

拓扑排序

一、基本概念

1. 什么是有向无环图

2. 什么是活动

所有的工程或者某种流程都可以分为若干个小的工程或者阶段，我们称这些小的工程或阶段为“活动”。打个比方，如何把一只大象装到冰箱里，很简单，分三步。第一，打开冰箱门；第二，将大象装进去；第三，关上冰箱门。这三步中的每一步便是一个“活动”。

3. 什么是AOV网

在一个表示工程的有向图中，用顶点表示活动，用弧表示活动之间的优先关系的有向图称为顶点表示活动的网（Activity On Vertex Network），简称AOV网。

日常生活中，一项大的工程可以看作是由若干个子工程组成的集合，这些子工程之间必定存在一定的先后顺序，即某些子工程必须在其他的一些子工程完成后才能开始。

AOV网中的弧表示活动之间存在的某种制约关系，比如上面说到将大象装入冰箱，必须先打开冰箱门，才能将大象装进去，大象装进去才能关上冰箱门，从而完成我们的任务。还有一个经典的例子那就是选课，通常我们是学了C语言程序设计，才能学习数据结构，这里的制约关系就是课程之间的优先关系。

4. 什么是拓扑序列

设 $G=(V,E)$ 是一个具有 n 个顶点的有向图， V 中的顶点序列 $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ 满足若从顶点 V_i 到 V_j 有一条路径，则在顶点序列中顶点 V_i 必在顶点 V_j 之前。则我们称这样的顶点序列为一个拓扑序列。

5. 什么是拓扑排序

所谓的拓扑排序，其实就是对一个有向无环图构造拓扑序列的过程。

例如，一个项目包括A、B、C、D四个子部分来完成，并且A依赖于B和D，C依赖于D。现在要制定一个计划，写出A、B、C、D的执行顺序。这时，就可以利用到拓扑排序，它就是用来确定事物发生的顺序的。

在拓扑排序中，如果存在一条从顶点A到顶点B的路径，那么在排序结果中B出现在A的后面。

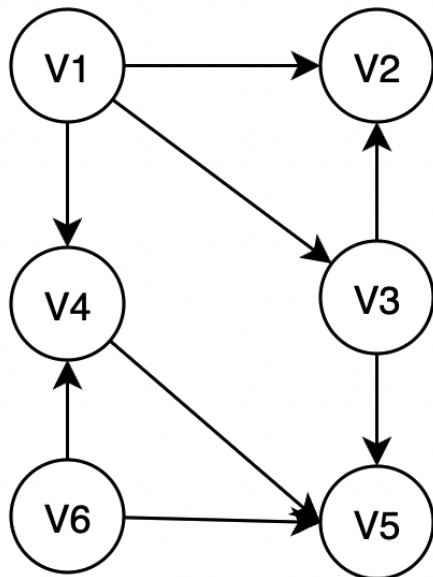
二、算法思想

拓扑排序的算法步骤很简单，就是两步：

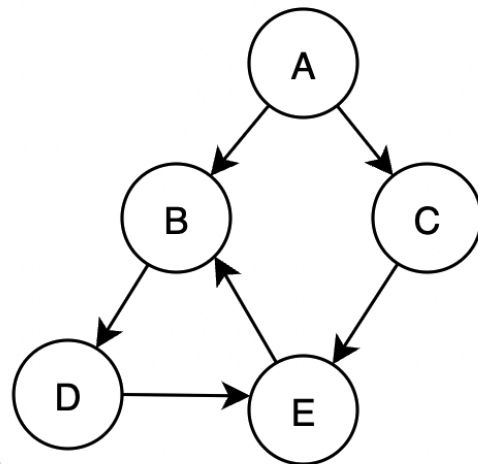
- (1) 在图中选择一个没有前驱的顶点 V ；
- (2) 从图中删除顶点 V 和所有以该顶点为尾的弧。

重复上述两步，直至全部顶点均已输出，或者当前图不存在无前驱的顶点为止，后一种情况说明有向图中存在环（面试时，判断一个有向图中是否存在环：在有向图中选择一个没有前驱的顶点并输出；发现当前图不存在无前驱的顶点，但拓扑序列中并未输出所有的顶点，所以剩下的顶点构成了环，也证明了该有向图存在环。）。

有向无环图



有向有环图



三、算法实现

我们采用邻接表作为有向图的存储结构，并且在头结点中增加一个存放顶点入度的数组（indegree）。入度为零的顶点即为没有前驱的顶点，删除顶点及以它为尾的弧的操作，则可换以弧头顶点的入度减1来实现。