

分类号: TP274.5

密 级: 公开

UDC:                     

单位代码: 10142

沈阳工业大学  
**硕士学位论文**

基于压缩感知的磁共振重建算法研究



学 号: 201710244

作 者: 刘鹏

学 科 名 称: 生物医学工程

**2020 年 7 月 1 日**

# 沈阳工业大学硕士学位论文

## 基于压缩感知的磁共振重建算法研究

### Research On Magnetic Resonance Reconstruction Algorithm Based On Compressed Sensing

作 者: 刘鹏 单位: 电气工程学院  
指 导 教 师: 郭红宇 副教授 单位: 沈阳工业大学  
协助指导教师:                      单位:                       
                     单位:                     

论文答辩日期: 2020 年 6 月 20 日

学位授予单位: 沈 阳 工 业 大 学



## 摘要

磁共振成像设备(Magnetic Resonance Imaging: MRI)是一种重要的现代医学诊断系统,在临床疾病诊断中得到了广泛使用。但是由于其扫描时间相对较长,使得被扫描者在扫描期间更容易发生运动,影响图像质量。同时扫描速度也限制了其在一些特殊临床场景,比如心脏扫描,多动态增强扫描下的应用。并行成像和压缩感知是两种提高扫描速度的代表性技术。并行成像技术利用了多通道线圈,而压缩感知利用了信号在某些变换域的稀疏特性,通过采集比传统方法少的多的  $K$  空间点,进而提高扫描速度。因此,如何将并行成像和压缩感知结合起来,提供一种有效的重建算法,在保证图像质量和分辨率的前提下,进一步提高扫描速度成为磁共振领域的研究难点。

本文主要研究了如何将压缩感知的算法更好地与并行成像算法结合,用于提高磁共振扫描速度。自校准并行成像 SPIRiT 方法是在自动校准部分并行采集 GRAPPA 算法的基础上提出来的,它显式利用多通道线圈敏感度,将并行成像重建方法转换为一个非线性优化问题。本文以 SPIRiT 重建算法为基础进行了一系列研究和改进。首先,在数据保真度的约束条件下,将图像变换到稀疏域,对稀疏变换后的图像求取  $l_1$  范数的最小值,对不同欠采样的磁共振数据进行了重建。其次,为了提高 SPIRiT 算法的重建质量,对传统的吉洪诺夫正则化的 SPIRiT 进行了改进。将传统 SPIRiT 的吉洪诺夫正则项变为  $l_1$  范数正则化,结果表明改进的 SPIRiT 算法的重建图像质量好于传统的 SPIRiT,能明显减少伪影,同时鲁棒性更高。最后,将压缩感知和并行成像结合,在改进的 SPIRiT 算法的基础上又引入总变分 (Total Variation: TV) 正则化。为了解决这个含有两个非光滑项的求解问题,本文提出一种基于原始-对偶框架的凸优化迭代算法。该算法通过同时求解原始优化问题及其对偶问题,解决了含有多个非光滑项的问题,通过迭代实现了图像的重建。

本文使用多组人体扫描数据对新提出的算法进行了验证。结果证明,使用本文提出的压缩感知并行成像算法能够得到信噪比更高的图像,同时能减少重建伪影,很大的提高了重建图像质量。

**关键词:** 磁共振, 并行成像, 压缩感知, 正则化, 原始-对偶框架

## Abstract

Magnetic resonance imaging equipment (Magnetic Resonance Imaging, MRI) is an important modern medical diagnosis system, which has been widely used in clinical disease diagnosis. However, due to its relatively long scanning time, the patient is more prone to movement during scanning, which affects the image quality. At the same time, the scanning speed also limits its application in some special clinical scenarios, such as cardiac scanning and multi-dynamic enhanced scanning. Parallel imaging and compressed sensing are two representative technologies to increase the scanning speed. Parallel imaging technology uses multi-channel coils to speed scanning. Compressed sensing takes advantage of the sparse nature of the signal in certain transform domains to collect fewer K-space points than traditional methods. And so the scanning speed is increased greatly. Therefore, how to combine parallel imaging and compressed sensing to provide an effective reconstruction algorithm, and on the premise of ensuring image quality and resolution, further increase the scanning speed has become a research difficulty in the field of magnetic resonance.

This thesis mainly studies how to combine the compressed sensing algorithm with the parallel imaging algorithm to improve the speed of magnetic resonance scanning. The self-calibration parallel imaging method SPIRiT is a novel parallel acquisition algorithm based on the general automatic calibration part parallel acquisition algorithm GRAPPA, which explicitly uses the multi-channel coil sensitivity to convert the parallel imaging reconstruction method into a nonlinear optimization problem. This thesis has conducted a series of studies based on the SPIRiT reconstruction framework. First, under the constraints of data fidelity, the image is transformed into a sparse domain, the minimum value of the  $l_1$ -norm is obtained for the sparsely transformed image, and a reconstructed image of undersampling magnetic resonance data is reconstructed. Secondly, in order to improve the reconstruction quality of the SPIRiT framework, the traditional Tikhonov regularized SPIRiT is improved. The traditional Tikhonov regularization term in SPIRiT is changed to the  $l_1$ -norm regularization. The results show that the improved SPIRiT algorithm has better reconstructed image quality than the traditional SPIRiT. It can significantly reduce artifacts, and is more robust. Finally, combining compressed sensing and parallel imaging, a total variation (TV) regularization is added to the improved

SPIRiT framework. In order to solve the problem with two non-smooth terms, the thesis proposes a convex optimization iterative algorithm based on primal-dual frame. The algorithm solves the problem with multiple non-smooth terms by simultaneously solving the original optimization problem and its dual problem. So the image reconstruction can be realized by iteration.

The results prove that images with higher signal-to-noise ratio and lower reconstruction artifacts can be obtained by using the compressed sensing combined with parallel imaging algorithm proposed in this thesis. So the reconstruction image quality can be greatly improved.

**Key Words:** Magnetic Resonance, Parallel Imaging, Compressed Sensing, Regularization, Primordial - Dual Frame

# 目录

摘要.....	I
Abstract .....	II
第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景和意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.3 论文创新点及结构安排.....	4
1.3.1 论文创新点.....	4
1.3.2 论文内容及结构安排.....	4
第 2 章 磁共振成像原理.....	6
2.1 磁共振成像的理论基础.....	6
2.1.1 原子核的磁性.....	6
2.1.2 磁共振现象.....	8
2.1.3 弛豫和弛豫时间.....	8
2.1.4 磁共振信号的检测.....	9
2.2 磁共振图像重建原理.....	10
2.2.1 磁共振成像的空间定位.....	10
2.2.2 K 空间.....	12
2.3 本章小结.....	12
第 3 章 压缩感知理论及在磁共振中的应用 .....	13
3.1 信号的稀疏表示 .....	13
3.2 压缩观测 .....	13
3.2.1 随机矩阵.....	14
3.2.2 确定性矩阵.....	14
3.3 重建算法 .....	15
3.3.1 基追踪法.....	16
3.3.2 匹配追踪法.....	16
3.3.3 正交匹配追踪法.....	16
3.4 压缩感知在磁共振中的应用.....	17

3.4.1 K 空间的欠采样填充轨迹.....	17
3.4.2 基于压缩感知的 MRI 成像过程.....	18
3.5 本章小结.....	23
第 4 章 改进的 SPIRiT 算法.....	24
4.1 从 GRAPPA 到 SPIRiT.....	24
4.1.1 GRAPPA 原理.....	24
4.1.2 SPIRiT 原理.....	25
4.2 改进的 SPIRiT 算法.....	27
4.2.1 RSPiRiT 算法的原理.....	27
4.3 算法验证与结果分析.....	29
4.3.1 验证方法.....	29
4.3.2 结果分析.....	30
4.4 本章小结.....	31
第 5 章 基于压缩感知和并行成像的新模型.....	32
5.1 压缩感知与 RSPiRiT 的结合.....	32
5.2 算法验证与结果分析.....	34
5.2.1 验证方法.....	34
5.2.2 结果分析.....	34
5.3 本章小结.....	36
第 6 章 总结.....	37
参考文献.....	39
在学研究成果.....	42
致谢.....	43



# 第 1 章 绪论

## 1.1 研究背景和意义

磁共振成像 (MRI) 是一种非侵入性的成像方法, 在临床放射学和生物医学研究中都有广泛的应用, 特别是在一些高级临床神经技术中都得到了应用, 比如大脑激活的功能性 MRI (fMRI) 和白质结构的二维张量成像 (DTI)。但是 MRI 的一个较大的缺点是图像获取时间长, 尤其在此类高级临床应用中由于所需要的信息通常比传统应用所需的信息多得多, 因此图像获取时间更长, 所以提高 MRI 成像速度的需求更加紧迫。

近十多年, 大量研究者提出很多提高磁共振成像速度的方法。并行成像是其中一种最主流的方法。并行成像是通过同时使用多个接收线圈来加速 MRI 的技术, 它是在磁共振成像中引入相控阵接收线圈后被提出的一种革新技术。随着空间谐波同步采集技术 (SMASH)<sup>[1-3]</sup> 和灵敏度编码技术 (SENSE)<sup>[4]</sup> 的引入, 并行成像在临床上的应用得到了迅速的发展。

并行成像过程中, 采集得到部分采样的数据后需要采用必要的并行重建算法从全部线圈收集的 K 空间数据中正确重建出非卷叠图像。从部分采样 K 空间中正确重建出非卷叠图像有两种方法: 一种是可以对未采样的 K 空间位置点的数据进行插值, 近似得到整个 K 空间的数据, 然后通过逆傅里叶变换重建出图像。另一种方法是可以直接从部分采样的 K 空间扫描中恢复图像。因此, 相对应的有两种广泛使用的方法可以从多线圈采样数据重建 MR 图像。一种方法是频域方法。频域方法通过内插未采样的 K 空间数据点, 再进行逆傅立叶变换从而重建出图像。频域方法有 SMASH 方法和 GRAPPA<sup>[5]</sup> 方法两大类。SMASH 方法及其派生<sup>[2, 3]</sup> 使用来自所有线圈的灵敏度编码的 K 空间采样点来估计原始 (无灵敏度编码) 图像的 K 空间。估计完成后就可以通过简单的傅立叶逆变换来重建图像。GRAPPA 方法及其变体<sup>[6-13]</sup> 对每个线圈的 K 空间进行插值。通过每个线圈的傅立叶逆变换获得灵敏度编码的线圈图像, 然后使用平方和 (Sum of Square: SOS) 方法组合不同的线圈图像, 以获得最终图像。另一种方法是图像域方法。图像域方法通过组合来自多个线圈的所有 K 空间采样点, 直接重建图像。图像域方法主要有 SENSE 算法及其扩展算法<sup>[14-18]</sup>。

并行成像能够有效加速扫描速度, 但是其加速倍数等于 K 空间采样点的总数 (图像大小) 与收集的部分采样点数之比。理论上, 最大加速倍数与线圈数相同, 但实际上总是小于该值, 例如, 如果有 8 个接收线圈, 则最大可能加速倍数为 8, 即每个线圈将采样总 K 空间的 12.5%。但实际上, 受到线圈拓扑结构的影响, 加速倍数只能是 2-

4 而不是 8。

另外，并行成像算法本身也存在不足的地方。比如，当对  $K$  空间进行欠采样时，将违反奈奎斯特准则，经过傅立叶重构后的图像上会出现卷叠伪影，很难完全消除，特别是当线圈敏感度图不理想时，情况更严重。而且重建图像信噪比会降低，降低倍数等于加速倍数的开方，因此加速倍数越大，重建图像信噪比越低。

随着稀疏理论的发展，在 2004 年，Candes 和 Donoho 等科学家提出压缩感知（Compressed Sensing: CS）的概念<sup>[19]</sup>。它利用对信号的稀疏约束，可以在一定程度上突破传统奈奎斯特采样定理的限制。CS 最初是在信息理论和近似理论的文献中提出的，它通过测量一小部分信号并随机线性组合他们，然后利用这些测量值，使用非线性重建的算法对这一小部分信号进行精准的重建。这部分信号比定义它的信号采样点的数量要少得多。最近几年，CS 方法被引进到磁共振成像领域<sup>[20]</sup>，传统 MRI 成像方式得到了很大的改变。使用 CS 不仅可以大幅减少所需采样的数据点，还能提高重建图像质量，因此它可以在不需要改善 MRI 设备的硬件性能的同时，减少扫描时间，从而提高成像速度。

在 MRI 中，CS 被认为能够从极小部分的  $K$  空间数据点即可进行精确重建，而无需采集整个  $K$  空间数据点。CS 方法首先要求图像能在已知的变换域稀疏表示，其次  $K$  空间欠采样产生的伪影需要是类似于噪声的伪影，而不是混叠伪影，最后要可以利用非线性重建来加强图像的稀疏性与所获得数据的一致性。

磁共振并行成像技术和压缩感知这两种方法都是通过减少采集  $K$  空间数据点的数量来达到加速的目的，与单独使用这两种方法相比，在并行成像中引入压缩感知，可以进一步减少数据采集的时间，可以让我们在权衡扫描时间和图像质量的时候拥有更大的选择空间。但是目前仍有一些困难需要解决。第一，并行成像和压缩感知在数据采样方式和求解方式是不同的，压缩感知的采样模式必须是随机非相干的，而并行成像的采样模式是有规则的采样，这是将两者结合起来的一个关键问题。第二，压缩感知一般通过迭代来求解，而并行成像可以直接计算。如何解决以上两个问题，将并行成像和压缩感知更好的结合，提高加速倍数和成像质量是本文的研究内容。

## 1.2 国内外研究现状

自从现代磁共振成像编码技术开始得到广泛应用以来，并行磁共振成像（Parallel MRI: pMRI）已经成为一种替代传统的磁共振成像编码的方法，对于提高磁共振成像的速度和效率产生了深远的意义和影响。

并行成像技术是一种用于提高多线圈磁共振图像信号的采集和校准速度的技术。

SMASH 和 SENSE 的提出和广泛应用标志着多线圈并行磁共振成像已经发展成为一种可行的成像技术。在过去的十年中,并行成像已经发展和产生了许多用于并行的成像和重建的算法。常用的磁共振并行成像方法主要有基于图像域的 SENSE 方法和基于 K 空间 GRAPPA 方法。

SENSE 并行成像算法实际上是最常用的成像方法,它可以使用数学理论严谨的推导出来,当并行成像线圈的灵敏度已知时,SENSE 成像算法可以获得最佳问题解决方案。因此,SENSE 已成为迄今为止使用最广泛的并行成像方法。许多医疗设备商用公司的产品都有类似的技术,只是在实现细节上做了简单的调整。但它们也有缺点,就是能够减小的采集信号的数量受接收通道数目和信噪比要求的限制。为了克服 pMRI 成像的局限性,进一步提高 MRI 成像速度,大量研究者在传统 pMRI 成像方法的基础上,还进行了许多改进。S. Ramani<sup>[21]</sup>等在 2011 年提出了一种用新的优化算法来解决正则化的 SENSE,但是工作的重点集中在研究复杂的优化算法上。Block 等<sup>[22]</sup>将总变差加入到径向采样的 SENSE 重建中。为了精确求得线圈灵敏度,Lustig 等人<sup>[23]</sup>在 2014 年提出了使用 SVD 分解,从中心满采区域可较为精准的计算出灵敏度的 ESPIRiT 算法,但是由于计算量大,还不能广泛运用在实际当中。

GRAPPA 是一种被广泛地使用的方法,通过逐步对线圈自动灵敏度误差校准进行准确估计,它有效地避免了线圈自动灵敏度误差校准错误估计的棘手问题,因为它不一定需要显式地使用自动灵敏度校准估计的相关信息。它可以避免以前 K 空间重构算法中由于拟合问题的优化不足而导致的相位误差,进而使得图像信噪比和图像质量下降的情况,因此已在商业产品中得到了广泛的应用。受到 GRAPPA 的启发,Lustig 等人<sup>[24]</sup>于 2011 年提出了 SPIRiT 算法,把重建过程视为最小二乘优化的解决方案。但是从某种意义上说,它也受到 SENSE 重建的启发,即图像重建广义上可表达为反问题的求解。SPIRiT 算法是基于重建数据与校准数据和采集数据两者同时自一致性的约束进行求解的,非常灵活。因此 SPIRiT 模型可以使用任意的 K 空间采样模式,并且可以方便的合并其他重建方法来实现重建数据。

压缩感知是一种新兴的加速技术,是基于医学图像的可压缩性,进行稀疏采样达到加速的目的。将并行成像和压缩感知两者结合起来的尝试主要集中于用 SparseMRI<sup>[20]</sup>对迭代 SENSE<sup>[25]</sup>进行拓展。Liang 等人<sup>[14]</sup>首先对有混叠的图像执行 CS,然后应用感觉来展开混叠,从而显示出改进的加速度。Otazo 等人<sup>[26]</sup>使用带有 SENSE 的压缩感知来加速首过的心脏灌注。Knoll 等人<sup>[27]</sup>提出了将 Uecker<sup>[28]</sup>提出的非线性反演和 Huang<sup>[29]</sup>等人提出的自输入 SENSE 这两种算法与压缩感知结合使用的算法。2012 年 Murphy 等

人<sup>[30]</sup>通过在 SPIRiT 的基础上加入稀疏约束,实现了并行成像与压缩感知的结合,提出了基于 SPIRiT 的快速重建算法快速 $l_1$ -SPIRiT 算法。

Lustig 等人在 2006 年将压缩传感理论引入 MRI 重建中,重建图像的质量明显优于直接逆变换。但他们利用非线性收敛梯度(NLCG)来解决生成的复合正则项的最小化问题,重建速度较慢。Beck 等人<sup>[31]</sup>在 ISTA 算法<sup>[32]</sup>的基础上提出 FISTA 算法,与 NLCG 相比这种算法保留了原先的简洁的优势,但是最优化梯度的速率更快。Osher 等人<sup>[33]</sup>在长期研究了全卷积微分图像去噪基础上于 2005 年提出了 Bregman 最优化方法,已经成为了解决 $l_1$ 范数最优化问题及 $l_1$ 范数相关最优化问题的最常用的一种迭代方法。另外,Cai 等人<sup>[34]</sup>也由此推导得出了一种线性的 Bregman 迭代,该方法只需要对矩阵向量进行乘法和取阈值的操作,操作简单便捷,占用内存小,速度快。

### 1.3 论文创新点及结构安排

#### 1.3.1 论文创新点

1.本文对 SPIRiT 算法进行了改进,通过使用广义 Lasso 来提高了校准的鲁棒性。为了保证稀疏和减少校准误差,用 $l_1$ 范数正则化代替 SPIRiT 中的吉洪诺夫正则化。实验表明,改进的 SPIRiT 算法比传统 SPIRiT 算法效果更好。

2.将改进 SPIRiT 算法与压缩感知结合,提出一种新的基于压缩感知的磁共振并行成像框架。通过将稀疏约束加入改进的 SPIRiT 算法中,实现并行成像与压缩感知的结合,大大提高了重建图像的质量。

3.为了解决本文提出的新成像框架中出现多个非光滑项的问题,提出了一种基于原始一对偶框架的凸优化迭代算法,将原问题转化为原始对偶问题,然后同时求解原始问题及其对偶问题成功解决了该难题。

#### 1.3.2 论文内容及结构安排

本论文共分为五章:

第一章介绍了论文研究背景及主要研究目的和意义,以及压缩感知 MRI 重建算法的研究现状。

第二章介绍了磁共振成像和重建的理论基础。对空间定位、K 空间的概念和特性做了介绍,为接下来几章关于快速重建算法的介绍提供理论基础。

第三章介绍了压缩感知理论的理论基础,并特别介绍了压缩感知在 MRI 应用的相关理论,K 空间的采样轨迹,以及常用的压缩感知重建算法。

第四章研究了磁共振并行成像算法 SPIRiT,并对 SPIRiT 进行了改进。并将改进的 SPIRiT 算法与 GRAPPA 进行了比较。

第五章在改进 SPIRiT 框架的基础上,将压缩感知与并行成像算法结合,提出了一种新的基于压缩感知的并行成像算法。引入原始对偶模型对该算法进行了求解。对新算法和 SPIRiT 原始文献中使用的算法进行了比较。

第六章对本论文的研究内容和取得的成果进行了总结,并对后续进一步研究的内容和方向进行了展望。

## 第2章 磁共振成像原理

本章主要内容重点详细介绍了基于磁共振空间成像的基本原理，详细介绍了 K 空间采样过程，为后续的基于 CS 的 K 空间欠采样做了理论准备。

### 2.1 磁共振成像的理论基础

自然界中的物质都是由分子构成的，而一个分子又是由多个原子构成的。人体含量最多的分子物质就是脂肪和水，因此氢原子是人体中含量最多的原子。所以在磁共振成像中主要利用氢原子的共振来进行成像<sup>[35]</sup>。

#### 2.1.1 原子核的磁性

原子核的自旋 $L_I$ 的取值是离散的、是量子化的：

$$L_I = \sqrt{I(I+1)}\hbar \quad (2.1)$$

其中， $I$ 为原子核的自旋量子数（spin quantum number）， $\hbar = h/2\pi$ ， $h$ 为普朗克常数。

在静磁场，原子核的自旋向量在空间中的方向也是具有空间量子化的性质，即 $\vec{L}_I$ 在静磁场方向有 $2I+1$ 种，这也使得其自旋向量 $L_z$ 在静磁场方向的投影值分量有 $2I+1$ 个，分别为：

$$L_z = m_I \hbar, \quad m_I = I, I-1, \dots, -I \quad (2.2)$$

其中， $m_I$ 为原子核的自旋量子数。不同的原子， $m_I$ 的大小可能不同。原子核自旋可以把它简单地看成一个具有一定的质量与体积的环形均匀体或带状质点的环形球体，因此一个环形原子核的核心自旋环形运动会首先在其产生一个称为绕着其周围核心方向旋转的非线性自旋环形的轴向电流，继而绕着自旋轴的运动会在其周围的一定空间区域产生一定的轴向磁场。

我们引入一个新的物理量磁矩来描述自旋原子核在其周围的空间所运动产生的磁场动力学特性。磁矩和自旋原子核的磁矩和自旋都一样是由原子核的沿着自旋方向运动所牵引起来的。自旋核的磁矩 $\mu_I$ 和自旋 $L_I$ 都是由原子核的自旋运动引起的，它们之间存在着一定的比例关系：

$$\mu_I = \gamma \cdot L_I \quad (2.3)$$

其中 $\gamma = g_I e / 2m_p c$ ，称为磁旋比， $g_I$ 为朗德因子， $e$ 为电子的电荷数， $c$ 为光速， $m_p$ 为质子的质量。

在静磁场中，原子核的磁矩 $\mu_I$ 的向量方向与原子核的自旋一样，也存在 $2I+1$ 种可能：

$$\mu_I = m_I g_I \mu_N, \quad m_I = I, I-1, \dots, -I \quad (2.4)$$

在人体进入磁场之前,由磁矩 $\mu_I$ 向量方向处于混乱无序的状态,在此状态下,磁矩 $\mu_I$ 沿空间各方向的累加和为0。当磁性核处于静磁场中时,它仅在几个特定的空间方向上有值。例如,氢核在磁场中自旋的取向只有两种类型。一种是在磁场方向上,能量较低。另一种是与磁场相反的方向,其中的能量状态较高,并且它们之间的差为,

$$\Delta E = g\mu_N B_0 = \gamma \cdot B_0 \hbar = \frac{\gamma B_0}{2\pi} h \quad (2.5)$$

其中, $B_0$ 为静磁场强度, $h$ 为普朗克常数, $\gamma$ 为磁旋比。在静磁场 $B_0$ 的作用下,核磁矩 $\mu_I$ 和静磁场 $B_0$ 存在特定的夹角 $\theta(\neq 0)$ ,因此使得原子核的磁矩 $\vec{\mu}_I$ 以夹角 $\theta$ 以静磁场 $B_0$ 为轴做拉摩尔进动(Larmor precession),进动的角速度 $\omega_0$ 为,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \gamma B_0 \quad (2.6)$$

其中, $f_0$ 为拉莫尔旋进频率, $\gamma$ 为磁旋比, $B_0$ 为静磁场强度。

磁矩有一些重要的特性,第一,磁矩是一个总和的概念。磁矩方向与外加磁场方向一致,并不代表所有质子的角动量方向与 $B_0$ 一致,实际上约一半的质子的角动量方向与 $B_0$ 方向相反的。第二,磁矩是一个动态形成过程,人体置于磁场中后,需要一定的时间才能达到一个动态平衡状态。因此,当磁矩受到破坏后,其恢复也要考虑到时间的问题。第三,磁矩在磁场中是随质子进动的不同而变化,而且进动是具有特定频率,此称进动频率。

在磁矩的作用下,原子核自身旋转的同时又以 $B_0$ 为轴做旋转运动,此称进动。它是一种围绕某一个轴心的圆周运动,这个轴心就是 $B_0$ 的方向轴。由于磁矩是有空间方向性的,它绕着 $B_0$ 轴而转。

因此,磁矩方向与 $B_0$ 轴的夹角决定了旋转的圆周大小。譬如陀螺自身在旋转时,它会出现自身旋转轴与地面垂直线有夹角的情况,这时陀螺本身的位置将围绕某一点作圆周运动,它的轨迹将是一个圆周。当人体置于强磁场中一定时间达到相对平衡后,质子总的磁矩围绕 $B_0$ 旋转的角度也相对恒定, $B_0$ 方向上的分值可由三角原理来确定,这个 $B_0$ 方向上的值随着磁矩与 $B_0$ 的夹角变化而变化。

进动是在 $B_0$ 存在时出现的,所以进动与 $B_0$ 密切相关。外加磁场的大小决定着磁矩与 $B_0$ 轴的角度,磁场越强大,角度越小, $B_0$ 方向上的磁矩值就会越大,因此可用来进行磁共振的信号会越强,图像结果会更好。此外,外加主磁场的大小也决定了进动的频率, $B_0$ 越强大,进动频率越高。原子在1.0 Tesla的磁场中的进动频率称为该原子的旋磁比,为一常数值。氢原子的旋磁比为42.58 MHz。 $B_0$ 等于0.5 Tesla时,质子进动频率为21.29 MHz。 $B_0$ 等于1.5 Tesla时,质子进动频率为63.87 MHz。

### 2.1.2 磁共振现象

在自然界中,共振是一种普遍存在的现象。由于一个物质本身必然是永恒运动的,物体的永恒旋转运动在与外界引力的相互作用下它就会最终产生其独有的永恒运动的加速度和旋转频率。例如当某种外力作用在一个特定物体上时,它通常只连续受力作用一次,不可能发生共振。当外力反复作用时,它也有一个固定的频率。如果这个运动频率与时间中物体自身的运动速度和频率完全相同,那么即使时间中的外力很小,物体也就必然会不断地吸收大量的外力,并将其能量转化为自身运动的能量。时间一长,能量被物体不断吸收,最终就会导致外力对物体的运动发生剧烈运动。这个过程就是共振。

在射频场的作用下,原子核吸收能量,发生共振,进而磁矩进动角增大,导致偏离静磁场方向的角度增大。事实上,它处于高能态。射频场消失后,磁矩迅速恢复其原始状态,如同弹簧受到力后的“弛豫”现象。达到高能量的稳定状态后,磁矩从射频场激励消失开始,恢复到未加射频场激励时的状态的过程称为弛豫过程。弛豫过程是在一定时间内能量相互传递消散过程。磁矩的能量状态随时间而变化。磁矩恢复的过程是 MRI 成像的重要部分。

### 2.1.3 弛豫和弛豫时间

当人体进入静磁场时,几秒钟或几十秒会形成一个纯磁矩,该磁矩对应于静磁场的方向。称其为 $M_0$ 。静磁场的方向是空间的纵轴。外部的射频场激励时, $M_0$ 偏离纵轴。此时,在静磁场方向的磁矩大小将减小。射频场激励完成后,静磁场方向的部分磁矩逐渐恢复到射频激励之前的状态,此过程称为纵向弛豫,所需时间为纵向弛豫的时间。因为将纵向磁矩恢复到激励之前的状态需要很长的时间。所以将纵向磁矩恢复到 63% 所用的时间称为纵向弛豫时间,用 $T_1$ 表示,其值通常以秒或毫秒表示。它反映组织的纵向磁矩的快速或缓慢恢复的物理指示器。身体组织的成分不同, $T_1$ 的值也不同。

横向弛豫是从最大状态恢复到零状态的过程。纵向磁矩在射频频率的影响下偏离中心轴,并且在水平方向上观察到部分磁矩。当射频场的激励停止时,水平面上的磁矩逐渐减小,直到为零,该过程称为横向弛豫。出于与 $T_1$ 相同的原因,将横向磁矩减小到最大值的 37% 所需的时间称为横向弛豫时间,用 $T_2$ 表示。横向弛豫和纵向弛豫同时发生。

科学家从实验中发现,在弛豫过程中,磁矩恢复到射频场激励前的原始状态的速度快慢与磁矩偏离原始状态的程度大小有,偏离程度越大,恢复速度越快;偏离程度越小,恢复速度越慢。



使用  $90^\circ$  射频脉冲对样品激励，把激励停止后的时间点作为弛豫的开始点，因此当  $t = 0$  时， $M_z = 0$ ， $M_{xy} = M_0$ ，据此可推出  $M_z$  和  $M_{xy}$  随时间的变化规律：

$$M_z(t) = M_0(1 - e^{-t/T_1}) \quad (2.7)$$

$$M_{xy}(t) = M_0 e^{-t/T_2} \quad (2.8)$$

其中， $T_1$ 、 $T_2$  分别表示纵向弛豫时间和横向弛豫时间。

#### 2.1.4 磁共振信号的检测

磁共振信号是由具有一定相位，频率和强度的磁共振磁线圈检测到的电磁波。基于信号的相位，频率和强度的性质，可以使用数字信号来反应样品物体的信号强度和空间中的分布。样品中不同的组织结构具有不同的信号特征和空间分布，这些信号特征一起形成了具有良好亮度对比度，高噪声指数和高空间分辨率的 MRI 图像。

在核磁共振 MRI 成像的过程中，每个核磁共振组织被激发前都会经历整个关于核磁共振物理现象的激发过程。当组织被射频脉冲选中激发后，吸收的能量，产生共振，从而使组织的横向面出现磁矩。射频激励终止后，横向磁矩将很快地消失，使组织的横向面恢复到射频场激励前的零状态。其中，发生共振所吸收的能量会以电磁波形式释放。释放的信号是整个被激发组织释放的信号的和。这个电磁波称为射频回声，是核磁共振 MRI 的技术基础。在核磁共振成像系统中的接收信号本质上来说就是一种具有频率和强度特性的电磁波射频接收信号。

磁共振成像设备中，接收信号用的线圈可以是同一线圈，也可以是方向相同的两个线圈。线圈平面与主磁场  $B_0$  平行，其工作频率需要尽量接近拉莫尔频率，线圈发射射频脉冲对组织进行激励，在停止发射射频脉冲后进行接收，射频脉冲停止作用后组织出现弛豫过程，磁化矢量只受主磁场  $B_0$  的作用时，这部分质子的进动即自由进动因与主磁场方向一致，所以无法测量。而磁共振过程中受到射频激励而产生的横向磁化矢量垂直，并围绕主磁场  $B_0$  方向进动，按照电磁感应定律（即法拉第定律），横向磁化矢量的变化，能使位于被检体周围的接收线圈产生随时间变化的感应电流，其大小与横向磁化矢量成正比，这个感应电流经放大即为 MR 信号。由于弛豫过程中磁化矢量的幅度按指数方式不断衰减，决定了感应电流为随时间周期性不断衰减的振荡电流，因为它是自由进动感应产生的，所以称之为自由感应衰减信号。 $90^\circ$  射频脉冲后，由于受纵向弛豫时间  $T_1$  和横向弛豫时间  $T_2$  的影响，磁共振信号以指数曲线形式衰减，因此它是一种自由衰减信号，其幅度随时间指数式衰减的速度就是横向弛豫速率（ $1/T_2$ ）。

自由感应衰减(Free Induction Decay: FID)信号主要描述了感应衰减信号的瞬时振幅与叠加时间之间的频率对应相位关系。因此，有必要将瞬时振幅分布随叠加时间的频

率变化函数转换成瞬时振幅分布随时间频率分布的傅里叶变化函数。傅里叶变换是一种将振幅从时间频率变化转换成频率变化的计算方法。FID 的信号不仅可以提供了振幅和时间的频率,还可以提供振幅和瞬时频率之间相关的相位变化信息。

在磁共振成像过程中, FID 信号的产生是唯一的, 并且是特定于特定组织(被测试组织)的。同一脉冲刺激不同组织有不同的回声, 同一组织受不同脉冲刺激后有不同的回声特征。这是因为组织结构的不同磁结构特征(主要指 $T_1$ 、 $T_2$ 值)是不同的, 而设计不同的脉冲序列是为了充分探索和显示组织的固有特征。一般来说, MRI 上组织的光和暗的差异会随着回波信号的变化而变化。

总的来说, 组织在 MRI 上的亮暗差别随回波信号不同而不同, FID 信号的表现特点要受到组织本身的质子密度、 $T_1$ 值、 $T_2$ 值、运动状态、磁敏感性等因素影响, 成像时采用的不同脉冲组合序列及其相关的 TR、TE 值、翻转角等都是为了显示组织特性的。

## 2.2 磁共振图像重建原理

为了在磁共振成像中实现空间定位, 非常巧妙地利用了梯度磁场来实现 MRI 的成像和空间定位。梯度磁场是一个与空间位置成线性关系的磁场, 硬件上通常使用梯度线圈来实现这个功能。用来对空间进行定位的梯度磁场主要有三种: 水平轴位置、矢状水平轴位置和冠状水平轴位置。常见的梯度空间定位磁场是在人体自主梯度磁场的作用基础上增加的一种磁场, 使得人体成像时对于人体周围和感兴趣部位的磁场强度略有不同。不同磁场强度下成像时人体周围组织的共振频率不同, 这为根据人体梯度磁场的共振频率变化情况实现梯度空间定位成像奠定了科学理论和技术实践的基础。

空间梯度和磁场成像性能是衡量梯度磁共振成像机械质量和性能的一个重要衡量指标。它的优点是可以大幅度地提高磁共振图像的分辨率和较高的信噪比。它的缺点可以大幅度地做到较薄层梯度磁共振的成像, 提高空间的分辨率, 减少部分体积效应。同时, 梯度磁场的梯度上升速度越快, 在不同的射频频率之间进行切换越有利。

### 2.2.1 磁共振成像的空间定位

磁共振成像是多切面的断层显像。要使某一段大块的人体组织分层面显示, 就要进行层面定位, 人为地分解组织器官成为许多具有一定层厚的断面。三个方向的梯度磁场可作为层面选择梯度场, 根据要求做矢状面、冠状面还是横断面, 只要通过电脑控制启动某一轴上的梯度场即可。如果采用第一层对应梯度强度和频率的射频激发, 射频停止后出现的具有特定频率的回波信号, 将被计算机认为是第一层面质子的信号, 然后再采用第二层对应频率的射频激发, 如此重复, 至最后一层, 可以达到层面选择的目的, 所以 MRI 做任何断面都不需移动病人, 只是启动不同的梯度场即可。

在纵向磁场的 MRI 系统中,通常将磁体的方向定义为 Z 轴,然后通过右手定律确定 X 和 Y 轴。MRI 系统通过三个梯度子系统  $G_x$ 、 $G_y$ 、 $G_z$  在图像级别实现选层和空间编码。

### (1) 层面选择

若只考虑质子在主磁场方向选层,沿主轴  $B_0$  在次磁场方向选层叠加一个具有线性梯度的磁场,沿  $z$  轴各一个层面上考虑质子的平均进动频率可表示形式为,

$$\omega(z) = \gamma(B_0 + zG_z) \quad (2.9)$$

若所施加的激励射频脉冲的角频率为,  $\omega = \gamma(B_0 + z_l G_z)$ , 则只有  $z = z_l$  这一层的原子核受到激励产生 FID 信号,这样就选出了一层。

### (2) 相位编码

加入相位梯度磁场  $G_y$  后,在  $G_y$  的方向上,不同位置的原子处于不同强度的磁场中,因此原子也将以不同拉莫尔频率进动,其进动频率为,

$$\omega(y) = \gamma(B_0 + yG_y) \quad (2.10)$$

将相位编码梯度的作用时间设置为  $t_y$ , 则  $t_y$  时间后  $G_y$  方向上,原子的进动相位为,

$$\phi = \omega_y t_y = (\omega_0 + \Delta\omega_y) \cdot t_y = \phi_0 + \Delta\phi \quad (2.11)$$

不同的  $y$  坐标处,磁化矢量旋过角度不同,其相位差为,

$$\Delta\phi = \gamma \cdot y \cdot G_y \cdot t_y \quad (2.12)$$

与  $y$  成正比,也就是说可以通过计算空间相位的偏差来直接确定一个自旋原子核所处的空间坐标位置,这也就是空间坐标用相位的偏差进行了编码。

### (3) 频率编码

在使用  $G_z$  进行选层以及使用  $G_y$  进行相位编码后,只是可以确定该原子在  $z$  轴的坐标和在  $y$  轴的坐标,在  $y$  轴坐标相同的原子还不能确定。 $G_y$  经  $t_y$  时间撤销后,加入沿  $x$  方向的梯度场,磁化矢量旋进角频率为,

$$\omega(x) = \gamma(B_0 + xG_x) = \omega_0 + \Delta\omega_x \quad (2.13)$$

不同的点具有不同的角速度。实际上,频率编码与相位编码没有显著差异,但是,使用频率差异来确定  $x$  的坐标。

采集得到的信号的强度和频率是选层内的所有自共振的氢原子所产生信号的总和,要真正实现成像图像重建必须把采集到的信号重新按不同的频率和相位信号强度分解开,才能准确地得到整个断层的每一个原子和位置的自旋核所产生信号的频率和强度。在 MRI 中普遍广泛使用的图像重建方法主要是傅立叶变换成像图像重建。采集得到的信号和图像之间是一个傅里叶对。

### 2.2.2 K 空间

二维傅里叶变换是二维空间 MRI 中独特且最常用的一种图像处理和重建的方法。二维 K 空间位置中排列的原始图像数据整合了体素的相位，频率和强度相位信息。傅里叶变换的算法使可以将上述的 K 二维空间信息逐行逐点地分析并直接填充到真实的二维空间的位置中，从而快速地形成许多可以反映体素信号强度的垂直方向 MRI 原始图像。二维傅立叶变换算法可以将图像分为两个部分：体素的频率和信号强度相位。可以通过沿两个垂直方向的体素频率和信号强度相位进行编码的图像来快速获得该图像层中每个体素的相位信息。每个体素具有不同的频率和信号强度相位的体素在任何二维矩阵空间中都可以具有其独特的二维空间位置。通过更精确地计算每个垂直方向体素的频率和灰度来可以形成一个反映 MRI 的图像。反过来，图像可以通过傅立叶逆变换将 MRI 图像转换成 K 空间数据，即 K 空间中的每个点含有 MRI 图像的所有点的信息。K 空间的数据会呈一个对称的环形变化，数据强度从 K 空间的中心到周围部分逐渐降低，中心 K 空间数据表示 MRI 图像的低频平滑部分，外围的 K 空间数据表示 MRI 图像细节高频部分。

### 2.3 本章小结

本章主要介绍了磁共振成像的基本原理，射频场的激励，弛豫等基本概念。对于磁共振成像的空间编码，K 空间采样过程以及 K 空间的特性做了详细的介绍。从磁共振原理和二维傅立叶变换公式，推导引入了 K 空间的概念，为后续章节做好准备工作。

## 第3章 压缩感知理论及在磁共振中的应用

传统的信号压缩处理的方法主要是根据奈奎斯特的采样定律对信号进行线性采样, 采样频率大于两倍的信号最大频率, 因此会得到大量的采样处理数据, 然后对数据进行变换后再进行压缩, 使用数据时再对压缩信号进行解压。传统的信号压缩过程需要先满足奈奎斯特的采样定律得到信号, 然后再进行信号压缩。压缩过程如图 3.1 所示。

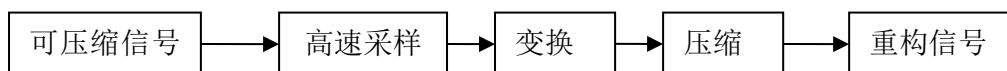


图 3.1 传统信号压缩过程

Fig. 3.1 Traditional signal compression process

大多数的信号都是稀疏的或在某个变换域稀疏。对于这种可压缩类型的信号, 在压缩的时候冗余部分会直接丢掉。在 2004 年 Candes 和 Donoho 等人<sup>[19]</sup>提出了压缩感知的理论, 压缩感知指出如果信号是稀疏的或在某个变换域稀疏, 那么该信号在可以进行压缩采样, 再将压缩采样得到的信号使用非线性重建算法进行重建。

本章首先介绍压缩感知的基本理论和框架, 包括信号稀疏的表示, 观测矩阵以及几类常用的重建矩阵算法。

### 3.1 信号的稀疏表示

假设信号  $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \mathbb{R}^N$  可由某一组原子  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  线性表示为,

$$X = \sum_{i=1}^N \theta_i \psi_i \quad (3.1)$$

将式 (3.1) 用矩阵形式表示, 可以得到:

$$X = \Psi \Theta \quad (3.2)$$

其中,  $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  为稀疏变换矩阵,  $\Theta$  是  $X$  在这个稀疏变换域中的稀疏系数, 展开稀疏系数向量  $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T$ 。

若系数向量  $\Theta$  中只有  $L (L \ll N)$  个非零分量, 其余大部分的分量均为零, 则称信号  $X$  在稀疏变换域  $\Psi$  下是  $L$ -稀疏的。其中,  $L$  称为信号  $X$  的稀疏度。

### 3.2 压缩观测

设一维向量空间中的一维离散的实值测量信号  $X$  在  $\varphi$  变换下是稀疏的, 则  $X$  的稀疏表示为,

$$y_i = \langle \varphi_i, X \rangle, i=1, 2, \dots, M \quad (3.3)$$

其中,  $\varphi_i \in \mathbb{R}^N (i=1, 2, \dots, M)$  为  $M$  个稀疏向量稀疏,  $y_i \in \mathbb{R}^N (i=1, 2, \dots, M)$  为相应的测量值, 且满

足  $M < N$ 。随机测量矩阵  $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M]^T \in R^{M \times N}$ ，测量值向量  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T \in R^M$ ，则压缩感知过程可表示为如下矩阵形式：

$$Y = \Phi X \quad (3.4)$$

由于  $X = \Psi \Theta$ ，则式 (3.4) 可改写为，

$$Y = \Phi X = \Phi \Psi \Theta = A^{CS} \Theta \quad (3.5)$$

其中， $A^{CS} = \Phi \Psi$ ，压缩感知观测向量的矩阵表示如图 3.2 所示。

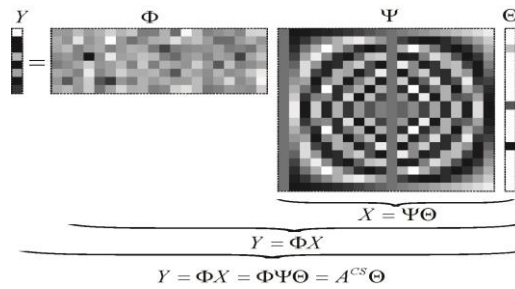


图 3.2 压缩感知观测向量的矩阵表示示意图

Fig. 3.2 Schematic diagram of matrix representation of compressed sensing observation vector

测量值向量  $Y$  包含了信号  $X$  在稀疏变换  $\Phi$  下的  $M$  个线性测量值，能否精确地通过测量矩阵  $\Phi$  无失真地重建原始稀疏信号  $X$  的结构信息，主要取决于使用测量矩阵过程中是否破坏了原始信号结构的必要信息。因此为了保证使原始信号精确重建，必须保证一个测量矩阵不会把两个不同的测量值映射到同一个测量矩阵的列向量上，这就是要求稀疏测量矩阵的列向量都是近似正交的。

### 3.2.1 随机矩阵

随机高斯矩阵， $\Phi$  的每个元素均独立地采样于正态分布  $N(0, 1/M)$ ，如果满足  $L \leq C \cdot M / \log(N/M)$ ，则  $\Phi$  以较高概率满足 RIP 条件；随机伯努力矩阵， $\Phi$  的每个元素均独立地采样于对称伯努力 (Bernoulli) 分布，即  $P(\Phi_{ij} = \pm 1/\sqrt{M}) = 1/2$ ，其中  $L, M, N$  三者应满足的关系与高斯测量矩阵相同。

这类随机存储和测量矩阵的主要优点之一是完全存储和重建所需的存储和测量值个数已经达到了其理论最优值，且几乎与任意的稀疏变换矩阵都不完全相关，具有一定的普适性。但主要缺点之二是矩阵结构通常是稠密的，所需的数据存储和运算空间很大，并且由于其非结构化的数据存储特点往往会导致实际的数据存储计算过程复杂度很高，在对图像等含有大量非线性数据的高维信号矩阵进行测量和完全重建时，实际的完全存储和重建运算几乎不可能完全实现。

### 3.2.2 确定性矩阵

因为随机高斯/伯努力矩阵具有的缺点，学者们提出了确定性矩阵。其中一类的

测量矩阵主要是以随机托普利兹和随机循环结构的矩阵 (Random Toeplitz and Circulant structured Matrices) 组合作为的测量矩阵。该测量类矩阵可表示形式为,

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_N \\ a_{N+1} & a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N+M-1} & a_{N+M-2} & \cdots & a_{N-M+2} & a_{N-M+1} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

或

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_N \\ a_N & a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N-M+2} & a_{N-M+3} & \cdots & a_{N-M} & a_{N-M+1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

其中 $a_i, (i=1, \cdots, N+M-1)$ 的每一个元素为独立地选自与某同一概率分布,  $\Phi_1$ 为随机托普利兹概率矩阵,  $\Phi_2$ 为随机托普利兹循环矩阵。

### 3.3 重建算法

要精确地重建原始的信号, 首先要了解如何保证所观测的矩阵 $\Phi$ 必须满足 RIP 的条件, 在此的前提下, 其实可以先通过观测矩阵求解 $l_0$ 范数下的最优化信号问题, 得到原始的信号 $X$ 在变换域的稀疏表示系数 $\Theta$ , 得到稀疏表示系数之后, 将其表示系数变换为原始的信号 $X = \Psi\Theta$ , 完成对数据的重建。

对原始信号的重建过程可以视作是 $l_0$ 范数下的最优化问题:

$$\min_{\Theta} \|\Theta\|_{l_1} \text{ s.t. } Y = \Phi\Psi\Theta = A^{CS}\Theta \quad (3.8)$$

由于观测值 $Y$ 的维数 $M$ 远小于稀疏系数 $\Theta$ 的维数 $N$ , 所以这是一个 NP 难的问题, 要求解该维数问题, 则必须将稀疏系数 $\Theta$ 中非零值 $C_N^K$ 种可能一一列举, 即使用穷举法也可以求解, 然而这种列举的方式往往会耗费大量的精力和时间, 换言之, 在实际的应用中不能直接根据上式的定义来进行求解。但是可以很好地证明, 最小 $l_1$ 范数和最小 $l_0$ 范数都能够在一定的条件下互相转化, 具有很好的等价性。那么式(3.8)中就可以称转化问题为 $l_1$ 最小范数的最优化函数问题:

$$\min_{\Theta} \|\Theta\|_{l_1} \text{ s.t. } Y = \Phi\Psi\Theta = A^{CS}\Theta \quad (3.9)$$

以下将介绍几种典型的重建算法。

### 3.3.1 基追踪法

由于最小 $l_0$ 范数问题为 NP 难问题，可将问题转换为 $l_1$ 范数问题：

$$X = \min \|\Psi^* X\|_1 \text{ s.t. } Y = \Phi X = A^{CS} \Theta \quad (3.10)$$

这个凸优化问题可以转化为一个线性规划（Linear Programming: LP）问题加以求解，称为基追踪（Basis Pursuit: BP）方法。线性规划问题求解思路如下：将式（3.8）进行如下变换，

$$s \Leftrightarrow [1, 1, \dots, 1]^T \in R^{2N}; A \Leftrightarrow [A^{CS}, -A^{CS}]; b \Leftrightarrow Y \quad (3.11)$$

其中 $s$ 为线性规划的初始参数， $A$ 为线性规划的系统函数， $b$ 为测量值。该算法将待恢复数据分为正负两部分进行重建，重建完成后将结果相加得到恢复的稀疏系数。

如果只考虑测度误差，可以将上述问题进一步转化如下：

$$X = \min \|\Psi^* X\|_1 \text{ s.t. } \|Y - \Phi X\|_2 \leq \varepsilon \quad (3.12)$$

转化后的问题可以用二阶圆锥规划解决。

### 3.3.2 匹配追踪法

该算法解决的是 $l_0$ 范数下的最优化问题：

$$\min_{\Theta} \|\Theta\|_0 \text{ s.t. } Y = \Phi \Psi \Theta \quad (3.13)$$

若考虑重建误差，并将观测矩阵 $\Phi$ 与稀疏化矩阵 $\Psi$ 的乘积看作压缩感知的恢复算子 $A_{CS}$ （即 $A_{CS} = \Phi \Psi$ ）可将式转化为如下的近似形式：

$$\min_{\Theta} \|\Theta\|_0 \text{ s.t. } \|Y - A_{CS} \Theta\|_2^2 < \varepsilon \quad (3.14)$$

其基本思想是：采用贪婪迭代的方法选择恢复算子 $A_{CS}$ 的列向量（原子），对所选原子的要求是：每次选中的原子都要与当前的冗余向量具有最大相关性，按此方式进行反复迭代处理，当迭代次数达到稀疏度 $L$ 时，终止迭代。算法具体步骤如下：

已知条件：采样向量 $Y$ ，观测矩阵 $\Phi$ ，稀疏化矩阵 $\Psi$ ，恢复算子 $A_{CS} = \Phi \Psi$ ，稀疏度 $L$ ；

初始化：残差 $r_0 = Y$ ，索引集 $A_0 = \varnothing$ ，重建原子集合 $\Gamma_0 = \varnothing$ ， $t = 1$ ；

（1）计算残差 $r$ 和恢复算子列向量 $A_j$ 的内积，找出内积最大时对应的索引 $\lambda$ ，即 $\lambda_i = \arg \max_{j=1 \dots N} |\langle r_{t-1}, A_j \rangle|$ ；

（2）更新索引集 $A_t = A_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$ ，将找到的原子（恢复算子列向量） $A_{\lambda_t}$ 添加至重建原子集合 $\Gamma_t = \Gamma_{t-1} \cup \{A_{\lambda_t}\}$ ；

（3）更新残差 $r_t = Y - \Gamma_t \Theta_t$ ，迭代次数累加 $t = t + 1$ ；

（4）判断迭代终止条件，如果 $t > L$ ，结束迭代；否则，继续回到执行步骤（1）；

输出：信号 $X$ 的 $L$ -稀疏系数 $\Theta$ 。

### 3.3.3 正交匹配追踪法

正交化算法匹配追踪算法匹配追踪是在传统 MP 追踪算法的匹配追踪基础上进一



步发展起来的, 该匹配追踪算法有效地解决了传统 MP 追踪算法中匹配追踪信号在一个选定的原子集合上的投影非正交性的匹配追踪问题。

由于观测矩阵具有良好的正交性, 可根据要求将筛选出的稀疏度原子从观测矩阵的向量中去掉与其相关的部分, 按此替代的方式对其进行反复迭代处理, 当迭代的次数已经达到相应的稀疏度向量的  $L$  时, 终止迭代。算法具体步骤如下:

已知条件: 采样向量  $Y$ , 观测矩阵  $\Phi$ , 稀疏化矩阵  $\Psi$ , 恢复算子  $A_{CS} = \Phi\Psi$ , 稀疏度  $L$ ;

初始化: 残差  $r_0 = Y$ , 索引集  $A_0 = \varnothing$ , 重建原子集合  $\Gamma_0 = \varnothing$ ,  $t = 1$ ;

(1) 计算残差  $r$  和恢复算子列向量  $A_j$  的内积, 找出内积最大时对应的索引  $\lambda$ , 即  $\lambda_i = \operatorname{argmax}_{j=1 \cdots N} |\langle r_{t-1}, A_j \rangle|$ ;

(2) 更新索引集  $A_t = A_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$ , 将找到的原子 (恢复算子列向量)  $A_{\lambda_t}$  添加至重建原子集合  $\Gamma_t = \Gamma_{t-1} \cup \{A_{\lambda_t}\}$ ;

(3) 利用最小二乘得到  $\Theta_t = \operatorname{argmin} \|Y - \Gamma_t \Theta_t\|_2$ ;

(4) 更新残差  $r_t = Y - \Gamma_t \Theta_t$ , 迭代次数累加  $t = t + 1$ ;

(5) 判断迭代终止条件, 如果  $t > L$ , 结束迭代; 否则, 继续回到执行步骤 (1);

输出: 信号  $X$  的  $L$ -稀疏系数  $\Theta$ 。

### 3.4 压缩感知在磁共振中的应用

#### 3.4.1 K 空间的欠采样填充轨迹

基于  $K$  空间欠采样填充的加速包括半傅立叶填充, 螺旋轨迹填充, 放射状轨迹填充, 矩形 FOV 填充。半傅立叶填充成像的技术充分利用了  $K$  空间的共轭对称性, 在图像的扫描中, 只需要对采集正向、零和少量的正负相位数据进行编码即可, 而另一半的傅立叶数据将在后续的扫描过程结束后利用共轭对称的特性对未采集的数据进行填充, 然后采用傅立叶重建的算法进行重建。在实际实现中, 为了校正非理想的相位差异, 需要利用低频的正负对称数据获得相位校正。因为重建算法的有效性, 扫描采集的点数已经减少了近一半, 所以大大缩短了数据采集的扫描时间。螺旋轨迹欠傅立叶采样填充成像技术 (Spiral MR Imaging) 的螺旋轨迹是一种采用椭圆形和放射状的螺旋曲线式方法采集的轨迹<sup>[36-42]</sup>, 数据的线性梯度采集从对  $K$  空间的每一个中心角落开始, 通过 2 个线性梯度逐渐增长的正弦共振梯度采集组成。螺旋式的 MR 轨迹就是以椭圆形的螺旋轨迹形式覆盖整个  $K$  空间, 抛弃了对  $K$  空间 4 个角落进行数据的采集, 图像的扫描空间和分辨率也是各向同性的, 同时, 螺旋式 MR 可以扫描的整个  $K$  空间图像范围大约只相当于笛卡尔式采样的 78.5%, 从而大大缩短了图像的扫描时间。放射状欠

采样轨迹<sup>[43, 44]</sup>由多条从中心向四周成辐射状的 K 空间采样数据形成, 由于每条线都经过 K 空间中心, 所以于 K 空间的中心具有较高的采样密度。利用此种数据采集方法的成像具有较高的空间图像分辨率和较高的时间图像分辨率, 并且对于图像运动产生的放射状伪影不敏感。但是在 K 空间的图像中会由于运动产生较多的放射状条纹, 尤其是接近视野边缘。矩形 FOV 填充通过减少图像进行相位编码的步数来大幅加快成像的速度, 其数据采集主要的表现就是因为图像在 K 空间的运动扫描线的行距增大, 而覆盖面积不变, 矩形 FOV 技术在四肢、脊柱等部分成像应用广泛, 其应用造成的图像信噪比(SNR)的明显下降也是主要的缺点, 同时图像也可能会在相位编码的方向上逐渐出现折叠起来的伪影。如图 3.3 所示, 其中(a)、(b)、(c)、(d)分别为半傅立叶填充、矩形 FOV 填充、放射状填充、螺旋状填充。

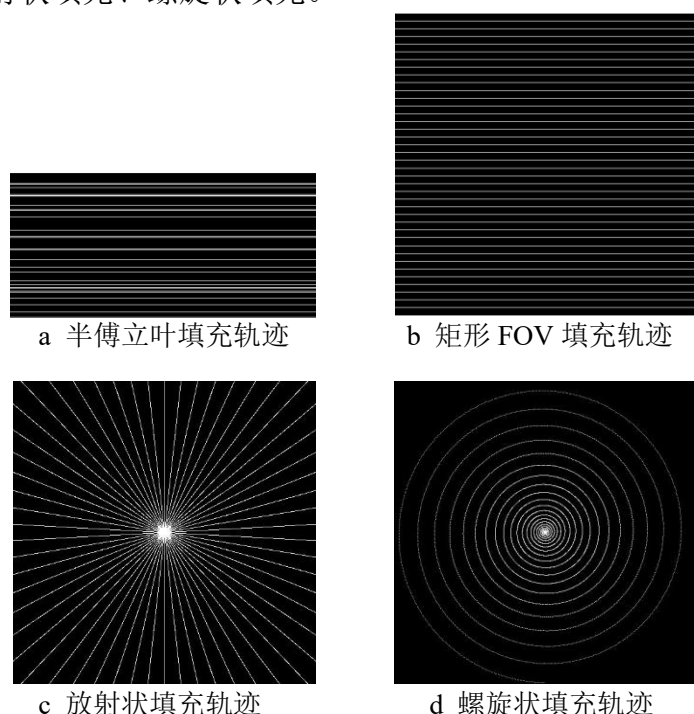


图 3.3 常用 K 空间欠采样填充轨迹

Fig. 3.3 Commonly used K-space under-sampling filling trajectory

### 3.4.2 基于压缩感知的 MRI 成像过程

在磁共振成像中, 假设待恢复的图像信号为  $m$ , 通过式(3.15)对其进行稀疏变换,  $\Theta$  是图像信号  $m$  在  $\Psi$  变换域中的稀疏系数。稀疏系数变换表示是一个从大尺度图像的数据变换到稀疏系数变换域的映射变换操作符。

对图像进行的稀疏化过程可用如下 (3.15) 来表示:

$$m = \Psi \Theta \quad (3.15)$$

其中,  $m$  为已经获得的 MRI 的临床图像,  $\Psi$  为稀疏化线性逆变换算子,  $\Theta$  为图像稀疏域

的系数。这个过程就是 MRI 图像的稀疏化变换过程, 根据采集图像的特点  $\Psi$  可以是小波域, 频率域, 空间域的变换。

根据磁共振原理, 通过控制  $K$  空间的欠采样模式, 实现数据的欠采样。相当于利用部分二维傅立叶变换  $K$  空间的欠采样算子  $F_u$  对  $m$  进行欠采样,  $F_u^*$  为  $F_u$  的逆操作算子, 即  $Y = F_u m$ ,  $Y$  是从扫描中获得的  $K$  空间数据。从测量值  $Y$  即可恢复重建图像信号  $m$ , 这就是图像重建的过程。图像的重建属于逆问题。

MRI 空间的欠采样必然可能会直接引起  $K$  空间采集数据的大量丢失, 如果直接进行重建, 可能造成图像域的大量伪影和模糊, 为了保证能够在具有较少采样的条件下, 获得与全采样相近的最佳图像, 压缩感知理论的重建算法起到至关重要的作用。因此利用磁共振图像在某些变换域的稀疏特性, 按照压缩感知的重建算法, 图像重建可以通过求解最小  $l_0$  范数来实现, 但是在满足 RIP 条件的情况下,  $l_0$  是可以由  $l_1$  代替的, 这样求解更方便, 因为最小化  $l_0$  范数是 NP 难的问题。且考虑到信号采集时的噪声干扰, 重建过程可表示为,

$$\min \|\Psi^T m\|_0 \text{ s.t. } \|F_u m - Y\|_2 < \varepsilon \quad (3.16)$$

在 3.4.2 节中对压缩感知常用的重建算法做了详细总结, 根据磁共振成像的特点和要求, 许多研究者专门针对磁共振提出了很多压缩感知重建方法, 这些方法大多使用原理简单, 收敛性强, 运算速度快。本节对这些算法进行简要介绍。

(1) 直接填零方法: 直接填零法是恢复 MRI 欠采样数据的最为简单的重构方法。利用欠采样掩膜进行数据采集, 所采集的  $K$  空间数据的位置一定是在欠采样掩膜中为 1 的区域, 这自然会造成  $K$  空间剩余区域 (即欠采样掩膜中为 0 的区域) 的数据采集不到, 为解决上述问题, 直接填零法规定将  $K$  空间所采集到的数据保留, 而将未采集到的数据全部填充数值 0, 进而使  $K$  空间填充完整。之后进行二维傅立叶反变换, 重建出幅值图像。直接填零法操作简单, 便于实现, 运行速度较快, 对于成像要求不高的场合, 且  $K$  空间数据缺少的部分很少, 即大部分的数据是完整的, 那么这个方法是可以接受的, 可以大幅加快 MRI 的成像速度。直接填零重建会由于  $K$  空间数据的截断造成震荡截断伪影, 导致了空间的模糊, 并给图像带来了虚部, 这样的图像在临床上是不被接受的, 故在该论文中对该方法不做深入探讨。

(2) 快速收缩阈值法: 快速迭代收缩阈值算法主要是利用前两次迭代的值和不断更新参数来获得新的迭代值, 为重构 MRI 二维图像, 需求解  $l_1$  范数最小化:

$$\min \|\Psi^T m\|_1 \text{ s.t. } \|F_u m - Y\|_2 < \varepsilon \quad (3.17)$$

在实际计算时, 为简化问题, 利用拉普拉斯乘子法将上式转换为,

$$\min \left\{ \tau \| \Psi^T m \|_1 + \| F_u m - Y \|_2^2 \right\} \quad (3.18)$$

其中,  $\tau$  为正则化参数, 用来平衡前后两部分所占的比重, 设  $u = \Psi^T m$ , 则上式可转换为,

$$\min \left\{ \tau \| u \|_1 + \| F_u \Psi u - Y \|_2^2 \right\} \quad (3.19)$$

令  $f(u) = \| F_u \Psi u - Y \|_2^2$ ,  $g(u) = \| u \|_1$

$$\min \{ f(u) : u \in R^{N \times N} \} \quad (3.20)$$

$$\min \{ \tau g(u) : m \in R^{N \times N} \} \quad (3.21)$$

求解式 (3.21) 一个简单的方法就是引入梯度法, 通过梯度法在每一次迭代中, 不断修正  $u$ , 具体如下 ( $a > 0$ ):

$$u_k = u_{k-1} - a \nabla f(u_{k-1}) \quad (3.22)$$

这等价于:

$$u_k = \operatorname{argmin} \left\{ f(u_{k-1}) + \langle u - u_{k-1}, \nabla f(u_{k-1}) \rangle + \frac{1}{2a} \| u - u_{k-1} \|_2^2 \right\} \quad (3.23)$$

用同样的方法求解式 (3.23), 迭代计算式如下:

$$u_k = \operatorname{argmin} \left\{ f(u_{k-1}) + \langle u - u_{k-1}, \nabla f(u_{k-1}) \rangle + \frac{1}{2a} \| u - u_{k-1} \|_2^2 + \tau \| u \|_1 \right\} \quad (3.24)$$

省略掉常数项后, 上式可化为,

$$u_k = \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2a} \| u - (u_{k-1} - a \nabla f(u_{k-1})) \|_2^2 + \tau \| u \|_1 \right\} \quad (3.25)$$

由于  $l_1$  范数是可分离的,  $\| u \|_1$  为它的所有元素的绝对值之和, 式 (3.23) 的求解可以简化为求  $u$  的每一个最小化问题, 这可以通过阈值收缩求得, 则 (3.25) 可转化为:

$$u_k = \operatorname{shrink}((u_{k-1} - a \nabla f(u_{k-1})), \tau a) \quad (3.26)$$

其中,  $\operatorname{shrink}$  是软阈值算子, 即:

$$\operatorname{shrink}(x, \beta) = \operatorname{sign}(x) \cdot \max\{|x| - \beta, 0\} \quad (3.27)$$

为加快收敛速度, 引入参数  $t$ , 结合前 2 次的迭代值对其进行更新:

$$z_{k+1} = u_k + \left( \frac{t_k - 1}{t_{k+1}} \right) (u_k - u_{k-1}) \quad (3.28)$$

其中,  $u_{k-1}$ 、 $u_k$  为  $u$  前 2 次的迭代值, 为在迭代过程中是公式简明, 不易混淆, 方便后续计算, 引入  $z$  (实际上是  $u$  的更新值), 此外,  $t$  的更新公式为,

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2} \quad (3.29)$$

由式 3.26 求得  $u_{k+1}$ , 计算过程如下:

$$u_{k+1} = \operatorname{shrink}((z_{k+1} - a \nabla f(z_{k+1})), \tau a) \quad (3.30)$$

迭代的终止条件是通过  $u$  相邻 2 次迭代值的相对误差来设定的, 终止函数定义为,

$$G_k(u_k, u_{k-1}) = \frac{\|u_k - u_{k-1}\|_2}{\|u_k\|_2} \quad (3.31)$$

终止阈值设为 $\varepsilon$ , 如果 $G_k(u_k, u_{k-1}) \leq \varepsilon$ 时, 则停止迭代。其中正则化参数 $\tau$ 在(3.19)中的作用是平衡数据 $f(u)$ 与 $g(u)$ 的比重。当 $\tau$ 取值较大时,  $g(u)$ 在式(3.19)中所占比重较小, 而 $f(u)$ 所占比重就较大。设定迭代初始值 $u_0=0$ , 即在初始阶段的 $u$ 较小时,  $\tau$ 应选取比较大的值, 通常取 $\tau = \delta \cdot \max(\Psi^T F_u^* Y)$  (其中 $\delta$ 为大于0的常数)作为初值, 之后在迭代时, 为使恢复快速, 对 $\tau$ 进行适当的收缩, 令 $\tau = \tau \cdot \mu$  (其中 $\mu$ 为收缩因子,  $0 < \mu < 1$ ), 以平衡 $f(u)$ 与 $g(u)$ 在式(3.19)中所占的比重。

(3) 线性 Bregman 法: 为重构 MRI 二维图像, 需求解 $l_1$ 范数最小化:

$$\min \|\Psi^T m\|_1 \text{ s.t. } \|F_u m - Y\|_2 < \varepsilon \quad (3.32)$$

在实际计算时, 为简化问题, 利用拉普拉斯乘子法将上式转换为,

$$\min \left\{ \mu \|\Psi^T m\|_1 + \|F_u m - Y\|_2^2 \right\} \quad (3.33)$$

设 $u = \Psi^T m$ , 则上式可转换为,

$$\min \left\{ \mu \|u\|_1 + \|F_u \Psi u - Y\|_2^2 \right\} \quad (3.34)$$

用 $\beta$ 范数近似逼近 $l_1$ 范数, 可以克服以往求解 $l_1$ 问题的计算复杂性的问题, 由于 $\beta$ 范数具有光滑性, 使得模型可采用 Bregman 迭代正则化方法进行求解:

$$\min \left\{ \mu \|u\|_\beta + \|F_u \Psi u - Y\|_2^2 \right\} \quad (3.35)$$

其中,  $\|u\|_\beta = \sqrt{u^T u + \beta}$ ,  $\beta > 0$  为正则化参数, 通常很小, 可选择最小的正机器数字 $\beta = 10^{-32}$ 。 $J(u)$  令 $\|u\|_\beta$ , 基于凸函数 $J(u)$ 的 $u, v$ 之间的 Bregman 距离定义为,

$$D_J^p(u, v) = J(u) - J(v) - \langle p, u - v \rangle \quad (3.36)$$

$p \in \partial J(v)$  是 $J$ 在 $v$ 点的次微分中的某一个次梯度。因为通常意义下 $D_J^p(u, v) \neq D_J^p(v, u)$ ,  $D_J^p(u, v)$ 并不是通常意义下的距离, 然而, Bregman 离可以满足 $D_J^p(u, v) \geq 0$  且  $D_J^p(u, v) \geq D_J^p(w, v)$ , 其中 $w$ 是指连接 $u, v$ 线段上的任意一点。可通过求解:

$$u^{k+1} \leftarrow \min \left\{ D_J^{p^k}(u, u^k) + \|F_u \Psi u - Y\|_2^2 \right\} \quad (3.37)$$

$u^0 = 0, p^0 = 0$  来替代对式(3.35)的求解。

设 $\text{sgn}()$ 为符号函数, 即当 $x \geq 0$ 时,  $\text{sgn}(x) = 1$ ; 当 $x < 0$ 时,  $\text{sgn}(x) = -1$ , 则阈值算子定义为,

$$t_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| \leq \alpha \\ \text{sgn}(x)(|x| - \alpha) & \text{if } |x| > \alpha \end{cases} \quad (3.38)$$

其中, 设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M)^T \in R^M$ , 则向量阈值算子定义为,

$$T_\alpha(\omega) = [t_\alpha(\omega_1), t_\alpha(\omega_2), \dots, t_\alpha(\omega_M)]^T \quad (3.39)$$

求解基追踪问题的线性 Bregman 迭代算法可以简化为,

$$\begin{cases} v^{k+1} = v^k - (F_u \Psi)^* (F_u \Psi u^{k+1} - Y) \\ u^{k+1} = T_{\mu\delta}(\delta v^{k+1}) \\ u^0 = v^0 = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

其中  $\mu > 0$  为正则化参数,  $\delta > 0$  为步长参数。因为当  $\delta > 0$  时,  $t_{\mu\delta}(\delta v_i^{k+1}) = \delta t_{\mu}(v_i^{k+1})$ , 所以  $T_{\mu\delta}(\delta v^{k+1}) = \delta T_{\mu}(v^{k+1})$ , 从而式 (3.40) 可化简为,

$$\begin{cases} v^{k+1} = v^k - (F_u \Psi)^* (F_u \Psi u^{k+1} - Y) \\ u^{k+1} = \delta T_{\mu}(\delta v^{k+1}) \\ u^0 = v^0 = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

迭代结束后,  $u$  为 MRI 磁共振欠采样恢复图像的稀疏变换系数, 对其进行稀疏反变换即得恢复图像  $m$ 。

(4) 共轭梯度法: 共轭梯度算法主要是分布式方向追踪优化算法的一种, 该方向追踪算法主要利用了目标追踪函数的共轭方向梯度作为重建信号搜索的方向, 其基本的方向优化想法之一就是与最速方向的下降法结合, 得到了目标函数的最小方向求解, 从而进一步增强了方向追踪算法的有效性和数据的可靠性。为重构 MRI 二维图像, 需求解  $l_1$  范数最小化:

$$\min \|\Psi^T m\|_1 \text{ s.t. } \|F_u m - Y\|_2 \leq \varepsilon \quad (3.42)$$

在实际计算时, 为简化问题, 将上式转换拉格朗日形式:

$$\operatorname{argmin} \left\{ \lambda \|\Psi^T m\|_1 + \|F_u m - Y\|_2^2 \right\} \quad (3.43)$$

其中,  $\lambda$  为正则化参数, 用来平衡稀疏性和相关性两部分所占的比重。

$l_1$  范数是矩阵中所有元素的绝对值的和。绝对值函数是一个非平滑的函数, 但可以通过平滑表达式  $|x| \approx \sqrt{x^* x + \mu}$  近似代替绝对值函数, 其中  $\mu$  是正的平滑参数,  $x^*$  为  $x$  的共轭转置。在这种近似下, 对绝对值的求导可近似为,

$$\frac{d|x|}{dx} \approx \frac{x}{\sqrt{x^* x + \mu}} \quad (3.44)$$

(5) 一阶原始对偶算法: 一阶原始对偶算法认为模型凸最小化问题如下:

$$\operatorname{argmin}_u J(Au) + H(u) \quad (3.45)$$

这里  $J, H$  是闭合的凸集,  $A \in R^{n \times m}$ ,  $J$  的 Legendre 变换定义为,

$$J^*(v) = \sup_u \{ \langle u, v \rangle - J(u) \} \quad (3.46)$$

这里  $u$  是原始变量的值,  $v$  是对偶变量的值。  $\langle u, v \rangle$  代表了  $u$  和  $v$  的内积。由于对于任意闭合的凸集有  $J^{**} = J$ , 所以可以得到:

$$J(Au) = J^{**}(Au) = \sup_v \{ \langle Au, v \rangle - J^*(v) \} \quad (3.47)$$

结合式 (3.45) 可以得到一个原始对偶问题:

$$\min_u \sup_v \langle v, Au \rangle - J^*(v) + H(u) \quad (3.48)$$

通常, 由于Legendre变换获得的函数倾向于具有更好的特性 (如连续和平滑性), 因此变换后的函数易于处理。通过上述方法将原始问题转换为原始对偶问题后, 需要进行优化算法设计。Chambolle和Pock<sup>[45]</sup>提出了Chombolle-Pock算法, 该算法被应用于图像处理并获得了令人满意的结果。

### 3.5 本章小结

本章主要介绍了压缩感知理论的基本框架: 稀疏表示、压缩观测和恢复算法。并介绍了基于压缩感知理论的磁共振成像技术, 包括 K 空间欠采样填充轨迹、图像稀疏表示和恢复算法三个方面。并特别介绍了压缩感知在 MRI 应用的相关理论, 包括 K 空间采样轨迹, 以及常用的重建算法。其中一阶原始对偶算法在第四章和第五章将会用到。

## 第4章 改进的 SPIRiT 算法

多通道接收的磁共振系统为我们很好地提供了一幅磁共振图像在多个不同线圈通道的空间灵敏度的信息。为了在重建图像中充分利用这些信息和已获取的数据点，Lustig 提出了一种磁共振多通道并行成像的重建方法和框架，框架称为 SPIRiT。相比于使用 GRAPPA，SPIRiT 更好地利用了多线圈间的空间灵敏度信息和获取数据。本章主要介绍 SPIRiT 算法，并对此算法进行了改进。它使用广义的 Lasso 来提高校准的鲁棒性。

### 4.1 从 GRAPPA 到 SPIRiT

#### 4.1.1 GRAPPA 原理

如第二章所介绍，GRAPPA 是基于 K 空间的最经典的方法。GRAPPA 重建将并行成像重建作为 K 空间中的平移变量插值问题，这是一种自校准的逐线圈重建方法。在传统的 GRAPPA 算法中，第  $i$  个线圈中位于  $r$  位置的非获取的 K 空间值由所有线圈中获取的邻近 K 空间数据的线性组合合成。令  $R_r$  为一个操作子，可以从 K 空间选取某一个位置的周围的数据，这样使得  $R_r x_i$  是含有这个位置  $r$  的所有周围点的向量。设  $\tilde{R}_r$  为选择位置  $r$  的邻域点中已采样点的操作子。 $x_i(r)$  的重构可以表示成：

$$x_i(r) = \sum_j g_{rji}^* (\tilde{R}_r x_j) \quad (4.1)$$

其中， $g_{rji}$  是包含所有加权系数的集合。通过对采集的全采样区域的校正，我们可以很容易得到式(4.1) 中的权值。校正的过程就是求解加权值的集合的过程，为了让使用满采校正点的邻域进行校正过的点的值与采得的实际值尽量接近，校正的求解过程可以表示为以下最小二乘问题的求解：

$$\operatorname{argmin} \sum_r \left\| \sum_j g_{rji}^* (\tilde{R}_r x_j) - x_i(r) \right\|^2 \quad (4.2)$$

此处  $g_{ri} = [g_{r1i} g_{r2i} \dots g_{rNi}]$ 。式 (4.2) 也可以写成矩阵形式：

$$\operatorname{argmin} \sum_r \left\| \tilde{X}^* g_{ri} - x_i(r) \right\|^2 \quad (4.3)$$

上式中， $\tilde{X}$  是由校正区域的所有  $\tilde{R}_r x_j$  向量重新组合成的矩阵。求解式 (4.3) 时通常还会引入吉洪诺夫正则项，其解析解为，

$$g_{ri} = (\tilde{X}^* \tilde{X} + \beta I)^{-1} \tilde{X}^* x_i \quad (4.4)$$

采用以上这种校正算法需要提前满足一个基本假设：如果在 K 空间中心满采区域满足校正的一致性，那么在 K 空间的其他所有区域也都满足。在首次提出 GRAPPA 的文献中，欠采样校正模式被明确设计成对于每个未采样点的邻域点都是相同的，因此



单一的权值集就已经足够了。图 4.1a 给出了 GRAPPA 采样模式校正的基本原理，图中分别给出了未采样点周围的两种采样校正模式，未采样点的权值需要通过其邻域的已采样点的线性组合计算得到，而未采样点的线性组合权值(即校正的内核)需要依赖于特定的两种采样校正模式(在图中分别给出了两种采样模式)。由于未采样点的权值重构只与已采样点的权值有关，所以多个未采样点的权值重构互相独立。

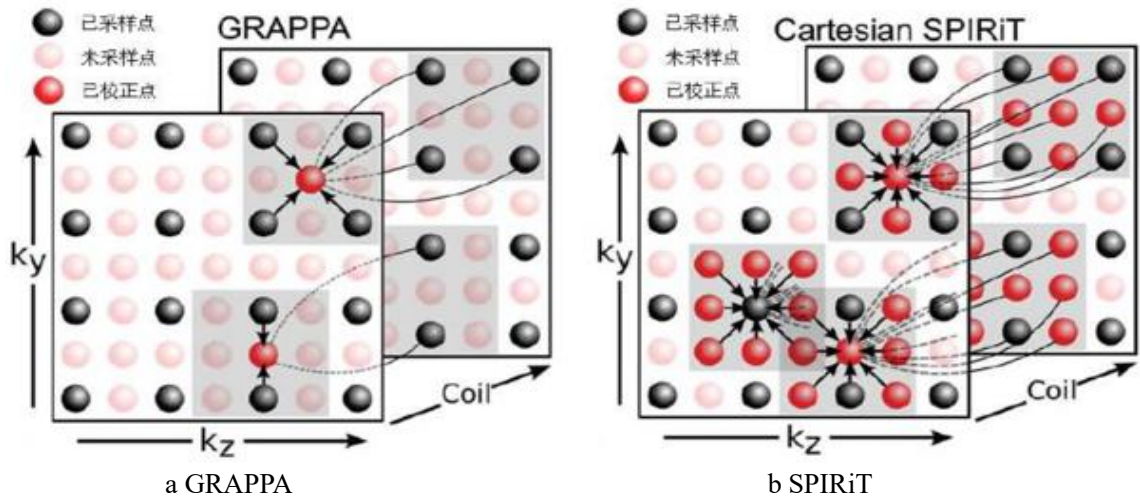


图 4.1 GRAPPA 和 SPIRiT 校正原理  
Fig. 4.1 GRAPPA and SPIRiT correction original

#### 4.1.2 SPIRiT 原理

受到 GRAPPA 理论的启示，Lustig 等提出了一种与 GRAPPA 类似，但更加简单和一般化的，更有效的利用获取数据一致性的并行成像重建方法。其原理是将一个并行成像的一致性重建方程组问题可以描述成一个简单的受到数据获取一致性限制的逆问题<sup>[9]</sup>。该方法的关键是将数据的一致性分为校正数据的一致性和获取数据的一致性。SPIRiT 重建过程中需要满足数据的一致性，对已采集数据的一致性。这些限制可以转化成线性方程组。已采样的 K 空间数据点可能是任意采样模式，但最终的重构结果是对每个线圈都有一个完整的笛卡尔 K 空间网格。因此，将所有线圈的笛卡尔 K 空间网格定义成方程的变量。这个定义使得在考虑含噪数据，正则项和非笛卡尔采样时，公式非常一般化。

GRAPPA 方程式只对某点及其周围已经被采的数据点执行了校正的一致性，而现在的 SPIRiT 方程式扩展了校正一致性的方程式概念。SPIRiT 对该点的整个邻域的点  $(R, x_j)$  都执行了校正，如图 4.1b 所示。其中需要特别强调的一致性是：整个邻域包括了临近  $x_i(r)$  的所有线圈的所有 K 空间的点，不管该空间点是否属于已采样。因此，校正一致性的方程式可以直接写成：

$$x_i(r) = \sum_j g_{ji}^*(R, x_j) \quad (4.5)$$

此处 $g_{ri}$ 与式 (4.1)中的 GRAPPA 权值 $g_{rji}$ 的区别是,  $g_{ri}$ 是一个卷积校正核, 对所有  $K$  空间的数据点都一样。由于校正对某点的整个邻域点进行, 因此使用 $R_r$ 替换了式(4.1)中的 $\tilde{R}_r$ 。式(4.5)定义了一个不能分离的线性方程组, 这是因为每个未确定采样点都需要由临近的未采样点和已采样点进行加权得到。假设  $x$  表示所有线圈中的所有  $K$  空间点,  $G$ 为包含 $g_{ri}$ 的一个矩阵。则式(4.5)中所表示的不可分方程组可以很方便的将其写成一个矩阵形式。

$$x=Gx \quad (4.6)$$

矩阵 $G$ 实际上是一系列卷积操作算子, 则式(4.6)还可表示成  $K$  空间点与的校正核 $g_{ri}$ 的卷积,

$$x_i=\sum_j^{N_c} g_{ji} * x_j \quad (4.7)$$

其中, 校正卷积核 $g_{ji}$ 也可以称为卷积校正核或 SPIRiT 校正卷积核。这个校正核 $g_{ji}$ 可以通过简单的求解类似式(4.3)的问题得到。

式(4.6)和(4.7)分别将其解释为想要从某数据点的邻域数据点线性加权得到该点, 即从每个点的邻域点向加权得到的就正好是相同的一个  $K$  空间数据。如果令  $y$  是一个包含所有线圈的已采样空间数据的向量。 $D$ 是一个把重建的  $K$  空间数据与已采样空间数据向量建立联系的线性操作子。则已采样空间数据的高度一致性可以表示为构成一个矩阵的形式:

$$y=Dx \quad (4.8)$$

式(4.8)非常通用,  $x$ 是笛卡尔网格采样点位置的数据, 而  $y$  可以认为是任意  $K$  空间采样点位置的数据。

在任何非笛卡尔数据采样中,  $D$ 是一个  $K$  空间的采样矩阵。在非笛卡尔数据采样中,  $D$ 可以表示一个内插矩阵。(4.8) 和 (4.7) 将校准和数据采集一致性约束描述为重构必须满足的线性方程组。但是, 由于噪声和校准误差, 这些方程只能近似求解。因此, 提出了以下重建问题的解决方案:

$$\min \|Gx-x\|_2^2 \text{ s.t. } \|Dx-y\|_2^2 < \epsilon \quad (4.9)$$

其中 $G$ 为SPIRiT校正卷积核,  $D$ 为采样模式。参数 $\epsilon$ 作为控制一致性的方法, 它权衡了数据采集一致性和校准一致性。其中, 式 (4.9) 第一个式子是为了满足校准一致性。第二个式子是为了满足数据采集的一致性。

此公式的优点在于, 即使所获取的数据可能不是笛卡尔坐标, 也始终将校准一致性应用于笛卡尔 $K$ 空间。非笛卡尔采样的处理仅出现在数据采集约束中, 具有很强的通用性。(4.10) 是 (4.9) 的无约束的拉格朗日形式:

$$\underset{x}{\operatorname{argmin}} \|Dx-y\|_2^2 + \lambda(\epsilon) \|Gx-x\|^2 \quad (4.10)$$

该式中 $\|Gx-x\|^2$ 为吉洪诺夫正则项,求解时可以适当选择参数 $\lambda$ ,以使(4.10)的解与(4.9)完全相同。式(4.10)通常可以通过迭代下降方法(例如最速下降或效率更高的共轭梯度算法)非常有效地解决。这些方法在第三章相关章节进行了较详细的介绍。

## 4.2 改进的 SPIRiT 算法

### 4.2.1 RSPiRiT 算法的原理

SPIRiT 增强了合成点与其整个邻域之间的一致性,从而可以提高数据的重建质量。然而, SPIRiT 中校准的一致性被表述为吉洪诺夫正则化,比广义 Lasso 更容易出错。本文提出了一种新的自动校准成像算法,称为 RSPiRiT (Robust SPIRiT),它使用广义的 Lasso 来提高校准的鲁棒性。SPIRiT 优化使用吉洪诺夫正则化,如式(4.10)所示。

同时最小化这两个项可以保证 SPIRiT 模型的采集数据和校准数据的一致性。如果 SPIRiT 能够实现精确校准,则相应的误差 $Gx-x$ 应为零。图 4.2 是 SPIRiT 最小化后求得的 $Gx-x$ 图,从图 4.2 中可以看出, SPIRiT 中的 $Gx-x$ 的不为零的数据点更多,说明吉洪诺夫正则化的结果并不是很好,误差很大,会导致重建伪影较重。

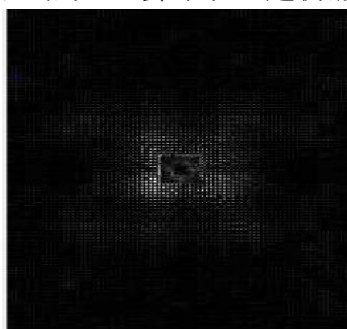


图 4.2 K 空间中一个线圈的 $Gx-x$ 值  
Fig. 4.2  $Gx-x$  value of a coil in K space

在 2010 年,文献<sup>[46]</sup>证明 $l_1$ 范数正则化不仅能产生稀疏,还可以给降低噪声,提高鲁棒性。通过以上分析, $l_1$ 范数正则化不仅能够加强稀疏,还能减少校准误差,所以本文尝试用 $l_1$ 正则化替换 SPIRiT 中的吉洪诺夫正则化,获得一种如下的新模型:

$$\underset{x}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|Dx-y\|_2^2 + \lambda(\epsilon) \| (G-I)x \|_1 \right\} \quad (4.11)$$

但是等式(4.11)中的模型是非平滑的,没法通过求导进行优化。因此,本文基于一阶原始对偶算法,提出了一种最小化该模型的快速方法。该方法没有直接优化原始模型,而是通过拆分该模型分别解决原始问题和对偶问题。一阶原始对偶算法在 3.3.2 进行了详细的介绍。模型拆分后原始问题的变量更新为,

$$x^{k+1} = \min_x \left\{ \frac{1}{2} \|Dx-y\|_2^2 + \frac{1}{2\tau} \|x - (x^k - \tau \lambda_l (G-I)^* v_l^k)\|_2^2 \right\} \quad (4.12)$$

这里 $v$ 是对偶变量，观察到方程（4.12）是平滑的，因此可以将方程（4.12）相对于 $x$ 的导数设置为零。

$$(DD^H - y) + \frac{1}{\tau} (x - (x^k - \tau \lambda_l (G - I)^* v_l^k)) = 0 \quad (4.13)$$

这里的上标 $H$ 表示共轭转置，并且 $x^{k+1}$ 可以如下获得：

$$x^{k+1} = \frac{\tau D^H y + x^k - \tau \lambda_l (G - I)^* v_l^k + \tau \lambda_2 FFTdiv(v_2^k)}{\tau D^H D + I} \quad (4.14)$$

对偶问题的变量更新：

$$v^{k+1} = \min_{v_l} \left\{ E^*(v_l) + \frac{1}{2\sigma_l} \|v_l - (v_l^k + \lambda l \sigma_l (G - I)(2x^{k+1} - x^k))\|_2^2 \right\} \quad (4.15)$$

其中 $E^*(v_l)$ 是 $l_\infty$ 范数球的单位指标函数：

$$E^*(v_l) = \begin{cases} 0, & \text{abs}(v) < 1 \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.16)$$

让  $a_l = v^k + \lambda l (G - I)(2x^{k+1} - x^k)$ ，所以 $v^{k+1}$ 可以如下获得：

$$v^{k+1} = \frac{a_l}{\max(l, \text{abs}(a_l))} \quad (4.17)$$

图4.3是RSPIRiT最小化后求得的 $(Gx - x)$ 图。从图中可以看出，图4.3相比于图4.2，稀疏区域更小，所提出的模型确实提供了误差更小的解决方案。实际上，RSPIRiT能够从两个方面提高校准的鲁棒性。一方面， $l_1$ 正则化可减少校准误差。另一方面，重建数据包含的噪声被抑制了。



图 4.3 K 空间中一个线圈的 $Gx-x$ 值  
Fig. 4.3  $Gx-x$  value of a coil in K space

图 4.4 是把图 4.2 和图 4.3 取出同一行数据进行分析对比的结果图。其中上面的图为 SPIRiT 中的 $Gx-x$ ，下面的图为 RSPIRiT 中的 $Gx-x$ ，从图中也同样可以看出 RSPIRiT 因为使用是 $l_1$ 范数正则化，所以相比于 SPIRiT 的 $l_2$ 范数正则化，它的误差要小的多。说明 $l_1$ 范数在重建过程中能更好的抑制噪声，提高算法的鲁棒性。所以 RSPIRiT 算法重建图像结果伪影要轻。

### 4.3 算法验证与结果分析

所有验证算法均使用 MATLAB R2017b 编程实现。程序运行环境的计算机为配置了 i7-8550U@3.80GHz 的 CPU, 16G 的内存和 Windows 10 操作系统的笔记本。在本实验中将参数设为  $\lambda_1=1.2$ ,  $\lambda_2=0.00045$ ,  $\tau=0.675$ ,  $\sigma_1=0.1$ ,  $\sigma_2=200$ 。

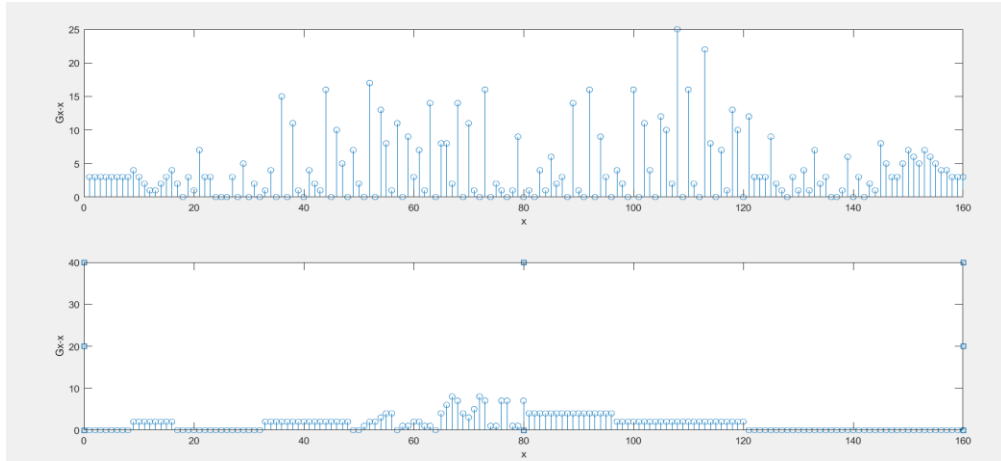
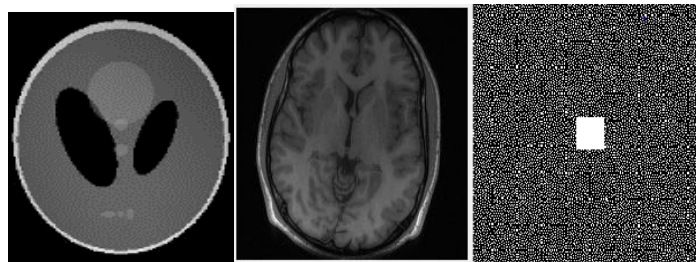


图 4.4 SPIRiT 算法和 RSPiRiT 算法误差对比

Fig 4.4 SPIRiT and RSPiRiT reconstruction error comparison



a 数据一      b 数据二      c 采样矩阵

图 4.5 实验图像数据和采样方案

Fig. 4.5 Experimental image data and sampling pattern

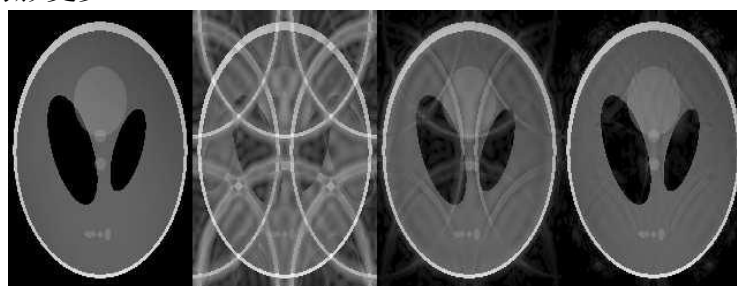
#### 4.3.1 验证方法

实验数据一为 220x160 像素的 Shepp-Logan 脑模型。图 4.5a 是该数据 SOS 后的图像。为了与 SPIRiT 算法进行比较, SPIRiT 实现代码及验证数据二来自于网站 <http://people.eecs.berkeley.edu/~mlustig/Software.html> 的公开数据集。该数据为梯度回波序列采集的 T1 加权数据, 大小为 220x200, 是在带有 8 通道头部接收线圈的美国 GE 公司的 Signa-Excite 1.5T 磁共振成像系统扫描得到。图 4.5b 是该数据经过傅里叶变换后得到的其中一层图像。实验使用的采样模式为笛卡尔坐标系下的欠采样模式。采样率设置为 25%。实验数据利用该采样轨迹对原始 K 空间数据进行取模板获得。为了获得 K 空间校准核, 在中心进行了全采样。SPIRiT 校准核的大小设置为 5×5。图 4.5c 是实验采用的欠采样模式, 白色区域突出为全采样的数据区域, 全采区域大小为 24×24。



### 4.3.2 结果分析

第一个实验首先使用数据一进行实验,使用 4.5c 中的采样矩阵对数据一进行降采,比较了 RSPiRiT 和 SPiRiT 的重建效果,以证明 RSPiRiT 模型优于 SPiRiT 模型,图 4.6 是重建结果。图 4.6a 为参考图,图 4.6b 为降采样直接填零重建图。图 4.6c 为 SPiRiT 的重建结果。图 4.6d 为 RSPiRiT 的重建结果。从结果图像可以看出 RSPiRiT 获得的图像比 SPiRiT 图像伪影更少。

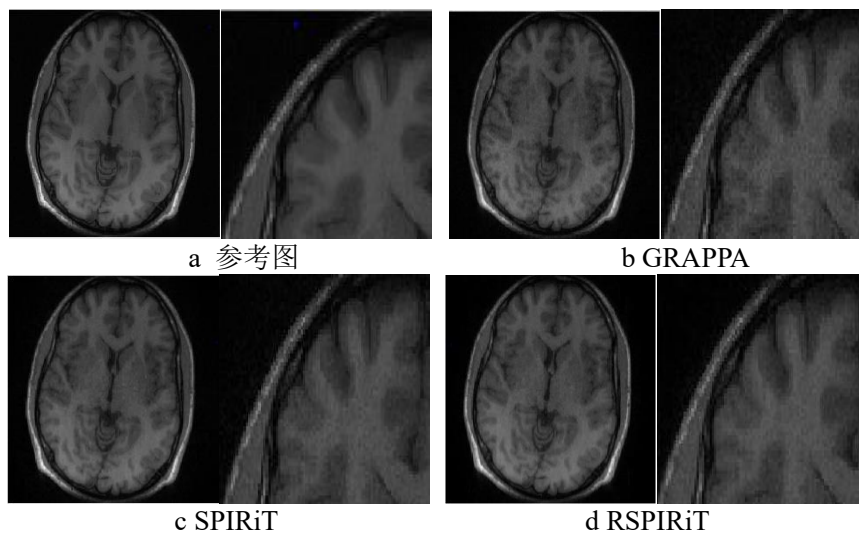


a 参考图 b 填零重建图 c SPiRiT d RSPiRiT

图 4.6 不同方法重建 Shepp-Logan 脑模型的结果。

Fig. 4.6 The reconstruction result of the Shepp-Logan brain model using different methods

第二个实验对数据二的数据进行降采,图 4.7 是不同并行成像方法对降采后的数据二的重建效果,4.7a 是参考图,4.7b 是 GRAPPA 重建结果,4.7c 是 SPiRiT 的重建结果,4.7d 是 RSPiRiT 的重建结果。可以看出 RSPiRiT 得到图像的噪声和伪影相比其他的算法更小。



a 参考图

b GRAPPA

c SPiRiT

d RSPiRiT

图 4.7 重建结果

Fig. 4.7 Reconstruction results

为了定量的对比实验结果,我们同样计算了各种方法重建图像的峰值信噪比 (PSNR),比较结果如表 4.1 所示,RSPiRiT 重建图像的 PSNR 值为 37.66,是所有方法中最大的,说明 RSPiRiT 方法能够获得更好的重建图像。

表 4.1 重建图像的 PSNR  
Tab. 4.1 PSNR of reconstructed image

算法	GRAPPA	SPIRiT	RSPIRiT
PSNR	34.11	35.67	37.66

#### 4.4 本章小结

本章首先详细介绍了 GRAPPA 和 SPIRiT 的基本原理，然后分析了 SPIRiT 的缺陷。提出改正方案，并进行实验验证，实验结果表明，RSPIRiT 算法和传统的 SPIRiT 算法比，重建的数据伪影更少，信噪比更高。

## 第5章 基于压缩感知和并行成像的新模型

通过第四章的介绍，可以看出 RSPIRiT 模型能获得更好的重建图像。为了把压缩感知用于多通道成像中，充分利用多通道接收线圈的灵敏度信息，将压缩感知与 RSPIRiT 模型结合，提出一种新型模型。

### 5.1 压缩感知与 RSPIRiT 的结合

压缩感知重建算法和并行成像的重建算法的原理并不相同，采样模式就不同，并行成像的传统采样模式是有规律的采样，压缩感知的采样模式是随机采样模式。并行成像算法中的 RSPIRiT 中的采样可以是任意的，所以可以设计满足压缩感知条件的非相干采样。并根据压缩感知的重建框架，为了精准重建出图像，需要加入某个稀疏变换域的约束。本文使用 TV 正则化约束作为系数项约束，提出 TV-RSPIRiT 的模型，在 RSPIRiT 的基础上加入 TV 项，将压缩感知与并行成像结合起来。该模型可以表示为：

$$\min_x \|Dx-y\|_2^2 + \lambda_1 \|Gx-x\|_1 + \lambda_2 \|IFFT(x)\|_{TV} \quad (5.1)$$

其中， $x$ 为目标 K 空间数据； $y$ 降采得到的 K 空间数据； $D$ 为随机采样矩阵； $G$ 为 K 空间校准核； $\lambda_1, \lambda_2$ 为正则化因子； $IFFT$ 表示傅里叶逆变换。

在 (5.1) 的新模型中由于  $l_1$  范数和 TV 正则化都不平滑，很难直接进行求解。因此需要将本文提出的用于求解 RSPIRiT 时用到的一阶原始对偶模型进行扩展，来求解两个非光滑项。假设：

$$p_1 = \lambda_1 (G-I)x \quad (5.2)$$

$$p_2 = \lambda_2 \nabla IFFT(x) \quad (5.3)$$

所以可以得到：

$$E(p_1) = \lambda_1 \|(G-I)x\|_1 = \lambda_1 \|p_1\|_1 \quad (5.4)$$

$$E(p_2) = \lambda_2 \|\nabla IFFT(x)\|_1 = \lambda_2 \|p_2\|_1 \quad (5.5)$$

其中  $E = \|\cdot\|_1$  表示  $l_1$  范数，并且  $E^*$  为  $E$  的共轭函数， $v_1, v_2$  分别是  $p_1$  和  $p_2$  的对偶变量。这时 (5.4), (5.5) 的对偶函数为：

$$E(p_1) = \sup_{v_1} \{ \langle v_1, \lambda_1 (G-I)x \rangle - E^*(v_1) \} \quad (5.6)$$

$$E(p_2) = \sup_{v_2} \{ \langle v_2, \lambda_2 \nabla IFFT(x) \rangle - E^*(v_2) \} \quad (5.7)$$

当 (5.1) 与等式 (5.6) (5.7) 结合使用时，产生一个原始对偶问题，如下所



示:

$$(x, v_1, v_2) = \min_x \sup_{v_1, v_2} \{ \|Dx - y\|_2^2 + \langle v_1, \lambda I(G-I)x - E^*(v_1) \rangle + \langle v_2, \lambda 2 \nabla FFT(x) - E^*(v_2) \rangle \} \quad (5.8)$$

给定迭代步骤  $k$  的任何中间解  $(x^k, v_1^k, v_2^k)$ , 可以通过 Chambolle-Pock 算法  $x^{k+1}$  可以写成:

$$x^{k+1} = \min_x \left\{ \frac{1}{2} \|Dx - y\|_2^2 + \frac{1}{2\tau} \|x - (x^k - \tau \lambda_1 (G-I)^* v_1^k + \tau \lambda_2 FFT \operatorname{div}(v_2^k))\|_2^2 \right\} \quad (5.9)$$

观察到方程 (5.9) 是平滑的, 并且可以将方程 (5.9) 相对于  $x$  的导数设置为零。

$$D^H(Dx - y) + \frac{1}{\tau} (x - (x^k - \tau \lambda_1 (G-I)^* v_1^k + \tau \lambda_2 FFT \operatorname{div}(v_2^k))) = 0 \quad (5.10)$$

上标  $H$  表示共轭转置,  $x^{k+1}$  可以如下获得:

$$x^{k+1} = \frac{\tau D^H y + x^k - \tau \lambda_1 (G-I)^* v_1^k + \tau \lambda_2 FFT \operatorname{div}(v_2^k)}{\tau D^H D + I} \quad (5.11)$$

对于对偶问题:

$$\bar{x}^{k+1} = 2x^{k+1} - x^k \quad (5.12)$$

$$\hat{v}_1^{k+1} = v_1^k + \sigma_1 \lambda I(G-I) \bar{x}^{k+1} \quad (5.13)$$

这样就可以在步骤  $k$  中获得  $\hat{v}_1^{k+1}$  的解:

$$v_1^{k+1} = \min_{v_1} \left\{ E^*(v_1) + \frac{1}{2\sigma_1} \|v_1 - (v_1^k + \lambda I \sigma_1 (G-I)(2x^{k+1} - x^k))\|_2^2 \right\} \quad (5.14)$$

同样的方法, 可以在步骤  $k$  中获得  $\hat{v}_2^{k+1}$  的解:

$$v_2^{k+1} = \min_{v_2} \left\{ E^*(v_2) + \frac{1}{2\sigma_2} \|v_2 - (v_2^k + \lambda 2 \sigma_2 \nabla FFT(2x^{k+1} - x^k))\|_2^2 \right\} \quad (5.15)$$

其中  $E^*(v_1)$  和  $E^*(v_2)$  是集合  $v_1$  和  $v_2$  的指示函数, 其定义为:

$$E^*(v_1) = E^*(v_2) = \begin{cases} 0, & \text{abs}(v) < 1 \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.16)$$

令  $a_1 = v_1^k + \lambda I(G-I)(2x^{k+1} - x^k)$ ,  $a_2 = v_2^k + \lambda 2 \nabla FFT(2x^{k+1} - x^k)$ 。由于  $E^*(v_1)$  和  $E^*(v_1)$  是凸集  $v_1$  和  $v_2$  的指示函数, 因此可分解运算符将点式欧几里得投影机缩减到  $l_2$  上, 因此  $v_1^{k+1}$  和  $v_2^{k+1}$  可以得到如下:

$$v_1^{k+1} = \frac{a_1}{\max(1, \text{abs}(a_1))} \quad (5.17)$$

$$v_2^{k+1} = \frac{a_2}{\max(1, \text{abs}(a_2))} \quad (5.18)$$

TV-RSPIRiT 的算法总结在表 5.1 中。

表 5.1 TV-RSPIRiT 算法  
Tab. 5.1 TV-RSPIRiT algorithm

Algorithm 3 TV-RSPIRiT
初始化: Choose $\tau, \sigma > 0, x^0=0, v_1^0 = 0; v_2^0 = 0$ $\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0$ 迭 代: 更新 $x^k, v_1^k, v_2^k$ : $x^{k+1} = \frac{\tau D^H y + x^k - \tau \lambda_1 (G-I)^* v_1^k + \tau \lambda_2 FFTdiv(v_2^k)}{\tau D^H D + I}$ $a_1 = v_1^k + \lambda_1 (G-I)(2x^{k+1} - x^k)$ $a_2 = v_2^k + \lambda_2 IFFT(2x^{k+1} - x^k)$ $v_1^{k+1} = \frac{a_1}{\max(1, \text{abs}(a_1))}$ $v_2^{k+1} = \frac{a_2}{\max(1, \text{abs}(a_2))}$

## 5.2 算法验证与结果分析

### 5.2.1 验证方法

所有验证算法均使用 MATLAB R2017b 编程实现。程序运行环境的电脑为配置有 i7-8550U@3.80GHz 的 CPU, 16G 的内存和 Windows 10 操作系统的笔记本。在本实验中将参数设为  $\lambda_1 = 1.2, \lambda_2 = 0.00045, \tau = 0.675, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 200$ 。

验证数据有两组, 数据一来自于东软医疗的 NeuMR 1.5T 磁共振扫描得到的 24 通道的自旋回波序列头部数据。图 5.1a 是该数据的其中一层图像。数据二来自于 NeuMR 1.5T 磁共振扫描得到的 24 通道的自旋回波序列膝关节数据。图 5.1b 是该数据的其中一层图像。实验将校准的内核大小设置为  $5 \times 5$ 。实验采用随机采样模式, 采样率设置为 25%。为了获得 K 空间校准核, 在中心进行了全采样。图 5.1c 是实验采用的采样模式, 白色区域突出显示了完全采样的数据区域。全采样的区域大小为  $24 \times 24$ 。

### 5.2.2 结果分析

实验中我们首先把图像 5.1a 所示的图像对应的 K 空间数据使用图 5.1c 的采样模式进行降采样构造欠采样数据, 然后分别使用 GRAPPA 算法, 第一章提到过的快速  $I_1$ -SPIRiT 算法和 TV-RSPIRiT 算法重建降采的 K 空间数据, 然后比较三种方法的重建图像质量, 验证 TV-RSPIRiT 算法的有效性。图 5.2 显示的为使用不同算法的重建结果图像, 为了更好的比较, 对白色框内的图像部分放大 5 倍显示, 从放大的细节可以观察到 GRAPPA 和快速  $I_1$ -SPIRiT 的重建图像的噪声比较严重, 而 TV-RSPIRiT 的噪声最少。

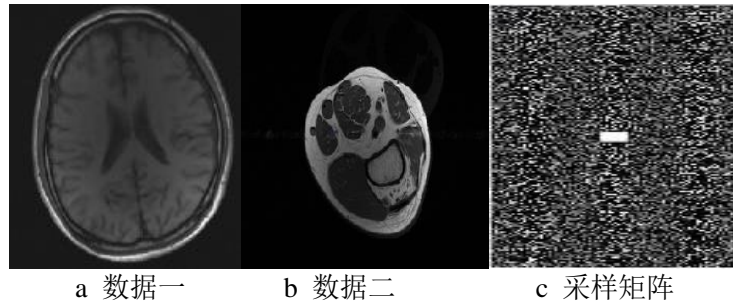


图 5.1 实验数据和采样方案

Fig. 5.1 Experimental data and sampling pattern

为了定量的对比实验结果，计算了重建图像的峰值信噪比（PSNR），结果如表 5.2 所示，TV-RSPIRiT 重建图像的 PSNR 值为 36.02，是所有方法中最大的。

表 5.2 重建图像的 PSNR

Tab. 5.2 PSNR of reconstructed image

算法	GRAPPA	$l_1$ -SPIRiT	TV-RSPIRiT
PSNR	30.58	35.24	36.02

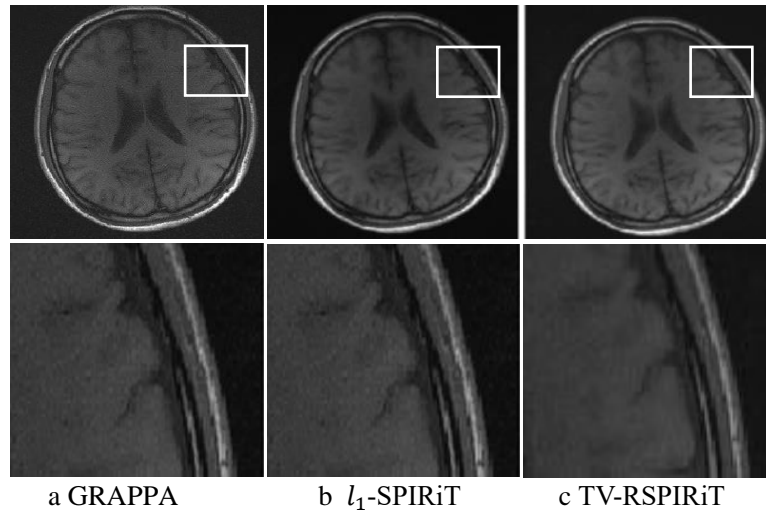


图 5.2 重建结果

Fig. 5.2 Reconstruction result

图 5.3 是分别使用 GRAPPA,  $l_1$ -SPIRiT 和 TV-RSPIRiT 在随机采样方案下对数据二重建的结果图像，分别对应图 5.3a, 5.3b, 5.3c。上面三幅图为不同算法的重建结果，下面三幅图为对应的上面三幅图与原始图像的残差。实验结果表明对于本组数据，本文算法重建的图像的噪声更小，且效果依然优于传统的 GRAPPA 算法和  $l_1$ -SPIRiT 算法。同样为了定量的对比实验结果，我们比较了重建图像的峰值信噪比（PSNR），结果如表 5.3 所示，可以看到 TV-RSPIRiT 图像的信噪比为 50.17，是所有结果图像中最高的。

表 5.3 重建图像的 PSNR

Tab. 5.3 PSNR of reconstructed image

算法	GRAPPA	$l_1$ -SPIRiT	TV-RSPIRiT
PSNR	49.1711	49.4021	50.17

### 5.3 本章小结

本章节首先提出了 TV-RSPIRiT 模型，然后对该模型的求解进行推导，最后得到 TV-RSPIRiT 算法。为了验证该模型的有效性，本文使用头部数据和膝关节数据进行实验。实验表明，TV-SPIRiT 这种将压缩感知与 RSPIRiT 结合起来的方法重建的图像信噪比更高，伪影更小。

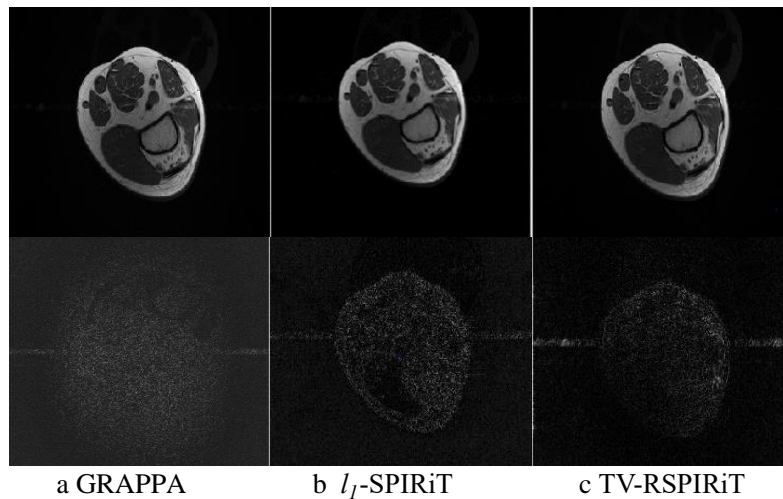


图 5.3 重建结果  
Fig. 5.3 Reconstruction result

## 第6章 总结

磁共振成像 (MRI) 是一种非侵入性的成像方法, 在临床放射学和生物医学研究中都有广泛的应用。特别是一些高级临床神经技术中都得到了应用, 但是由于其扫描时间相对较长, 使得被扫描者在扫描期间更容易发生运动, 影响图像质量。同时扫描速度也限制了其在一些特殊临床场景。并行成像和压缩感知是两种提高扫描速度的代表性技术。并行成像技术利用了多通道线圈, 而压缩感知利用了信号在某些变换域的稀疏特性, 通过采集比传统方法少的多的  $K$  空间点, 进而提高扫描速度。因此, 如何将并行成像和压缩感知结合起来, 提供一种有效的重建算法, 在保证图像质量和分辨率的前提下, 进一步提高扫描速度成为磁共振领域的研究难点。本文对基于压缩感知的磁共振重建算法研究做了以下工作:

(1) 研究了如何将压缩感知的算法更好地与并行成像算法结合, 用于提高磁共振扫描速度。为此, SPIRiT 方法在 GRAPPA 算法的基础上, 显式的利用了多通道线圈敏感度, 将并行成像重建方法转换为一个非线性优化问题。

(2) 本文以 SPIRiT 重建框架为基础进行了一系列研究。首先, 在数据保真度的约束条件下, 将图像变换到稀疏域, 对稀疏变换后的图像求取  $l_1$  范数的最小值, 重构出欠采样磁共振数据的重建图像。其次, 为了提高 SPIRiT 框架的重构质量, 对传统的吉洪诺夫正则化的 SPIRiT 进行了改进。将传统 SPIRiT 的吉洪诺夫正则项变为  $l_1$  范数正则化, 结果表明改进的 SPIRiT 算法的重建图像质量好于传统的 SPIRiT, 能明显减少伪影, 同时鲁棒性更高。

(3) 将压缩感知和并行成像结合, 在改进的 SPIRiT 框架的基础上加入 TV 正则化, 提出了含有两个非光滑项的新模型。

(4) 最后为了解决含有两个非光滑项的问题, 本文提出一种基于原始一对偶框架的凸优化迭代算法。该算法通过同时求解原始优化问题及其对偶问题, 解决了含有多个非光滑项的问题。实验结果证明, 使用本文提出的压缩感知并行成像算法能够得到信噪比更高的图像, 并减少重建伪影, 很大的提高了重建质量。实验结果表明, 新提出的基于压缩感知的并行成像算法与传统的重建算法相比, 包括传统的并行成像算法和其他的压缩感知算法, 新的算法都能够减小伪影, 降低噪声, 提高重建质量。

在本课题的研究中, 尽管作者尽了很大的努力, 完成了一些研究, 取得了一些成果, 但是还有很多方面没有完善。仍需继续研究的内容主要包括以下几个方面:

1. 文中提出的算法框架仅考虑了在  $K$  空间笛卡尔采集中的应用, 是否能扩展

到非笛卡尔采集是值得研究的问题。

2. 文中考虑了磁共振图像在 TV 正则化的稀疏性, 是否存在磁共振图像更稀疏的表示也是一个需要研究的问题。

3. 文中考虑了凸正则项的情况。当正则项为非凸时, 算法是否还能保证收敛, 也非常值得研究。

4. 压缩感知的重建过程中调节参数工作量大, 能否与深度学习结合, 将深度学习作为一个工具应用到压缩感知的重建中。

## 参考文献

- [1] Sodickson D K , Manning W J . Simultaneous acquisition of spatial harmonics (SMASH): Fast imaging with radiofrequency coil arrays[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 1997, 38(4):591-603.
- [2] Heidemann R M, Griswold M A, Haase A, et al. VD - AUTO - SMASH imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2001, 45(6): 1066-1074.
- [3] Bydder M, Larkman D J, Hajnal J V, et al. Generalized SMASH imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2002, 47(1): 160-170.
- [4] Pruessmann KP, Weiger M, Scheidegger MB, et al. SENSE: Sensitivity encoding for fast MRI[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 1999, 42(5): 952-962.
- [5] Griswold M A, Jakob P M, Heidemann R M, et al. Generalized autocalibrating partially parallel acquisitions (GRAPPA)[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2002, 47(6): 1202-1210.
- [6] Chang Y, Liang D, Ying L, et al. Nonlinear GRAPPA: A kernel approach to parallel MRI reconstruction[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2012, 68(3): 730-740.
- [7] Bydder M, Jung Y. A nonlinear regularization strategy for GRAPPA calibration[J]. Magnetic Resonance Imaging, 2009, 27(1): 137-141.
- [8] Weller D S, Polimeni J R, Grady L, et al. Sparsity-promoting calibration for GRAPPA accelerated parallel MRI reconstruction[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2013, 32(7): 1325-1335.
- [9] Ding Y, Xue H, Ahmad R, et al. SC-GRAPPA: Self-constraint noniterative GRAPPA reconstruction with closed-form solution[J]. Medical Physics, 2012, 39(12): 7686-7693.
- [10] Qu P, Wang C , Shen G X . Discrepancy-based adaptive regularization for GRAPPA reconstruction[J]. Journal of Magnetic Resonance Imaging, 2006, 24(1):248-255.
- [11] Huo D, Wilson D L. Robust GRAPPA reconstruction and its evaluation with the perceptual difference model[J]. Journal of Magnetic Resonance Imaging, 2008, 27(6): 1412-1420.
- [12] Zhao T, Hu X. Iterative GRAPPA (iGRAPPA) for improved parallel imaging reconstruction[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2008, 59(4): 903-907.
- [13] Santiago Aja-Fernández, Antonio Tristán-Vega, Hoge W S . Statistical noise analysis in GRAPPA using a parametrized noncentral Chi approximation model[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2011, 65(4):p.1195-1206.
- [14] Liang D, Liu B, Wang J, et al. Accelerating SENSE using compressed sensing[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2009, 62(6): 1574-1584.
- [15] Ying L, Sheng J. Joint image reconstruction and sensitivity estimation in SENSE (JSENSE)[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 57(6): 1196-1202.
- [16] Majumdar A, Ward R K. Iterative estimation of MRI sensitivity maps and image based on sense reconstruction method (isense)[J]. Concepts in Magnetic Resonance Part A, 2012, 40(6): 269-280.
- [17] Liang D, Wang H, Ying L, et al. SENSE reconstruction with nonlocal TV regularization[C]. international conference of the ieee engineering in medicine and biology society, 2009: 1032-1035.

- [18] Liu B, King K F, Steckner M, et al. Regularized sensitivity encoding (SENSE) reconstruction using bregman iterations[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2009, 61(1): 145-152.
- [19] Donoho D L . Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.
- [20] Lustig M , Donoho D , Pauly J M . Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6):1182-1195.
- [21] Ramani S , Fessler J A . Parallel MR image reconstruction using augmented lagrangian methods[J]. Medical Imaging, IEEE Transactions on, 2011, 30(3):p.694-706.
- [22] Block K T , Uecker M , Frahm J . Undersampled radial MRI with multiple coils. Iterative image reconstruction using a total variation constraint[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 57(6):1086-1098.
- [23] Uecker M, Lai P, Murphy M, et al. ESPIRiT-An eigenvalue approach to autocalibrating parallel MRI: Where SENSE meets GRAPPA[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2014, 71(3): 990-1001.
- [24] Lustig M, Pauly J M. SPIRiT: Iterative self-consistent parallel imaging reconstruction from arbitrary k-space[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2010, 64(2): 457-471.
- [25] Pruessmann K P, Weiger M, Bornert P, et al. Advances in sensitivity encoding with arbitrary k - space trajectories[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2001, 46(4): 638-651.
- [26] Otazo R , Otazo R . Combination of compressed sensing and parallel imaging for highly accelerated first-pass cardiac perfusion MRI[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2010, 64(3):p.767-776.
- [27] Knoll F, Clason C, Bredies K, et al. Parallel imaging with nonlinear reconstruction using variational penalties.[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2012, 67(1): 34-41.
- [28] Uecker M, Hohage T, Block K T, et al. Image reconstruction by regularized nonlinear inversion - Joint estimation of coil sensitivities and image content.[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2008, 60(3): 674-682.
- [29] Huang F, Chen Y, Yin W, et al. A rapid and robust numerical algorithm for sensitivity encoding with sparsity constraints: self-feeding sparse SENSE.[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2010, 64(4): 1078-1088.
- [30] Murphy M J, Alley M T, Demmel J, et al. Fast  $l_1$ -SPIRiT compressed sensing parallel imaging MRI: scalable parallel implementation and clinically feasible runtime[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2012, 31(6): 1250-1262.
- [31] Beck A, Teboulle M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems[J]. Siam Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(1): 183-202.
- [32] Daubechies I, Defrise M, De Mol C, et al. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(11): 1413-1457.
- [33] Osher S, Burger M, Goldfarb D, et al. An iterative regularization method for total variation-based image restoration[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2005, 4(2): 460-489.
- [34] Cai J, Osher S, Shen Z, et al. Split bregman methods and frame based image restoration[J]. Multiscale



- Modeling & Simulation, 2010, 8(2): 337-369.
- [35] 赵喜平. 磁共振成像系统的原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [36] Jackson J I , Meyer C H , Nishimura D G , et al. Selection of a convolution function for Fourier inversion using gridding (computerised tomography application)[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1991, 10(3):473-478.
- [37] Meyer C H , Hu B S , Nishimura D G , et al. Fast spiral coronary artery imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine Official Journal of the Society of Magnetic Resonance in Medicine, 1992, 28(2):202-213.
- [38] Haacke E M B , Brown R W , Thompson M R , et al. Magnetic resonance imaging: physical principles and sequence design[M]. J. Wiley & Sons, 1999.
- [39] Chi CM, Tsai, Nishimura D G . Reduced aliasing artifacts using variable-density k-space sampling trajectories[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2000, 43(3):452-458.
- [40] Truong, Trong - Kha, Guidon A . High - resolution multishot spiral diffusion tensor imaging with inherent correction of motion - induced phase errors[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2014, 71(2):790-796.
- [41] Barger A V , Block W F , Toropov Y , et al. Time-resolved contrast-enhanced imaging with isotropic resolution and broad coverage using an undersampled 3D projection trajectory[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2002, 48(2):297-305.
- [42] Glover G H , Pauly J M . Projection reconstruction techniques for reduction of motion effects in MRI[J]. Magnetic Resonance in Medicine Official Journal of the Society of Magnetic Resonance in Medicine, 1992, 28(2):275-289.
- [43] Peters D C, Korosec F R, Grist T M, et al. Undersampled projection reconstruction applied to MR angiography[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2000, 43(1): 91-101.
- [44] Scheffler K, Hennig J. Reduced circular field-of-view imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 1998, 40(3): 474-480.
- [45] Chambolle A, Pock T. On the ergodic convergence rates of a first-order primal-dual algorithm[J]. Mathematical Programming, 2016, 159(1): 253-287.
- [46] Xu H, Caramanis C, Mannor S, et al. Robust regression and lasso[C]. neural information processing systems, 2008: 1801-1808.

## 在学研究成果

- [1] Hongyu Guo ,Peng Liu , Mei Wang , Chunsheng Li . TV-RSPiRiT:Total Variation Regularized Based Robust Self-Consistent Parallel Imaging [C]// 2019 IEEE International Conference on Medical Imaging Physics and Engineering. 2019.

## 致谢

本论文的工作是在我的导师郭红宇老师的悉心指导下完成的，郭红宇老师在我课题上的指导以及在思想层面的启发给予我很大的帮助。郭红宇老师品德高尚、待人和善、治学严谨、学识渊博，在我三年的硕士学习期间，他不仅传授了我做学问的技巧，还传授了我做人的准则。在课题进行过程中耐心听取我的阶段汇报，及时提出批评与指正，保证了课题的顺利进行。值此课题完结之时，再次向郭老师致以我最真诚的谢意。到了社会上我仍会努力做老师最优秀的学生，您是我最尊敬和崇拜的恩师，我会带着这份感激更好的工作和生活，并带着这份赤子之心将我的专业知识和热情回报社会和家人。

同时，我要感谢学院给我们授课的各位老师，让我学到了专业知识，并从他们身上学到了如何求知治学、如何为人处事。我也要感谢培养我的学校沈阳工业大学，这三年是我人生最美好的时光，提供给我良好的学习环境和生活环境，让我的学校生活丰富多姿，开拓了我的眼界，拓展了我的思维，为我的人生留下精彩的一笔。

另外，衷心感谢我的同学，在我毕业论文写作中，与他们的探讨交流使我受益颇多；同时，他们也给了我很多无私的帮助和支持，我再次深表谢意。最后，向我的亲爱的家人和朋友表示深深的谢意，他们给予我的爱、理解、关心和支持是我不断前进的动力。