

第六章： 绕翼型不可压缩流动



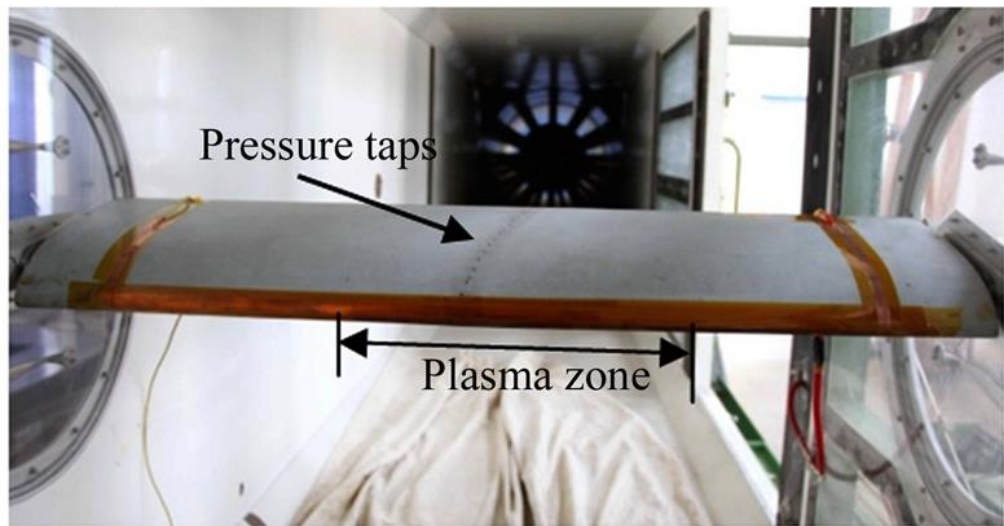
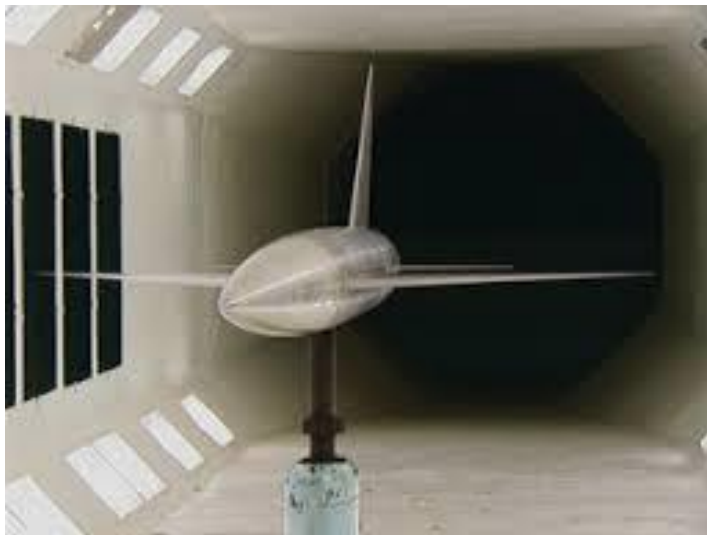
本章内容

1. 简介
2. 翼型
3. 面涡理论
4. 开尔文环量定理和启动涡
5. 库塔条件
6. 薄翼理论
7. 涡面元法

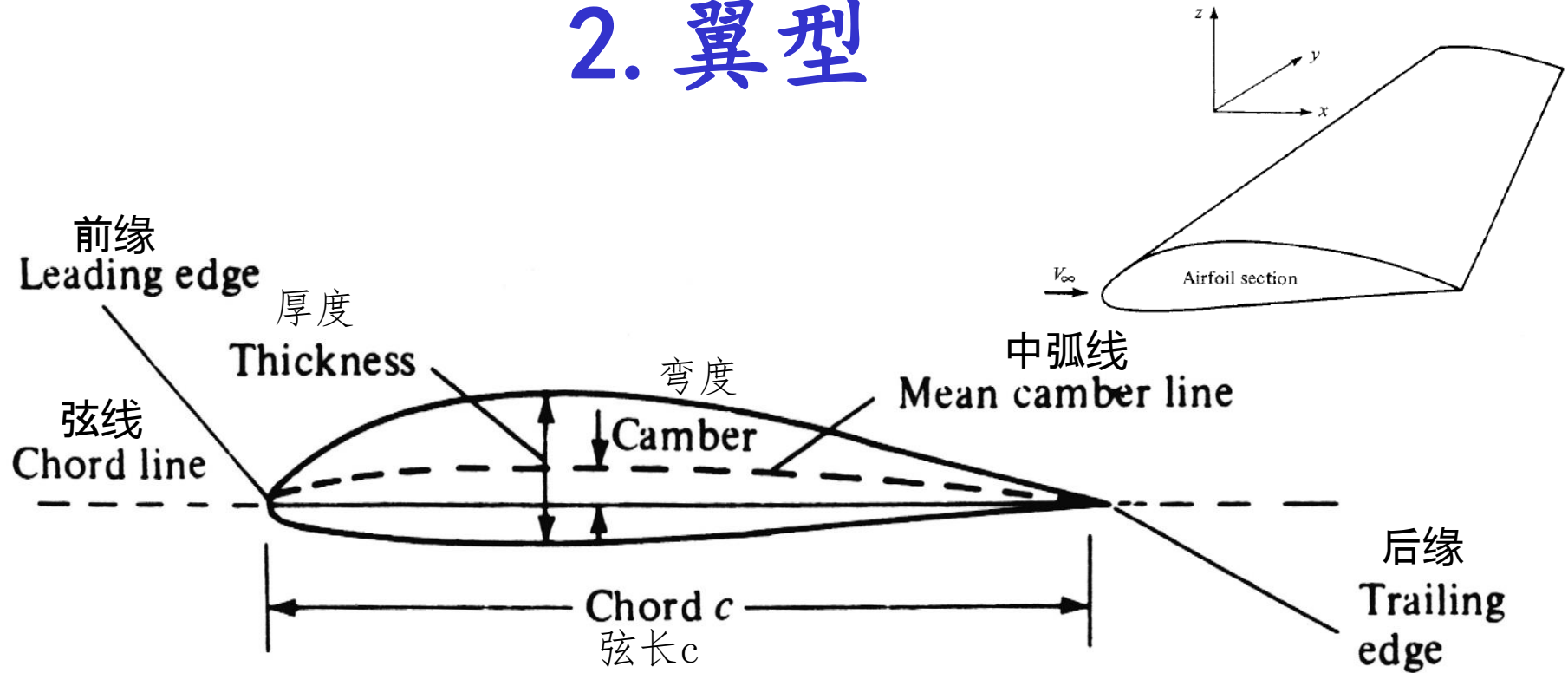
1. 简介

◆ 普朗特和他在哥廷根大学的同事提出，在翼的空气动力学方面，主要分两部分考虑：

1. 研究翼的横截面形状；
2. 研究实际有限长翼对1中得到的特性的修正。



2. 翼型



◆ 翼型参数

Leading edge: 前缘

Trailing edge: 后缘

Chord line: 弦线

Chord length: 弦长

Thickness: 厚度

Camber: 弯度

Mean chamber line: 中弧线

NACA 翼型系列

◆ **NACA**—美国航空咨询委员会（美国航空航天局 NASA 前身），对系列翼型进行研究，编号归档

◆ **四数字，NACA2412**

- 第一位：最大弯度相对弦长的百分数；
- 第二位：最大弯度沿弦线距前缘的距离相对弦长的十分数；
- 最后两位：最大厚度与相对弦长的百分数。

◆ **五数字，NACA23012**

- 第一位：乘以0.15为设计升力系数；
- 第二、三位：除以2为最大弯度沿弦线距前缘的距离相对弦长的百分数；
- 最后两位：最大厚度与相对弦长的百分数。

气动特性

◆ 升力：与重力方向相反的气动力分量

◆ 升力系数： $c_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c}$ 阻力系数： $c_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c}$

◆ 升力线斜率： a_0

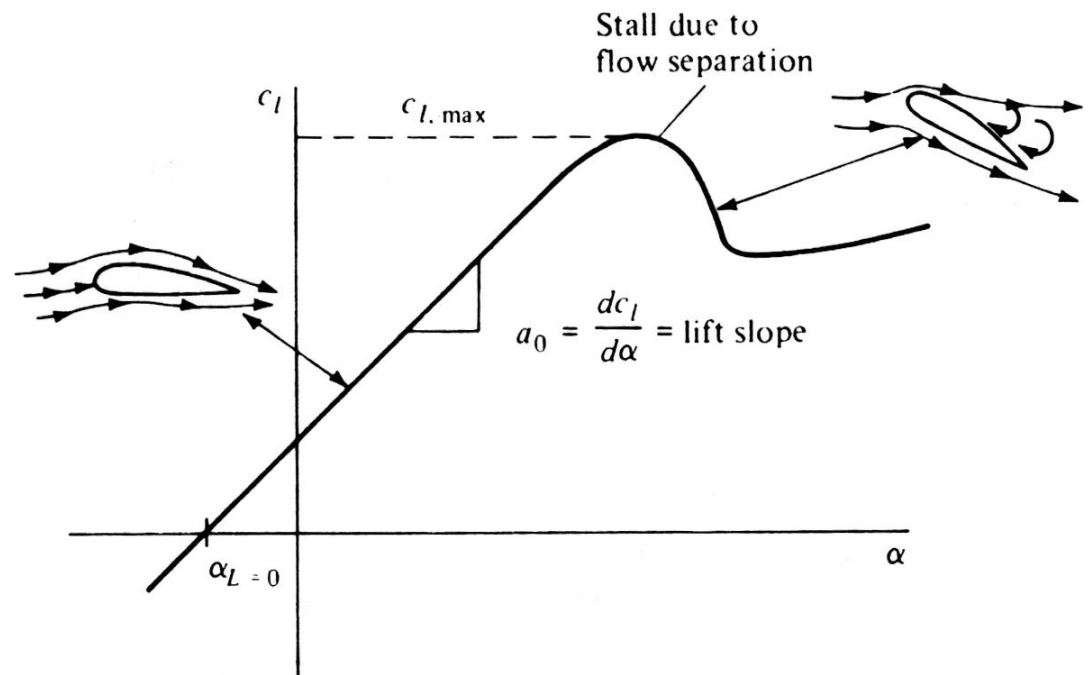
◆ 最大升力系数： $c_{l,max}$

◆ 攻角： α

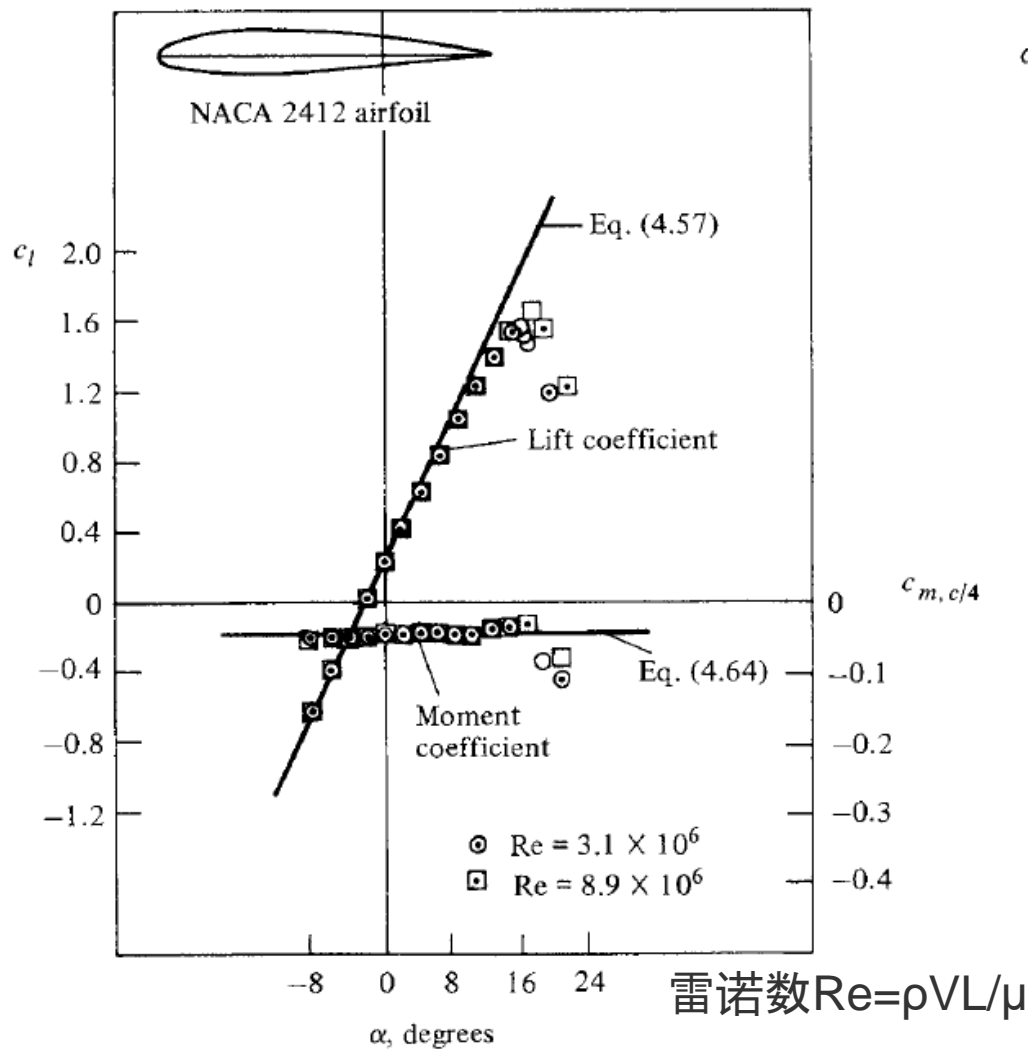
◆ 零升力攻角： $\alpha_{L=0}$

◆ 气动中心(焦点)

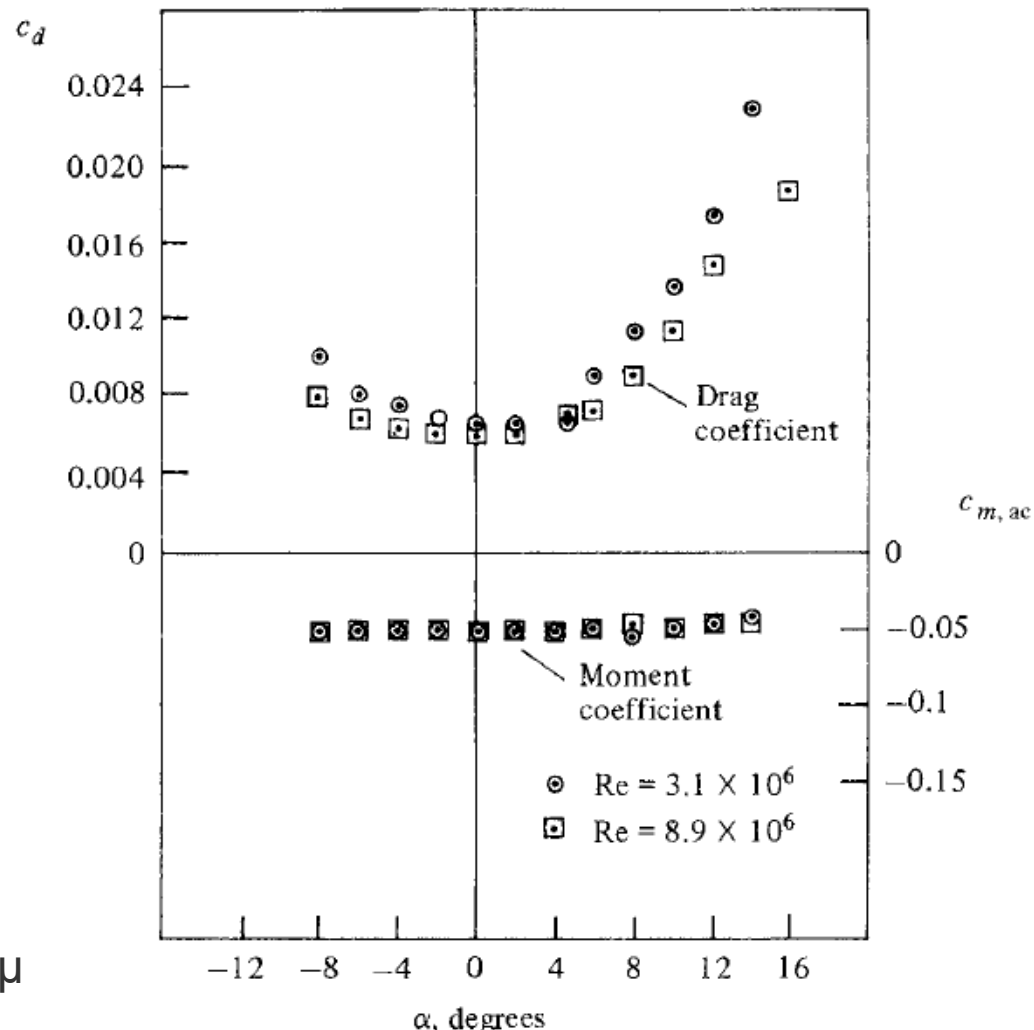
◆ 气动力矩不随迎角变化的点，叫做翼型的气动中心。



NACA2412翼型的升阻力系数



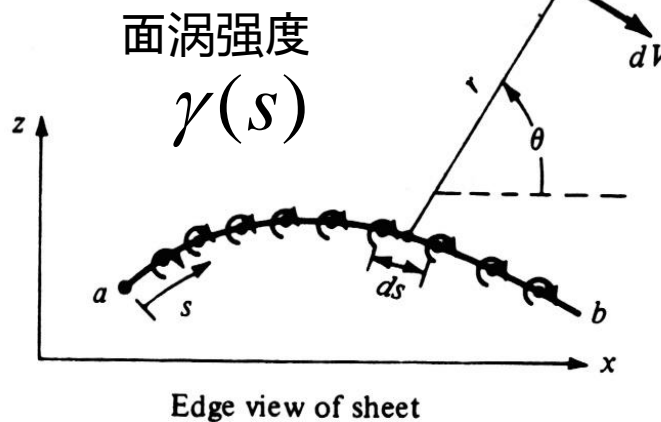
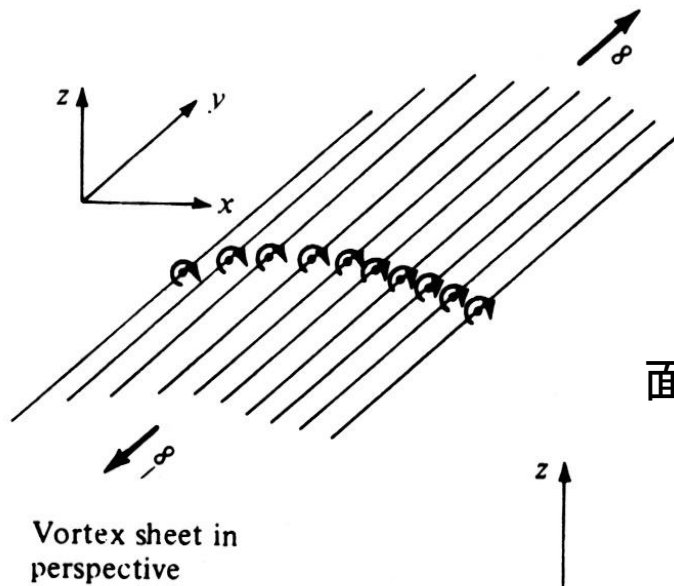
- 升力线斜率与雷诺数无关，最大升力系数取决于雷诺数大小
- 迎角不太大时，力矩系数与雷诺数关系不大
力矩系数参考点取1/4弦长处



- 翼型的阻力与粘性有关，阻力系数与Re有关
- 力矩系数参考点取气动中心ac处，很大迎角范围是常数

3. 面涡理论

◆ 面涡由无限多的涡丝构成，涡丝与展向平行。



微元速度势

$$d\phi = -\frac{\gamma ds}{2\pi} \theta$$

诱导速度

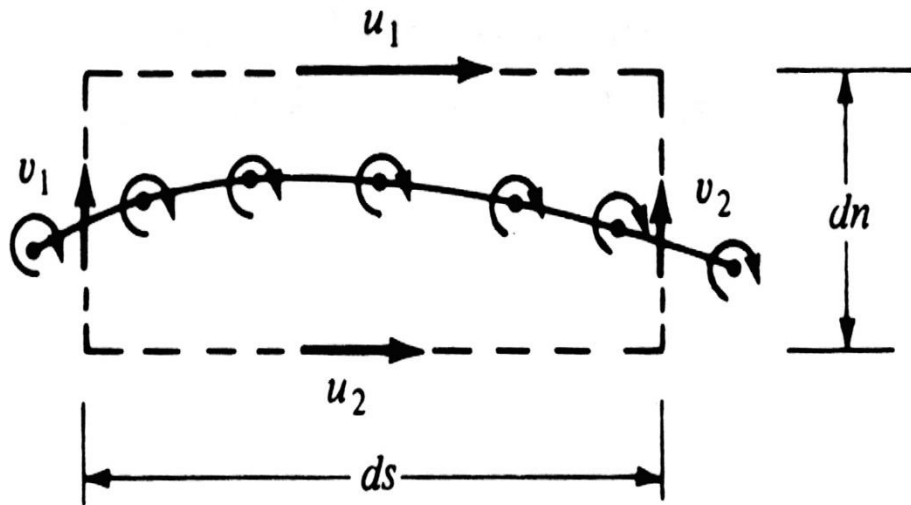
$$dV = -\frac{\gamma ds}{2\pi r}$$

面涡的环量 $\Gamma = \int_a^b \gamma ds$

面涡在P点处的势函数 $\phi(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta \gamma ds$

穿过面涡的切向速度阶跃

◆ 在面涡两侧，切向速度不连续



$$\Gamma = -(v_2 dn - u_1 ds - v_1 dn + u_2 ds)$$

$$\Gamma = (u_1 - u_2)ds + (v_1 - v_2)dn$$

由： $\Gamma = \gamma ds$

得： $\gamma ds = (u_1 - u_2)ds + (v_1 - v_2)dn$

$dn \rightarrow 0$ u_1, u_2 为切向速度



- 包围点涡封闭曲线的环量，等于点涡强度
- 包围多个点涡封闭曲线环量，等于包围区域内的旋涡强度

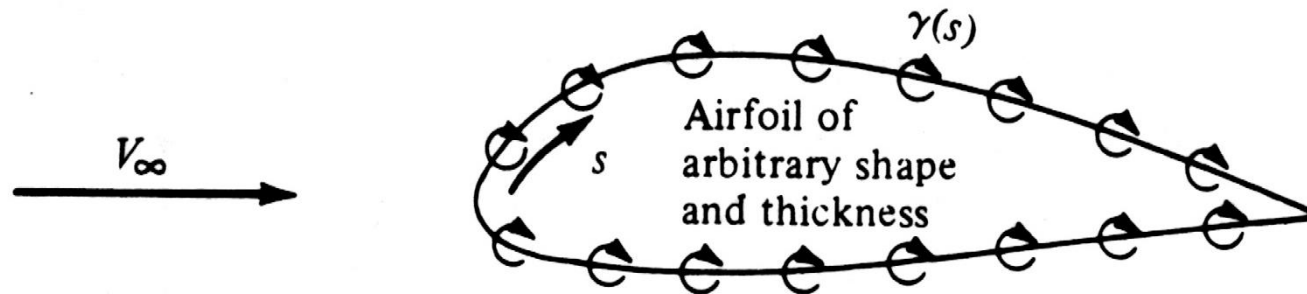
$$\gamma ds = (u_1 - u_2)ds$$

$$\gamma = (u_1 - u_2)$$

穿过面涡的当地切向速度改变量等于当地面涡强度！

计算无粘不可压缩翼型绕流的一般步骤

1. 用强度为 $\gamma(s)$ 的涡面替换翼型



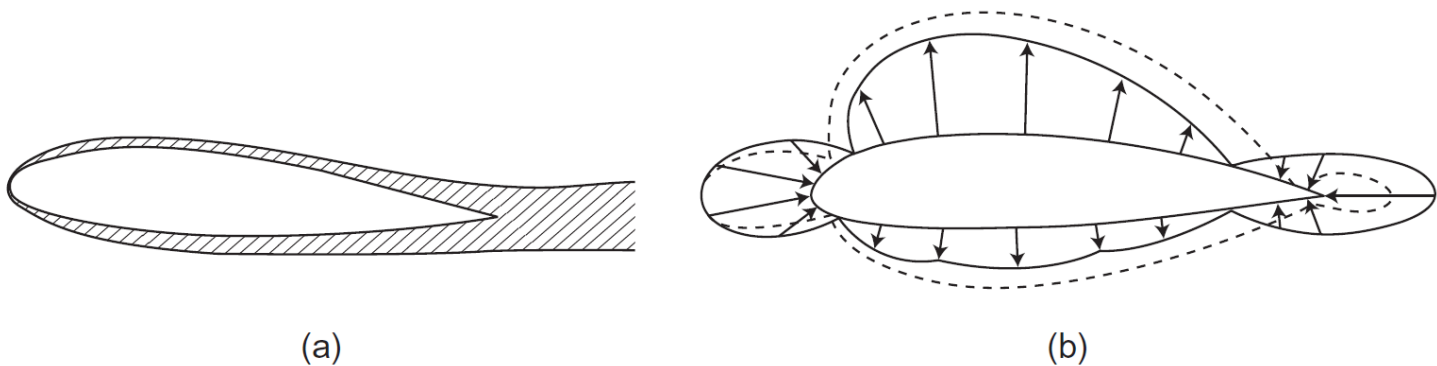
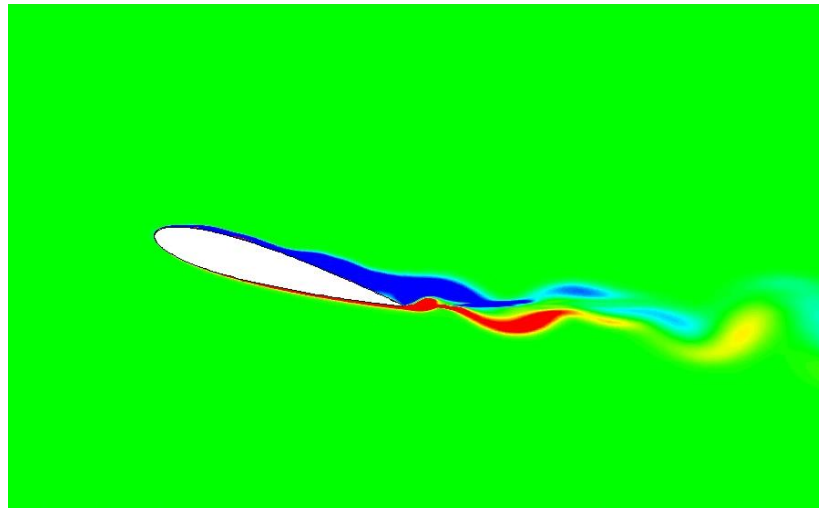
2. 找到合适 $\gamma(s)$ 的分布使得流动满足边界条件以及与实际的现象相符。

- 翼型表面为流线，尾缘为驻点（库塔条件）

3. 计算翼型的环量，并由茹科夫斯基定理求解升力。

- 经常需要数值求解；
- 一定程度上包含了对附面层的模拟。

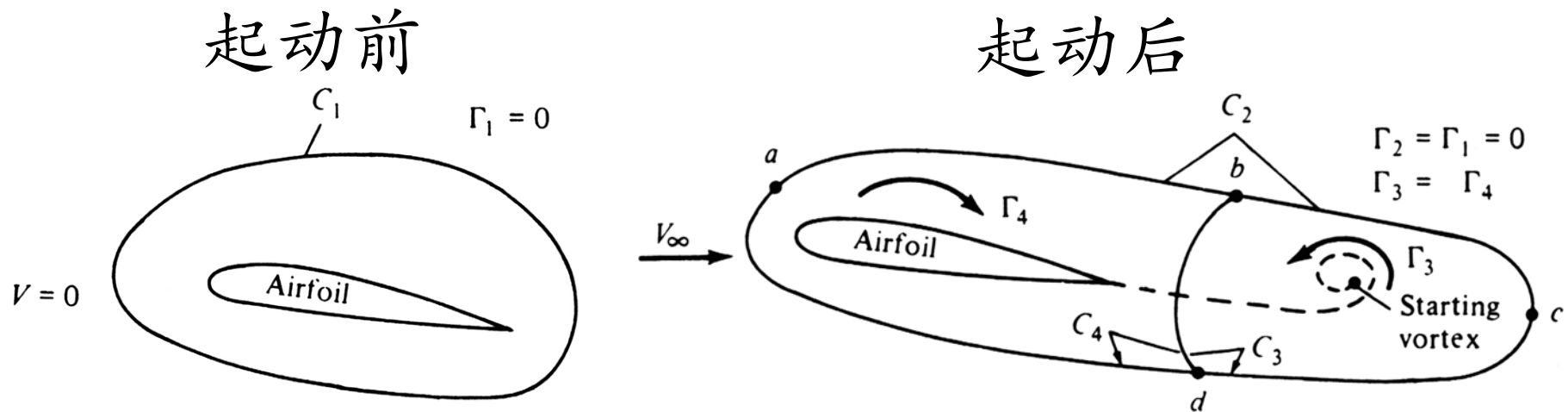
机翼绕流涡量图



- 面涡替代翼型表面的思路也蕴含着对翼型表面粘性附面层的模拟。
 - 在有粘性的实际物体绕流问题中，存在流体与物体间摩擦作用的影响，物体表面会有一层很薄的附面层，使得沿翼型表面会存在一个旋度分布。

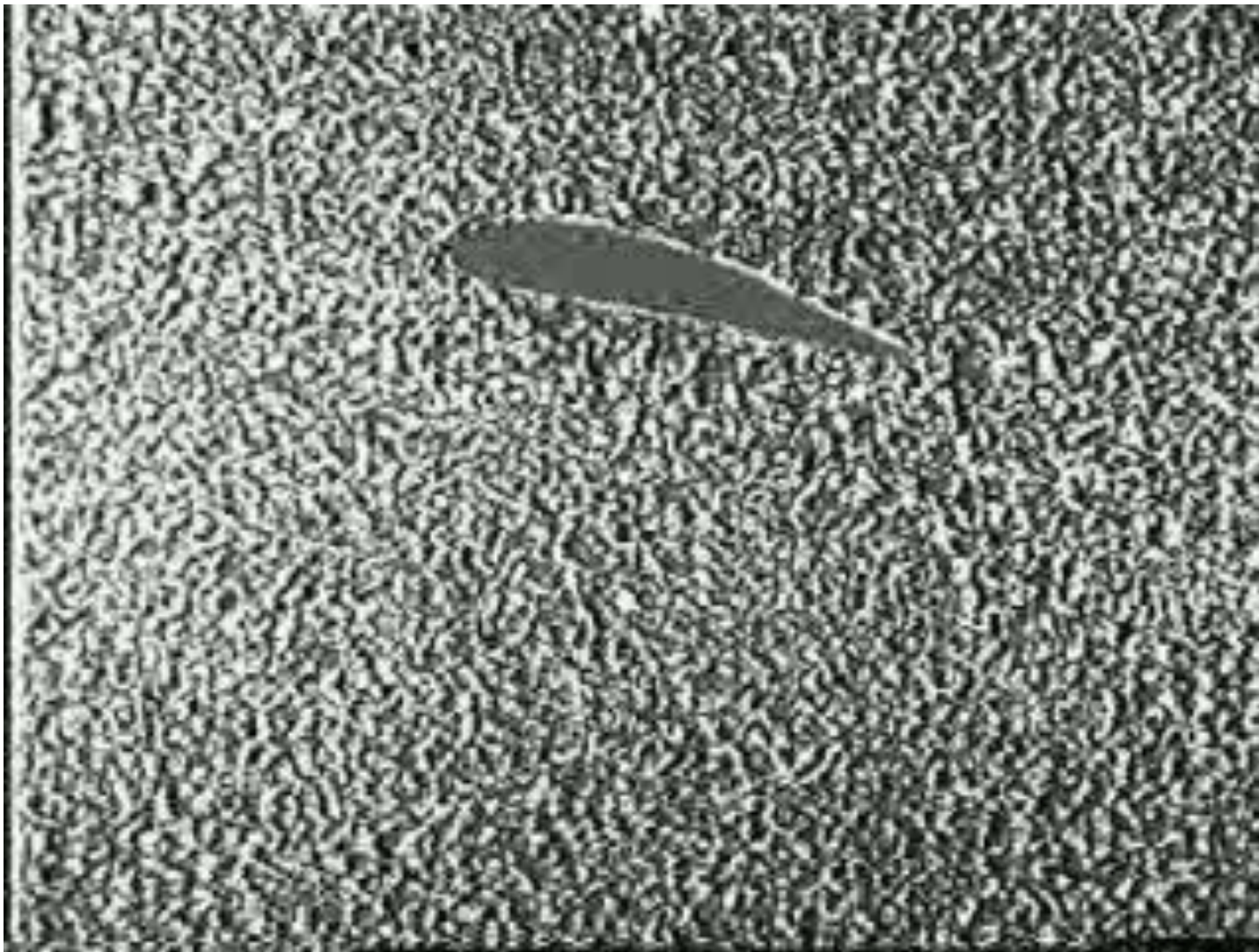
4. 开尔文环量定理和起动涡

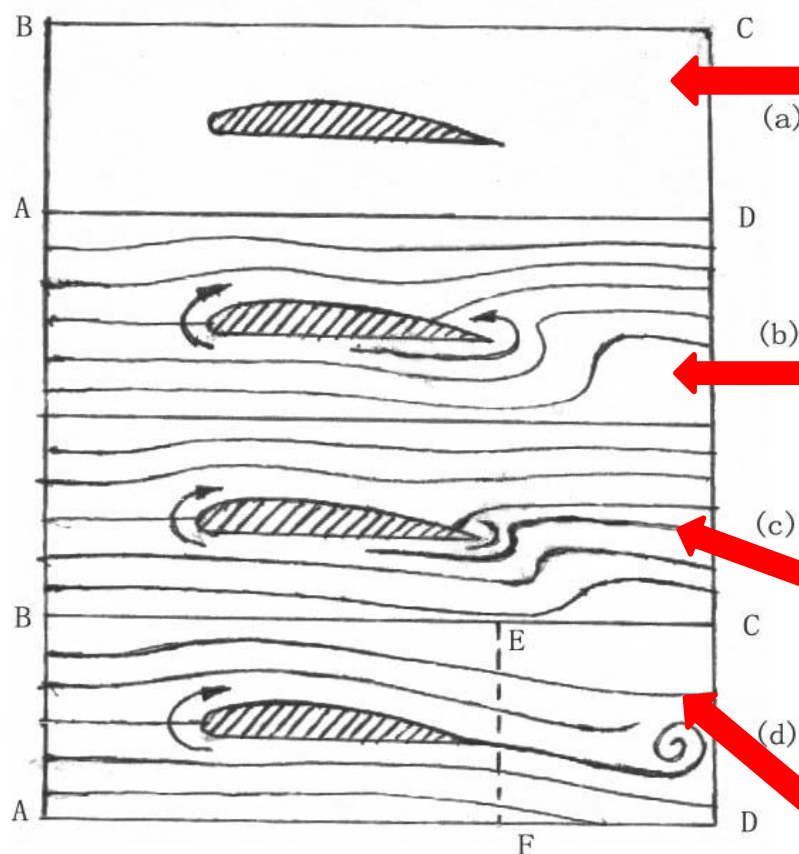
- ◆ 在无粘正压流体中，若外力有势，在一条由相同流体质点组成的封闭曲线的速度环量在随体运动中不随时间变化，即：
$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$



- ◆ 由开尔文环量定理，绕翼型的环量与起动涡的环量大小相等方向相反。

起动涡、附着涡和停止涡





1. 运动前，沿包围翼型的封闭线ABCD的环量为零；

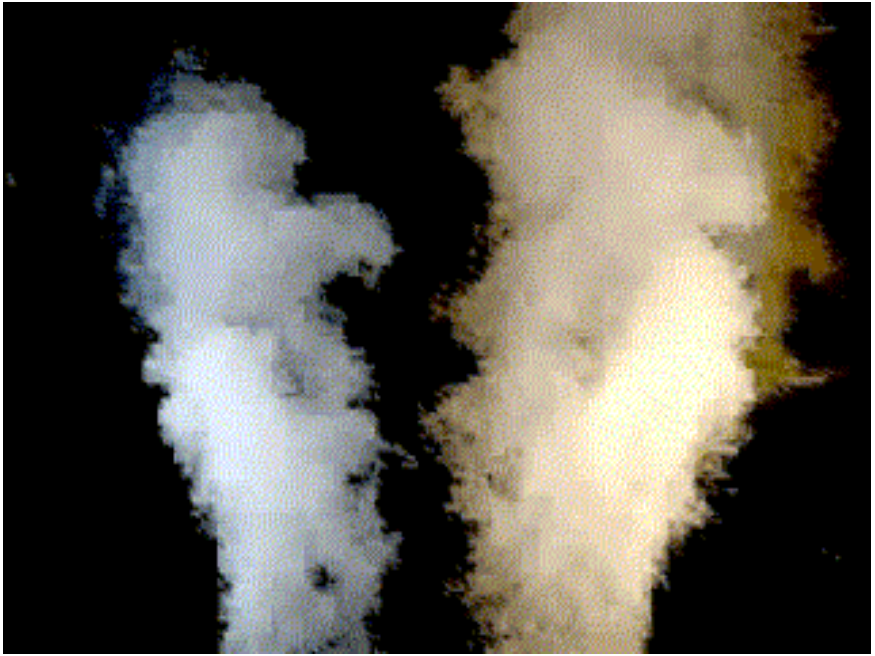
2. 起动后，由于上下翼线长度不同，后驻点位于上翼面尾缘之前方。下部流体绕过尖锐尾缘时形成尾部涡量。根据开尔文定理，必在翼型前部产生大小相等方向相反的涡量；

3. 在反涡量作用下，后驻点向尾缘点移动。随着涡量之增强，后驻点不断后移，直到后驻点与尾缘点重合，上下速度在此平滑联接为止；

4. 尾涡被冲向下游，沿包围翼型的ABEF线环量则保留下来。只要翼型速度等条件不变，该环量则保持不变。

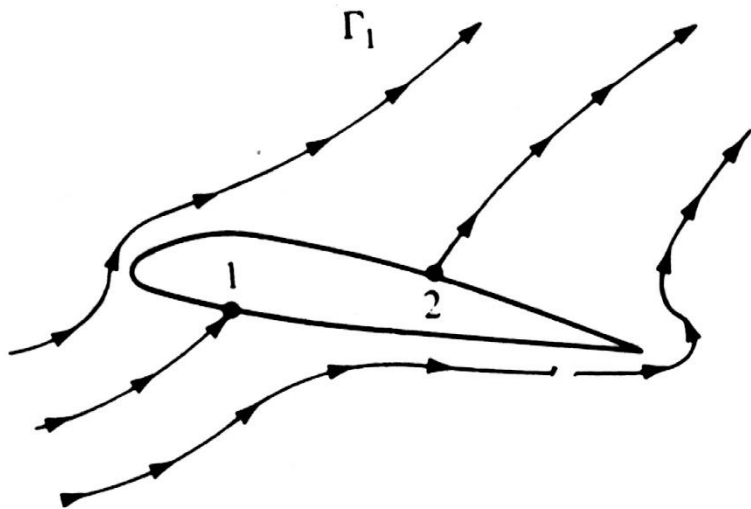
- ◆ 从尾缘脱落的尾涡称为“**起动涡**”；
- ◆ 而保持在翼型上的涡量称为“**附着涡**”；
- ◆ 如果翼型立即停止，附着涡也随即脱落下来形成“**停止涡**”。

角动量守恒

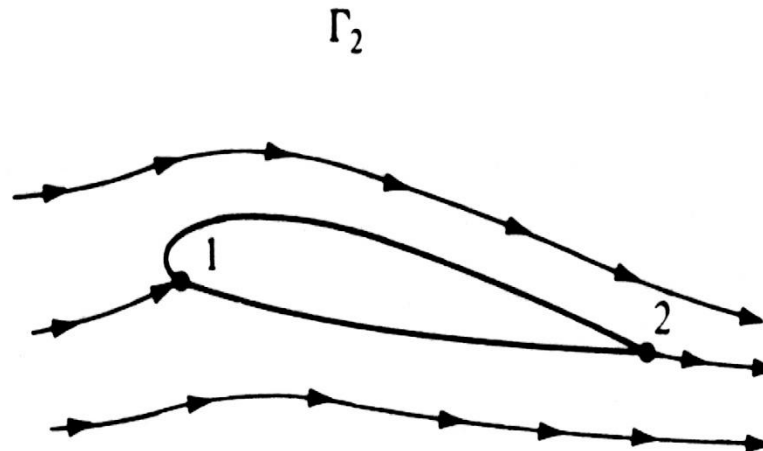


5. 库塔条件

无粘流可能的解



实际情形



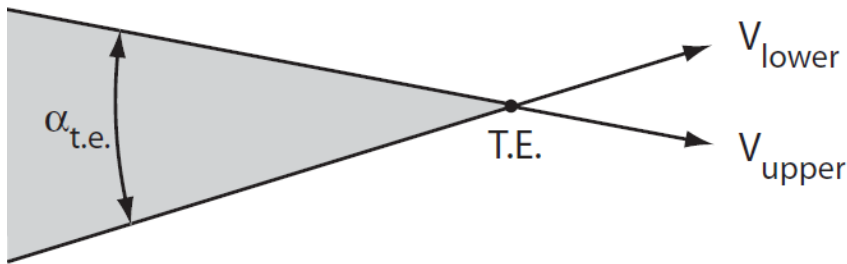
- ◆ 无粘流分析指出：在尖尾缘附近，流动速度趋于无穷，实际流动中不会存在。

Karamcheti, K., Principles of ideal fluid aerodynamics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966; 吴子牛等, 空气动力学, 清华大学出版社

- ◆ 具有尖锐后缘物体在粘性流体中运动时，会产生一个适当强度的绕物体环量，其环量大小刚好使得物体的后缘点为流动的驻点。

◆ 具有尖尾缘的翼型在流体中运动时会产生一个环量，使流体光滑流过后缘点：

- 若尾缘夹角为有限大小，则尾缘为后驻点

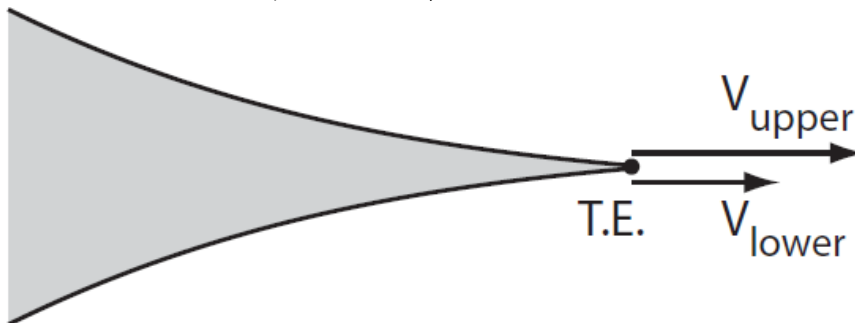


$$V_{upper} = V_{lower} = 0$$

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 = p_{TE} + \frac{1}{2} \rho_{TE} V_{TE}^2$$

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 = p_{TE}$$

- 若尾缘夹角为0，则流体沿上下表面流过后缘的速度为相等的有限值



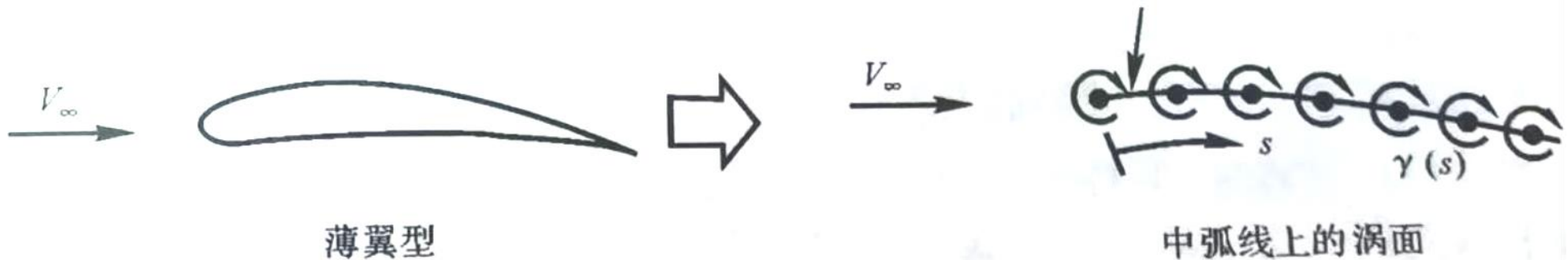
为保证压力唯一

$$V_{upper} = V_{lower}$$

- 库塔条件用面涡强度分布表述

$$\gamma_{TE} = V_{upper} - V_{lower} = 0$$

6. 薄翼理论

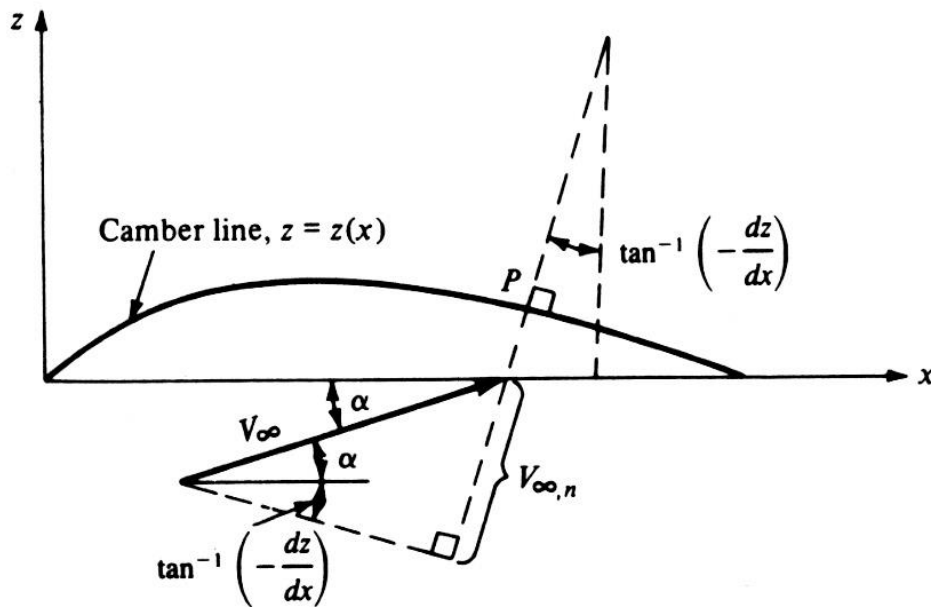


- ◆ 涡元仅分布在中弧线上，即上下涡面重合。
- ◆ 中弧线应是一条流线。
- ◆ 均匀来流与面涡诱导流场叠加。
- ◆ 要求在尾缘满足库塔条件则 $\gamma_{TE} = 0$

薄翼的速度关系

◆ 速度关系： $V_{\infty,n} + w'(s) = 0$

- $V_{\infty,n}$: 自由来流在中弧线的法向速度
- $w'(s)$: 涡面在中弧线上的法向诱导速度

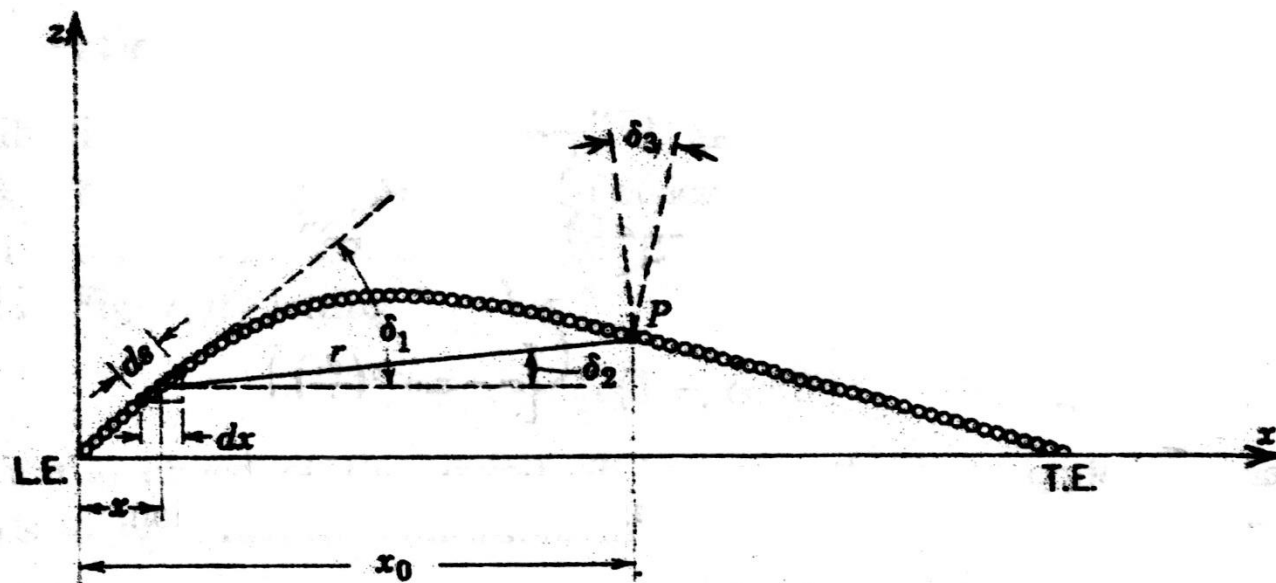


$$V_{\infty,n} = V_{\infty} \sin \left[\alpha + \tan^{-1} \left(-dz/dx \right) \right]$$

$$\alpha, \tan^{-1} \left(-dz/dx \right) \ll 1$$

$$V_{\infty,n} = V_{\infty} (\alpha - dz/dx)$$

平均弯度线上涡元的诱导速度



$$dw' = -\frac{\gamma ds}{2\pi r} \cos \delta_3 \quad \text{其中:} \quad r = \frac{x_0 - x}{\cos \delta_2} \quad ds = \frac{dx}{\cos \delta_1}$$

$$\rightarrow w' = -\frac{1}{2\pi} \int_{LE}^{TE} \frac{\gamma dx}{x_0 - x} \frac{\cos \delta_2 \cos \delta_3}{\cos \delta_1}$$

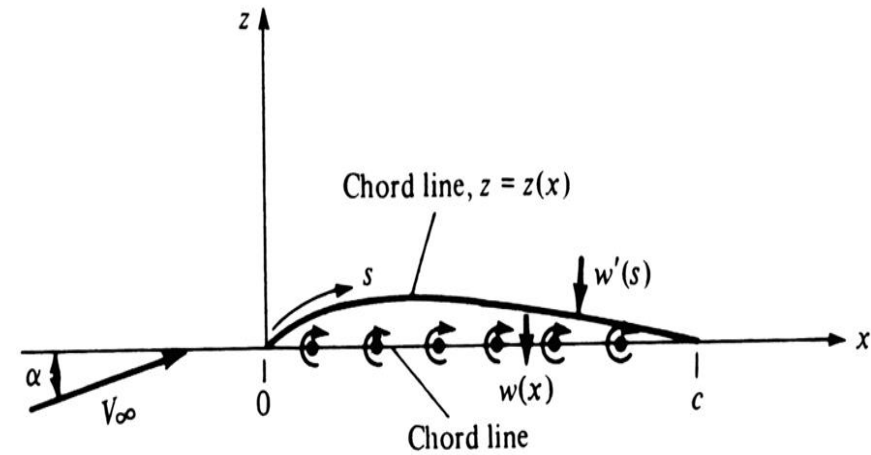
小弯度薄翼假设

对于小弯度薄翼：

$$\cos \delta_1 \approx \cos \delta_2 \approx \cos \delta_3 \approx 1$$

得到：

$$w'_{x_0} = -\frac{1}{2\pi} \int_{LE}^{TE} \frac{\gamma dx}{x_0 - x}$$



即

$$w'(x) = -\int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{2\pi(x - \xi)}$$

对于小弯度的薄翼：

$$w'(s) \approx w(x)$$

ξ [Xi] 沿着x方向距离前缘点距离。

最后简化为在x轴上满足边界条件和库塔条件：

$$V_{\infty, n} + w'(s) = 0$$

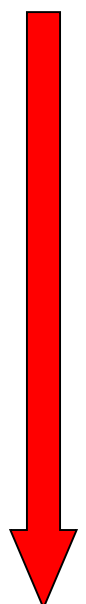
$$\gamma(TE) = 0$$

$$V_{\infty,n} + w'(s) = 0$$

$$w'(s) \approx w(x)$$

$$V_{\infty,n} = V_{\infty}(\alpha - dz/dx)$$

$$w(x) = -\int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)}$$


$$V_{\infty}\left(\alpha - \frac{dz}{dx}\right) - \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} = 0$$

得到x点的薄翼理论的基本公式：

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{(x-\xi)} = V_{\infty}\left(\alpha - \frac{dz}{dx}\right)$$

对称翼型

◆ 由对称翼型 $\frac{dz}{dx} = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{(x - \xi)} = V_\infty \alpha$$

◆ 令 $\xi = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta)$ $x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_0)$

$$d\xi = \frac{c}{2} \sin \theta d\theta$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = V_\infty \alpha} \xrightarrow{\text{保角变换}} \boxed{\gamma(\theta) = 2\alpha V_\infty \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta}}$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \pi \frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0}, n = 0, 1, 2, \dots$$

可用定积分关系验证

有弯度的翼型

1) 求解涡强分布

$$\text{令 } \xi = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \qquad x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_0)$$

$$d\xi = \frac{c}{2} \sin \theta d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = V_\infty \left(\alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$



$$\gamma(\theta) = 2V_\infty \left(A_0 \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right)$$

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} d\theta_0 \qquad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos(n\theta_0) d\theta_0$$

有弯度的翼型

2) 求解涡面环量:

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi) d\xi = \frac{c}{2} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$\gamma(\theta) = 2V_\infty \left(A_0 \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right)$$

$$\Gamma = cV_\infty \left[A_0 \int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta \right]$$

$$\int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta = \pi$$

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{for } n = 1 \\ 0 & \text{for } n \neq 1 \end{cases}$$

$$\Gamma = cV_\infty \left[\pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right]$$

有弯度的翼型

3) 求解单位展长升力:

$$L' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c \left[\pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right]$$

升力系数:

$$c_l = \frac{L'}{0.5 \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c} = \pi (2A_0 + A_1)$$

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} d\theta_0 \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} \cos(n\theta_0) d\theta_0$$


$$c_l = 2\pi \left[\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \right]$$

有弯度的翼型

升力线斜率: $\frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$

对比升力系数: $c_l = 2\pi \left[\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \right]$

$$c_l = 2\pi(\alpha - \alpha_{L=0})$$

 $\alpha_{L=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0$

对于对称翼型: $\alpha_{L=0} = 0$

$$c_l = 2\pi\alpha$$

有弯度的翼型

4) 求解单位展长升力力矩:

单位展长涡元关于前缘力矩:

$$dM = -\xi(dL')$$

单位展长涡面关于前缘力矩:

$$M' = -\int_0^c \xi(dL') = -\rho_\infty V_\infty \int_0^c \xi \gamma(\xi) d\xi$$

力矩系数:

$$c_{m,le} = \frac{M'}{0.5 \rho_\infty V_\infty^2 c^2}$$

$$c_{m,le} = -\frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) = -\left[\frac{c_l}{4} + \frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \right]$$

◆ 对于对称翼型： $c_{m,le} = -\frac{c_l}{4}$

◆ 关于距前缘1/4弦长处的力矩系数：

$$c_{m,0.25c} = \frac{\pi}{4}(A_1 - A_2)$$

- 与攻角无关, 与平均弯度线几何形状有关, 因此距前缘1/4弦长处为气动中心的位置。

◆ 对于对称翼型： $c_{m,0.25c} = 0$

有弯度的翼型

5) 求解压力中心:

$$x_{cp} = -\frac{M'_{LE}}{L'} = -\frac{c_{m,le}c}{c_l}$$

$$c_{m,le} = -\left[\frac{c_l}{4} + \frac{\pi}{4}(A_1 - A_2)\right]$$



$$x_{cp} = \frac{c}{4} \left[1 + \frac{\pi}{c_l} (A_1 - A_2) \right]$$

薄翼气动特性

◆ 对称翼型

- 升力系数与几何迎角成正比，升力线斜率为 2π
- 零升力迎角为0
- 压力中心和气动中心都在1/4弦线处

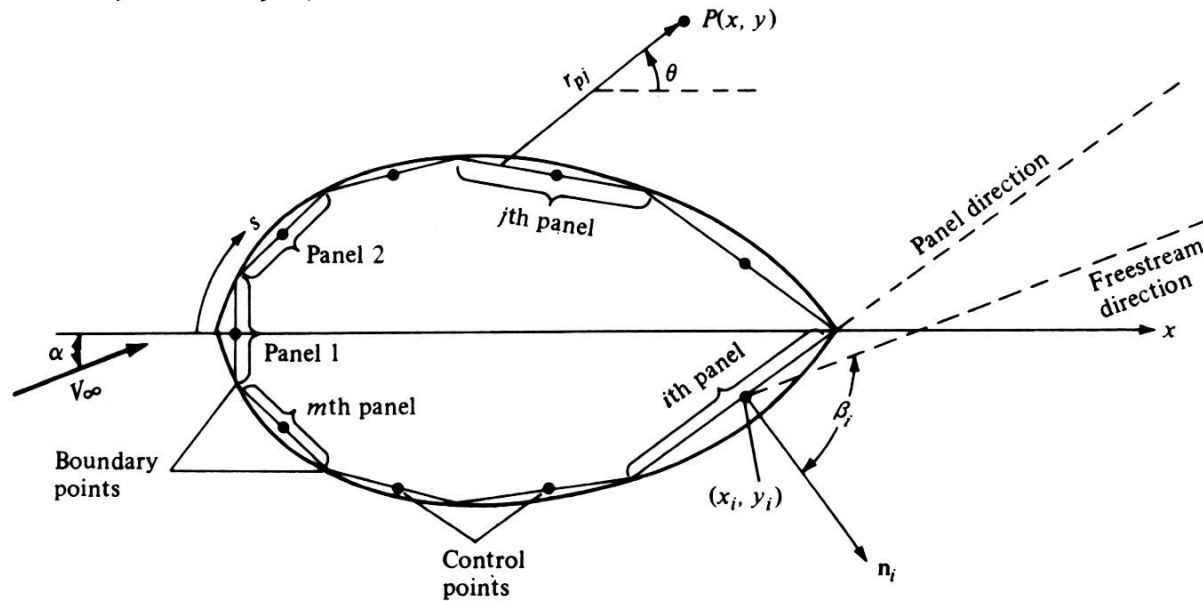
◆ 有弯度薄翼

- 升力系数 $c_l = 2\pi(\alpha - \alpha_{L=0})$
- 零升力迎角

$$\alpha_{L=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0$$

7. 涡面元法

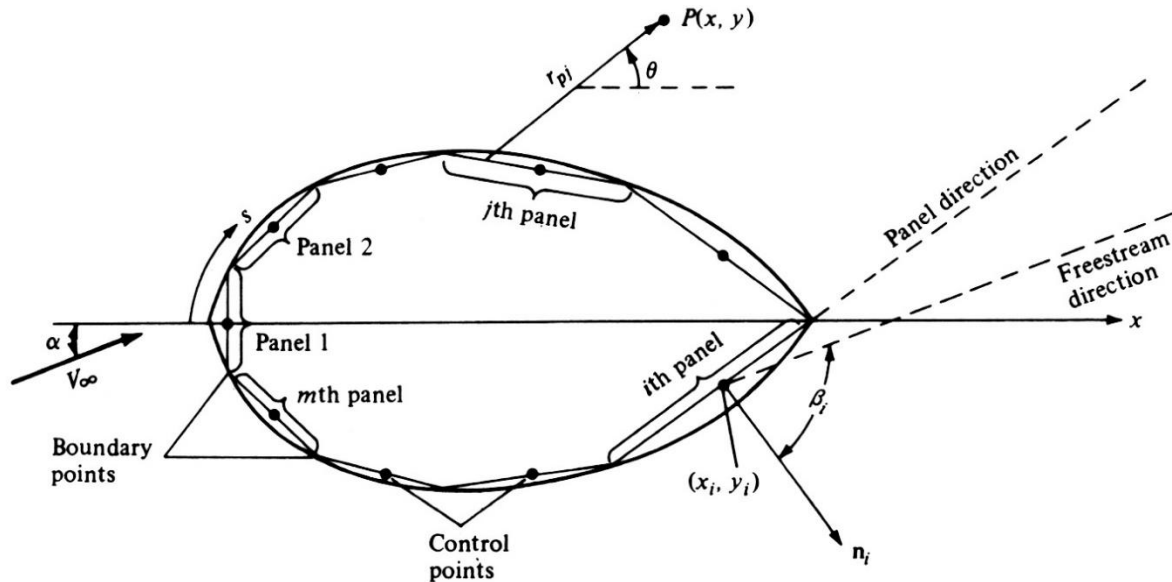
◆ 求解任意形状翼型绕流的数值方法



◆ 步骤:

1) 将涡面离散近似为一系列直板的涡面元，每段面元上的强度为常数分别为 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ，则第 j 段面元在 P 点诱导的速度势函数为

$$\Delta\phi_j = -\frac{1}{2\pi} \int_j \theta_{pj} \gamma_j ds_j \quad \theta_{pj} = \tan^{-1} \frac{y - y_j}{x - x_j}$$



2) 所有面元在P点诱导的速度势函数为


$$\phi(P) = \sum_{j=1}^n \Delta\phi_j = - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_j \theta_{pj} ds_j$$

所有面元在第i个面元控制点诱导的速度势函数为


$$\phi(x_i, y_i) = - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_j \theta_{ij} ds_j \quad \theta_{ij} = \tan^{-1} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

3) 应用边界条件

$$V_{\infty,n} + V_n = 0$$


$$V_{\infty,n} = \mathbf{V}_{\infty} \cdot \mathbf{n}_i = V_{\infty} \cos \beta_i$$
$$V_n = - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j$$

$$V_{\infty} \cos \beta_i - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j = 0$$


$$\mathbf{J}_{i,j} = \int_j \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j$$

$$V_{\infty} \cos \beta_i - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \mathbf{J}_{i,j} = 0$$

4) 在尾缘应用库塔条件

$$\gamma(TE) = 0$$

$$\gamma_i + \gamma_{i-1} = 0$$

由3) 和4) , 为n个未知数, n+1个方程, 为一个超定系统。因此, 可选择3) 中去掉一个方程, 然后与4) 的条件构成一个n个未知数, n个方程的线性系统。

5) 求解3) 和4) 的线性代数方程组, 得到

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$$

6) 翼型内部速度为0, 则表面切向速度为:

$$\gamma_i = u_i^{out} - u_i^{in} = u_i^{out}$$

7) 由伯努利方程求解表面压力分布以及压力系数

8) 绕翼型的总环量 $\Gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i s_i$

单位展长的升力: $L = \rho_{\infty} V_{\infty} \sum_{i=1}^n \gamma_i s_i$

◆ 高阶面元

- 在每个面元上, 涡强度不再为常数, 可以是线性或高次函数分布。