二叉搜索树和平衡树

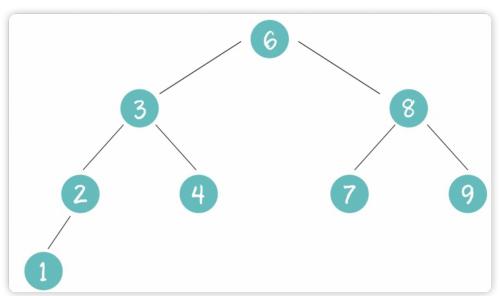
1. 二叉搜索树(BST)

二叉搜索树(Binary Search Tree),也有称之为二叉排序树、二叉查找树

1.1 定义和性质

在二叉树的基础上,增加了几个规则约束:

- 如果他的左子树不空,则左子树上所有结点的值均小于它的根结点的值。
- 若它的右子树不空,则右子树上所有结点的值均大于它的根结点的值。
- 它的左、右树又分为二叉排序树。



1.2 构建二叉排序树

假设有无序序列如下:

8 3 10 1 6 14 4 7 13

1.3 二叉搜索树的优势

- 二叉排序树的中序遍历,就是一个从小到大排好序的序列,但是查找时,完全没有必要先进行中序遍历生成一个有序的数组,再二分查找,直接根据二叉搜索树的约束直接操作。
- 查找时间最坏情况就是树的深度
- 二叉搜索树的查找逻辑,可以写成递归的思路和非递归思路。

```
BiTree SearchBST(BiTree T,KeyType key){
    //如果递归过程中 T 为空,则查找结果,返回NULL;或者查找成功,返回指向该关键字的指针
    if (!T || key==T->data) {
        return T;
    }else if(key<T->data){
        //递归遍历其左孩子
        return SearchBST(T->lchild, key);
    }else{
```

```
//递归遍历其右孩子
return SearchBST(T->rchild, key);
}
```

1.4 二叉搜索树的实现

1.4.1 二叉搜索树的插入操作

- 算法思想
 - 插入的新节点都是在叶节点位置
 - 寻找插入节点的位置,建立父节点和新节点的左右关系
 - 是一种递归思想
- 递归思路
 - 涉及到前后节点,子问题就是返回新节点,上一个状态就是左子树还是右子树来接收
- 递归核心代码

1.4.2 查找某一节点下的最大或最小值

- 算法思想
 - 比当前节点小的值,一定放在他的左子树上,那么一直往左查找最左边的节点,就是最小值
 - 比当前节点大的值,一定放在他的右子树上,那么一直往右查找最左边的节点,就是最大值
- 算法实现

1.4.2 二叉搜索树的删除操作

- 算法分析
 - 删除节点, 共有三种可能性:

叶子结点

- 叶子结点从二叉搜索树中移除后,并不影响其他结点的排列规则,直接删除
- 度为1的结点
- 该节点缺失左子树或右子树、当去掉这个节点后、剩余的左子树和右子树满足二叉搜索树的要求
- 矛盾在于删除的这个节点,属于父节点的左边还是右边,那么剩余的左子树或右子树仍然满足父节点的左右属性,接入这个父节点就可以

度为2的结点

- 假设要删除的节点A,他的后结点,既有大于他的也有小于他的,现在就是要选择一个节点B,满足左边节点都比B 小,右边节点都比B大。
- 其实就是中序遍历时,前一个节点或后一个节点来替换这个节点,然后删除前一个或后一个节点 先找到这个待删除结点的前一个或后一个,替换待删除结点

1234567

1234457

这个时候删除4就可以,而4一定是叶子结点,就又回到了叶子节点删除的逻辑

- 递归思路
- 二叉搜索树的删除请情况
 - 删除叶子节点,直接删除
 - 删除的节点有一个叶子节点,用叫子节点来替代
 - 删除的节点有两个子节点

- 找到前驱节点,复制前驱节点的值覆盖掉预备删除的节点,然后删除前驱节点
- 找到后继节点,复制后继节点的值覆盖掉预备删除的节点,然后删除后继节点

2. 二叉平衡树(AVL)

AVL树是最早被发明的自平衡二叉查找树。在AVL树中,任一节点对应的两棵子树的最大高度差的绝对值为1,因此它也被称为高度平衡树。AVL树是根据它的发明者G.M. Adelson-Velsky和E.M. Landis命名的。

查找、插入和删除在平均和最坏情况下的时间复杂度都是 O(logn) 。 增加和删除元素的操作则可能需要借由一次或多次树旋转,以实现树的重新平衡。

2.1 二叉搜索树的问题

- 二叉搜索树的查找效率取决于树的高度,因此保持树的高度最小,即可保证树的查找效率。
- 二叉搜索树会退化成单链表,搜索效率降低为O(n)
- 二叉搜索树一定程度上可以提高搜索效率,但是当原序列有序时,例如序列 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,构造二叉搜索树如图。依据此序列构造的二叉搜索树为右斜树,同时二叉树退化成单链表,搜索效率降低为 O(n)。
 - 二叉搜索树的查找效率取决于树的高度,因此保持树的高度最小,即可保证树的查找效率。

2.2 平衡因子

左子树与右子树的高度差即为该节点的平衡因子(BF,Balance Factor)

平衡二叉树中不存在平衡因子大于 1 的节点。

在一棵平衡二叉树中,节点的平衡因子只能取 0 、1 或者 -1 ,分别对应着左右子树等高,左子树比较高,右子树比较高。

2.3 平衡树失衡情况分析

2.3.1 左旋

● 当加入一个新节点后,右边的高度增加,导致失衡

```
/* 左旋操作
* px
* |
* x
* x
* / \
* lx y
* / \
* ly ry
* */
AVLNode *leftRotate(AVLNode *x);
```

2.3.2 右旋

```
/* 右旋操作
* py
* |
* y
* /
* x ry
```

```
* /\
* |x rx
* */
AVLNode *rightRotate(AVLNode *y);
```

2.3.3 LL、RR、LR、RL

- LL: 失衡节点左边高,新插入节点是在失衡节点左孩子的左边。直接对失衡节点进行右旋即可。
- RR: 失衡节点右边高,新插入节点是在失衡节点右孩子的右边。直接对失衡节点进行左旋即可。
- LR: 失衡节点左边高,新插入节点是在失衡节点左孩子的右边。先对左孩子进行左旋,再对失衡节点进行右旋。
- RL:失衡节点右边高,新插入节点是在失衡节点右孩子的左边。先对右孩子进行右旋,再对失衡节点进行左旋。

2.4 平衡二叉树的插入操作

- 算法思路
 - 先找到要插入的节点位置,插入新节点
 - 更新平衡因子,根据平衡因子小于-1和大于1的情况进行讨论

2.5平衡二叉树的删除操作

- 算法思路
 - 依据二叉排序树的删除特点,依然按照3种条件进行删除,保证最后删除的都是叶子节点即可。
 - 节点删除后,依次对节点进行平衡因子检查,若发现某节点不平衡,按照平衡调节法进行调节。