Solution

基础排列练习题

对于每个置换环分析，注意到每个置换环操作之后环长保持不变。

因此一个必要条件是，p, q环长构成的可重集相同。

下面给出构造，来证明这是一个充要条件。

我们把长度相同的置换环两两匹配。

$(a_1, a_2, \ldots a_k)$

$(b_1, b_2, \ldots b_k)$

我们另$h_{b_i} = a_i$。

不难验证这样的排列h满足条件。

基础图论练习题

我们证明对于一个联通块，答案是 边数/2。

证明的话，可以取一个dfs树，这样的话图中没有横叉边。

dfs的时候我们从下往上贪心匹配，dfs到一个点的时候根据奇偶性判断用或者不用他和他父亲的边，最后只会剩下0或1条边，自然取到的答案的上界。

由于不需要构造方案，我们只用一个并查集就可以维护答案。

基础数论练习题

记$v_p(x)$为x中p的次数($v_p(0) = \infty$)，$Prime_i$为第i个质数，$\pi(n)$为n以内质数个数，$b_i = v_{Prime_i}(m)$。

考虑$min - max$容斥。令E_i为第一次出现$v_{Prime_i}(x) \leq v_{Prime_i}(m) = b_i$的期望时间。

那么答案为$max\{E_i\}$。

由$min - max$容斥，我们知道

$$max\{E_i\} = \sum_{S \neq \emptyset, S \subseteq \{1,2,..,\pi(n)\}} min_{i \in S}\{E_i\}(-1)^{|S|+1}$$

对于$min_{i \in S}\{E_i\}$我们记$P = \prod_{x \in S} Prime_i^{b_i+1}$可以算出来它是$\frac{n/P}{n-n/P}$，它只和$n/P$有关，因此只有$O(\sqrt{n})$个取值。

现在我们假设$M = 1$，那么对于P容斥系数就是$-\mu(P)$。

我们可以得到答案为$1 + \sum_{i=2}^{n} -\mu(i) * \frac{n/i}{n-n/i}$(注意从2开始)。可以用先对后部分整除分块，再用杜教筛算出μ的前缀和。

通过类比我们得到新的容斥系数$\mu' = \mu * \prod_{i=1}^{w}(1 - p_i^{a_i+1})/(1 - p_i)$。

我们先用杜教筛算出$S(x) = \sum_{i=1}^{n/x} \mu(i)$注意只有$O(\sqrt{n})$种不同的$S(x)$。

然后我们可以花费$O(\sqrt{n})$的代价将其乘或除一个单项式。

最后整除分块时就可以快速得到一个区间的容斥系数和了。

总时间复杂度为$O(n^{2/3}+(\log mod+w)\sqrt{n})$。

基础NPC练习题

测试点$1,2$

我们直接构造或者爆搜。

测试点3

使用调整法可以通过，令估价函数为同色三角形个数。

测试点$4,5$

使用往往调整法由于搜索空间太大不一定能跑出优秀的答案。

但是我们通过观察发现最优解往往满足某种对称性，如果令下标差相同的点对之间的边颜色相同往往能跑出比较优的解。

接下来我们强制让下标差相同的点对边颜色相同，令c_i表示下标差为i点对之间边的颜色。

我们在这个限制的基础上跑调整法，能跑出比较高的分数，但还是不够。

通过观察还能发现，在较优的解中c_i往往与c_{n-i}相同。我们再加上这个限制，跑调整法大概就能跑出和std差不多的大小了。

测试点6

按照上述做法调整的话由于n很大，导致解空间太大了，不太能跑出较优的答案。

于是我们考虑从$k=5$的解上进行构造。

令$n'=3n-1$

$$\begin{cases} c'_i=c_i(1\le i<n) \\ c'_i=5(n\le i<2n) \\ c'_i=c_{i-(2n-1)}(2n\le i\le 3n-2) \end{cases}$$

不难发现其满足条件。

std的一些细节：

- 调整法是随机一个位置，枚举它改变后的颜色，选择一个最优的颜色（如果有多个相同的优的就随机选一个）改过去。
- 如果调整了很久但是估价函数没有减少，就要break重新随初始状态。

由于出题人水平有限，如果有其他高妙的做法欢迎讨论交流。