完全平方数

> 质数，异或线性基

只考虑最终的乘积是否是完全平方数，因此可以将 a_i 中的所有的平方因子除去。

同时不同的质数之间数独立的，那么对于某一个质数 p。在去掉所有的平方因子之后，只剩下 p^0 和 p^1 两种可能。如果在运算的过程之中仍然保持去除所有的平方因子，那么就是对质数的指数做异或操作。

≤ 70 的质数一共有 19 个，因此每一个数的每一个质因子的指数对于一个 $[0,2^{19})$ 内的数。而题目所求就是有多少种子集异或和为 0。

先建出着 n 个数对应的异或线性基，那么不在线性基内的所有元素，它们任意的线性组合得到的结果，都可以**唯一**对应一个线性基内元素的线性组合，使得最终的异或和为 0。

假设线性基内元素的数量为 k，则最终答案不在线性基内元素任选的方案数，即为 $2^{n-k}-1$，其中的 -1 是要去掉所有元素都不选择的那组方案。

最大公约数

> 莫比乌斯反演，整除分块

对于 $a\le x\le b$，$c\le y\le d$ 的限制，可以通过差分变成 $1\le x\le a$，$1\le y\le b$ 的形式。

也就是要求 $\sum\limits_{x=1}^{n}\sum\limits_{y=1}^{m}[\gcd(x,y)=k]$，发现既然有 $\gcd(x,y)=k$，那么说明 $k|x$，$k|y$，不妨将让 x,y 均除掉 k，也就是要求 $\sum\limits_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum\limits_{y=1}^{\lfloor\frac{m}{k}\rfloor}[\gcd(x,y)=1]$ 的值。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=1] &= \sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[d|i\land d|j]\\
&= \sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}1\\
&= \sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor
\end{aligned}
$$

预处理出 $\mu(d)$ 的前缀和，最终得到的式子可以通过整除分块快速求解。

时间复杂度 $O(n\sqrt{\min(b,d)})$。

组合数

> 组合数，斯特林数，下降幂

对于多项式 $f(k)$，肯定是要尝试将其拆开的。也就是单独考虑 k^a 的问题。

但是 k^a 和 $\dbinom{n}{k}$ 这个组合数并不搭，所以考虑找到和 $\dbinom{n}{k}$ 更搭配的形式：下降幂。

考虑如何求解：$\sum\limits_{k=0}^{n}k^{\underline{i}}x^k\dbinom{n}{k}$。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{i}} x^k \binom{n}{k} &= i! \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{k}{i} \binom{n}{k} \\
&= i! \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} \\
&= n^{\underline{i}} x^i \sum_{k=i}^{n} \binom{n-i}{k-i} x^{k-1} \\
&= n^{\underline{i}} x^i (x+1)^{n-i}
\end{aligned}
$$

加入 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^{\underline{i}}$，那么就有 $\text{原式}=\sum\limits_{i=0}^{m} b_i n^{\underline{i}} x^i (x+1)^{n-i}$。

现在唯一的问题就是 b_i 的值为多少。

根据下降幂转普通幂：$x^n=\sum\limits_{i=0}^{n} {n \brace i} x^{\underline{i}}$。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i} {i \brace j} x^{\underline{j}} \\
&= \sum_{i=0}^{m} x^{\underline{i}} \sum_{j=i} {j \brace i} a_j
\end{aligned}
$$

也就是 $b_i=\sum\limits_{j=i}^{m} {j \brace i} a_j$。

$O(m^2)$ 预处理斯特林数以及求解 b_i，后面的式子 $O(m\log n)$ 计算。总时间复杂度 $O(m^2)$。

最小公倍数

> gcd-lcm 容斥（min-max 容斥），欧拉定理，数论分块

> 为了方便表示，在部分位置将用 $\operatorname{pow}(a,b)$ 来代替 a^b。

记 $S=\{1,2,3,\dots K\}$，发现 lcm 并不是什么好求的东西，所以考虑转成 $\gcd$ 取处理：

$$
\begin{aligned}
\prod_{i_1,i_2\dots i_K\in[1,N]} \operatorname{lcm}(i_1,i_2\dots i_K) &= \prod_{i_1,i_2\dots i_K\in[1,N]} \prod_{T\subseteq S} \gcd_{j\in T}(i_j)^{(-1)^{|T|-1}} \\
&= \prod_{T\subseteq S} \operatorname{pow}\Big(\prod_{i_1,i_2\dots i_{|T|}\in[1,N]} \gcd_{j=1}^{N}(i_j)^{(-1)^{|T|-1}}, N^{K-|T|}\Big)
\end{aligned}
$$

先考虑后面的一部分怎么求解，也就是：$\prod\limits_{i_1,i_2\dots i_t\in[1,N]} \gcd(i_1,i_2\dots i_t)$。

$$
\begin{aligned}
\prod_{i_1,i_2\ldots i_t\in[1,N]}\gcd(i_1,i_2\ldots i_t) &= \prod_{k=1}^{N}\mathrm{pow}(k,\sum_{i_1,i_2\ldots i_t\in[1,N]}[\gcd(i_1,i_2\ldots i_n)=k]) \\
&= \prod_{k=1}^{N}\mathrm{pow}(k,\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{kd}\right\rfloor^t) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\prod_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\mathrm{pow}(k,\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{kd}\right\rfloor^t) \\
&= \prod_{D=1}^{n}\mathrm{pow}(\prod_{d|D}d^{\mu(\frac{D}{d})},\left\lfloor\frac{n}{D}\right\rfloor^t)
\end{aligned}
$$

现在将这一部分代回原式。

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \prod_{T\subseteq S}\mathrm{pow}(\prod_{D=1}^{n}\mathrm{pow}(\prod_{d|D}d^{\mu(\frac{D}{d})},\left\lfloor\frac{n}{D}\right\rfloor^{|T|})^{(-1)^{|T|-1}},N^{K-|T|}) \\
&= \prod_{T\in S}^{n}\prod_{D=1}^{N}\mathrm{pow}(\prod_{d|D}d^{\mu(\frac{D}{d})},\left\lfloor\frac{n}{D}\right\rfloor^{|T|}\times(-1)^{|T|-1}\times N^{K-|T|}) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\prod_{D=1}^{N}\mathrm{pow}(\prod_{d|D}d^{\mu(\frac{D}{d})},\left\lfloor\frac{n}{D}\right\rfloor^{i}\times(-1)^{i-1}\times N^{K-i}\times\binom{n}{i}) \\
&= \prod_{D=1}^{N}\mathrm{pow}(\prod_{d|D}d^{\mu(\frac{D}{d})},\sum_{i=1}^{N}\left\lfloor\frac{n}{D}\right\rfloor^{i}\times(-1)^{i-1}\times N^{K-i}\times\binom{n}{i})
\end{aligned}
$$

将指数的部分单独拿出来看一下：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\left\lfloor\frac{N}{D}\right\rfloor^{i}\times(-1)^{i-1}\times N^{K-i}\times\binom{n}{i} &= N^K-\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}N^{K-i}\times\left(-\left\lfloor\frac{N}{D}\right\rfloor\right)^i \\
&= N^K-\left(N-\left\lfloor\frac{N}{D}\right\rfloor\right)^K
\end{aligned}
$$

将这一部分代回原式：

$$
\text{原式}=\prod_{D=1}^{N}\mathrm{pow}(\prod_{d|D}d^{\mu(\frac{D}{d})},N^K-(N-\lfloor\tfrac{N}{D}\rfloor)^K)
$$

对于 $D=1,2\ldots N$ 的所有 $\prod\limits_{d|D}d^{\mu(\frac{D}{d})}$ 及其前缀积，可以直接通过枚举因子预处理，时间复杂度 $O(N\log N)$。

求积式可以通过数论分块来求解，时间复杂度 $O(\sqrt{N}\log Mod)$。

由于答案对 $Mod=998244353$ 取模，而 K 仅在指数的指数上出现，则根据欧拉定理，可以令其对 $P=\varphi(\varphi(998244353))=3\times2^{27}$ 进行一定的处理：

如果 $K\le P$，不做修改；如果 $K>P$，令 $K\leftarrow(K\bmod P)+P$。

总时间复杂度 $O(N\log N+T\sqrt{N}\log Mod)$。