序列(mex)

显然由 $\text{mex}(\{A_1, A_2 \dots A_N\}) \le N$。

因此，如果 $M \ge N$，那么在 $S_i = 1$ 的时候 A_i 必然有且仅有一种选择，在 $S_i = 0$ 的时候有 M 种选择。答案就是 $M^{\sum [S_i = 0]}$。

在 $M \le N$ 的时候，$S_i = 1$ 时可能由于 $\text{mex}(\{A_1, A_2, \dots A_{i-1}\}) > M$ 而爆掉，因此需要记录 $A_1 \sim A_{i-1}$ 一共占用了多少个位置。

记 $dp_{i,j}$ 表示填了前 i 个数，占用了 $0 \sim M$ 中的 j 个数的方案数。

那么就有转移：$dp_{i,j} = \begin{cases} dp_{i-1,j-1} & , S_i = 1 \\ j \times dp_{i-1,j} + (M - j) \times dp_{i-1,j-1} & , S_i = 0 \end{cases}$。

时间复杂度 $O(NM)$。

淘金(gold)

$f(x)$ 只会存在因子 $2, 3, 5, 7$。而由于数码只有 12 位，因此有 $2, 3, 5, 7$ 分别至多只有 $36, 24, 12, 12$ 个。

考虑数位DP，记 $f_{i,a,b,c,d}$ 表示已经处理了最高的 i 位，后面的位可以任选（没有 N 限制），当前乘积等于 $2^a 3^b 5^c 7^d$ 的方案数。

最后会得到若干个二元组 (cnt, val)，表示最终乘积等于 val 的有 cnt 个。

而对于在坐标 (val_1, val_2) 的数，就有 $cnt_1 \times cnt_2$ 个。

这是一个经典的贪心问题：将所有 (cnt, val) 对按照从小到大的顺序排序。

那么如果选取 (val_i, val_j) 只有当 $\begin{cases} (val_i, val_{j-1}) & , j \ne 1 \\ (val_{i-1}, val_j) & , j = 1 \end{cases}$ 被选取了之后才有可能。

初始的时候选取 (val_1, val_1)，每当选取了 (val_i, val_j) 的时候，将 (val_i, val_{j+1}) 加入；如果 $j = 1$，还需将 (val_{i+1}, val_j) 加入。

使用堆维护，时间复杂度 $O(K \log K)$。

最古的遗迹(ruin)

显然 N 次地震之后必然无法再发生地震，所以可以将 N 次看作是无数次，而每一次石柱是否变化都是与后缀有关的，所以考虑从后往前考虑。

如果一个位置的柱子的高度会从 h_i 变为 0，说明后缀种已经出现过了高度为 $1 \sim h_i$ 的柱子至少一个。

设计 DP $f_{i,j}$ 表示后 i 个柱子，出现了高度为 $1 \sim j$ 的固定的柱子，而没有出现高度为 $j + 1$ 的柱子。

前面已经有 c_0 个柱子消失了，还有 c_1 个柱子存在。

如果当前位置的柱子消失了，必然有 $h_i \le j$，而只剩下 $j - c_0$ 个可选。

如果当前位置的柱子没有消失，则要么 $h_i = j + 1$ 要么 $h_i > j + 1$，对于第二种情况，我们不好确定 h_i 的选择，所以我们先不计算贡献。

对于 $h_i=j+1$ 它可能也同时激活了，前面某些 $h_{i'}>j+1$ 的柱子，构成了连续段，我们假设拓展到了 k，我们记需要再前面 c_1-j 个没有确定的存在柱子中选择 $k-j-1$ 个，而当前柱子可能是从 $j+1\sim k$ 中的任何一个位置降到 $j+1$ 的，也就是有 $k-j+1$ 中选择。然后就是剩下的那些柱子的排布，这个可以用另一个 DP 预处理出来。

时间复杂度 $O(n^3)$。

末日魔法少女计划(matrix)

可以将 $A_{i,j}=1$ 看作拥有区间信息 $[i,j)$，要求构造最少的区间信息，使得任何区间 $[l,r)$ 都可以被最多 k 个已知区间的加和表示。

考虑 $k=2$ 的时候，就是要构建猫树。找到一个中点 mid，所有的点都向这个点连边，然后递归到左右子树去处理。

这启发我们在 $k>2$ 的时候也去搜索这样的结构，但是二叉的树就不一定优了，所以考虑 b 叉的数。

具体的，我们选择 b 个节点为关键节点，将这 b 个点之间递归距离为 $k-2$ 的子问题，然后这 b 个节点分成的每一个区间都向左右端点连满边。每一个部分递归处理。

根据直觉，发现选择 b 个点，那么中间的 $b-1$ 块应该是均匀的，同时最左和最右的两个块也应该是均匀的，所以考虑设计如下 DP：

$f_{n,k}$ 表示 n 个节点，两两距离 $\le k$ 至少需要多少个信息。

$g_{n,k}$ 表示构造 b 叉树及其内部的 b 个块至少需要多少个信息。

为了方便处理，记中间变量 $f'_{n,k}=f_{n,k}+n$ 以及 $f''_{n,k}=f_{n,k}+2n$。

可以得到如下转移：

$$f_{n,k}=\min_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\{g_{n-2i,k}+2f'_{i,k}\}$$

$$g_{n,k}=\min_{b}\{f_{b,k-2}+(b-1-((n-b)\mod(b-1))(f''_{\lfloor\frac{n-b}{b-1}\rfloor}k)+((n-b)\mod(b-1)(f''_{\lfloor\frac{n-b}{b-1}\rfloor+1}k)\}$$

需要特殊处理 $k\le 2$ 或者 $n=1$ 的一些 corner case，时间复杂度是 $O(n^2k)$ 的，发现刚好可以满足题目要求的限制。