旅游

这个问题可以简单的归结为一次必须走两步的最短路问题。首先，考虑这样一种做法：对于图上的任意点 u，预处理出其到周围所有走两步能到达的点的最短距离，构造一张新图，从 u 向这些点连边，并赋予新的权值等于这个最短距离。但如果存在一个点的度数较大时（比如数量级接近 n），时间复杂度就会到达 $O(n^2)$。

观察到边的权值 w 其实很小，我们可以从此入手。对于原图中一次 a->b->c 的一次移动，可以认为是从 a 点出发**途径** b 点，然后**停留**了 c 点。对于原本的一个点 u 来说，可以将其拆成51个新的点 $u_0, u_1, \ldots, u_n$。其中 u_0 对应原图上**停留**在 u 点时的状态，$u_i (1 \le i \le 50)$ 对应原图上**途径** u 点的状态，其中下标 i 表示此次途径 b 点是来自一条权重为 i 的边。对于原图上一条连接了 u, v 并且权重为 w 的边来说，我们需要在新图上连接 u_i 和 v_0，边的权值 $(i+w)^2$，并且连接 u_0 和 v_w，边权为0。由于是无向图，反向还要做一遍。在新建的图上执行最短路算法，那么 $dist[u_0]$ 就是我们所求的每个最短路，时间复杂度 $O(w(n+m)logn)$。

超级邮递员

题目要求所有点之间最短路的值。观察题目容易得到 $2^i > 2^{i-1} + 2^{i-2} + \cdots + 1$，因此，对于第 i 条边，如果两个点之间能通过一些编号小于 i 的边到达的话，那么肯定比使用 i 更优。考虑这样一种贪心：首先处理第 n 条边，如果去掉该边之后图依旧连通，也就是对于当前图上任意两点之间都可以通过前 $n-1$ 条边到达，那么这条边一定是多余的，可以之间去掉；反之，我们就必须保留该点。接下来依次考虑 $n-2, n-3, \cdots, 1$，容易发现，这个贪心的过程其实就是等同于求最小生成树的过程。

因此直接在原图上建立最小生成树，显然两点之间的最短路变成两点之间的路径上边权的和。我们把邮局标记为黑点，信箱标记为白点，问题转换成了求一条边会被多少黑点和白点经过，在树上dfs统计黑白点个数算贡献即可。

哨兵侦察

对于两组情报 $(t_1, x_1), (t_2, x_2)$ 来说，假设这两组情报观测到的是同一个哨兵，需要满足以下两种情况之一：

1. $t_1 - x_1 = t_2 - x_2$，即这个哨兵在向正方向巡逻。
2. $t_1 + x_1 = t_2 + x_2$，即这个哨兵在向负方向巡逻。

那么对于一组情报来说，就存在两种可能的状态，要么是一个往正方向巡逻的哨兵，要么是一个往负方向巡逻的哨兵。考虑任意一组情报 (t_i, x_i)，构建两个点 $t_i + x_i$ 以及 $t_i - x_i$，并连接这两个点，这条边对应这一组情报，两个点分别代表正方向和负方向两个状态。由此我们可以得到一张含有 n 条边的二分图，这张图的最小点覆盖即是我们需要求的答案。由于二分图最小点覆盖数等于最大匹配数，在这张图上做一次二分图匹配即可，时间复杂度 $O(n\sqrt{n})$。

薪水

由于题目要求的是权值之间的按位与，并且**期望的和等于和的期望**，可以考虑拆位，把原图拆成31个图，边的权值为0或1，对应二进制上的一位。我们只需考虑每一位的结果，最后求和即可。

现在枚举二进制上的每一位 i，对于每一条边来说，只有当其权值的二进制上第 i 位是1时，才会产生贡献（如果是0的话会在执行按位与时全变成0），因此对于这张新图，只保留所有权值第 i 位是1的边。在这张新图上，每个生成树都会对答案整体产生 $\frac{2^i}{sum}$ 的贡献，其中 sum 是原图中生成树的个数。因此我们需要使用矩阵树定理计算这些图的生成树个数，时间复杂度 $O(n^3logw)$。