花式围栏(fence)

考虑根据矩形的上边界来讨论。

如果上边界所在方格高度为 h，对于一段长度为 w 的方格，将会有 $h \times \dfrac{w(w+1)}{2}$ 种可能的矩形。

如果上边界所在方格高度为 $h_l \sim h_r$，如果这些对应的宽度均为 w，将会有 $\dfrac{(h_l+h_r)(h_r-h_l+1)}{2} \times \dfrac{w(w+1)}{2}$。

因此可以考虑分治。

找到最小的 h_i 最小的位置，$1 \sim h_i$ 这一段的宽度均为 $\sum w_i$，可以直接计算。然后对于 $h > h_i$ 的部分递归到左右两侧分别取处理。

时间复杂度 $O(n \log n)$。

双双决斗(duel)

如果没有修改，可以尝试维护 ST 表状物：记 $f_{i,k}$ 表示 $i \sim i+2^k-1$ 战斗的结果。

但是发现有修改某个 x 的时候，所有 $x \in [i, i+2^k-1]$ 的 $f_{i,k}$ 的值都会被影响，由于 $1+2+4+\cdots = O(n)$，所以会有 $O(n)$ 个 f 的值被影响到，无法直接保留修改。

因此考虑阈值分治：

- 对于 $2^k \le B$，维护 $f_{i,k}$，此时修改一个点会变化的 f 数量为 $O(B)$，可以直接保留修改。
- 对于 $2^k > B$，直接通过 f 取出前若干轮决斗的结果，后面的决斗过程直接暴力计算，时间复杂度 $O(\dfrac{n}{B})$。

取 $B = O(\sqrt{n})$，有最优时间复杂度 $O(n \log n + Q\sqrt{n})$ 。

最坏记者(reporter)

考虑树的情况怎么做：我们对于每一个点维护一个 DP 值 f_u，u 的子树内，不改变根节点的情况下，不被修改的点的权值和是多少。

转移为 $f_u = c_u + \max\limits_{S} \sum\limits_{v \in S} f_v$，其中 S 为满足 u 子树内，两两没有祖先后代关系，且 $c_v \ge c_u$ 的集合。

发现这个 DP 可以使用线段树合并优化转移。

考虑最后树上的那个环怎么处理：环上的点数字必然全部相同，只需要枚举改成环上某权值，或改成全局最小值的代价即可。时间复杂度 $O(n \log n)$。

ABC字符串 (abc)

我们尝试检验一个串 S 是否能够被分成 x 个 `ABC`，y 个 `BCA` 和 $n-x-y$ 个 `CAB`。

考虑进行一个不断循环移位的过程，例如将 $S_1S_2\ldots S_{3n}$ 变成 $S' = S_2S_3\ldots S_{3n}S_1$。如果有 S_1 为 `A`。如果 S 有满足上述条件的匹配，那么就意味着 S' 有 $x-1$ 个 `ABC`，$y+1$ 个 `BCA` 和 $n-x-y$ 个 `CAB` 的方案。如果 S_1 是 `B` 或 `C` 是类似的。

如果我们转上一圈，任何时刻 x, y, z 都没有被减少到负数，那么我们就大胆认为是有解的。而具体的构造方式，例如对于 `A` 来说，前 x 个用来匹配 `ABC`，中间 $n-x-y$ 个用来匹配 `CAB`，最后 y 个用来匹配 `BCA` 即可。

记 $pre_{i,A/B/C}$ 表示 S 的前 i 位中 `A/B/C` 的数量，那么发现只要有

$$\begin{cases} x \geq \max\limits_{i=1}^{3n}(pre_{i,A} - pre_{i,C}) \\ y \geq \max\limits_{i=1}^{3n}(pre_{i,B} - pre_{i,A}) \\ n - x - y \geq \max\limits_{i=1}^{3n}(pre_{i,C} - pre_{i,A}) \end{cases}$$

即可。

这样我们就可以 $O(n)$ 检验一个串是否存在某对 (x, y) 的构造了，我们依次记上面三个数为 A, B, C，那么现在在没有限制的时候取 $x = A, y = B$ 即可，那么合法只需要 $A + B + C \leq n$。

现在假设这个串有可以自由填入的 `?`，我们枚举 (x, y) 要检验其是否满足 $x = A, y = B$，我们维护 $f_{a,b,c,0/1,0/1}$ 表示当前处理过的前缀已经有 a 个 `A`，b 个 `B` 和 c 个 `C` 的方案数，同时检验其是否满足过 x 和 y 了，与此同时要时刻保证 $C \leq n - x - y$。

这个 DP 转移的复杂度是 $O(n^3)$ 的，加上枚举 x, y，复杂度就是 $O(n^5)$。