附录 2　高等数学常用结论

第一章　函数、极限与连续

1. 常见的偶函数有：$y=\cos x$，$y=|x|$，$y=x^{2n}$；

常见的奇函数有：$y=\sin x$，$y=\tan x$，$y=\arcsin x$，$y=\arctan x$，$y=\log_a(\sqrt{1+x^2}\pm x)$，$y=\dfrac{1}{1\pm a^x}-\dfrac{1}{2}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

2. 点 x_0 处的左极限、右极限与极限关系：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

3. 运算法则

已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$；

(3) 当 $B\neq 0$ 时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

4. 夹逼准则

如果对于 x_0 的某一去心邻域内的一切 x，都有

① $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，

② $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

5. 单调有界的数列必有极限.

6. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\left(\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1\right)$；

注：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0\neq 1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\left(\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}\text{ 或 }\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}\right)$.

7. 常见的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，

$\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim \mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)\sim x$；

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$；$a^x-1\sim x\ln a$；$\log_a(1+x)\sim\dfrac{1}{\ln a}x$.

8. 在同一极限过程中，若 $\alpha(x)\sim\alpha^*(x)$，$\beta(x)\sim\beta^*(x)$，且 $\lim\dfrac{\beta^*(x)}{\alpha^*(x)}$ 存在，则

$$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{\beta^*(x)}{\alpha^*(x)}.$$

9. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

10. 间断点

$$\text{间断点}\begin{cases} \text{第一类间断点}\begin{cases} \text{可去间断点}\begin{cases} f(x)\text{ 在点 } x_0 \text{ 处有定义}, \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0), \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, f(x)\text{ 在点 } x_0 \text{ 处无定义}, \end{cases} \\ \text{跳跃间断点} \to \text{点 } x_0 \text{ 处的左右极限存在但不相等}, \end{cases} \\ \text{第二类间断点} \to \text{点 } x_0 \text{ 处的左、右极限中至少有一个不存在}. \end{cases}$$

11. 介值定理

设函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a) = A$ 及 $f(b) = B$，则对于 A 和 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi) = C(a < \xi < b)$.

12. 零点定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

第二章　一元函数微分学

1. 关于导数的定义，关键是理解并牢记导数值的三种等价表达式的结构：

(1) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$；

(3) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. 左导数与右导数

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

3. 导数的几何意义

曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$，法线方程为 $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)(f'(x_0) \neq 0)$.

4. 可导必连续，连续不一定可导.

5. 常用的求导公式

(1) $C' = 0$（C 为常数）；　(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$；

(3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$；　(4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$；

(5) $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$；　(6) $(e^x)' = e^x$；

(7) $(\sin x)' = \cos x$；　(8) $(\cos x)' = -\sin x$；

(9) $(\tan x)' = \sec^2 x$；　(10) $(\cot x)' = -\csc^2 x$；

(11) $(\sec x)' = \tan x \sec x$；　(12) $(\csc x)' = -\cot x \csc x$；

(13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$；　(14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$；

(15) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;　　(16) $(\text{arccot}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

6. 导数的四则运算法则

设函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在点 x 处可导，则函数 $u \pm v, uv, \dfrac{u}{v}(v \neq 0)$ 在点 x 处也可导，并且有

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;　　(2) $(uv)' = u'v + uv'$;

(3) $[Cu(x)]' = Cu'(x)$（C 为常数）;　　(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\quad (v \neq 0)$;

(5) $\left[\dfrac{C}{v(x)}\right]' = -\dfrac{Cv'(x)}{v^2(x)}$.

7. 反函数的求导法则

$y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 的导数为 $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$，也可记为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

8. 常用高阶导数公式

(1) $(e^x)^{(n)} = e^x$;　　(2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$;　　(4) $(x^n)^{(n)} = n!$;

(5) $(x^m)^{(n)} = 0$　（正整数 $m < n$）;　　(6) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \dfrac{1}{x^n}$;

(7) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

9. 复合函数求导法则

如果函数 $u = u(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y = f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数 $y = f(u(x))$ 在点 x 处可导，且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'[u(x)] \cdot u'(x).$$

10. 隐函数的导数

(1) 公式法. 即 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

(2) 利用一阶微分形式的不变性.

(3) 利用复合函数求导法则.

11. 参数方程确定的函数的导数

由 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定的函数 $y = f(x)$ 的一阶导数为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}(\varphi'(t) \neq 0)$，

二阶导数为 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$.

12. 微分的四则运算

设 $u = u(x), v = v(x)$ 可微，则

(1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;　　(2) $d(Cu) = Cdu$;

(3) $d(uv) = vdu + udv$;　　(4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}\quad (v \neq 0)$.

13. 复合函数微分法（一阶微分形式不变性）

$y = f[u(x)]$ 的微分为 $dy = f'(u) \cdot u'(x)dx = f'(u)du$.

14. 常用的微分公式

(1) $\mathrm{d}C=0$； (2) $\mathrm{d}x^n=nx^{n-1}\mathrm{d}x$；

(3) $\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$； (4) $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(5) $\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$； (6) $\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；

(7) $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$； (8) $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$；

(9) $\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$； (10) $\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

(11) $\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$； (12) $\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(13) $\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$； (14) $\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(15) $\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$； (16) $\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$.

15. 微分在近似计算中的应用

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x,$$

可得

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

令 $x_0+\Delta x=x$，则又有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

16. 罗尔定理

设函数 $y=f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) $f(a)=f(b)$，

则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=0.$$

17. 拉格朗日中值定理

设函数 $y=f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，

则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

18. 洛必达法则

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

(1) 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 同时趋于零或 ∞.

(2) 在点 x_0 的某去心邻域内，$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可为实数，也可为 $\pm\infty$ 或 ∞），

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A.$

若将洛必达法则中 $x\to x_0$ 换成 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\pm\infty$，$x\to\infty$，只要修改相应的条件，也可得到同样的结论.

库课 Cook Life 有趣 有料 有种

对于 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型的未定式,都可以转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式,然后再用洛必达法则求极限.

19. 单调性的判定

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,则

(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x) > 0$,则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加;

(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x) < 0$,则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少.

20. 极值的判定

(1) 极值的第一判定定理

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续,且在点 x_0 的某一邻域内可导(点 x_0 可除外),如果在该邻域内

① 当 $x < x_0$ 时,$f'(x) > 0$;而当 $x > x_0$ 时,$f'(x) < 0$,则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值;

② 当 $x < x_0$ 时,$f'(x) < 0$;而当 $x > x_0$ 时,$f'(x) > 0$,则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值.

如果 $f'(x)$ 在点 x_0 的两侧不变号,则 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

(2) 极值的第二判定定理

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内一阶可导,在 $x = x_0$ 处二阶可导,且 $f'(x_0) = 0$,$f''(x_0) \neq 0$,那么

① 若 $f''(x_0) > 0$,则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值;

② 若 $f''(x_0) < 0$,则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

21. 曲线凹凸性的判定

设函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内存在二阶导数.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$,则曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的;

(2) 如果在 (a,b) 内 $f''(x) < 0$,则曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 上是凸的.

22. 曲线的拐点

连续曲线凹与凸的分界点称为拐点,通过在该点两侧二阶导数是否异号来判断某点是否为拐点,注意在拐点处二阶导数可能为0,也可能不存在.

23. 曲线的渐近线

(1) 水平渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$),则称直线 $y = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

(2) 铅垂渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$),则称直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅垂渐近线.

第三章　一元函数积分学

1. 已知 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$,则 $F'(x) = f(x)$,$\int kf(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{k}{a}F(ax+b) + C(k \neq 0$,且 $a \neq 0)$.

积分运算与微分运算之间有如下的互逆关系:

(1) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$,或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$,或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$.

2. 基本积分公式

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$;

(2) $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$;

(4) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$;

(5) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$;

(6) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$;

(7) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$;

(8) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$;

(9) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$;

(10) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$;

(11) $\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$;

(12) $\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$;

(13) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$;

(14) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$;

(15) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$;

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$;

(17) $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2$;

(18) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C (a > 0)$;

(19) $\int \sqrt{a^2 - x^2} \mathrm{d}x = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C (a > 0)$;

(20) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$;

(21) $\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x = \int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$;

(22) $\int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x = \int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$.

3. 常用的凑微分的等式(a,b 为常数,$a \neq 0$)

$\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$;

$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\mathrm{d}(\sqrt{x})$;

$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln|x|)$;

$\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$;

$\sin x \mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$;

$\cos x \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$;

$\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$；　　$\csc^2 x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$；

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x) = -\mathrm{d}(\arccos x)$；　　$\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x) = -\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x)$.

4.分部积分法——常见积分形式及 u 和 $\mathrm{d}v$ 的选取方法

(1)$\int x^m \ln x\mathrm{d}x$，$\int x^m \arcsin x\mathrm{d}x$，$\int x^m \arctan x\mathrm{d}x$($m \neq -1$，$m$ 为整数)应使用分部积分法计算.一般地，设 $\mathrm{d}v = x^m\mathrm{d}x$，而被积表达式的其余部分设为 u；

(2)$\int x^n \sin ax\,\mathrm{d}x$，$\int x^n \cos ax\,\mathrm{d}x$，$\int x^n \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$($n>0$，$n$ 为正整数)应利用分部积分法计算.一般地，设 $u = x^n$，被积表达式的其余部分设为 $\mathrm{d}v$；

(3)$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$，$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$ 应利用分部积分法计算，其中 u，v 可任意选择.

5.定积分的性质

(1)当 $a = b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(2)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

(3)两个可积函数代数和的定积分等于定积分的代数和，即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4)被积函数中的常数因子可以提到积分号外，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k\text{ 为非零常数}).$$

(5)如果在$[a,b]$上，$f(x) = k$，则

$$\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(b-a).$$

(6)不论 a，b，c 的相对位置如何，总有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(7)如果在区间$[a,b]$上，$f(x) \geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad (a<b).$$

(8)如果在区间$[a,b]$上，$f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

(9)$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad (a<b)$.

(10)设 M 和 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的最大值与最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

(11)设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a).$$

6. $f(x)$ 为$[-a,a]$上的连续函数($a>0$)，则有
$$\begin{cases} ①\ \text{当函数 } f(x) \text{ 为奇函数时，} \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0; \\ ②\ \text{当函数 } f(x) \text{ 为偶函数时，} \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x. \end{cases}$$

库课 Cook Life 有趣 有料 有种

7. 牛顿-莱布尼兹公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

8. 变限积分的导数

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导，且

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x), x \in [a,b].$$

对变下限的积分$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，有

$$\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)' = -f(x).$$

设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，$\varphi(x)$ 为可导函数，则有

$$[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

$f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 均为可导函数，则有

$$[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t]' = f[\varphi_2(x)]\varphi'_2(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi'_1(x).$$

9. 定积分的应用

(1) 平面图形的面积

① 由曲线 $y = f(x)(f(x) \geqslant 0)$ 及直线 $x = a, x = b(a < b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

② 由上、下两条连续曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x)(f_2(x) \geqslant f_1(x))$ 及两条直线 $x = a, x = b(a < b)$ 所围成的平面图形，其面积微元为$\mathrm{d}A = [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x$，面积计算公式为

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

③ 由左、右两条连续曲线 $x = g_1(y), x = g_2(y)(g_2(y) \geqslant g_1(y))$ 及两条直线 $y = c, y = d(c < d)$ 所围成的平面图形，其面积微元$\mathrm{d}A = [g_2(y) - g_1(y)]\mathrm{d}y$，面积计算公式为

$$A = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]\mathrm{d}y.$$

(2) 旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b(a < b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所形成的立体(叫作旋转体)的体积

$$V = \int_a^b \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

曲线 $x = \psi(y)$，直线 $y = c, y = d(c < d)$ 与 y 轴所围曲边梯形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为

$$V = \int_c^d \pi x^2 \mathrm{d}y = \pi\int_c^d \psi^2(y)\mathrm{d}y.$$

一物体被垂直于 x 的平面所截获，在 x 处的截面积 $A(x)$ 是 x 的已知连续函数，则该物体介于 $x = a$ 和 $x = b(a < b)$ 之间的体积为

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

补充：$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}(n\text{ 为大于 1 的正奇数}),I_1=1,\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}(n\text{ 为正偶数}),I_0=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

第四章　多元函数微积分学初步

1. 一阶偏导数的定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

2. 多元复合函数的求导法

(1) 若 $z=f[u(t),v(t)]$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$；

(2) 若 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

3. 全微分公式

(1) 若 $z=f(x,y)$，则 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$；

(2) 若 $u=f(x,y,z)$，则 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$.

4. 隐函数求导公式

(1) 若隐函数 $F(x,y)=0$ 且 $F_y\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y};$$

(2) 若隐函数 $F(x,y,z)=0$ 且 $F_z\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

5. 二重积分的计算

(1) X-型区域

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) Y-型区域

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 极坐标情形

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

® 库课 Cook Life 有趣 有料 有种

6. 二重积分的性质

(1) 设 $a、b\in\mathbf{R}$，则 $\iint\limits_D[af(x,y)\pm bg(x,y)]\mathrm{d}\sigma=a\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm b\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(2) 设 $D=D_1\cup D_2$，且 $D_1\cap D_2=\varnothing$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 设 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M,(x,y)\in D$，则

$$mS_D\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant MS_D,$$

其中 S_D 为积分区域 D 的面积.

(4) 设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，S_D 是积分区域 D 的面积，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)S_D$.

特别地，当 $f(x,y)\equiv 1$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=S_D$.

(5) 二重积分对称性：① 设积分区域 D 关于 y 轴对称，D_1 是 D 的右半部分，若 $f(-x,y)=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$；若 $f(-x,y)=f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

② 设积分区域 D 关于 x 轴对称，D_1 是 D 的上半部分，若 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$；若 $f(x,-y)=f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

7. 求面积：$A=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

8. 求体积：$V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

第五章　常微分方程初步

1. 可分离变量的方程：$y'=f(x)g(y)$ 或 $M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}y+M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}x=0$.

两边同除以 $g(y)(g(y)\neq 0)$，把变量分离，并求积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int\frac{N_1(y)}{N_2(y)}\mathrm{d}y=-\int\frac{M_2(x)}{M_1(x)}\mathrm{d}x$.

2. 一阶齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的通解：

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

3. 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的通解为：

$$y=[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

4. 二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征根为 r_1,r_2，则其通解情况如下：

两个不等实根 r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta(\beta\neq 0)$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

第六章　常数项级数

1. 级数收敛的必要条件

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

2. 正项级数审敛法

(1) 比较审敛法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为正项级数，且 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，

① 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

② 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

(2) 比值审敛法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是一个正项级数，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，

$$\text{则}\begin{cases}\text{当 }\rho<1\text{ 时，} & \text{级数收敛；}\\ \text{当 }\rho>1(\text{或 }\rho=\infty)\text{ 时，} & \text{级数发散；}\\ \text{当 }\rho=1\text{ 时，} & \text{级数可能收敛，也可能发散.}\end{cases}$$

3. 常见级数的敛散性

(1) 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

(2) p - 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\begin{cases}\text{发散},p\leqslant 1,\\ \text{收敛},p>1.\end{cases}$

(3) 等比级数(也称几何级数)：

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

当 $|q|<1$ 时级数收敛于 $\dfrac{a}{1-q}$，当 $|q|\geqslant 1$ 时级数发散.