NOIP 模拟赛题解

cz_xuyixuan

September 1, 2022

1 欧几里得

首先，棋子始终向一个方向移动的情况是容易判断与解决的，先将其处理掉。

在剩余情况中，棋子至少转变了一次方向，因此，其落点应位于 $[T-X, T+Y)$ 中。

令棋子总共向左移动了 A 次，则其最终的落点应为

$$S - A \times X + (N - A) \times Y = S + N \times Y - (X + Y) \times A.$$

无论 A 取何值，这一落点对 $X+Y$ 取模的结果不会改变。而区间 $[T-X, T+Y)$ 中的位置对于 $X+Y$ 取模的结果两两不同。由此，我们便可唯一确定落点的位置。

时间复杂度 $O(T)$，若采用快速乘避免乘法溢出，则时间复杂度为 $O(T\log V)$。

2 积性函数

由 $F(x)$ 的定义，不难写出

$$F(x) = \frac{(x!)^{x+1}}{\left(\prod_{i=1}^{x} i!\right)^2}.$$

注意到 $F(x)$ 的质因子均在 x 以内，可以首先计算其质因子分解

$$F(x) = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \cdots \times p_n^{k_n}.$$

则 $G(x)$ 可由如下公式计算

$$G(x) = \left(\sum_{i=0}^{k_1} p_1^i\right) \times \left(\sum_{i=0}^{k_2} p_2^i\right) \times \cdots \times \left(\sum_{i=0}^{k_n} p_n^i\right).$$

由于我们需要对全部的 $x = 1, 2, \ldots, N$ 求出 $F(x)$，可以考虑枚举 N 以内的质数 p，然后对于每一个 x，求出 $F(x)$ 中 p 的指数，进而统计质数 p 在 $G(x)$ 中的贡献。

N 以内的质数个数是 $O\left(\frac{N}{\log N}\right)$ 的，统计贡献的过程是 $O(N\log_p N)$ 的。

总时间复杂度为 $o(N^2)$，此处的 o 为小写欧。

3 容斥原理

若序列中的第一个数与第二个数不同，那么交换它们一定可以得到另一个方案。由于只需要计算答案对 2 取模的结果，我们可以考虑不统计第一个数与第二个数不同的方案。由此，我们可以将第一、第二个数合并为一个大小为 2 的元素。

类似地，如果仍然存在两个大小为 2 的元素，便可以进而将它们合并为一个大小为 4 的元素。由此，所有元素的大小将会是 2 的次幂。并且，序列中最终剩余的元素个数仅为 $O(\log M)$ 。将输入的各数用二进制表示，用数位 DP 处理答案即可。

转移可以使用 $\boxed{\text{bitset}}$ 压位进行优化。

时间复杂度 $O\left(A\log V+\frac{A\times N\log V}{w}\right)$ 。

4 树上开花

考虑在原树的每条边处新插入一个点，使得 x 变为偶数。

引理：集合 S 是合法的，当且仅当存在点 p ，满足 p 到 S 中各点的距离均 $\leq \frac{x}{2}$ 。

证明：充分性显然。对于任意合法集合，取 p 为其直径的中点可保证满足该条件。

并且，我们进而可以发现，对于一个合法集合 S ，满足条件的 p 构成了树上的一个连通块。因此，可以考虑使用“点数减边数”的方式对连通块进行容斥，计算答案。

我们希望对于树上的每一个点计算出 v_i ，表示与其距离在 $\frac{x}{2}$ 以内的点的个数；对于树上的每一条边计算出 e_i ，表示与其两个端点距离均在 $\frac{x}{2}$ 以内的点的个数。

则答案为

$$Ans_i=\sum_{j\in V}\binom{v_j}{i}-\sum_{j\in E}\binom{e_j}{i}.$$

可以使用 NTT 快速计算。e_i,v_i 可以使用点分治计算。

时间复杂度 $O(N\log N)$ 。