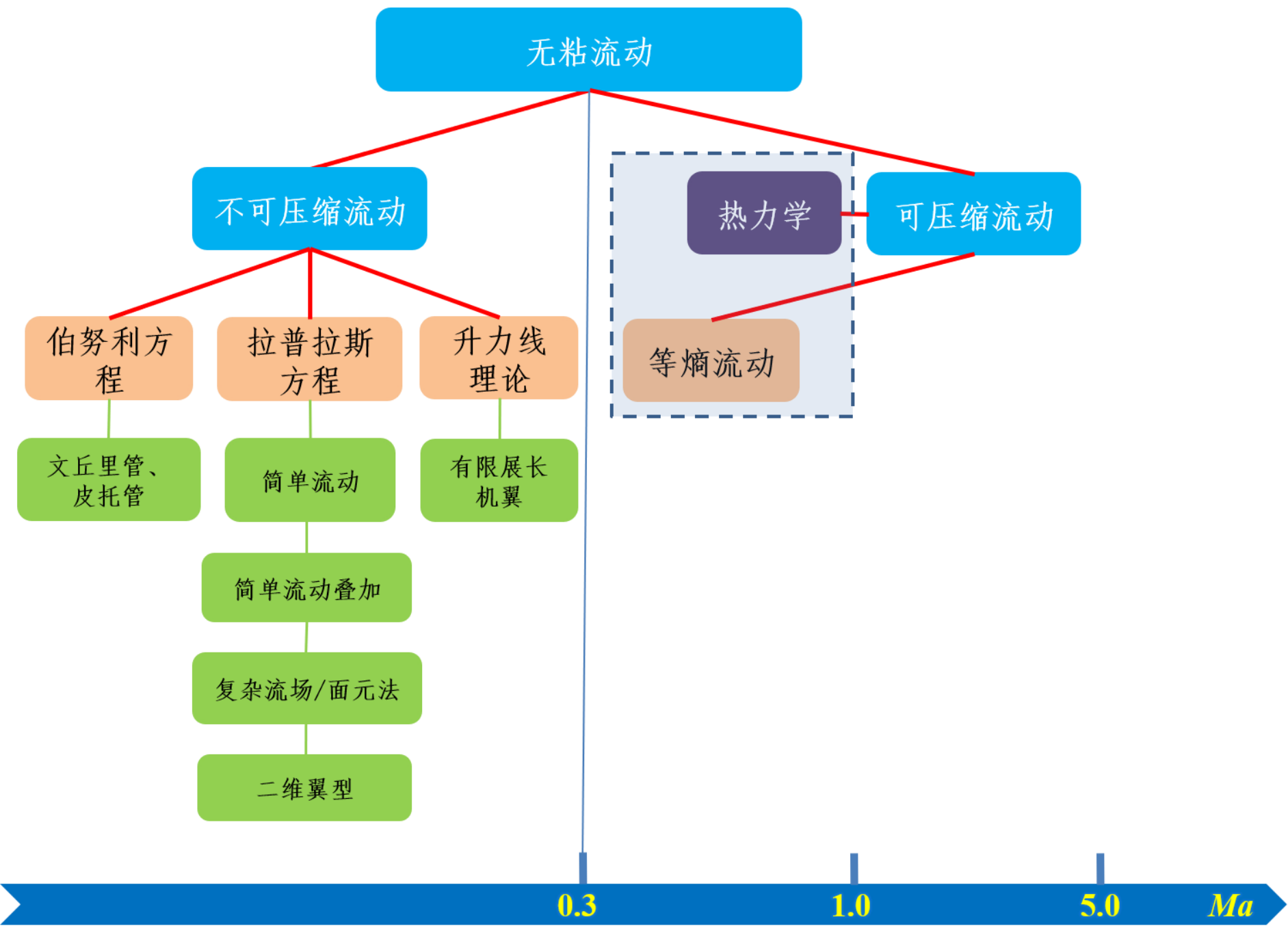


第十章

可压缩流动基础

吾生也有涯，而知也无涯

--庄子



10.1 可压缩流动方程组

连续性方程：
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

动量方程：
$$\rho \frac{D}{Dt} \mathbf{V} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

能量方程：
$$\rho \frac{D}{Dt} e = \rho q + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

状态方程：
$$\rho = \rho(p, T)$$

本构方程（牛顿流体）：

$$\boldsymbol{\tau} = -p \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I}$$

10.2 热力学预备知识

10.2.1 热力学定律

■ 过程、热和热相互作用

外参量：宏观可测的参量，其数值影响体系中粒子的运动。

孤立体系：和任何其它系统没有相互作用的系统。

约束：已知体系所必须满足的宏观条件。

比如限定能量、体积、粒子数等

不可逆过程：是这样一个过程，经过这个过程后孤立系统系综（ensemble）的初始状态不能借助简单的重置约束来恢复。

可逆过程：是这样一个过程，经过这个过程后孤立系统系综（ensemble）的初始状态可以借助简单的重置约束来恢复。

热：与宏观做功无联系的能量转移，也只是出现在分子尺度的能量转移。

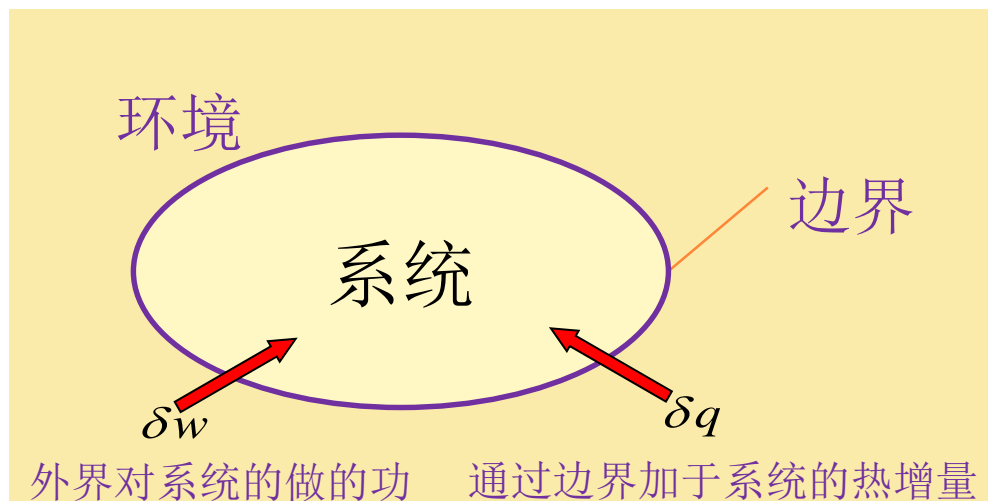
热相互作用：不涉及宏观规模上做功的相互作用。在这种相互作用中，相互作用着的体系的外参量保持不变。

■ 热力学第零定律—温度

如果两个系统与第三个系统处于热平衡，则它们也必定彼此处于热平衡。

允许我们引入温度计的观念以及表征体系宏观态的测温参量的概念。

■ 热力学第一定律—能量



热力学第一定律是能量守恒定律在热力学上的表述。

系统的平衡宏观态有一个特征量 e ，称为系统内能。

若系统是静止的，系统内能的增加等于系统吸收的热量和对系统所作的功的总和

$$\delta q + \delta w = de$$

要使系统产生内能增量 δe ，有无数多种对系统做功和给系统加热的方式（过程）。主要考虑三个常见过程：

- 绝热过程
在过程中没有热传导。
- 可逆过程
没有耗散现象发生。
- 等熵过程
绝热、可逆。

对于可逆过程，单位质量的功有：

$$\delta w = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\delta q - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = de$$

■ 热力学第二定律—过程的方向

热力学第二定律描述的是一个过程将会向哪个方向进行。1850年，德国物理学家鲁道夫·克劳修斯首次提出熵(Entropy)的概念，用来表示任何一种能量在空间中分布的均匀程度，能量分布得越均匀，熵就越大。克劳修斯在研究卡诺热机时，根据卡诺定理得出了对任意循环过程都适用的一个公式

$$dS = \frac{\delta q_{rev}}{T}$$

δq_{rev} 为可逆地加于系统的热增量， T 为系统的温度。

实际上， δq_{rev} 是一个人为定义的量，有效值一般与不可逆过程的初始和终了值有关。若这个过程实际加热值为 q ，则：

$$dS = \frac{\delta q}{T} + dS_{irrev}$$

dS_{irrev} 为不可逆的耗散过程产生的熵增。

耗散过程产生的熵增总是大于零：

$$dS_{irrev} \geq 0$$

等号表示可逆过程，那么：

$$dS \geq \frac{\delta q}{T}$$

对于绝热过程：

$$\delta q = 0$$

有：

$$dS \geq 0$$

系统和其环境的熵总是增加的或不变的。热力学第二定律指明过程进行的方向。

■ 热力学第三定律

一个体系的熵有这样的极限性质：

$$T \rightarrow 0_+, S \rightarrow S_0$$

其中 S_0 为一个与系统结构无关的常数。

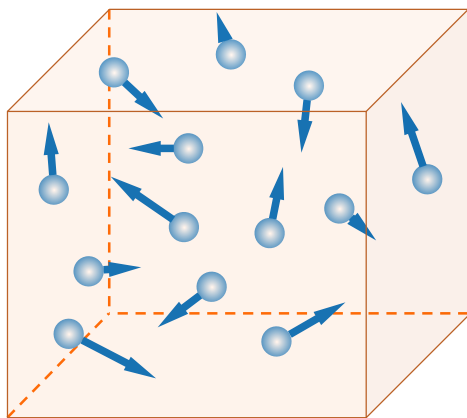
表明：一个由给定数目的特定类型粒子组成的系统，在接近 $T=0$ 时存在一个标准的宏观态，这个态的熵有一个唯一数值，相对于这个数值，体系所有其它宏观态的熵可以测量出来。由

$$dS = \frac{\delta q}{T}$$

确定的熵之差就可以转换成这个体系熵实际数值的绝对测量。

10.2.2 统计力学及气体动力学理论 (Kinetic theory of gas)

■ 假设和前提:



对于大量分子构成的
体系:

1. 气体是稀薄的，分子非常小并且分子相互相距甚远（分子尺寸 \ll 分子间的距离）；
2. 气体分子一直做随机运动，各个方向运动的分子一样多；
3. 分子间可以发生相互碰撞，也可以和容器壁面发生碰撞；
4. 碰撞为完全弹性碰撞；
5. 除了碰撞过程外，分子间没有相互的吸引力或排斥力。在碰撞过程之间做直线运动。

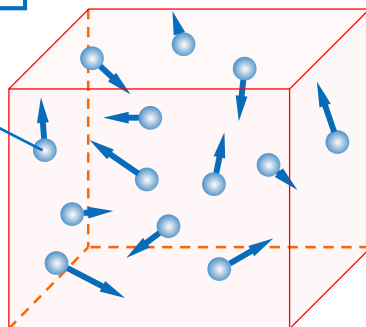
微观状态：对体系中每个粒子的描述。

每个粒子 i 的描述
位置： \mathbf{x}_i
质量： m_i
动量： \mathbf{p}_i
动能，势能： ϵ_i, V_i
...

统计力学

宏观状态：不考虑体系中微观细节描述，而仅仅对那些能有宏观测量的出的参量作出的描述。

宏观体系的描述
温度： T
质量（密度）： ρ
压强： P
...



平衡态：一个体系的宏观状态随时间没有改变的趋势，称这个体系处于平衡态。

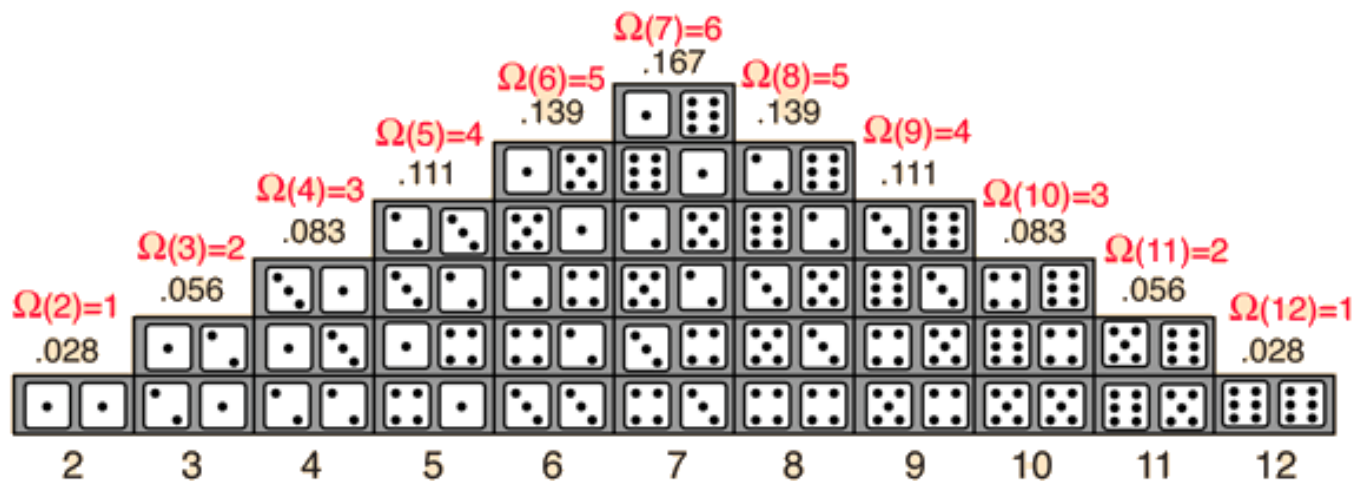
■ 宏观体系的可到达微观状态数

若用 E 表示一个体系的能量，为便于数出体系状态数目，将能量标度分为 δE 的微小间隔，引入符号

$\Omega(E) \equiv$ 能量在 E 和 $E+\delta E$ 间隔内的状态总数

δE 充分小， $\delta E \ll E$ ；并远小于其能量的任何宏观测量的预期精度。

δE 充分大，远大于单个分子的能量和体系相邻能级间的能量间隔。



Total number of microstates: 36

Total number of macrostates: 11

可以证明，平衡态时：

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial E} = \beta(E)$$

(课后自学)

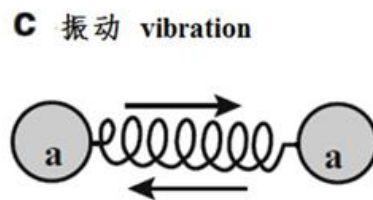
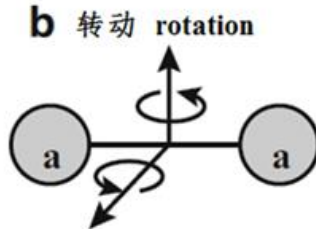
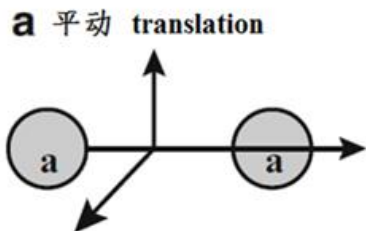
◆ 温度

若定义：

$$kT \equiv \frac{1}{\beta}$$

则参量 T 称为体系的**绝对温度**， $k=1.38 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ 为玻尔兹曼常数。

分子运动形式：



从分子运动观点看，温度也可以看成分子**平动平均动能**的标志。例如，除了极低温时，量子效应明显的情况，对于一个由自由运动**单原子**分子组成的系统可推导出：

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

(课后自学)

■ 理想气体 (Ideal Gas)

- 理想气体状态方程：

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{3V} Nm \langle v^2 \rangle \\ \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle &= \frac{3}{2} kT \end{aligned} \right\} \longrightarrow \boxed{pV = nR_1T}$$

$R_1 = N_A k$ 为气体常数, $R_1 = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, n 为摩尔数; N_A 为阿伏伽德罗常数, k 为玻尔兹曼常数。或:

$$\boxed{p = \rho RT}$$

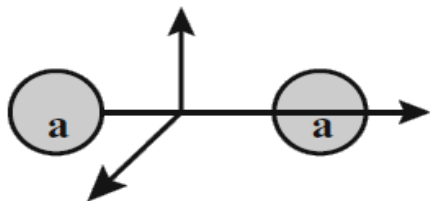
对于空气, $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

- 满足理想气体状态方程的气体, 称为理想气体。

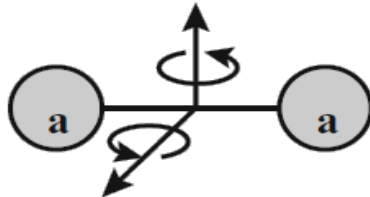
实际发现, 很多应用并不完全满足以上模型的假设和前提, 但状态参数仍然基本满足理想气体状态方程。

内能和焓

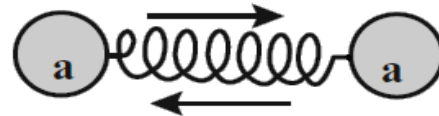
a 平动 translation



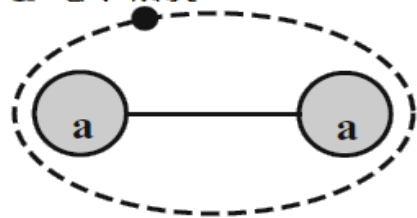
b 转动 rotation



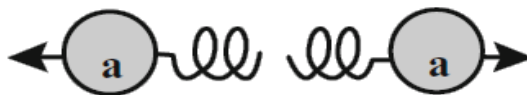
c 振动 vibration



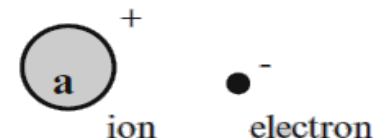
d 电子激发 electron excitation



e 离解 dissociation



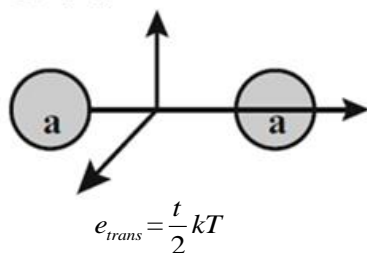
f 电离 ionization



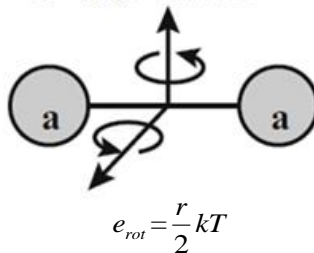
- 一个给定分子的能量是其平动动能、转动动能、振动动能和电子能的总和。
- 对于由大量分子组成的给定体积的气体，所有分子所具有的能量总和称为气体的内能。在质心为静止的坐标系中测量的系统总能量又称为系统的内能。
- 单位质量气体的内能称为气体的比内能，记为 e 。

$$e = e_{trans} + e_{rot} + e_{vib} + e_{elc}$$

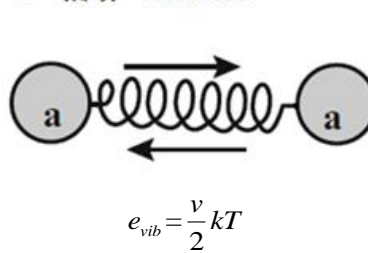
a 平动 translation



b 转动 rotation



c 振动 vibration



经典力学**能量均分原理**：能量平均分配到每个独立的自由度，大小为 $kT/2$ 。因此若 p 为独立自由度个数，有：

$$e_i = \frac{p}{2} kT$$

但实验观测，只有在非常高的温度下才如此。

e_{trans} 和 e_{rot} 与在低温时就已激发；对于空气： $e_{vib} > 800K$ ，电离 $> 9000K$

与比内能 e 相联系的另一个量为**比焐** h ，定义为：

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

e 和 h 均为热状态变量，它们只依赖于气体的状态而与过程无关。

■ 完全气体 (Perfect Gas)

完全气体满足理想气体状态方程：

$$p = \rho RT \qquad pV = nR_1T$$

对于完全气体， e 和 h 都只是温度的函数：

$$e = e(T)$$

$$h = h(T)$$

$$de = c_v dT$$

$$dh = c_p dT$$

c_v 称为定容比热， c_p 称为定压比热，对于空气，在 $T < 1000\text{K}$ 时，均为常数，这类完全气体称为量热完全气体。

$$e = c_v T$$

$$h = c_p T$$

$$c_p - c_v = R$$

定义比热比

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$



$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

单原子气体，只有平动能(3自由度)

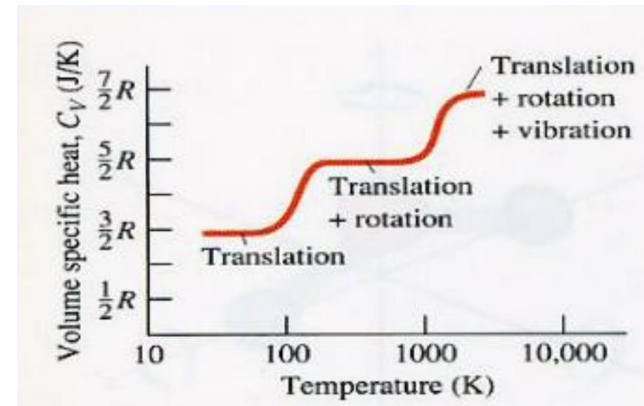
$$e = \frac{3}{2}RT, \quad c_v = \frac{3}{2}R, \quad c_p = R + c_v = \frac{5}{2}R, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$$

He, Ne, Ar, Kr, Xe

双原子气体，平动能(3自由度) + 转动动能(2自由度)

$$e = \frac{5}{2}RT, \quad c_v = \frac{5}{2}R, \quad c_p = R + c_v = \frac{7}{2}R, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$$

H₂, N₂, O₂, CO, NO, HCl...



对于空气:

$$\gamma = 1.4$$

■ 熵 (entropy) : 混乱程度的度量

- 玻尔兹曼熵方程 (玻尔兹曼 1877) :

$$S = k \ln \Omega$$

参量 S 称为体系的熵, 一个体系的熵就是体系可达状态数对数的量度。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial E} &= \beta(E) \\ kT &\equiv \frac{1}{\beta} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$$

Gibbs熵方程:

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i$$

p_i 为系统处于第 i 种状态的概率

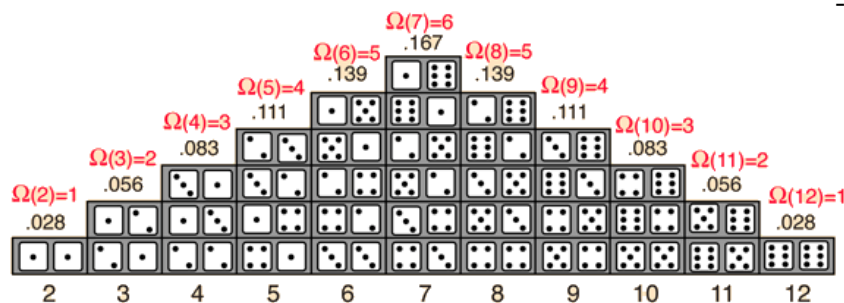


Science advances funeral by funeral.

-Max Planck

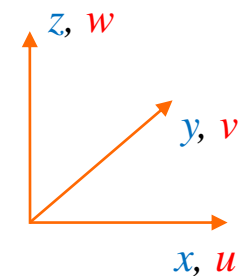
是非审之于己, 毁誉听之于人, 得失安之于数

-岳麓书院



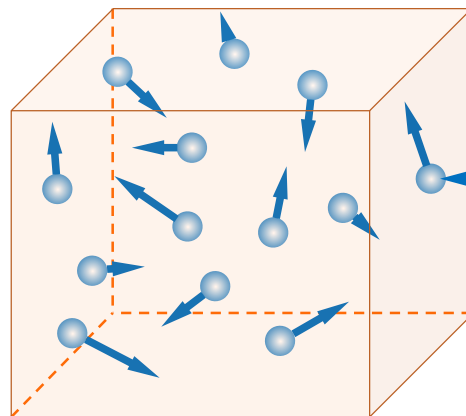
Total number of microstates: 36

Total number of macrostates: 11



$$d\mathbf{x} = dx dy dz$$

$$d\mathbf{v} = du dv dw$$



t时刻, 空间位置 \mathbf{x}
以速度 \mathbf{v} 运动

定义 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ 为速度分布函数,

$$dN = f d\mathbf{x} d\mathbf{v}$$

为时刻 t 在关于空间位置 \mathbf{x} 和速度空间 \mathbf{v} 的相空间微元 $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ 的粒子数。

与宏观量的联系:

质量密度: $\rho(\mathbf{x}, t) = \int m f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$

动量密度: $\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int m f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}$

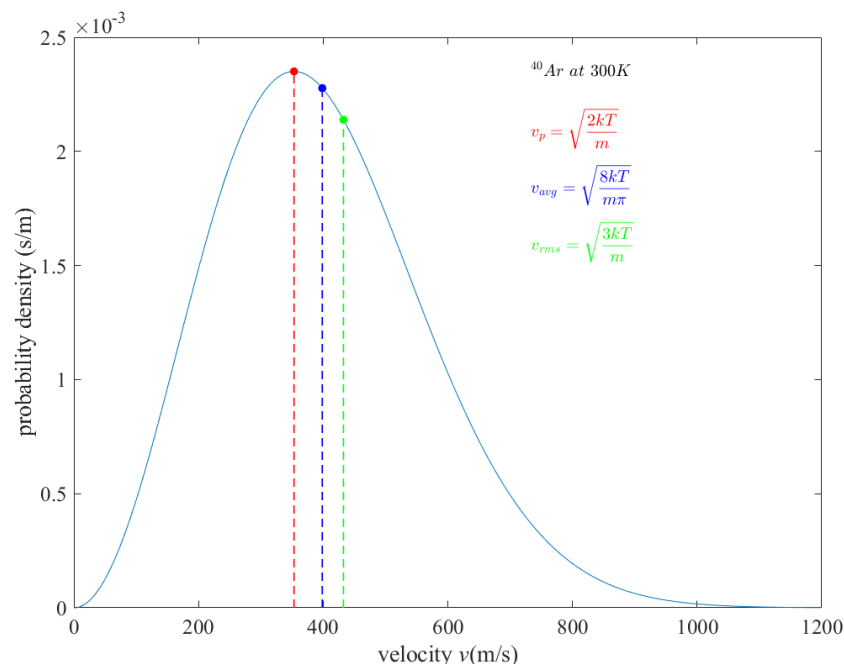
能量密度: $\rho(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t) = \int \frac{1}{2} m f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 d\mathbf{v}$

- Maxwell-Boltzmann 分布 (1869)

$$f_{\mathbf{v}}(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}}$$

$$f_v(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad \rightarrow$$

$$f_E(E) = 2\sqrt{\frac{E}{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}}$$



其中 f 为在平衡态气体概率分布函数

- Boltzmann方程 (1872)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = C$$

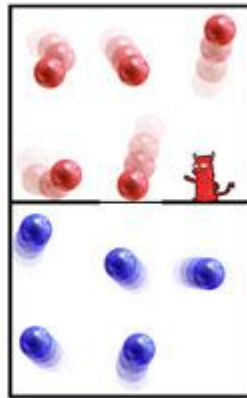
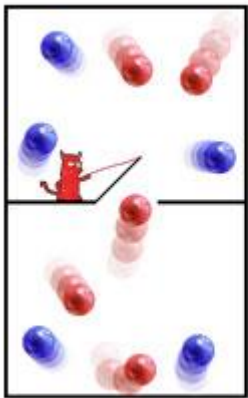
$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ 为速度分布函数, C 为碰撞项。通过Chapman–Enskog展开, 可得到Euler方程, NS方程等等。

- Boltzmann H定理 (1872)

分子混沌 (molecular chaos) : 相互碰撞的粒子的速度和位置均是独立不相关的。

$$H(t) = \int f \ln f d\mathbf{x} d\mathbf{v} \quad -\frac{H(t)}{dt} \geq 0$$

- Maxwell Demon (麦克斯韦 1871)



Claude E. Shannon

A Mathematical Theory of Communication, Bell System Technical Journal, 1948

Mihai D. Vidrighin, et al. "Photonic Maxwell's Demon." Physical Review Letters.

<http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.050401>

熵的计算:

若热量是可逆地加载系统上:

$$\delta q = Tds$$

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

由焓的定义:

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

$$dh = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right) dp$$



$$Tds = dh - \frac{1}{\rho} dp$$

$$de = c_v dT, \quad dh = c_p dT$$



对于理想气体:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

考虑热力学过程的初始状态1和结束状态2:

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T} - \int_{p_1}^{p_2} R \frac{dp}{p}$$

对于量热完全气体, C_p 和 R 为常数

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

或者:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

熵是两个热力学状态参数的函数

$$s = s(p, T)$$

■ 等熵关系式:

对于绝热过程: $\delta q = 0$

对于等熵过程: $dS_{irrev} = 0$

$$0 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\frac{c_p}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$



$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

类似地:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

- 将等熵过程中的压强、密度、温度联系起来；
- 许多实际流动问题可以被假设为等熵的；
- 附面层之外的绝大多数流动可视为等熵流动；
- 此公式对量热完全气体有效。

对于无粘等熵流动：

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\nabla p \cdot \mathbf{V}$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\mathbf{V} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\mathbf{V} \cdot \left(\frac{C\gamma}{\gamma-1} \nabla \rho^{\gamma-1} \right)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \text{const}$$

■ 输运过程的分子运动论

● 扩散（质量）

当气体中沿某一方向存在浓度（质量密度）梯度时，分子会从浓度高的地方传播浓度度低的地方。粒子的流密度：

$$j = -D\nabla n_1 \qquad D \propto \bar{u}\lambda$$

n_1 为单位体积粒子数。 \bar{u} 为分子均方根速度， λ 为气体分子平均自由程。

● 粘性（动量）

$$\tau = 2\mu\varepsilon \qquad \mu \propto \rho\bar{u}\lambda$$

● 热传导（能量）

当气体中沿某一方向存在温度梯度时，热量会从温度高的地方传向温度低的地方，这种性质称为气体的传热性。热流密度：

$$q = -\kappa\nabla T \qquad \kappa \propto n\bar{u}c_v\lambda$$

1. 查阅文献，从**Gibbs**熵方程推出**Boltzmann**熵方程。

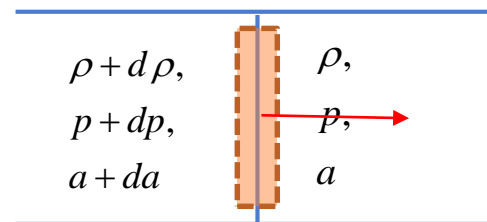
2. 思考题：

现在我们了解宇宙是否是一个孤立系统？星球及星系的形成是否有悖于熵增原理？

3. 自行学习后推导输运系数（扩散、热传导）的微观表达形式（蓝色公式）。

10.3 声速

微弱扰动在弹性介质中的传播速度——声速——是研究可压缩流场的一个很重要的物理量。在不可压流中，微弱扰动传播速度是无限大。



取相对坐标，观察者和波阵面AA在一起

根据质量守恒定律 $\rho a = (\rho + d\rho)(a + da)$

据动量定理 $p + \rho a^2 = p + dp + (\rho + d\rho)(a + da)^2$

略去二阶小量，得：

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

声速 a 是介质压缩性的一个指标。

等熵过程 $a = \sqrt{\gamma RT}$ ，马赫数定义为： $M = u/a$

声速的大小只与气体种类和气体的绝对温度有关，与绝对温度 T 的平方根成正比。

10.4 可压缩性

物质可被压缩的大小程度称为物质的压缩性。从物理上讲,压缩性就是每单位压强变化引起的流体微元单位体积内的体积变化。

$$\tau = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

若定义 V 为比体积,即单位质量的体积

$$V = \frac{1}{\rho} \longrightarrow \tau = -\rho \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

$$\tau = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho\tau}}$$

可压缩性越小,声速越大

10.5 滞止参数的定义

假设流体微团通过一个给定点，对应的当地压强、温度、密度、马赫数、速度分别为 p , T , ρ , M , \mathbf{V} 。这里， p , T , ρ 是分别静变量（静参数），即静压、静温、静密度。

假想流体微团被缓慢绝热地减速至静止， p , T , ρ 将发生变化。定义此时流体微团对应的温度为总温 T_0 ，对应的焓为总焓 h_0 ，对于量热完全气体：

$$h_0 = c_p T_0$$

总温的确定：

假设流动

- 定常
- 绝热
- 体积力忽略

由能量方程：

定常

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS$$

$$= \int_V \rho q dV + \int_S k \nabla T \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dV + \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{V} dS$$

绝热

忽略热传导

忽略体积力

无粘

$$\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = -p \mathbf{n}$$

$$-\int_S p \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\int_S \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + p \right] (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \left[\left(e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{V} \right] dV = 0$$

$$\nabla \cdot \left[\left(e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{V} \right] = \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left(e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \left(e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

连续性方程: $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$



焓: $h = e + \frac{p}{\rho}$

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = 0$$

沿流线:

$$\frac{d}{dl} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = 0$$

$$h + \frac{v^2}{2} = \text{const}$$

流体微团被缓慢绝热地减速至静止

$$h + \frac{v^2}{2} = h_0$$

表明在流动中任一点，总焓由每单位体积的静焓和动能之和组成。

对于定常、绝热、无粘流动，能量方程沿流线可写成：

$$h_0 = \text{const}$$

- 一般来说，流线不同，对应的常数不同。
- 如果所有的流线都来自均匀自由来流，那么总焓在不同流线也是相等的，在整个流场中为常数，等于自由来流对应的总焓。

对于量热完全气体， $h_0 = c_p T_0$ 。因此，上面的结果也表明了对于定常、无粘、绝热的量热完全气体，总温保持不变，即

$$T_0 = \text{const}$$

总压与总密度的定义：

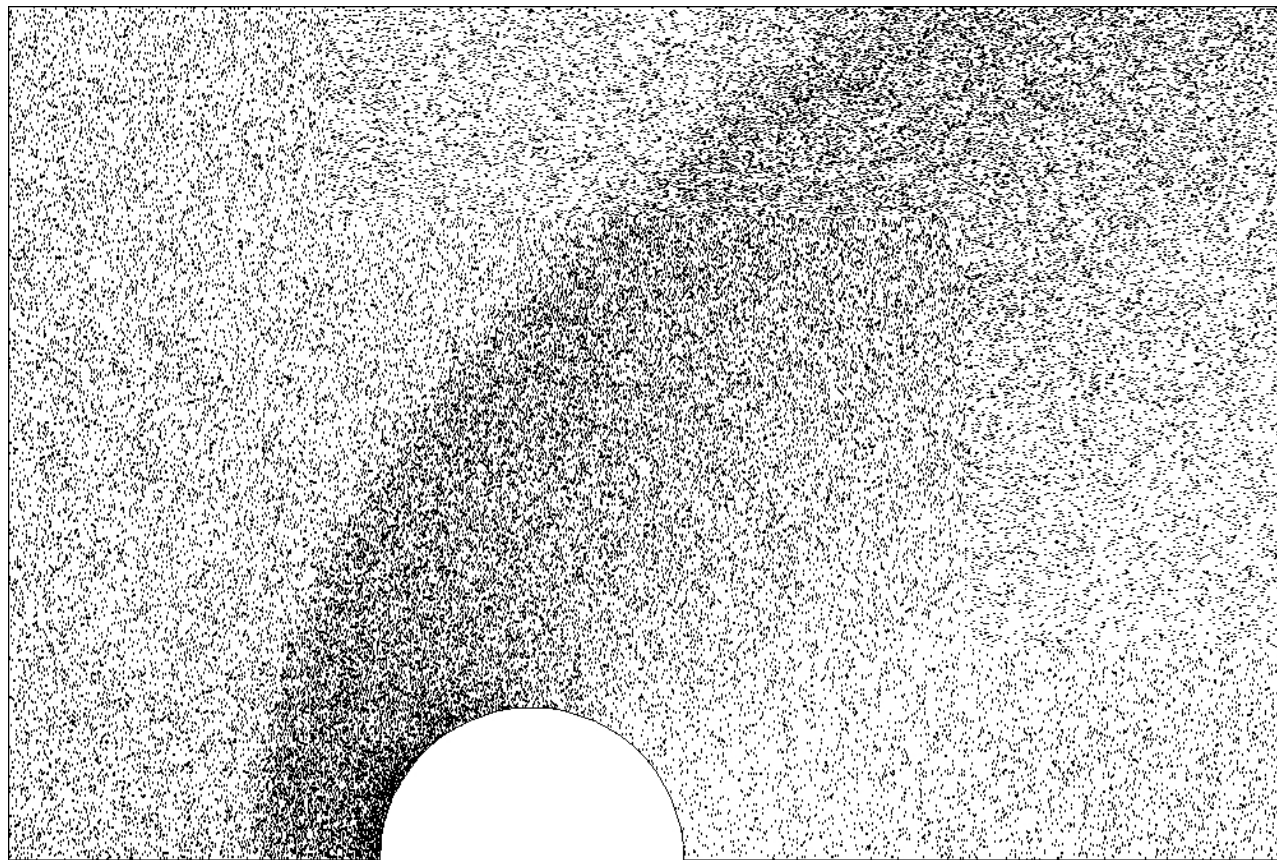
当流体微元被等熵地减速至静止时对应的压强和密度被定义为其总压和总密度。

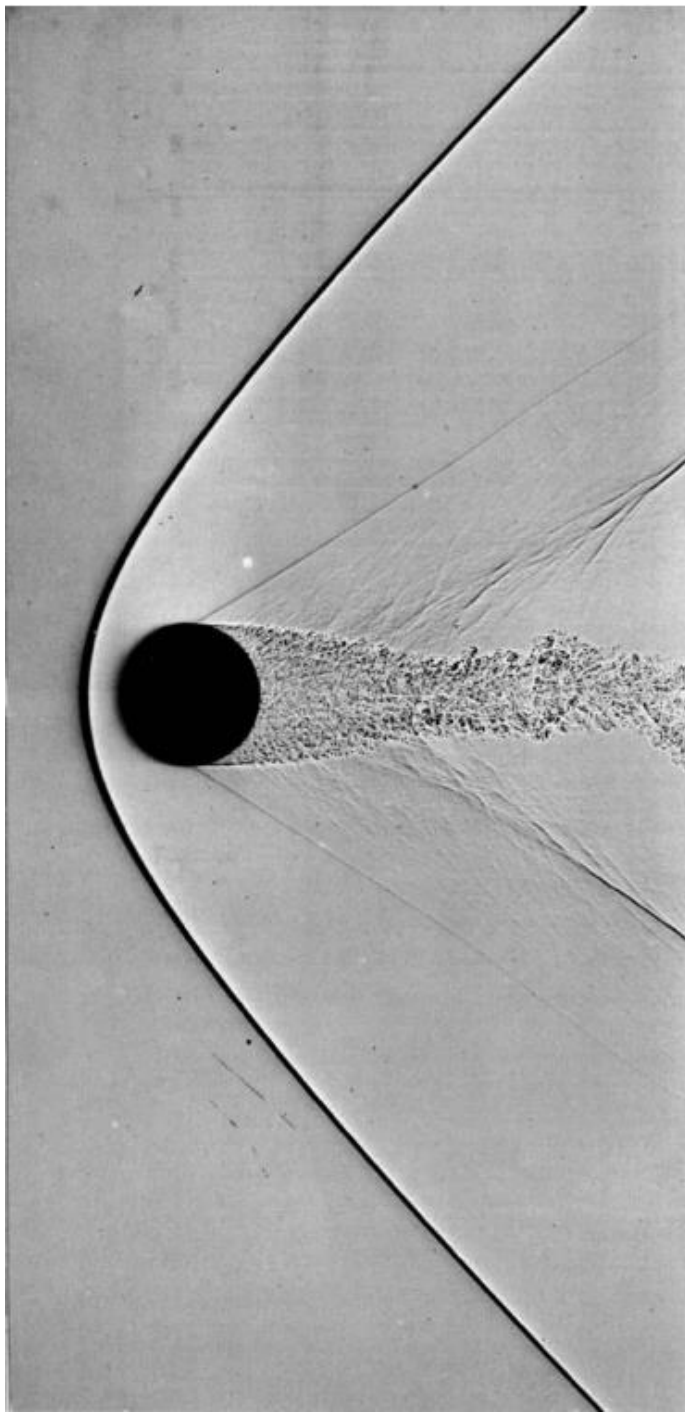
总压和总密度的概念适用于一般非等熵流动。

10.6 超音速流的一些特征：激波

超音速流动研究的一个重要内容就是计算激波的形状和强度。

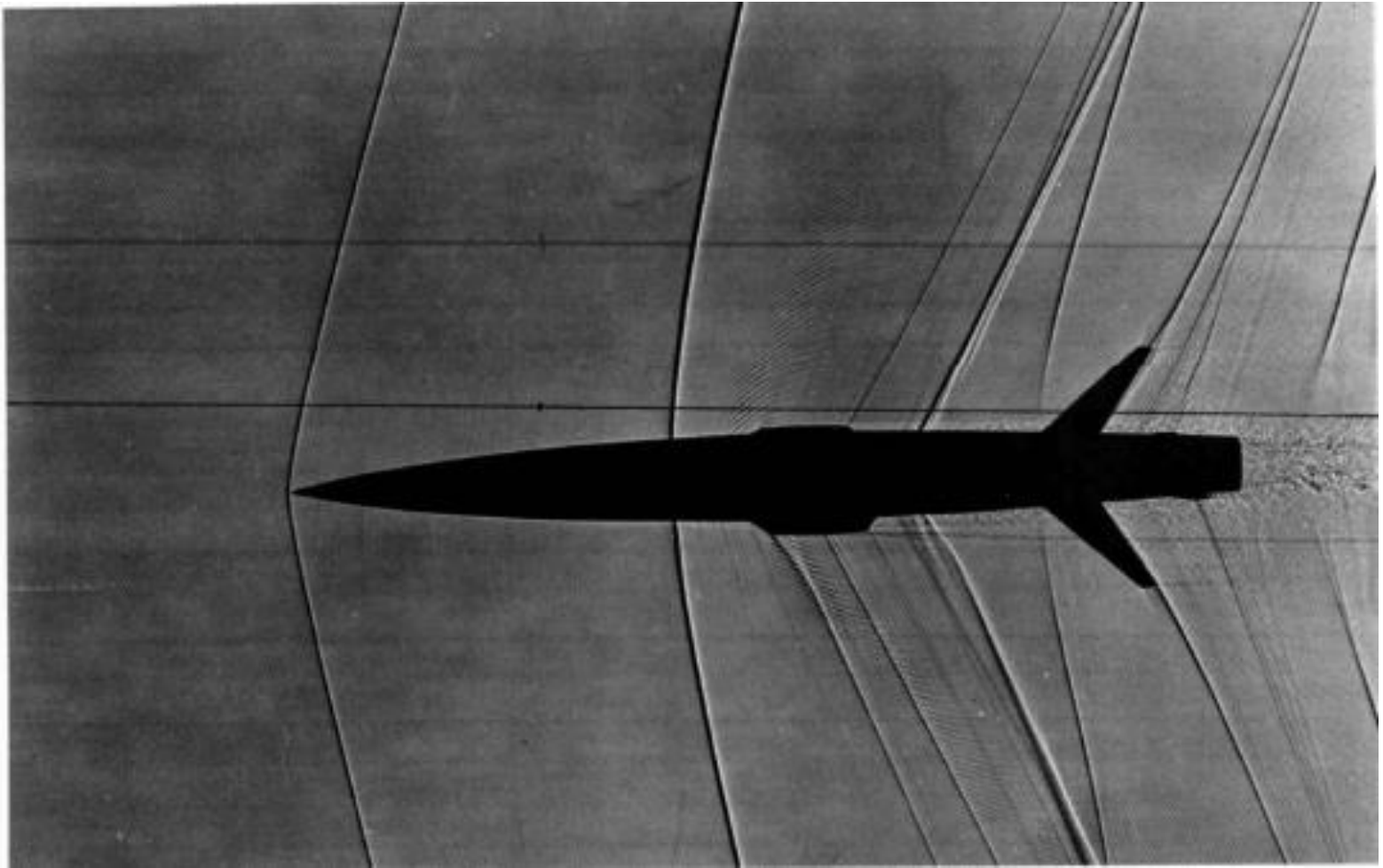
激波是一个极其薄的区域，厚度大约只有 10^{-5}cm 的量级，通过激波流动特性发生剧烈变化。





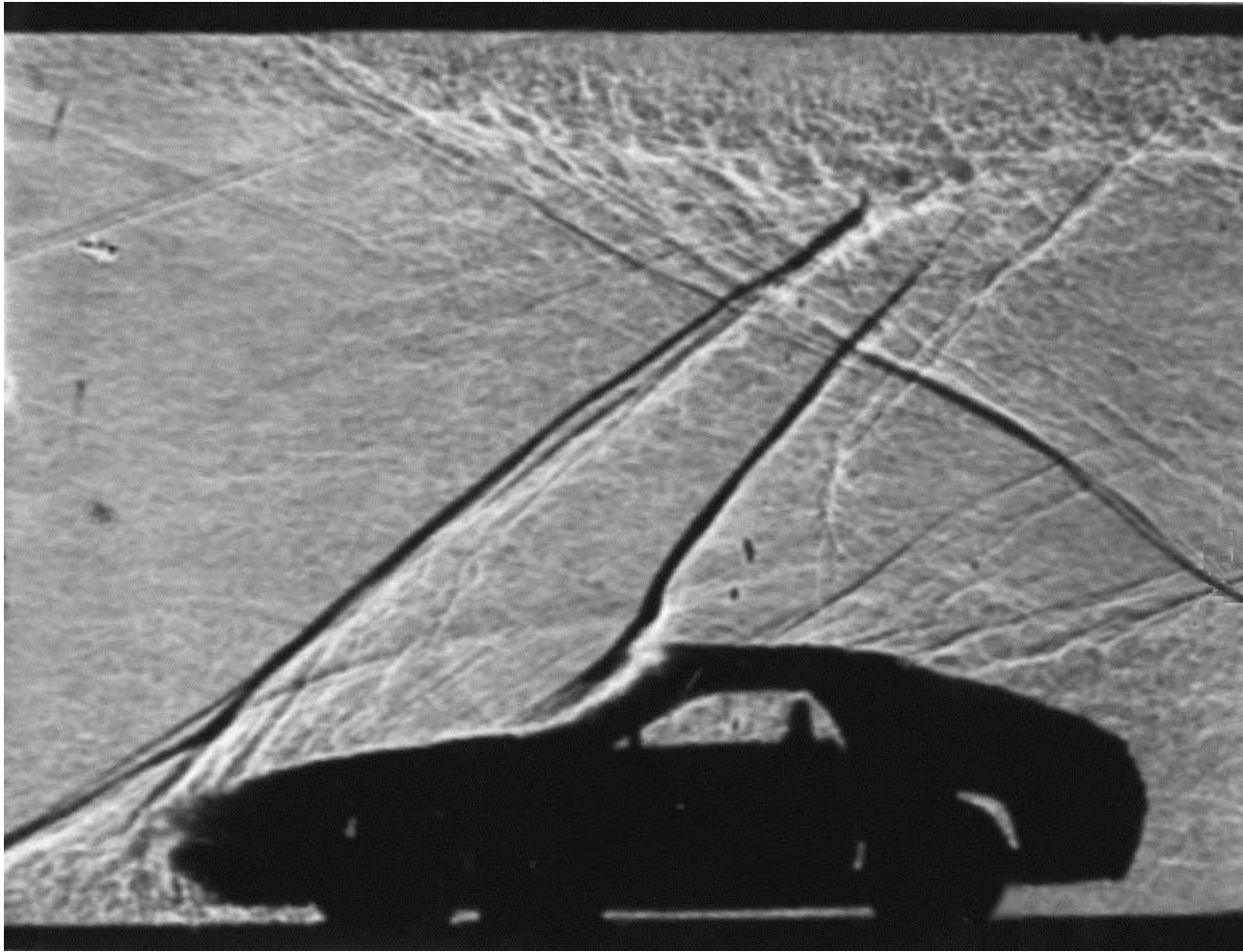
圆球 $M=1.53$

Photograph by A.C.Charters



$M=1.1$

Photograph by NASA



$Re=13E6$ (关于车长)

Photograph by John Donovan and Michael Selig



THRUST SSC team car as it broke the land speed record



10.7 临界参数

亚声速流中，考虑流场中一点，这点的当地静温为 T ，流体微团等熵加速至声速，或者超声速流中一点，这点的当地静温为 T ，流体微团等熵减速至声速，对应的温度计为 T^* ，此状态下，对应的参数称为临界参数，用“*”标记。

由能量方程：

$$h + \frac{v^2}{2} = \text{const}$$

$$h = c_p T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T$$



$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \text{const}$$

当速度为声速时, $u=a^*$

$$\frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} a^{*2} = \text{const}$$

与滞止参数的关系:

在同一流线上

$$\frac{\gamma RT}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma RT_0}{\gamma-1}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

由等熵关系式:

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}$$

当速度为声速时, $M=1$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

对于空气:

$$\frac{T^*}{T_0} = 0.833 \quad \frac{p^*}{p_0} = 0.528 \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.634$$

特征马赫数定义为:

$$M^* = u / a^*$$

特征马赫数定义为：

$$M^* = u / a^*$$

与当地马赫数的关系：

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{(\gamma + 1)a^{*2}}{2(\gamma - 1)}$$

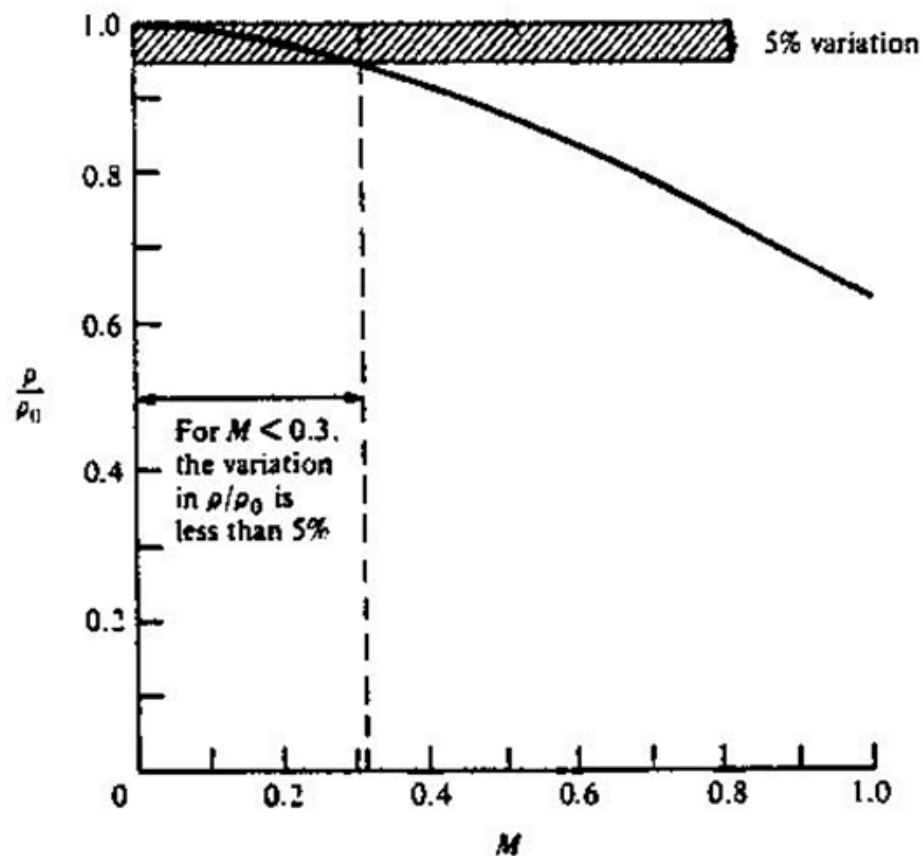
$$\frac{(a/u)^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} = \frac{(\gamma + 1)(a^*/u)^2}{2(\gamma - 1)}$$

$$\frac{(1/M)^2}{\gamma - 1} = \frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)} \left(\frac{1}{M^*} \right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$M^{*2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}$$

10.8 可压缩性的影响

假定一流体微团在无穷远处为静止状态，则该流体微团静密度与总密度相同，由能量方程



$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma - 1)}$$

对于空气， $M < 0.32$ 时，密度相对变化不到5%