

第七章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

如果较小的物体和较大物体（或对比度较低和对比度较高的物体）同时存在，那么以不同分辨率来研究它们将更具优势。这就是多分辨率处理的基本动机。

图像金字塔：以多个分辨率来表示图像的一种结构是图像金字塔，是一系列以金字塔形状排列的，分辨率逐渐降低的图像集合。金字塔的底部是待处理图像的高分辨率表示，而顶部则包含一个低分辨率近似。向金字塔上层移动时，实存和分辨率逐步降低。基础级 J 的大小为 $2^J \times 2^J$ 或 $N \times N$ ，其中， $J = \log_2 N$ 。顶点级 0 的大小为 1×1 ；通常第 j 级的大小为 $2^j \times 2^j$ ，其中 $0 \leq j \leq J$ 。

- 大部分图像金字塔会截短到 $P + 1$ 级，其中 $1 \leq P \leq J$ 且 $j = J - P, \dots, J - 1, J$ ；也就是说，我们通常会将级别限制到 P 来降低原图像的分辨率近似，因为过低的分辨率没有什么价值。
- $P + 1$ 级金字塔中像素总数为 $N^2(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^P}) \leq \frac{4}{3}N^2$ 。

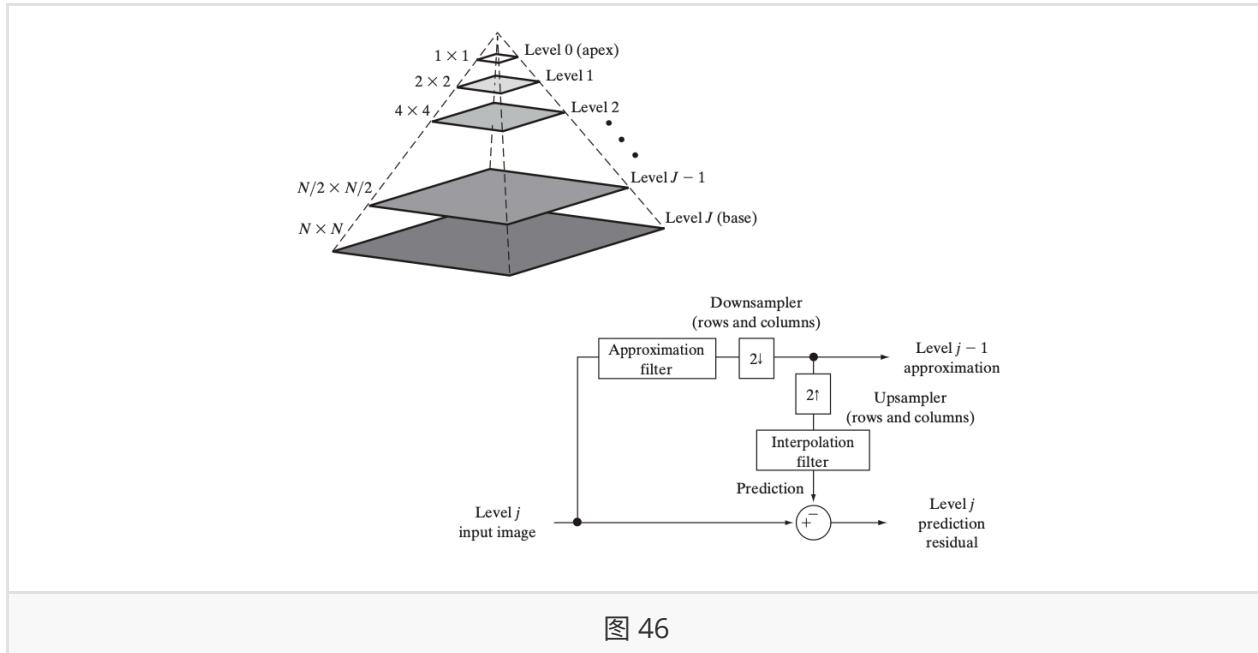


图 46

简单的图像金字塔构成如图 46 右下所示，其构建了两个紧密联系的图像金字塔：近似金字塔与残差预测金字塔。第 $j - 1$ 级近似输出提供一个近似值金字塔所需的图像，第 j 级预测残差输出构建一个补充的预测残差金字塔。与近似金字塔不同，预测残差金字塔仅包含一个输入图像的分辨率降低的近似（在金字塔的顶部，即 $J - P$ 级）。所有其他级包含的都是预测残差，其中第 j ($J - P + 1 \leq j \leq J$) 级预测残差定义为第 j 级近似与基于第 $j - 1$ 级近似的第 j 级近似的估计之间的差。构造金字塔的步骤如下所示：

1. 计算第 j 级输入图像分辨率降低的近似（方框图左侧的输入），这可通过滤波并对滤波后的结果以 2 为基进行下采样来完成，将得到的近似放在近似金字塔的第 $j - 1$ 级；
2. 由步骤 1 产生的分辨率降低的近似，创建第 j 级输入图像的一个估计，这是通过上采样和对产生的近似进行滤波来完成的，得到预测图像与第 j 级输入的维数相同；
3. 计算步骤 2 的预测图像和步骤 1 的输入之间的差，把结果放在预测残差金字塔的第 j 级。

第 j 级金字塔的输入是第 $(j+1)$ 级的近似图像；特别地，第 J 级金字塔的输入是原图像。对输入图像进行邻域平均滤波得到平均金字塔，对输入图像进行低通高斯滤波得到高斯金字塔；不过滤则产生子取样金字塔。内插滤波器可以使用任意内插方法。最后，我们定义下采样序列 $f_{2\downarrow}$ 与上采样序列 $f_{2\uparrow}$ 如下所示：

$$f_{2\downarrow}(n) = f(2n), \quad f_{2\uparrow} = \begin{cases} f(n/2) & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$$

上采样可视为在序列中的每个样本后插入 0；下采样可视为每隔一个样本就丢弃一个样本。二维上采样/下采样可通过如上定义的一维操作来执行。

滤波器基础

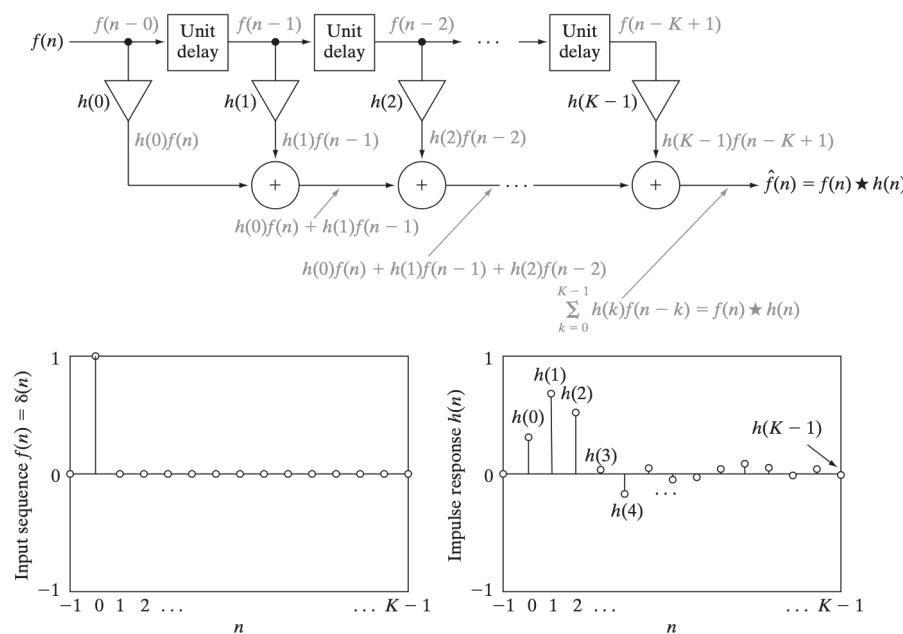


图 47

如图 47 所示，上图是一个简单的数字滤波器，产生滤波后的输出序列

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)f(n-k) = f(n) \star h(n)$$

图 47 所示的乘数 K 称为滤波系数，可以用滤波系数简化求和索引到 $[0, K-1]$ 中。每个系数定义一个滤波器抽头，它可被看成是计算上式求和项所需要的分量，该滤波器称为 K 阶的。

如果输入到图 47 所示的滤波器的是离散单位冲激，那么 $\hat{f}(n) = h(n)$ ，也就是说，滤波器的冲激响应时定义该滤波器的滤波器系数的 K 个元素组成的序列。物理上，一个脉冲越过该滤波器顶端从左向右移动，产生一个输出，假设该输出就是延迟冲激位置处的系数值，由于有 K 个系数，则冲激响应的长度为 K ，这种滤波器称为有限冲激响应滤波器 (FIR)。

图 48 显示了六个功能上相关的滤波器的冲激响应，其中相应之间具有如下关系：

- 图 b 的 $h_2(n)$ 是图 a 的 $h_1(n)$ 的符号反转形式，即 $h_2(n) = -h_1(n)$ ；
- 图 c 的 $h_3(n)$ 是图 a 的 $h_1(n)$ 关于垂直轴的映像，即 $h_3(n) = h_1(-n)$ ；
- 图 d 的 $h_4(n)$ 是图 a 的 $h_1(n)$ 的映像和平移形式，即 $h_4(n) = h_1(K-1-n)$ ；
- 图 e 的 $h_5(n)$ 是图 a 的 $h_1(n)$ 的调制形式，即 $h_5(n) = (-1)^n h_1(n)$ ；
- 图 f 的 $h_6(n)$ 是图 a 的 $h_1(n)$ 的顺序反转调制形式，即 $h_6(n) = (-1)^n h_1(K-1-n)$ 。

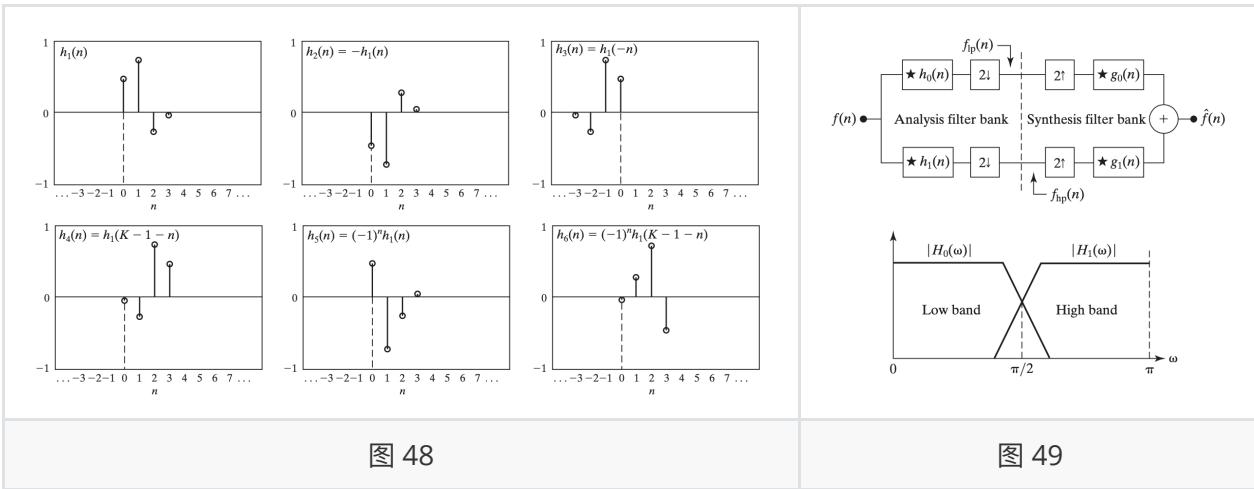


图 48

图 49

子带编码：另一种与多分辨率分析相关的重要图像处理技术是子带编码。在子带编码中，一幅图像被分解为一组频带受限的分量，称为子带。由于执行了分解，故子带可以重组在一起无误差重构原始图像。考虑图 49 的两波段子带编码和解码系统，该系统由两个滤波器组构成，每个滤波器组包含图 48 所示的两个 FIR 滤波器；4 个滤波器中的每个在图 49 中都被表示为一个方框，方框内给出了每个滤波器的冲激响应（和卷积符号）。包含滤波器 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 的分析滤波器组用于把输入序列分成两个半长序列 $f_{lp}(n)$ 与 $f_{hp}(n)$ ，表示输入的字带。注意，滤波器 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 是半波段滤波器，他们的理想传递特性 H_0 与 H_1 如图 49 下图所示。滤波器 $h_0(n)$ 是低通滤波器，其输出 $f_{lp}(n)$ 称为 $f(n)$ 的近似；滤波器 $h_1(n)$ 是高通滤波器，其输出 $f_{hp}(n)$ 称为 $f(n)$ 的高频部分或细节部分。综合滤波器组 $g_0(n)$ 与 $g_1(n)$ 将两部分合并，产生 $\hat{f}(n)$ 。子带编码的目的是选择 $h_0(n), h_1(n), g_0(n), g_1(n)$ 使得 $\hat{f}(n) = f(n)$ ，即子带编码和解码系统的输入和输出是相同的；完成这一任务时，就可以说最终系统采用了完美重建滤波器。

在所有滤波器组中，综合滤波器都是分析滤波器被调制后的信息——且每个位置都有且仅有一个综合滤波器的符号被反转。要实现完美重构，综合滤波器和分析滤波器的冲激响应必须按如下两种方式之一关联起来，称为 (*) 式：

$$g_0(n) = (-1)^n h_1(n), \quad g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n)$$

或

$$g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n), \quad g_1(n) = (-1)^n h_0(n)$$

前式中的 $g_0(n), g_1(n), h_0(n), h_1(n)$ 被视为交叉调制，因为图 49 中斜对着的滤波器是调制关联起来的。此外，可以看出其满足双正交条件：

$$\langle h_i(2n-k), g_j(k) \rangle = \delta(i-j)\delta(n) \quad i, j = \{0, 1\}$$

其中， $\langle a, b \rangle$ 表示向量 a, b 的内积。在子带编码与快速小波变换的开发中，重要的是克服了双正交性的滤波器，其要求

$$\langle g_i(n), g_j(n+2m) \rangle = \delta(i-j)\delta(m) \quad i, j = \{0, 1\}$$

上式定义了完美重建滤波器组的正交性。此外，可以证明正交滤波器满足如下两个条件：

$$g_1(n) = (-1)^n g_0(K-1-n), \quad h_i(n) = g_i(K-1-n) \quad i, j = \{0, 1\}$$

其中， K 的值必须能被 2 整除。

上式告诉我们，综合滤波器 g_1 通过顺序反转和调制与 g_0 建立联系；且 h_0 与 h_1 分别是综合滤波器的顺序反转形式。这样，标准正交滤波器组可以围绕单一滤波器（称之为原型）的冲激响应来开发，其余滤波器可以通过指定原型的冲激响应来计算。与之对应的，双正交滤波器组要求有两个原型，其余可以通过 (*) 式来计算。我们这里仅使用已有滤波器进行讨论，不进行原型的构造。

对于图像的处理，以为的标准正交和双正交滤波器可当作二维可分的滤波器使用，即首先用于一个维度（垂直方向），再用于另一个维度（水平方向）；在两个阶段都执行下采样（其中一次是在第二个滤波操作之前执行）以减少总体计算量。所的滤波后的输出，即图 50 中的 $a(m, n)$, $d^V(m, n)$, $d^H(m, n)$, $d^D(m, n)$ 分别称为图像的近似子带、垂直细节子带、水平细节子带和对角线细节子带；这些子带可分为四个更小的子带，更小的子带还能再分，等等。

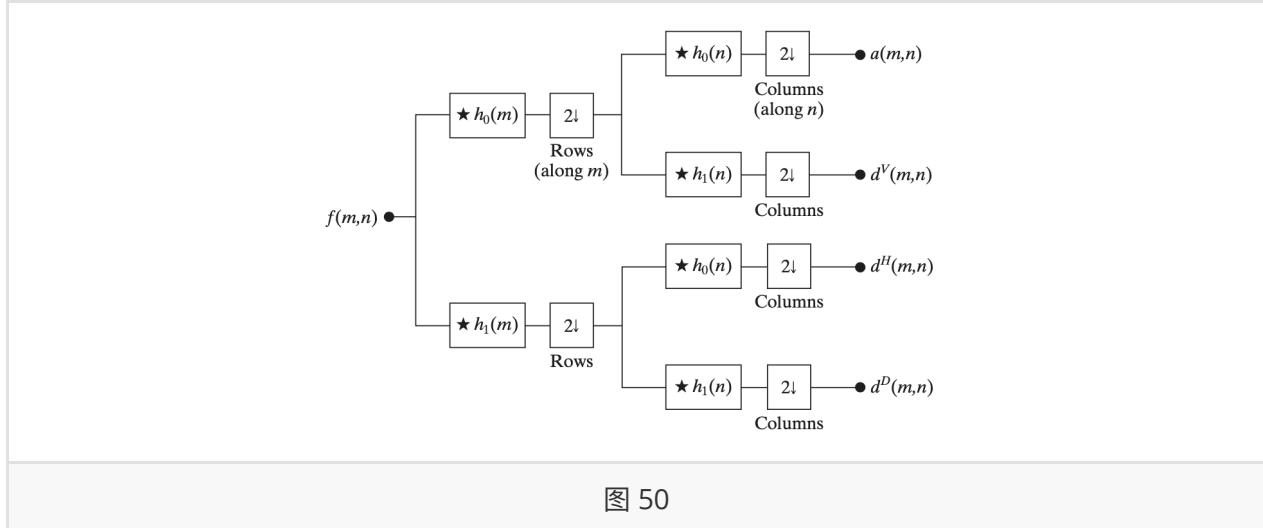


图 50

哈尔变换：第三个也是最后一个与多分辨率分析紧密联系的图像操作是哈尔变换。哈尔变换的基函数是已知最古老、也最简单的正交小波。哈尔变换可用如下矩阵形式表示：

$$\mathbf{T} = \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{H}^T$$

其中， \mathbf{F} 是 $N \times N$ 图像矩阵， \mathbf{H} 是 $N \times N$ 哈尔变换矩阵， \mathbf{T} 是一个 $N \times N$ 哈尔变化结果。由于 \mathbf{H} 不一定对称，因此转置是必要的。对于哈尔变换， \mathbf{H} 包含了哈尔基函数 $h_k(z)$ $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ，其定义在连续闭区间 $z \in [0, 1]$ 上，其中， $N = 2^n$ 。要生成矩阵 \mathbf{H} ，我们令 $k = 2^p + q - 1$ ，其中， $0 \leq p \leq n - 1$ ；当 $p = 0$ 时， $q = 0$ 或 1，而当 $p \neq 0$ 时， $1 \leq q \leq 2^p$ 。因此，哈尔基函数为：

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (z \in [0, 1])$$

以及

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2} & (q - 1)/2^p \leq z < (q - 0.5)/2^p \\ -2^{p/2} & (q - 0.5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0 & \text{otherwise, } z \in [0, 1] \end{cases}$$

$N \times N$ 哈尔变换矩阵的第 i 行包含了元素 $h_i(z)$ ，其中 $z = 0/N, 1/N, \dots, (N - 1)/N$ ；例如 2×2 哈尔矩阵和 4×4 哈尔矩阵分别为

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

我们对哈尔变换的主要兴趣在于， \mathbf{H}_2 的行可用于定义一个 2 抽头完美重建滤波器组的分析滤波器 $h_0(n)$ 与 $h_1(n)$ ，以及最简单且最古老的小波变换的缩放比例和小波向量。

7.2 多分辨率展开

级数展开：把一个信号或函数 $f(x)$ 当作展开函数的线性组合通常可以更好地进行分析。

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(x)$$

其中， k 是有限和或无限和的整数下标， α_k 是具有实值的展开系数， $\varphi_k(x)$ 是具有实值的展开函数。如果展开是唯一的，即对于任何给定的 $f(x)$ 只有一组 α_k 与之对应，则 $\varphi_k(x)$ 称为**基函数**，并且展开集合 $\{\varphi_k(x)\}$ 就称为可这样表示的一类函数的**基**，可展开的函数形成了一个函数空间，称为展开集合的**闭合跨度**，表示为

$$V = \overline{\text{Span}_k \{\varphi_k(x)\}}$$

$f(x) \in V$ 指 $f(x)$ 属于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的闭合跨度，并可写为前文所述的展开式。

对于任意函数空间 V 与展开集合 $\{\varphi_k(x)\}$ ，都有一个表示为 $\{\tilde{\varphi}_k(x)\}$ 的对偶函数集合，它可用于对任意 $f(x) \in V$ 计算系数 α_k ，这些系数是通过计算对偶函数 $\tilde{\varphi}_k(x)$ 和函数 $f(x)$ 的内积得到的，即

$$\alpha_k = \langle \tilde{\varphi}_k(x), f(x) \rangle = \int \tilde{\varphi}_k^*(x) f(x) dx$$

依据展开集合的正交性，该计算假定是三种可能形式的一种：

1 展开函数构成了 V 的一组标准正交基，即

$$\langle \varphi_j(x), \varphi_k(x) \rangle = \delta_{jk} = [j = k]$$

则该基与其对偶基相等，即 $\varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k(x)$ ，因此

$$\alpha_k = \langle \varphi_k(x), f(x) \rangle$$

α_k 由基函数与 $f(x)$ 内积计算。

2 如果展开函数不是标准正交的，但是确是 V 的一个正交基，那么

$$\langle \varphi_j(x), \varphi_k(x) \rangle = 0, \quad (j \neq k)$$

且基函数及其对偶称为**双正交函数**，双正交基及其对偶有如下形式：

$$\langle \varphi_j(x), \tilde{\varphi}_k(x) \rangle = \delta_{jk} = [j = k]$$

3 如果展开集合不是 V 的一个基，但是支持展开，那么其就是一个跨度集合。在该跨度集合中，任何 $f(x) \in V$ 都有一个以上 α_k 集合。展开函数及其对偶可以说是超完备的或冗余的。它们形成了一个框架，其中对于某些 $A > 0, B < \infty$ 及所有 $f(x) \in V$ ，有

$$A\|f(x)\|^2 \leq \sum_k |\langle \varphi_k(x), f(x) \rangle|^2 \leq B\|f(x)\|^2$$

用 $f(x)$ 的范数的平方去除该式，我们看到 A 和 B 构成了扩展系数与该函数的归一化内积。一些有用的等式可用于得到框架的展开系数，若 $A = B$ ，则展开集合称为**紧框架**，并可证明

$$f(x) = \frac{1}{A} \sum_k \langle \varphi_k(x), f(x) \rangle \varphi_k(x)$$

除 A^{-1} 项之外，这与标准正交基的表达式相等。

尺度函数：考虑由实、平方可积函数 $\varphi(x)$ 的整数平移和二值尺度组成的展开函数集合 $\{\varphi_{j,k}(x)\}$ ，其中

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$$

对所有的 $j, k \in \mathbb{Z}$ 与 $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ 均成立。这里，整数平移 k 决定了 $\varphi_{j,k}(x)$ 沿 x 轴的位置，尺度 j 决定了 $\varphi_{j,k}(x)$ 的宽度，即它沿 x 轴是多宽或多窄。项 $2^{j/2}$ 控制函数的幅度。由于 $\varphi_{j,k}(x)$ 的形状随 j 发生变化，所以 $\varphi(x)$ 称为尺度函数。适当选择 $\varphi(x)$ ，可使得 $\varphi_{j,k}(x)$ 张成 $L^2(\mathbb{R})$ ，其中后者是所有可度量的、平方可积函数的集合。若限定 j 为指定值，如 $j = j_0$ ，则展开集合 $\{\varphi_{j_0,k}(x)\}$ 是 $\{\varphi_{j,k}(x)\}$ 的一个子集，它张成 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间。类似地，我们将该子空间定义为

$$V_{j_0} = \overline{\text{Span}_k \{\varphi_{j_0,k}(x)\}}$$

即 V_{j_0} 是 $\varphi_{j_0,k}(x)$ 在 k 上的一个跨度。当 $f(x) \in V_{j_0}$ 时，我们知道

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_{j_0,k}(x)$$

容易发现，上面的定义可以简单地用 j 替换 j_0 。增加 j 就会增加 V_j 的大小，从而允许子空间内包含具有更小变量或更细细节的函数。因为随着 j 的增大，用于表示子空间的函数 $\varphi_{j,k}(x)$ 会变得较窄，且 x 有较小的变化就能分开。

哈尔尺度函数：哈尔尺度函数是单位高度、单位宽度的尺度函数，即

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

多分辨率分析对尺度函数的要求（MRA 要求）

- 1 尺度函数对其整数平移是正交的；
- 2 低尺度的尺度函数跨越的子空间，嵌套在高尺度跨越的子空间内，即

$$V_{-\infty} \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_\infty$$

此外，这些子空间还满足直观条件，即如果 $f(x) \in V_j$ ，则 $f(2x) \in V_{j+1}$ 。哈尔尺度函数满足该条件的并不意味着任何支撑宽度为 1 的函数都自动满足该条件，比如 $\varphi(x) = [-0.25 \leq x < 0.75]$ 不是用于多分辨率分析的有效尺度函数。

- 3 唯一对所有 V_j 通用的函数是 $f(x) = 0$ （考虑 $V_{-\infty}$ 即可）；
- 4 任何函数都可以按任意精度表示。虽然不可能以任意粗糙的分辨率来展开一个特定的 $f(x)$ ，但所有可度量的、平方可积的函数都可以由尺度函数在 $j \rightarrow \infty$ 的限制下表示，即

$$V_\infty = \{L^2(\mathbb{R})\}$$

尺度函数系数与尺度向量：在如上条件下，子空间 V_j 的展开函数一定能表示成子空间 V_{j+1} 的展开函数的额加权和。令

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_n \alpha_n \varphi_{j+1,n}(x) = \sum_n h_\varphi(n) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1}x - n)$$

上式使用了要求 2 以及前文的级数展开以及尺度函数的定义，同时我们令 $h_\varphi(n) = \alpha_n$ 。观察到 $\varphi_{0,0}(x) = \varphi(x)$ ，因此我们令 $j = k = 0$ ，得到如下表达式：

$$\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n)$$

该递归等式中的系数 $h_\varphi(n)$ 称为**尺度函数系数**， h_φ 为**尺度向量**；上式为多分辨率分析的基础，称为**改进等式或 MRA 等式或扩张等式**。它表明了任意子空间的展开函数，都可以由其自身的双倍分辨率副本建立，即来自相邻较高分辨率空间的展开函数。参考子空间 V_0 的选择是任意的。

哈尔尺度函数的尺度函数系数是 $h_\varphi(0) = h_\varphi(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，即 H_2 的第一行，于是有

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2} \varphi(2x)] + \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2} \varphi(2x - 1)] = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1)$$

小波函数：给定满足前一节中 MRA 要求的尺度函数，我们定义小波函数 $\psi(x)$ ，它与其整数平移及二值尺度一起，跨越任意两个相邻尺度空间 V_j 与 V_{j+1} 之间的差 ($V_{j+1} - V_j$ 的部分)。对于跨越图中 W_j 空间的所有 $k \in \mathbb{Z}$ ，定义小波集合 $\{\psi_{j,k}(x)\}$ 如下：

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

使用尺度函数，可以写出

$$W_j = \overline{\text{Span}_k \{\psi_{j,k}(x)\}}$$

并且注意到如果 $f(x) \in W_j$ ，有

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \psi_{j,k}(x)$$

尺度函数和小波函数子空间由下式连起来（其中， \oplus 表示空间并）

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

且 V_j 的正交补集是 W_j 且 V_j 中所有成员与 W_j 中所有成员都正交，即

$$\langle V_{j,k}, W_{j,l} \rangle = 0$$

于是所有可度量的、平方可积的函数空间可以表示为

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots = V_{-\infty} \oplus W_{-\infty} \oplus \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots = \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots$$

注意到上式中消除了尺度函数。于是，我们可以定义任何开始尺度 j_0 ，则

$$L^2(\mathbb{R}) = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \cdots$$

因为小波空间存在于由相邻较高分辨率尺度函数跨越的空间中，所以任何小波函数，也可以得到如下形式：

$$\psi(x) = \sum_n h_\psi(n) \sqrt{2} \phi(2x - n)$$

其中， $h_\psi(n)$ 称为小波函数系数， h_ψ 称为小波向量。可以证明，

$$h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(1 - n)$$

这一关系同时决定了标准正交子带表吗和解编码滤波器的冲激响应。

哈尔小波函数：通过小波函数系数与尺度函数系数的联系，我们可以求出哈尔小波函数，即 $\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1)$ ，化简后即为

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

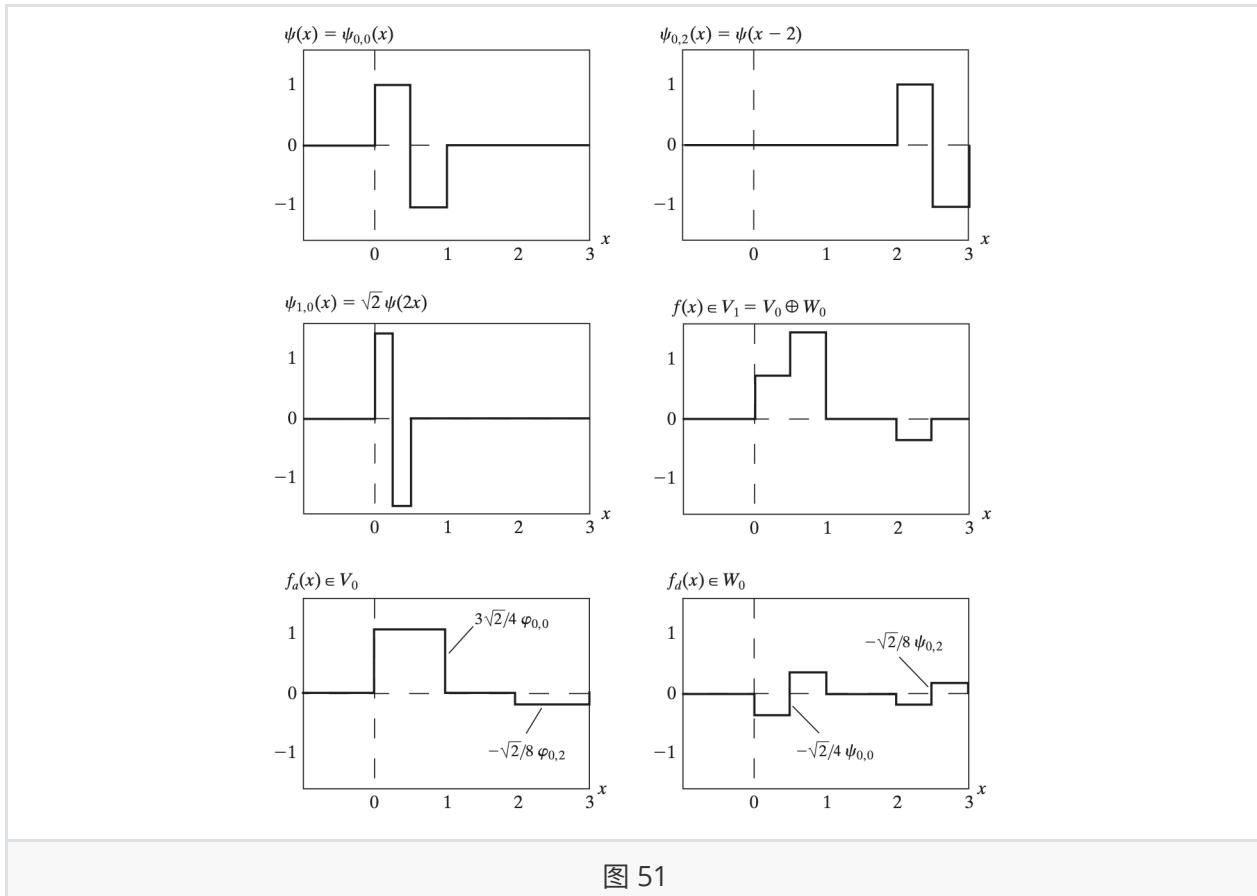


图 51

举一个例子，如图 51 所示。我们知道函数 $f(x)$ 属于 V_1 但不属于 V_0 ，于是我们可以令开始尺度 $j_0 = 0$ ，将 $f(x)$ 以 V_0 与 W_0 的展开函数精确表示为：

$$f(x) = f_a(x) + f_d(x)$$

其中，

$$f_a(x) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \varphi_{0,0}(x) - \frac{\sqrt{2}}{8} \varphi_{0,2}(x), \quad f_d(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \psi_{0,0}(x) - \frac{\sqrt{2}}{8} \psi_{0,2}(x)$$

如图 51 右下方三幅图所示。其中， $f_a(x)$ 是使用 V_0 尺度函数对 $f(x)$ 的近似，而 $f_d(x)$ 作为 W_0 的一个和，为 $f(x) - f_a(x)$ 。如果看成高通和低通部分，则 $f(x)$ 的低频部分在 $f_a(x)$ 得到，它假定为每个整数区间上的平均值，而高频细节在 $f_d(x)$ 编码。

7.3 一维小波变换

小波级数展开：首先定义与小波 $\psi(x)$ 和尺度函数 $\varphi(x)$ 相关的函数 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ 的小波级数展开。根据前文所述， $f(x)$ 可表示为子空间 V_{j_0} 中的尺度函数展开和子空间 $W_{j_0}, W_{j_0+1}, \dots$ 中的某些小波函数，即

$$f(x) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(x)$$

其中， j_0 为开始尺度， $c_{j_0}(k)$ 与 $d_j(k)$ 分别称为近似系数（尺度系数）与细节系数（小波系数）。如果展开式函数形成了一个标准正交基或紧框架（通常如此），则展开系数计算如下：

$$c_{j_0}(k) = \langle f(x), \varphi_{j_0,k}(x) \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0,k}(x) dx$$

$$d_j(k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$

如果展开函数是双正交基的一部分，则用对偶函数项 $\tilde{\psi}_{j,k}$ 与 $\tilde{\varphi}_{j_0,k}$ 来代替原项。

离散小波变换 (DWT) : 如果待展开的函数是离散的（数字序列），得到的系数就称为离散小波变换 (DWT)。例如，对于某些 $x_0, \Delta x$ 和 $n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ，若 $f(n) = f(x_0 + n\Delta x)$ ，对 $f(x)$ 的小波级数展开系数即为序列 $f(n)$ 的正向 DWT 系数。

$$W_{\varphi}(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \varphi_{j_0,k}(n)$$

$$W_{\psi}(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \psi_{j,k}(n) \quad (j \geq j_0)$$

其中， $\varphi_{j_0,k}(n)$ 与 $\psi_{j,k}(n)$ 为对应尺度函数与小波函数的取样形式；即对于某些 $x_s, \Delta x_s$ 和 $n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ，有 $\varphi_{j_0,k}(n) = \varphi_{j_0,k}(x_s + n\Delta x_s)$ 。这样，我们就在基函数的支撑上使用 M 个等间隔的取样。

反向 DWT (IDWT) 为：

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_{\varphi}(j_0, k) \varphi_{j_0,k}(n) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_{\psi}(j, k) \psi_{j,k}(n)$$

通常，令 $j_0 = 0$ ，并选择 M 为 2 的次幂，即 $M = 2^J$ ，于是选择 $n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ， $j = 0, 1, 2, \dots, J - 1$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1$ 。对于哈尔小波，变换中采用的离散尺度和小波函数（基函数）与 $M \times M$ 哈尔变换矩阵的行对应。变换本身由 M 个系数组成，最小尺度是 0，最大尺度是 $J - 1$ 。在上式中， $\frac{1}{\sqrt{M}}$ 代表归一化因子，其可以合并到正向/反向 DWT 中形成 $\frac{1}{M}$ 。考虑到我们可以使用不同的开始尺度 j_0 ，这样就定义了一族开始尺度不同的变换，但是这样复杂了计算，没有必要。

连续小波变换 (CWT) : 连续平方可积函数 $f(x)$ 的连续小波变换与实值小波 $\psi(x)$ 的关系定义为

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{s,\tau}(x) dx$$

其中, $\psi_{s,\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-\tau}{s}\right)$, s, τ 分别称为 **尺度参数** 和 **平移参数**, 可以使用连续小波反变换求出 $f(x)$, 即

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_\psi(s, \tau) \frac{\psi_{s,\tau}(x)}{s^2} d\tau ds$$

其中,

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\mu)|^2}{|\mu|^2} d\mu$$

$\Psi(\mu)$ 为 $\psi(x)$ 的傅立叶变换。只要满足 $C_\psi < \infty$, 上述式就定义了一个可逆变换。大多数情况下, 意味着 $\Psi(0) = 0$ 且 $\mu \rightarrow \infty$ 时, $\Psi(\mu) \rightarrow 0$ 的速度足够快使得 $C_\psi < \infty$ 。上述式与离散形式非常类似:

1. 连续变换参数 τ 取代了整数平移参数 k , 且是先进行平移再进行尺度伸缩;
2. 连续尺度参数 s 与二进制尺度参数 2^j 逆相关。连续变换中使用的小波在 $0 < s < 1$ 时收缩或宽度减小, 在 $s > 1$ 时被扩大或展开。小波尺度和传统意义上的频率表示成反比。
3. 连续变换类似于级数展开, 或开始尺度 $j_0 = -\infty$ 的离散变换。这消除了对尺度函数的依赖, 让函数仅用小波形式表示。
4. 与离散变换相似, 连续变换可视为一组变换系数 $\{W_\psi(s, \tau)\}$, 其度量 $f(x)$ 与一组基函数 $\{\psi_{s,\tau}(x)\}$ 的相似性。但在连续情况下, 两个集合都是无穷的, 由于 $\psi_{s,\tau}(x)$ 有实数值, 且 $\psi_{s,\tau}(x) = \psi_{s,\tau}^*(x)$, 所以每个系数都是 $f(x)$ 与 $\psi_{s,\tau}(x)$ 的内积 $\langle f(x), \psi_{s,\tau}(x) \rangle$ 。

7.4 快速小波变换 (FWT)

快速小波变换 FWT 也被称为 **Mallat 人字形算法**。考虑分辨率优化等式

$$\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n)$$

用 2^j 对 x 尺度化并用 k 对其平移, 并令 $m = 2k + n$, 给出

$$\varphi(2^j x - k) = \sum_n h_\varphi(n) \sqrt{2} \varphi(2(2^j x - k) - n) = \sum_m h_\varphi(m - 2k) \sqrt{2} \varphi(2^{j+1} x - m)$$

容易发现, $\psi(2^j x - k)$ 也有类似的结论, 即

$$\psi(2^j x - k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) \sqrt{2} \psi(2^{j+1} x - m)$$

考虑连续函数的小波展开系数, 有

$$d_j(k) = \int f(x) 2^{j/2} \psi(2^j x - k) dx = \int f(x) 2^{j/2} \left[\sum_m h_\psi(m - 2k) \sqrt{2} \psi(2^{j+1} x - m) \right] dx$$

交换积分和求和,

$$d_j(k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) \left[\int f(x) 2^{(j+1)/2} \psi(2^{j+1} x - m) dx \right]$$

容易发现，方括号内实际 $c_{j+1}(m)$ 。于是有

$$d_j(k) = \sum_m h_\psi(m - 2k)c_{j+1}(m), \quad c_j(k) = \sum_m h_\varphi(m - 2k)c_{j+1}(m)$$

当 $f(x)$ 为离散函数时，因为小波级数展开的系数 $c_j(k)$ 和 $d_j(k)$ 变成了 DWT 的系数 $W_\varphi(j, k)$ 和 $W_\psi(j, k)$ ，所以可以写出

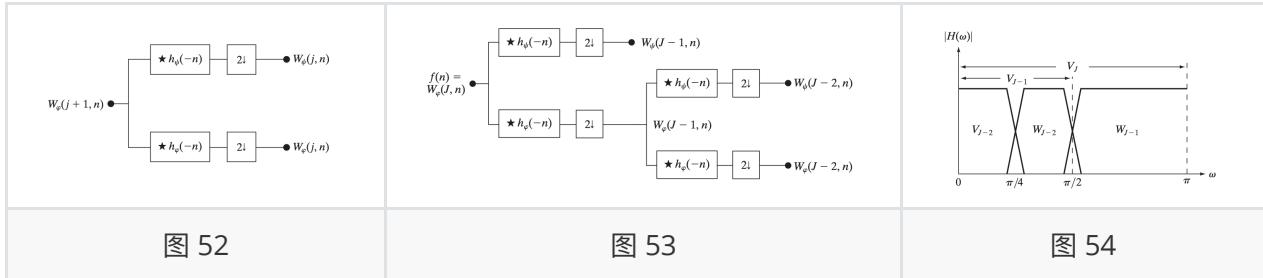
$$W_\psi(j, k) = \sum_m h_\psi(m - 2k)W_\varphi(j + 1, m), \quad W_\varphi(j, k) = \sum_m h_\varphi(m - 2k)W_\varphi(j + 1, m)$$

这说明了相邻尺度之间 DWT 系数间的明显关系。可以看到， $W_\varphi(j, k)$ 和 $W_\psi(j, k)$ 可以通过 $W_\varphi(j + 1, k)$ 分别与顺序导致的尺度和小波向量（即 $h_\varphi(n)$ 与 $h_\psi(n)$ ）进行卷积操作，并对结果下取样来计算。于是，可以写出

$$W_\psi(j, k) = h_\psi(-n) \star W_\varphi(j + 1, n)|_{n=2k, k \geq 0}$$

$$W_\varphi(j, k) = h_\varphi(-n) \star W_\varphi(j + 1, n)|_{n=2k, k \geq 0}$$

其中，当 $k \geq 0$ 时可直接计算卷积在 $n = 2k$ 的值，于是我们可以得到一个 FWT 分析滤波器组，如图 52 所示。容易发现，使用 FWT 要求 $O(M)$ 次操作。我们发现，FWT 的结构允许我们迭代产生多级 FWT 滤波器组，如图 53 所示。



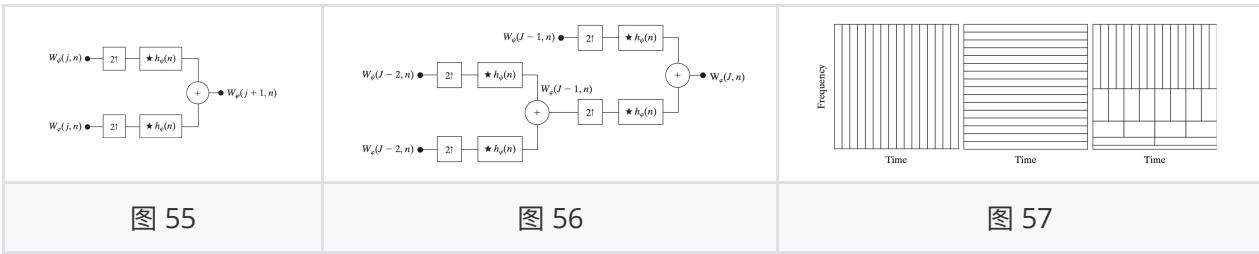
我们可以将图 53 中的最高尺度系数假定为函数本身的取样值；图 53 的第一个滤波器组将原始函数分解为一个低通函数 ($W_\varphi(J - 1, n)$ 近似分量) 和一个高通函数 ($W_\psi(J - 1, n)$ 高通分量)；接着第二个滤波器组继续再分……于是，其频率分离特性如图 54 所示。

很容易将图 53 的耳机滤波器组拓展到任意尺度。通常，我们选择 $f(x)$ 的 2^J 个样本，用 P 个滤波器组在尺度 $J - 1, J - 2, \dots, J - P$ 处生成一个 P 尺度的 FWT。首先计算最高尺度的系数，然后计算最低尺度的系数。如果 $f(x)$ 以高于奈奎斯特采样率的取样率取样（通常如此），那么其样本是该取样分辨率下尺度系数的良好近似，并可以作为起始的高分辨率尺度系数的输入。因此，允许 $f(n)$ 做第一个二带宽滤波器组的尺度（近似）输入。

显然，我们可以通过构建正变换的结果重建 $f(n)$ 的快速反变换，称为快速小波反变换，它使用正变换中采用的小波向量以及第 j 级的近似和细节系数，来生成第 $(j + 1)$ 级的近似系数。于是我们得到如图 55 所示的 FWT 综合滤波器组，其表达式如下：

$$W_\varphi(j + 1, k) = h_\varphi(k) \star W_\varphi^{2\uparrow}(j, k) + h_\psi(k) \star W_\psi^{2\uparrow}(j, k) |_{k \geq 0}$$

其中， $W^{2\uparrow}$ 表示基 2 上取样，即插入 0 使长度变为原来的两倍。用多个 FWT 综合滤波器组结合可以将系数合并过程扩展到任意尺度，直到完美重建 $f(n)$ ，如图 56 所示。



函数表示中用到的每个基函数都可以粗略地视为时间-频率平面中的一片，称为海森伯单元或海森伯盒，它显示了其所代表的基函数的频率内容，以及该基函数在时域中所处的位置。归一化正交基函数由不重叠的片来表征。图 57 的三幅图分别表示取样数据、FFT 和 FWT 相关的基函数的时间-频率片；可以看出，FWT 能够同时分析时域与频域的函数特征。

7.5 二维小波变换

一维小波变换可以很容易地推广到二维函数。二维函数下，需要一个二维尺度函数 $\varphi(x, y)$ 与三个二维小波 $\psi^H(x, y), \psi^V(x, y), \psi^D(x, y)$ 。每个二维小波都是两个一维函数的乘积，排除产生异一维结果的乘积，4 个剩下的乘积产生可分尺度函数和可分的方向敏感小波：

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \psi^H(x, y) = \psi(x)\varphi(y), \quad \psi^V(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad \psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

其中， $\psi^H(x, y)$ 度量沿列方向的变化， $\psi^V(x, y)$ 度量沿行方向的变化， $\psi^D(x, y)$ 度量沿对角线方向的变化。方向敏感时可分型的自然结果，且不会增加二维变换的计算复杂性。给定可分二维尺度函数和小波函数，一维 DFT 可直接扩展到二维。我们首先简单定义尺度和平移基函数：

$$\varphi_{j, m, n}(x, y) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - m, 2^j y - n), \quad \psi_{j, m, n}^i(x, y) = 2^{j/2} \psi^i(2^j x - m, 2^j y - n) \quad i = \{H, V, D\}$$

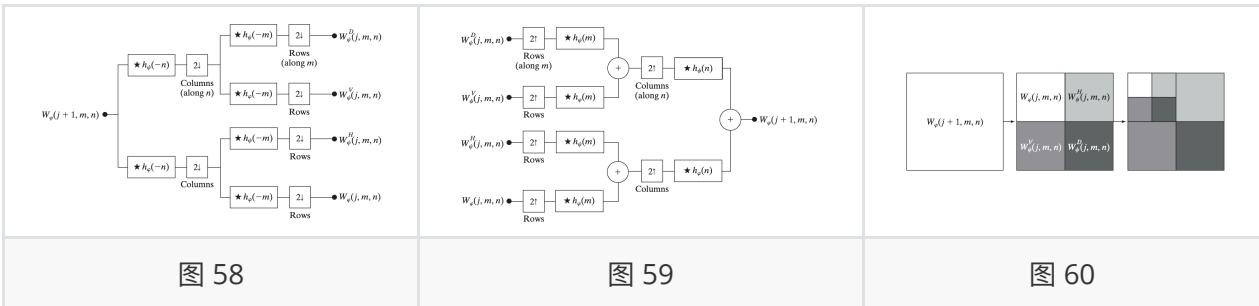
于是，离散小波变换为

$$W_\varphi(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \varphi_{j_0, m, n}(x, y)$$

$$W_\psi^i(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \psi_{j, m, n}^i(x, y) \quad i = \{H, V, D\}$$

通常令 $j_0 = 0$ 并选择 $N = M = 2^J$ ，因此有 $j = 0, 1, 2, \dots, J-1$ 与 $m = n = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1$ 。 $f(x, y)$ 可通过离散小波反变换得到

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \left[\sum_m \sum_n W_\varphi(j_0, m, n) \varphi_{j_0, m, n}(x, y) + \sum_{i \in \{H, V, D\}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_m \sum_n W_\psi^i(j, m, n) \psi_{j, m, n}^i(x, y) \right]$$



类似于一维离散小波变换，二维 DWT 可以使用数字滤波器和下取样器实现，利用可分的二维尺度函数和小波函数，我们可以先简单地取 $f(x, y)$ 的行的一维 FWT，然后，取结果列的一维 FWT 即可。类似地，我们可以得到分析滤波器组和综合滤波器组如图 58、图 59 所示。分解的结果如图 60 所示。

基本变换方法：计算一幅图像的二维小波变换，修改变换，计算反变换得到图像。

7.6 小波包（略）

7.7 小波变换补充

Gabor 变换（加窗傅立叶变换、短时傅立叶变换，STFT）：选定一个有限窗口，将窗口放置在信号的起点，计算窗口中的短时傅立叶变换，将窗口右移一个距离，重复步骤直到到达信号末尾。可以得到每个时段内频率成分。Gabor 变换具有特征：

- 实现了对于信号频率与时间观察的折衷；
- 无论时间还是频率观察均为有限精度；整体精度取决于窗口尺寸；
- 一旦窗口尺寸确定，将用于所有频率。

而实际信号需要在时间和频率方面更为灵活的观察与分析。

小波：具有有限区间和均值为零的波；

快速小波变换算法

- 原始信号经过一对互补的滤波器组进行的分解成为一级分解；
- 理论上，可以用一对互补的滤波器组对前述分解的信号进行继续分解。
- 如果对信号的高频分量不再分解，而对低频分量进行连续分解，就可以得到信号不同分辨率下高频分量和低频分量，这也称为信号的多分辨率分析。
- **连续的分解将形成一棵比较大的分解树，称其为信号的小波分解树**
- 世纪钟，分解的级数取决于要分析的信号数据特征与分析需求。