f_p(x, y)$ ;
- 用  $(-1)^{x+y}$  乘以  $f_p(x, y)$ , 将 DFT 后的频率图像移动到变换中心;
- 计算前一步后的图像的 DFT, 得到  $F(u, v)$ ;
- 生成一个实的、对称的滤波函数  $H(u, v)$ , 其大小为  $P \times Q$ , 中心在  $(\frac{P}{2}, \frac{Q}{2})$  处。用阵列相乘形成乘积  $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$ 。
- 利用  $g_p(x, y) = \{\Re[\mathcal{F}^{-1}(G(u, v)]\}(-1)^{x+y}$  得到处理后的图像;
- 从  $g_p(x, y)$  的左上角提取  $M \times N$  区域, 得到最终处理结果  $g(x, y)$ 。

**空间和频率域滤波的对应:**  $H(u, v)$  是一个频率域滤波器, 则  $h(x, y)$  为一个空间域滤波器, 两个滤波器形成了一个 DFT 变换对。由于冲激响应的 DFT 为  $F(u, v) = 1$ , 因此  $h(x, y)$  又称为  $H(u, v)$  的脉冲响应; 由于离散实现中所有数值都是有限的, 这样的滤波器称为**有限冲激响应 (FIR) 滤波器**。

我们一般愿意使用更小的滤波器模板来实现卷积滤波, 因为其硬件实现速度更快且更容易。然而, 滤波的概念在频率域更直观, 利用两个域的特性的一种方法是在频率域规定一个滤波器, 并计算其 IDFT, 作为构建更小的空间滤波模板的参考, 然后用反变换的结果得到全尺寸的空间滤波器。

## 4.8 使用频率域滤波器平滑图像

本节介绍的所有滤波器都符合频率域滤波流程, 离散变量的范围是  $[0, P - 1] \times [0, Q - 1]$ 。

**理想低通滤波器 (ILPF):** 在以原点为圆心, 以  $D_0$  为半径的圆内, 无衰减地通过所有频率, 而在该圆外“阻断”所有频率的二位低通滤波器, 称为理想低通滤波器, 它由下面的函数确定:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中,  $D(u, v)$  是频率域中点  $(u, v)$  与频率矩形中心的距离

$$D(u, v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

对于 ILPF 横截面, 在  $H(u, v) = 1$  与  $H(u, v) = 0$  之间的过渡点称为**截止频率**, 上例中截止频率为  $D_0$ 。由于其截止频率过于陡峭, 故不能使用电子元件实现。

建立一组标准截止频率轨迹的一种方法是: 计算包含规定的总图像功率值  $P_T$  的圆, 即

$$P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u, v)$$

其中, 功率即模长的平方。如果 DFT 已被中心化, 那么原点位于频率矩形中心处, 半径为  $D_0$  的圆将包含  $\alpha\%$  的功率, 其中,

$$\alpha = \frac{100}{P_T} \sum_{(u,v) \in D_0} P(u, v)$$

使用 ILPF 可以模糊图像，因为细节信息包含在高频区域内，但相应地会产生明显的振铃现象。这可以用卷积定理解释，由于 ILPF 类似于盒装滤波器，可以预见其空间域具有 sinc 函数形状。将离散像素看成离散冲激，那么冲激与 sinc 卷积就是在冲激处复制这个 sinc 函数。sinc 函数的中心波瓣是引起模糊的主因，而外侧较小的波瓣是造成振铃的主要原因。

**布特沃斯低通滤波器 (Butterworth LPF, BLPF)**: 截止频率位于距原点  $D_0$  处的  $n$  阶布特沃斯低通滤波器的传递函数定义为：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

与 ILPF 不同，BLPF 传递函数并没有在通过频率和滤除频率之间给出明显截止的急剧不连续性。对于具有平滑传递函数的滤波器，可以在这样一点上定义截止频率，即使得  $H(u, v)$  下降为其最大值的某个百分比点。在上式中，截止频率点是当  $D(u, v) = D_0$  当点（即  $H(u, v)$  从其最大值 1 下降为 50%）。

空间的一阶布特沃斯滤波器没有振铃现象。在二阶滤波器中，振铃现象通常很难察觉，但更高阶数的滤波器中振铃现象比较明显。因此，二阶 BLPF 是在有效的低通滤波和可接受的振铃特性之间的较好折中。

**高斯低通滤波器 (Gauss LPF, GLPF)**: 高斯低通滤波器的二维形式由下式给出：

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

其中， $D_0$  为截止频率。当  $D(u, v) = D_0$  时，GLPF 下降到器最大值的 0.607 处。由于 GLPF 的傅立叶逆变换也是高斯的，这意味着空间高斯滤波器没有振铃现象；但是高斯滤波器在低频和高频之间的截止频率过度不是很紧凑，对此类要求高的场合应该使用 BLPF。

## 4.9 使用频率域滤波器锐化图像

一个高通滤波器是从给定低通滤波器用下式得到的：

$$H_{HP}(u, v) = 1 - H_{LP}(u, v)$$

其中， $H_{LP}(u, v)$  是低通滤波器的转移函数；也就是说，被低通滤波器衰减的频率能通过高通滤波器，反之亦然。

**理想高通滤波器 (IHPF)**: 理想高通滤波器定义为

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中， $D_0$  为截止频率。IHPF 同样在物理上无法实现，且产生严重的振铃现象，甚至产生失真。

**布特沃斯高通滤波器 (BHPF)**: 截止频率  $D_0$  的  $n$  阶布特沃斯高通滤波器定义为：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

与低通滤波器一样，我们可以预料布特沃斯高通滤波器比 IHPF 更平滑，利用 2 阶布特沃斯高通滤波器，边缘失真比 BHPF 小得多，甚至对于最小的截止频率值也一样。截止频率越大，使用 BHPF 得到的结果就越平滑。

**高斯高通滤波器 (GHPF)**: 截止频率处在距矩形中心  $D_0$  的高斯高通滤波器 (GHPF) 的传递函数由下式给出：

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

GHPF 得到的结果比前面两个滤波器的结果更平滑；即使是对微小物体和细线条使用高斯滤波器滤波，结果也是较清晰的。

**【注】** 高通滤波器可以和阈值法结合来增强图像，如指纹识别。

**频率域的拉普拉斯算子：** 拉普拉斯算子能使用如下滤波器在频率域实现：

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

或者，关于频率矩形的中心，使用如下滤波器实现：

$$H(u, v) = -4\pi^2[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2] = -4\pi^2 D^2(u, v)$$

于是，拉普拉斯图像由下式得到：

$$\nabla^2 f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F(u, v)\}$$

增强可以用下式实现：

$$g(x, y) = f(x, y) + c\nabla^2 f(x, y)$$

这里令  $c = -1$ ，由于  $H(u, v)$  是负的；同时，计算  $\nabla^2 f(x, y)$  会引入已标定系数的 DFT，这些系数的幅度与  $f$  的最大值相比可能要大好几个量级；处理问题的方法是，在计算  $f(x, y)$  的 DFT 之前，将其归一化到区间  $[0, 1]$  内，并用它的最大值除  $\nabla^2 f(x, y)$ ，进而将其带到近似区间  $[-1, 1]$  内，然后再使用上式。事实上，

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u, v)(1 - H(u, v))\} = \mathcal{F}^{-1}\{[1 + 4\pi^2 D^2(u, v)]F(u, v)\}$$

这个结果也存在刚刚提到的标定问题，并且难以计算归一化系数。因此我们优先选择在频率域中实现，用前文介绍的方法标定。

**钝化模板（非锐化掩蔽）与高提升滤波：** 前文介绍的钝化模板可以用频率与方法定义如下

$$g_{mask}(x, y) = f(x, y) - f_{LP}(x, y)$$

其中，

$$f_{LP}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{LP}(u, v)F(u, v)\}$$

其中， $H_{LP}(u, v)$  是一个低通滤波器， $F(u, v)$  是  $f(x, y)$  的傅立叶变换。然后

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{mask}(x, y)$$

当  $k = 1$  时，得到**钝化模板（非锐化掩蔽）**；当  $k > 1$  时，得到**高提升滤波**。如果全在频率域内进行处理，那么

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{[1 + k[1 - H_{LP}(u, v)]]F(u, v)\}$$

我们利用高通滤波来表达该结果，即

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{[1 + kH_{HP}(u, v)]F(u, v)\}$$

令  $H(u, v) = [1 + kH_{HP}(u, v)]$  称为**高频强调表达器**，普通高通滤波器会让直流分量置零，而高频强调表达器解决了这一问题，因为其加上了 1；常数  $k$  给出了影响最终结果的高频比例。高频强调滤波的通用公式为：

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{[k_1 + k_2 H_{HP}(u, v)]F(u, v)\}$$

其中， $k_1 \geq 0$  控制距原点的偏移量， $k_2 \geq 0$  控制高频的贡献。

**同态滤波**：第二章中我们介绍过简单的图像形成模型  $f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$ 。上式不能直接对照射和反射的频率成分进行操作，因为乘积的傅立叶变换并不是傅立叶变换的乘积。但是我们可以通过对两边取对数绕开乘积，即令

$$z(x, y) = \ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

对两边进行傅立叶变换，即

$$\mathcal{F}\{z(x, y)\} = \mathcal{F}\{\ln i(x, y)\} + \mathcal{F}\{\ln r(x, y)\}$$

即

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

其中， $F_i(u, v)$  与  $F_r(u, v)$  分别是  $\ln i(x, y)$  与  $\ln r(x, y)$  对傅立叶变换。

用滤波器  $H(u, v)$  对  $Z(u, v)$  滤波，相当于分别对  $F_i(u, v)$  与  $F_r(u, v)$  滤波；定义两个分量滤波后的做 IDFT 的结果为  $i'(x, y)$  与  $r'(x, y)$ ，那么新图像  $g(x, y)$  可以如下得到

$$g(x, y) = i_0(x, y)r_0(x, y) = e^{i'(x, y)}e^{r'(x, y)}$$

总结一下，同态滤波的步骤为：先对  $f(x, y)$  取对数，进行两个分量的分离（这里的分离不是显示分离，而是由如下结论导致的分离）然后 DFT，在频率域内作用转移函数，再 IDFT 后用 exp 组合在一起，得到最后的输出图像。

**结论**：图像取对数后 DFT 的低频成分与照射相联系，高频成分与反射相联系。

我们一般需要指定一个滤波器函数  $H(u, v)$ ，其可以以不同可控的方式影响傅立叶变换的低频和高频成分；一种方法如下图所示：

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[ 1 - e^{-c[D^2(u, v)/D_0^2]} \right] + \gamma_L$$

这可以控制滤波器位于  $[\gamma_L, \gamma_H]$  之间，同时  $c$  可以控制边坡的锐利度，如图 25 所示；这种方法可以同时增强对比度，并进行动态范围的压缩。

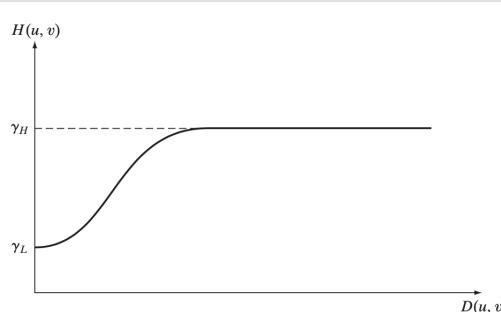


图 25

## 4.10 选择性滤波

带阻滤波器 ( $W$  是带宽;  $D(u, v)$  是  $(u, v)$  距滤波器中心的距离;  $D_0$  是截止频率,  $n$  是布特沃斯滤波器的阶数, 用  $D$  代表  $D(u, v)$ ) 对应的理想带阻滤波器、布特沃斯带阻滤波器、高斯带阻滤波器依次定义如下:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$$

$$H(u, v) = 1 - e^{-\left[ \frac{D^2 - D_0^2}{DW} \right]^2}$$

**带通滤波器:** 由带阻滤波器以及  $H_{BP}(u, v) = 1 - H_{BR}(u, v)$  可以得到对应的三种带通滤波器的定义。

**陷波滤波器:** 陷波滤波器拒绝 (或通过) 实现定义的关于频率举行中心的一个邻域的频率; 零相移滤波器必须是关于原点对称的 (我们前文要求滤波时需要零相移动), 因此, 一个中心位于  $(u_0, v_0)$  的陷波必然对应着一个中心位于  $(-u_0, -v_0)$  的陷波。陷波带阻滤波器可以用中心已被平移到陷波滤波器中心的高通滤波器的乘积来构造, 一般形式为:

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

其中,  $H_k(u, v)$  和  $H_{-k}(u, v)$  为高通滤波器, 其中心分别位于  $(u_k, v_k)$  与  $(-u_k, -v_k)$ ;  $Q$  表示陷波对数。这些中心是根据频率矩形的中心  $(M/2, N/2)$  确定的, 对于每个滤波器, 距离的计算由下式执行:

$$D_k(u, v) = [(u - M/2 - u_k)^2 + (v - N/2 - v_k)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$D_{-k}(u, v) = [(u - M/2 + u_k)^2 + (v - N/2 + v_k)^2]^{\frac{1}{2}}$$

注意, 这里的  $(u_k, v_k)$  是以图像中心为新坐标系的频率坐标。陷波带通滤波器可以用下式由陷波带阻滤波器得到:

$$H_{NP}(u, v) = 1 - H_{NR}(u, v)$$

陷波滤波的主要应用是, 选择性地修改 DFT 的局部区域, 这种类型的典型处理是交互完成的, 其直接对 DFT 处理, 而不需要填充; 交互处理实际的 DFT 的优点是, 不会出现因在滤波处理中未使用填充而导致的任何缠绕错误。陷波技术在实际处理中还可以减少莫尔模式。

## 4.11 实现

**二维 DFT 的可分性:** 根据图 22 二维 DFT 可分成一维变换, 即

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} = \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/M}$$

其中  $F(x, v)$  是先对第二维进行 DFT 得到的中间结果。因此，每次我们只需要考虑一个变量即可。

**IDFT 的计算：**根据图 22 傅立叶变换的对称性，我们可以用 DFT 计算 IDFT；只需要将  $F^*(u, v)$  输入正向算法中，然后得到答案，取复共轭并乘以  $\frac{1}{MN}$  即可。当然，当  $f(x, y)$  是实数时（一般均为这种情况），则  $f(x, y) = f^*(x, y)$ 。

**快速傅立叶变换 (FFT)：**在  $O(MN \log MN)$  的时间复杂度内完成 DFT 的运算。我们令

$$W_M = e^{-j2\pi/M}$$

于是，

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_M^{ux}$$

假设  $M = 2^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) =  $2K$  ( $K \in \mathbb{N}^*$ )，如果不够，补 0 即可。那么，分奇偶部分计算。

$$F(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{2K}^{u(2x)} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{2K}^{u(2x+1)}$$

由于单位根的性质，容易得到  $W_{2K}^{2ux} = W_K^{ux}$ ，于是

$$F(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{ux} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{ux} W_{2K}^u$$

令

$$F_{even}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{ux}$$

$$F_{odd}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{ux}$$

那么，

$$F(u) = F_{even}(u) + W_{2K}^u F_{odd}(u)$$

此外，由于单位根性质  $W_M^{u+M} = W_M^u$  且  $W_{2M}^{u+M} = -W_{2M}^u$ ，有

$$F(u+K) = F_{even}(u) - F_{odd}(u) W_{2K}^u$$

于是，我们把  $F(u)$  与  $F(u+K)$  合并计算。由于每次计算  $F_{even}(u)$  与  $F_{odd}(u)$  相当于规模更小（减小到原来的一半）的子问题；所以最多  $\log M$  层即可得到答案，然后向上合并即可。从而得到 FFT 算法的过程。