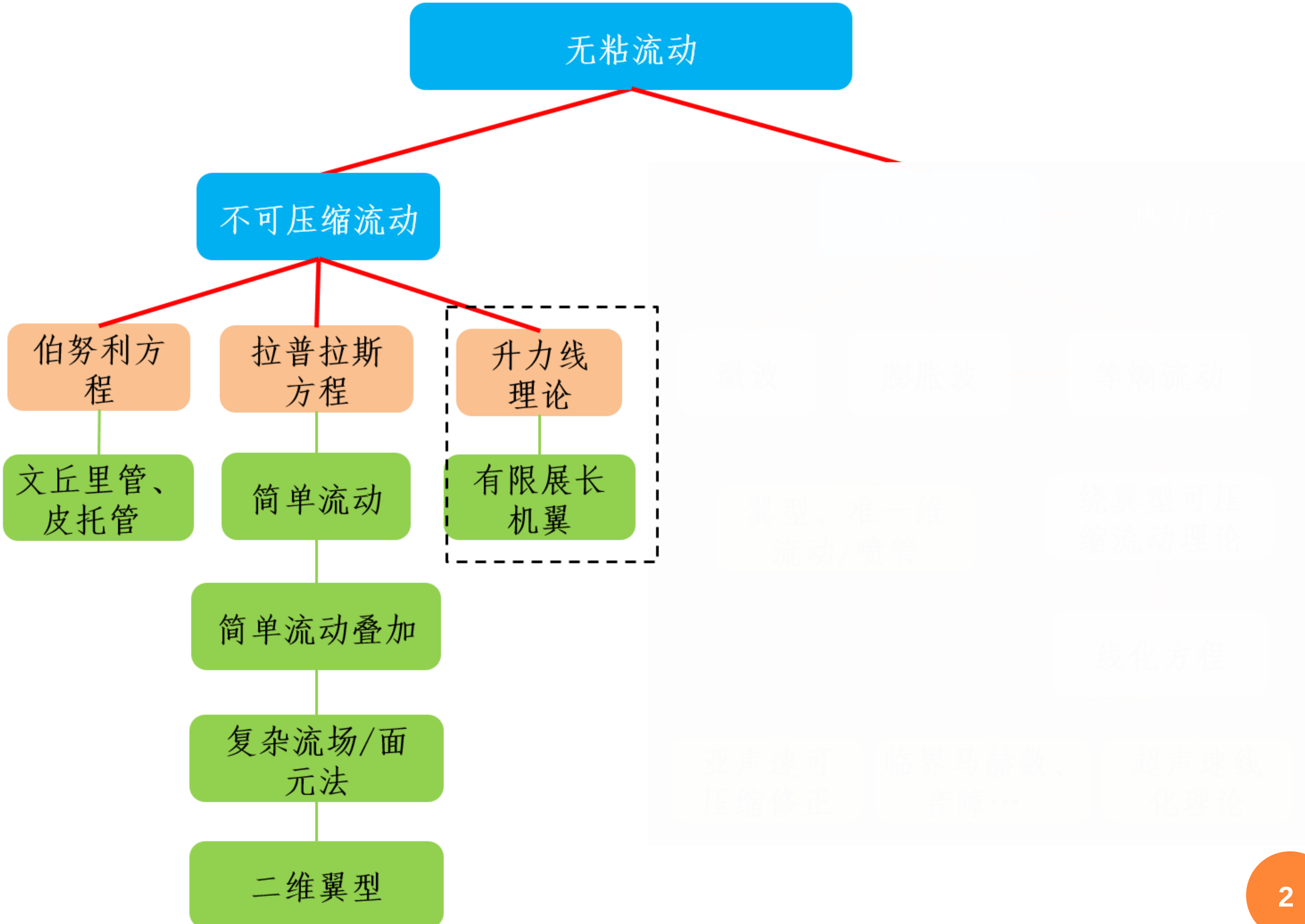
第九章
绕有限翼展机翼
不可压缩流动

All models are wrong, but some are useful.

George E. P. Box



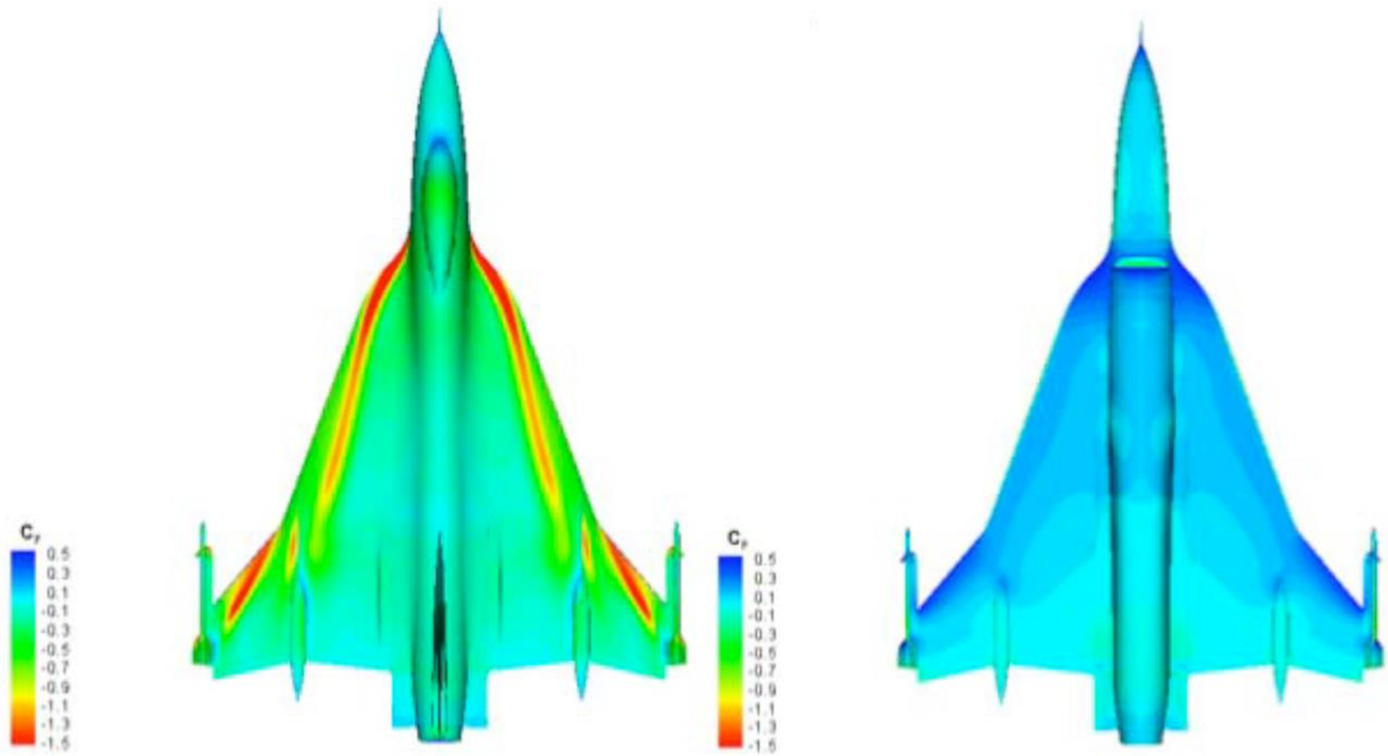
无粘流动
不可压缩流动
伯努利方程
拉普拉斯方程
升力线理论
文丘里管、皮托管
简单流动
有限展长机翼
简单流动叠加
复杂流场/面元法
二维翼型

9.1 绕有限翼展机翼实际流动

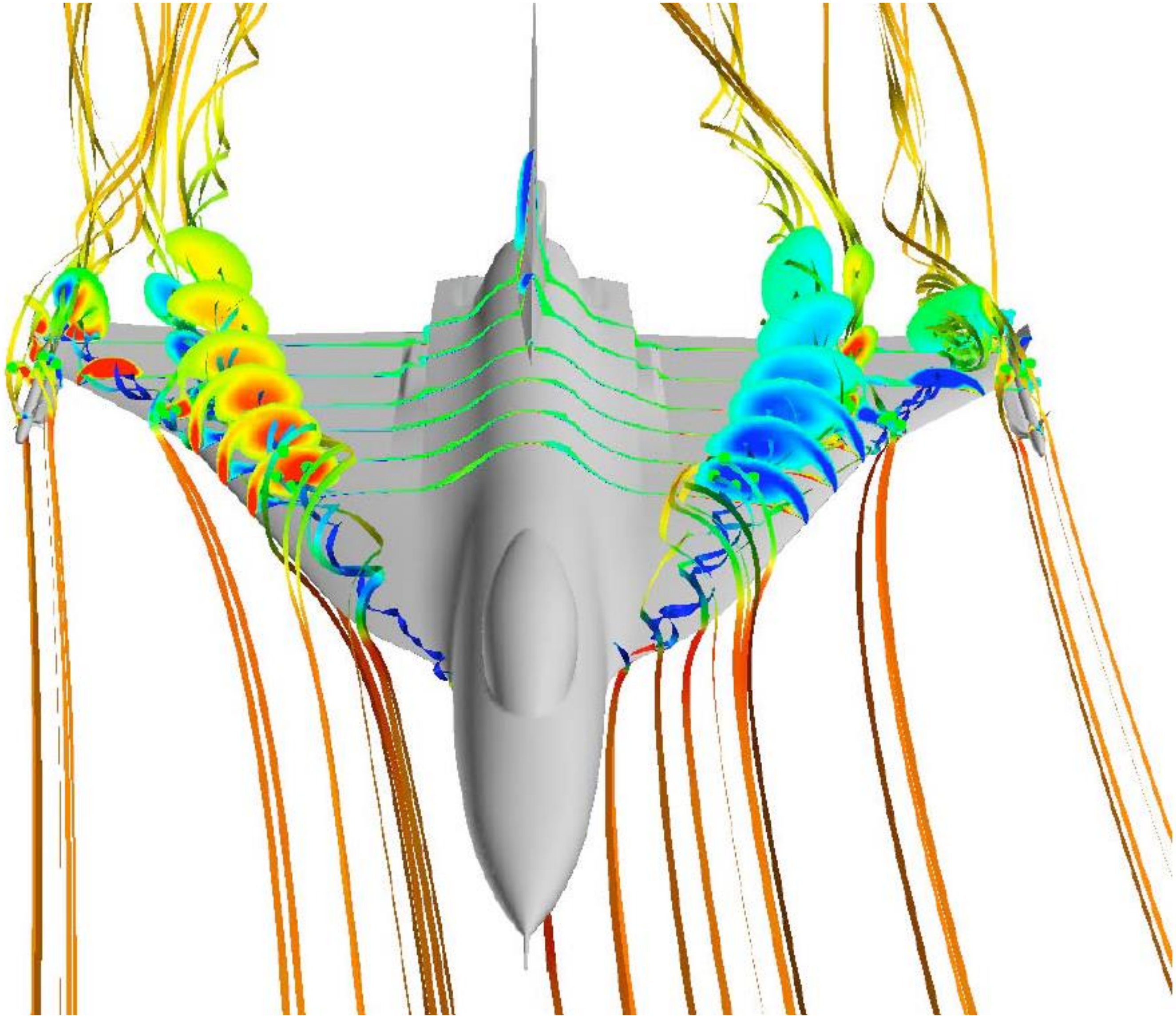
$$\frac{T_c}{T_i}=\left(\frac{p_c}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

C-17后的翼梢涡

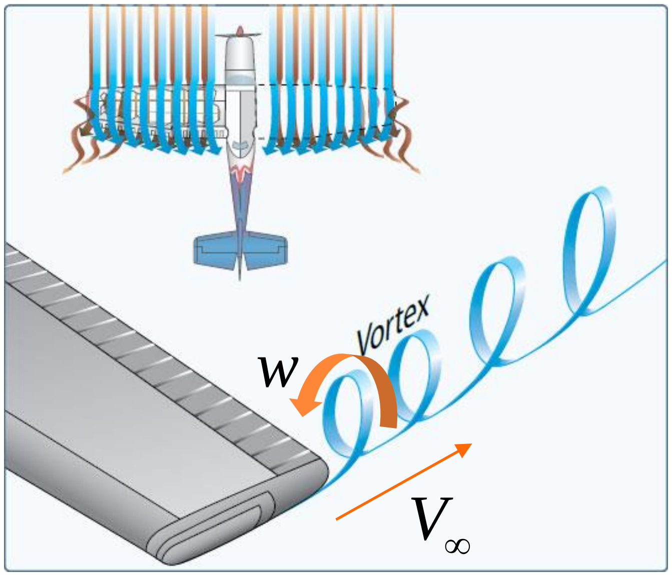
波音客机产生的翼稍涡

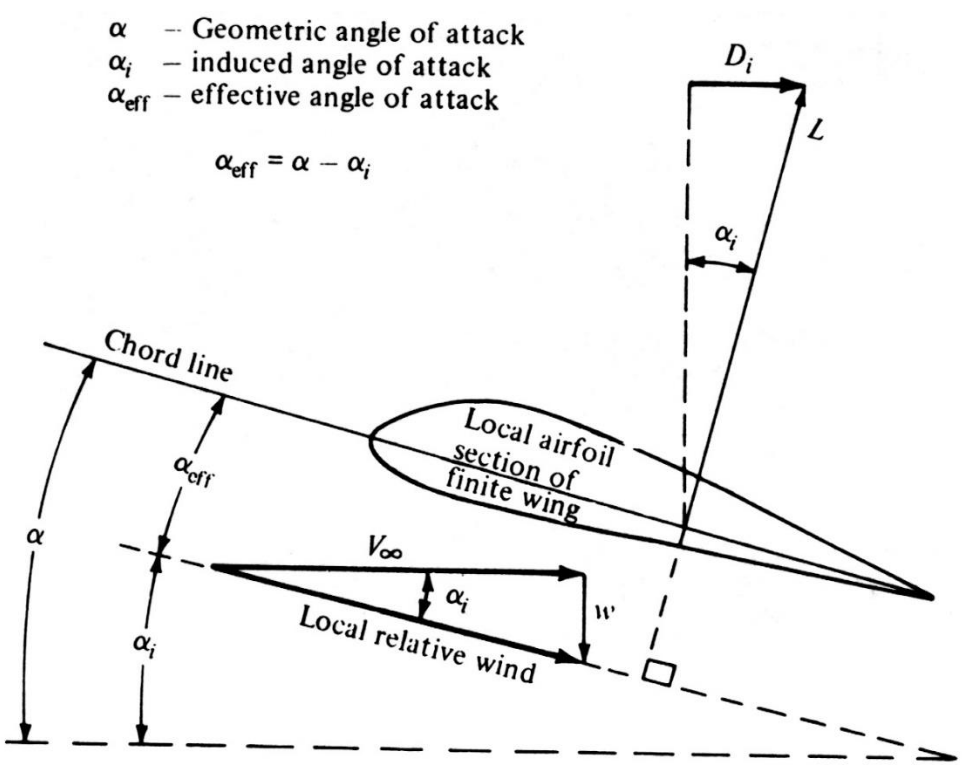


Badcock, K.J.: Evaluation of Results from a Reynolds Averaged Multiblock Code Against F-16XL Flight Data. AIAA Paper 2007-0490, 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno NV,January 8-11, 2007



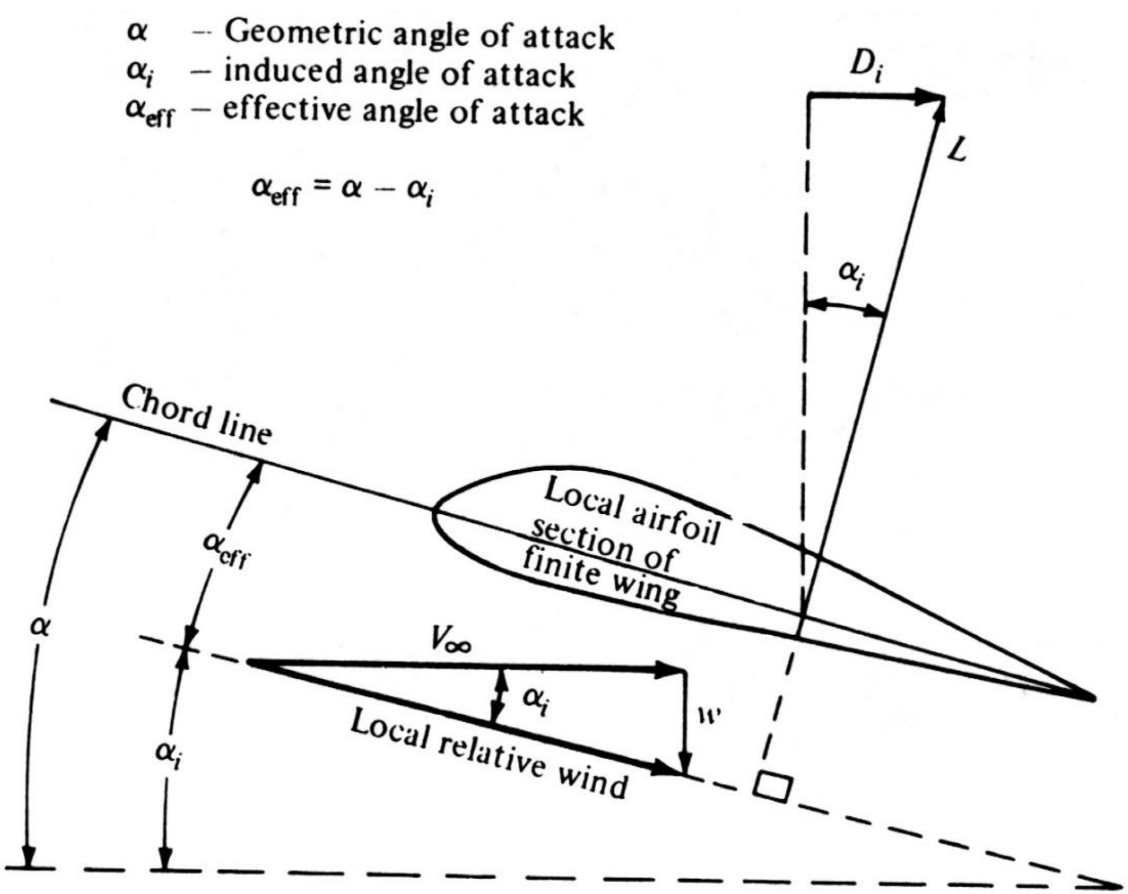
9.2 下洗和诱导阻力





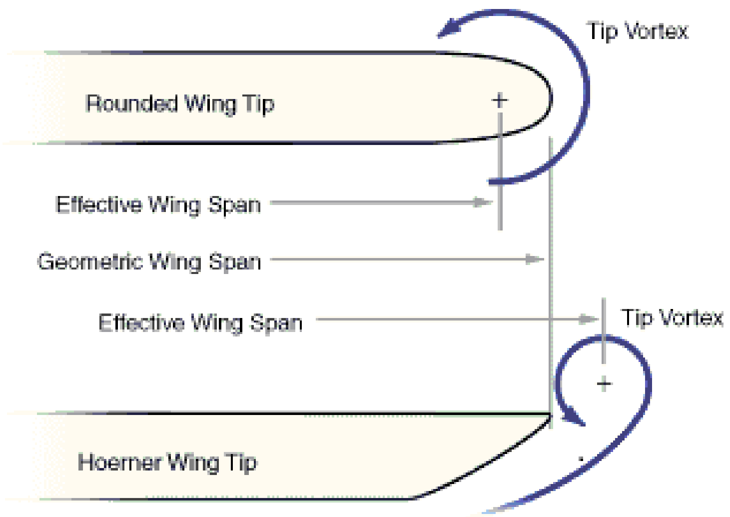
由翼梢涡诱导出一个向下的速度分量，称之为下洗速度。下洗速度改变了机翼当地的攻角，有效攻角定义为

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$$

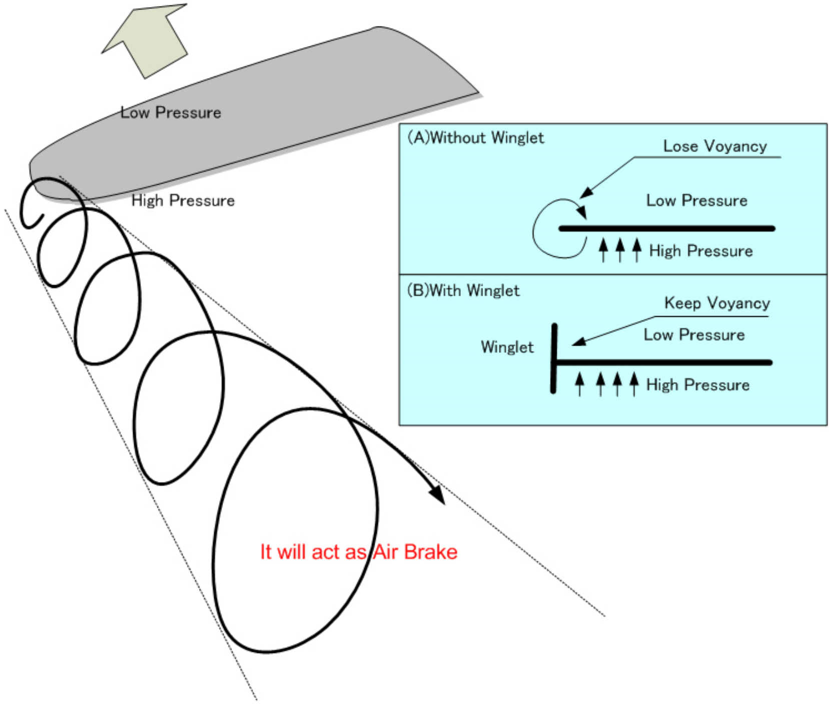


同时，下洗速度改变了机翼当地的压力分布，进而诱导出的阻力，称为诱导阻力。

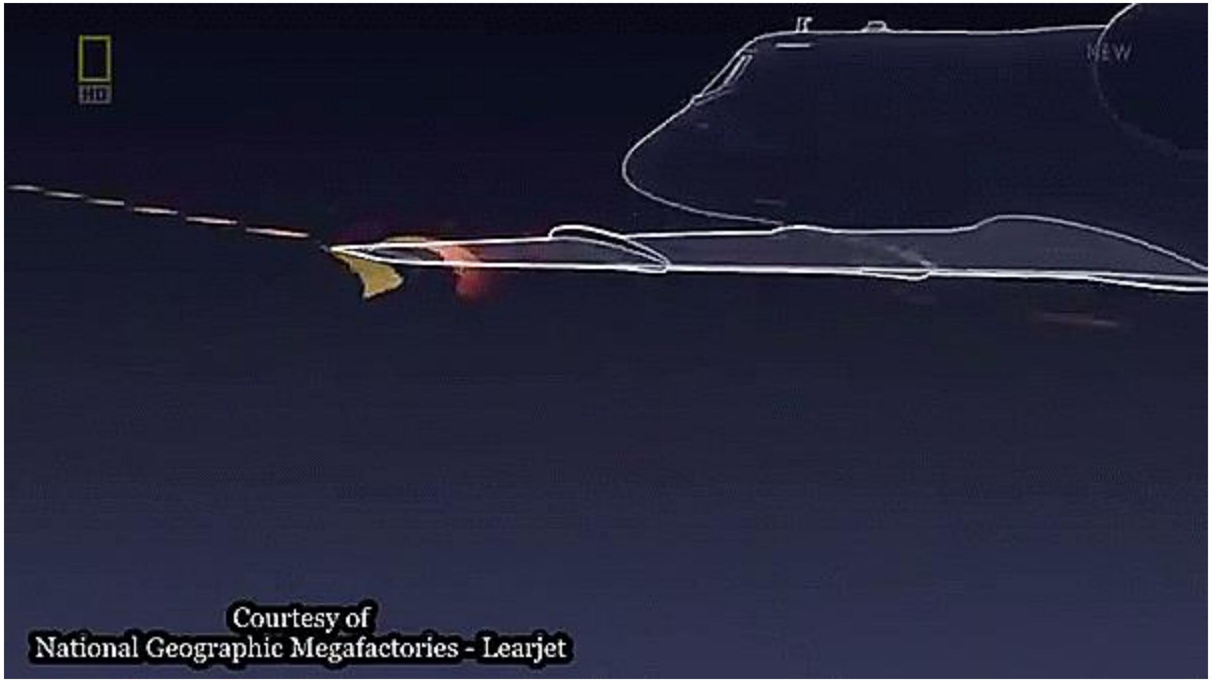
翼尖的设计



Tip Vortex
Rounded Wing Tip
Effective Wing Span
Geometric Wing Span
Effective Wing Span
Tip Vortex
Hoerner Wing Tip



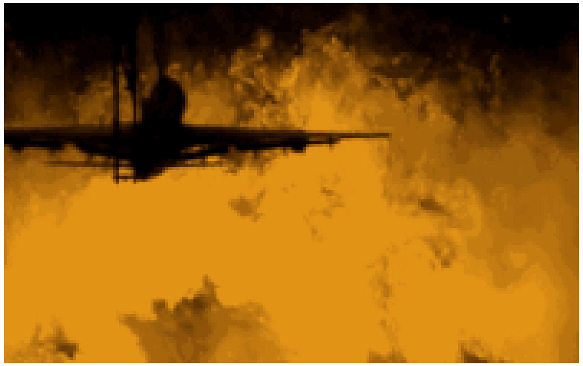
Low Pressure
High Pressure
(A)Without Winglet
Lose Voyancy
Low Pressure
High Pressure
(B)With Winglet
Keep Voyancy
Winglet
Low Pressure
High Pressure
It will act as Air Brake

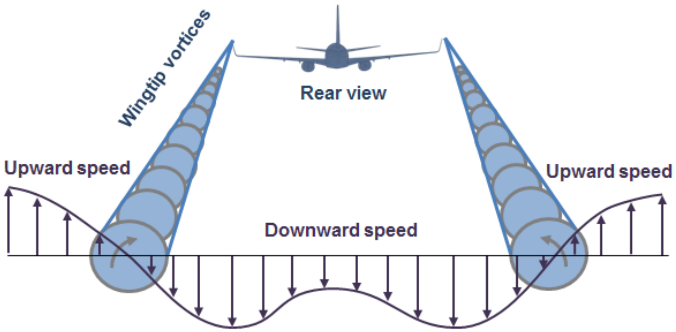


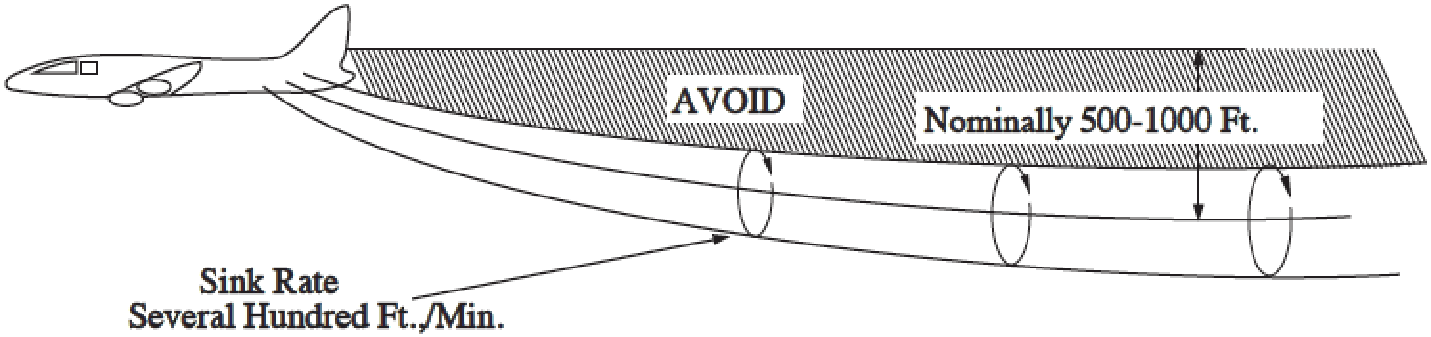
Courtesy of
National Geographic Megafactories - Learjet

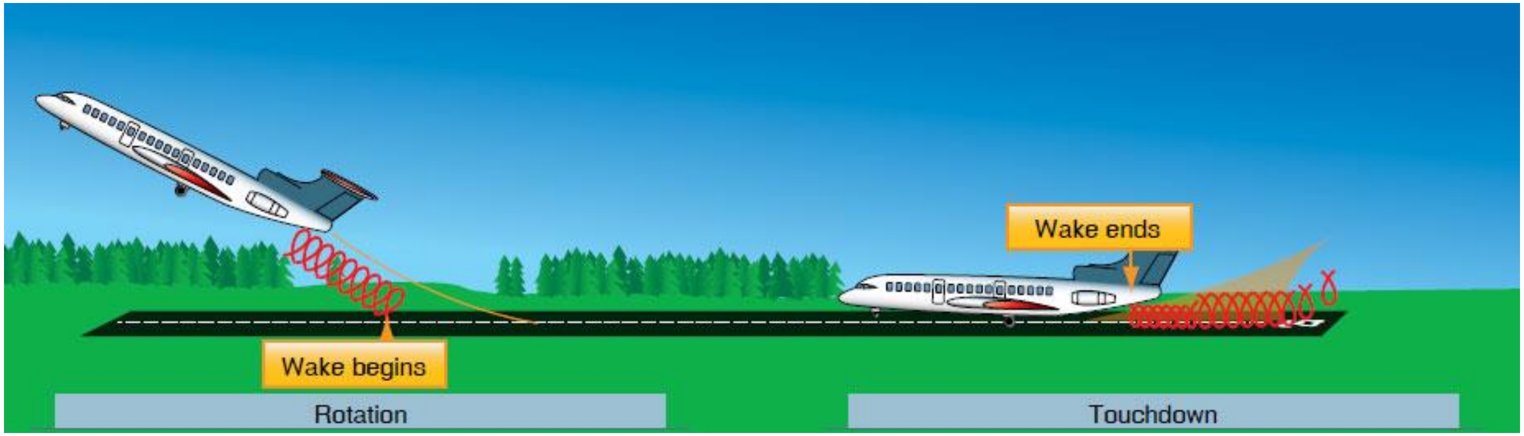
翼稍小翼

翼稍涡的其它效应

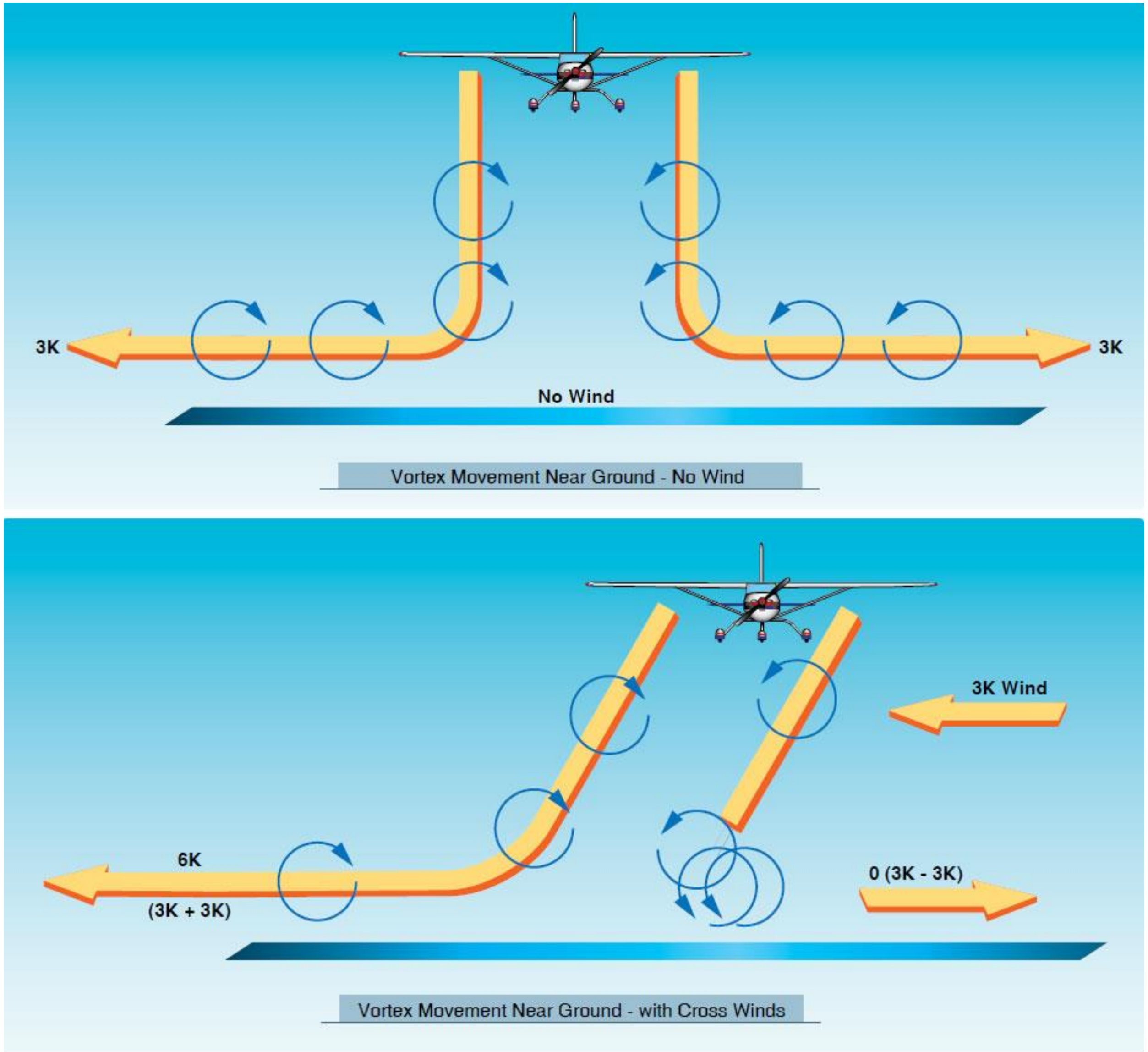



Wingtip vortices
Rear view
Upward speed
Upward speed
Downward speed


AVOID
Nominally 500-1000 Ft.
Sink Rate
Several Hundred Ft./Min.

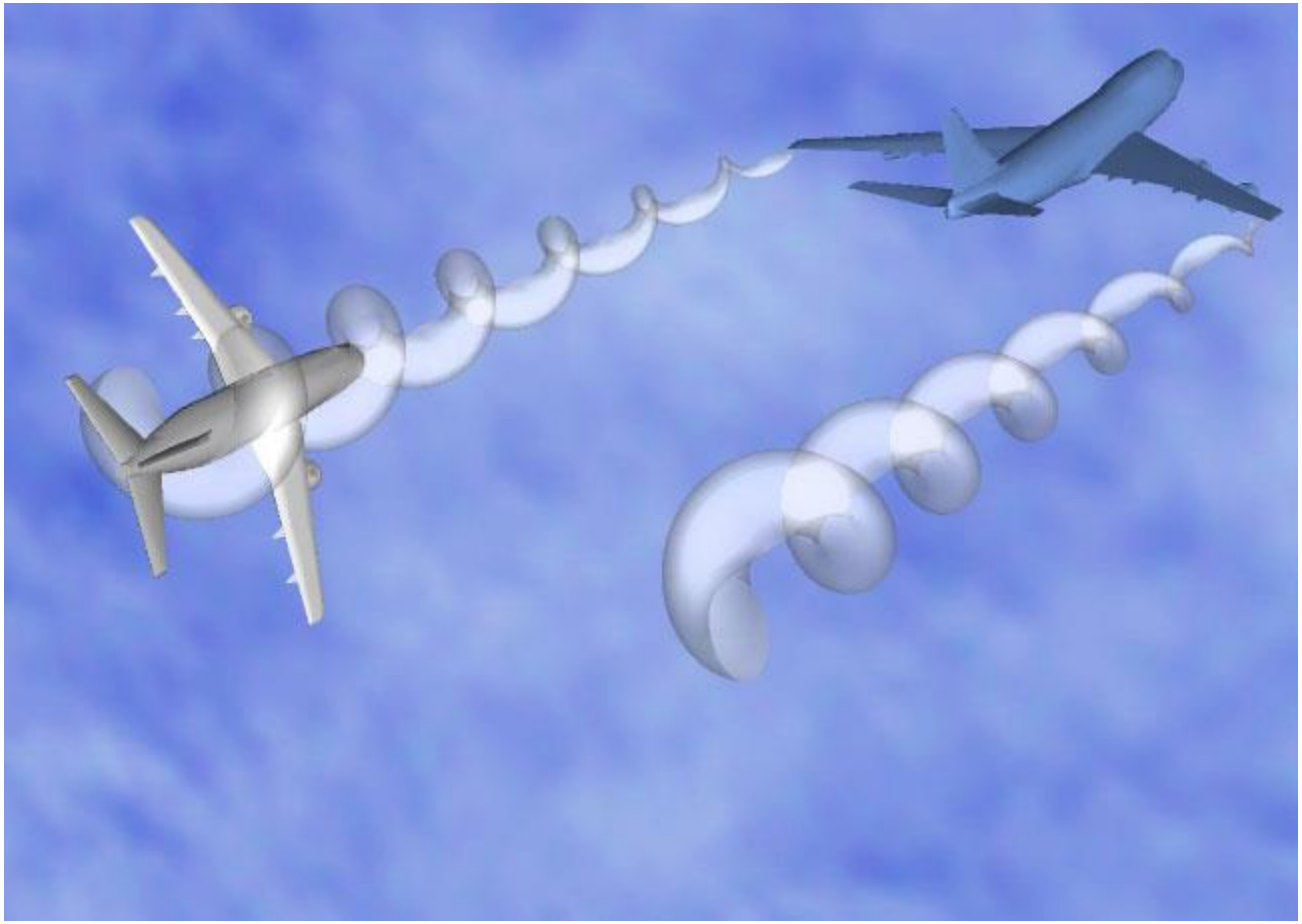

Wake ends
Wake begins
Rotation
Touchdown

翼稍涡的其它效应



100~200ft 2~3knots

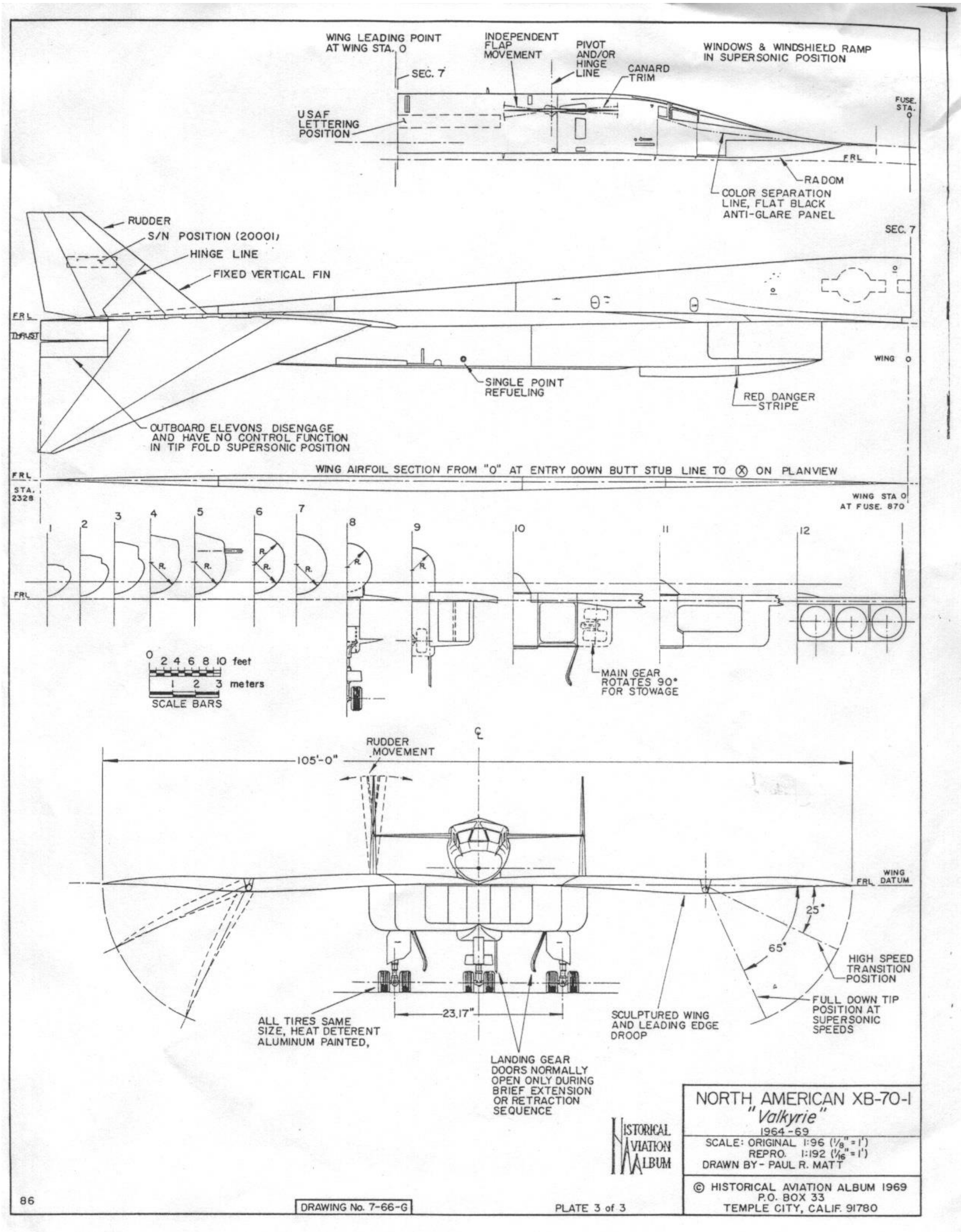
翼稍涡的其它效应

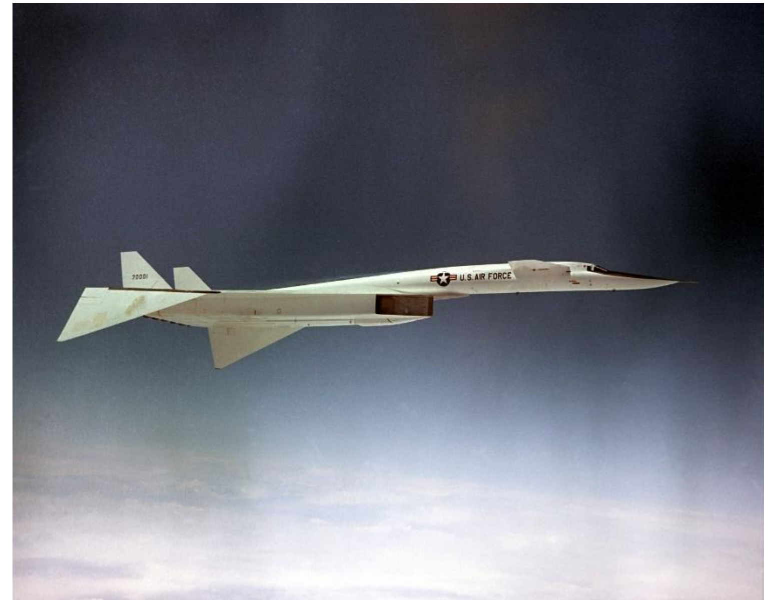


飞行间距标准摘选（美国）

- Separation is applied to aircraft operating directly behind a heavy/B757 jet at the same altitude or less than 1,000 feet below:
  - Heavy jet behind heavy jet - 4 miles.
  - Large/heavy behind B757 - 4 miles.
  - Small behind B757 - 5 miles.
  - Small/large aircraft behind heavy jet - 5 miles.
- Also, separation, measured at the time the preceding aircraft is over the landing threshold, is provided to small aircraft:
  - Small aircraft landing behind heavy jet - 6 miles.
  - Small aircraft landing behind B757 - 5 miles.
  - Small aircraft landing behind large aircraft- 4 miles.
- Additionally, appropriate time or distance intervals are provided to departing aircraft:
  - Two minutes or the appropriate 4 or 5 mile radar separation when takeoff behind a heavy/B757 jet will be:
  - From the same threshold.
  - On a crossing runway and projected flight paths will cross.
  - From the threshold of a parallel runway when staggered ahead of that of the adjacent runway by less than 500 feet and when the runways are separated by less than 2,500 feet.
  - NOTE-Controllers may not reduce or waive these intervals.

折翼的女神：XB-70 Valkyrie





翼展（Wingspan） 32米

机长（Length） 57.61米

（含空速管） 59.7米

机高（Height） 9.14米

前缘后掠角（The sweepback of the leading edge）65°5′

主翼面积（Wing area） 585.02平方米

空机重量（Weight of empty aircraft） 108 000公斤

正常起飞重量（Normal takeoff weight） 244 200公斤

最大飞行速度（Maximum flight speed） 3218公里/小时（海拔21 335米）

油箱容量（The volume of fuel tanks） 178 000升

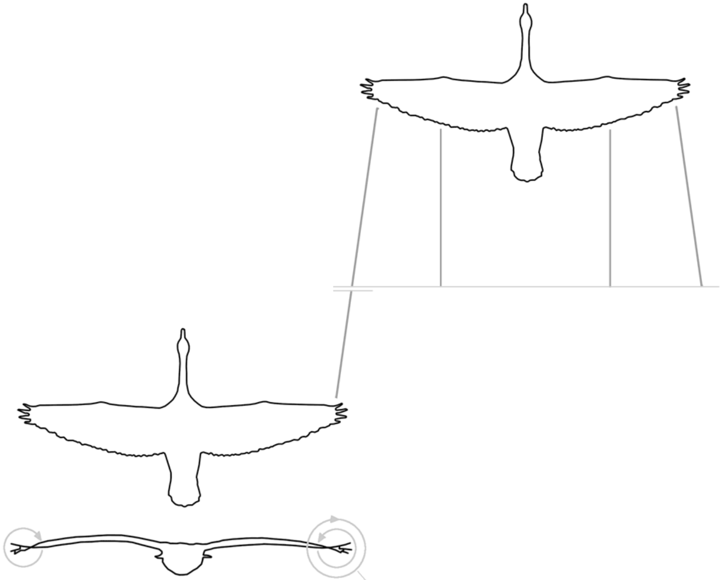
翼载（Unit load on wing） 417公斤/平方米

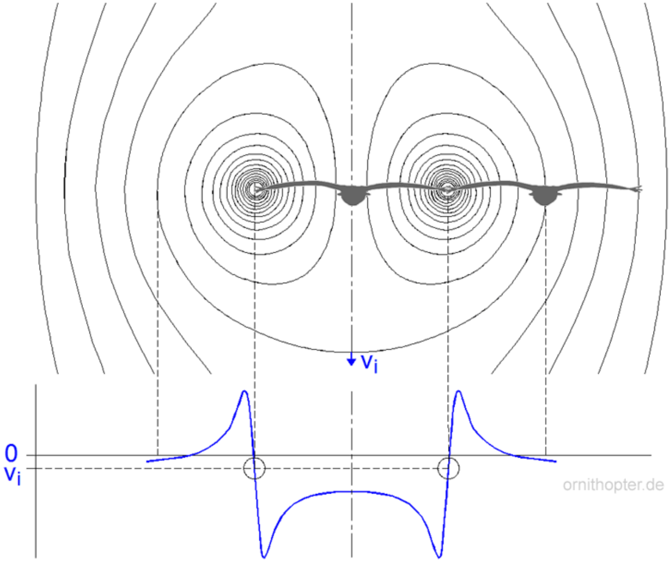
实用升限（Practical ceiling） 23 125米

最大航程（The maximum flight range） 9600公里

折翼的女神：XB-70 Valkyrie

翼稍涡的其它效应



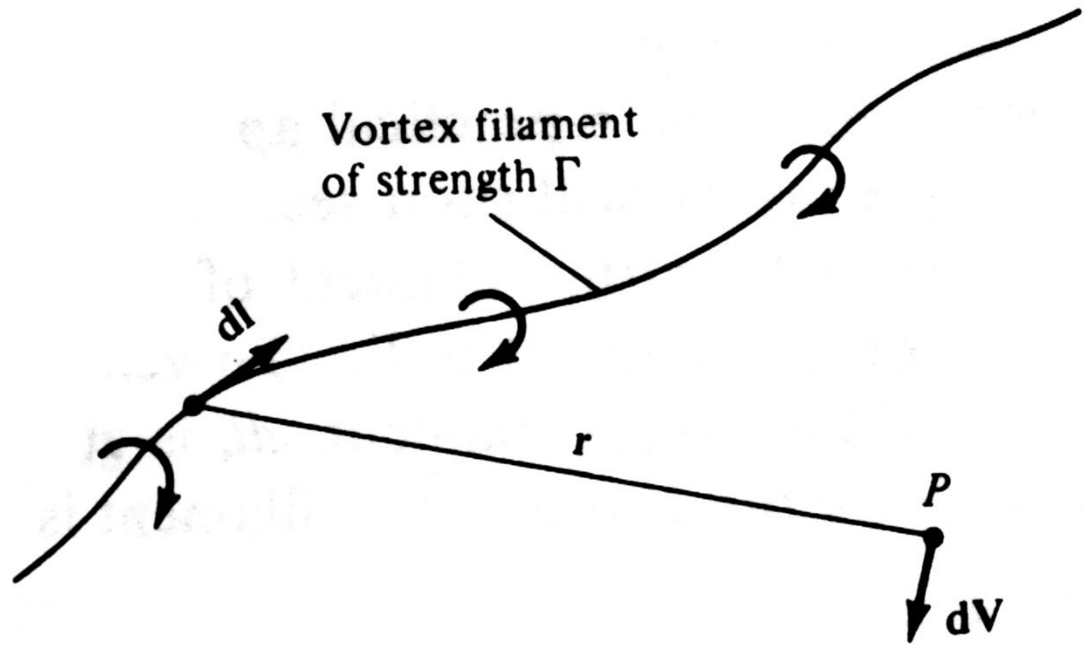


Formation flight in upwash within the downwash field of the bird in front in gliding flight

边条翼和鸭翼

9.3 涡丝、毕奥-沙瓦定律及亥姆霍兹定理

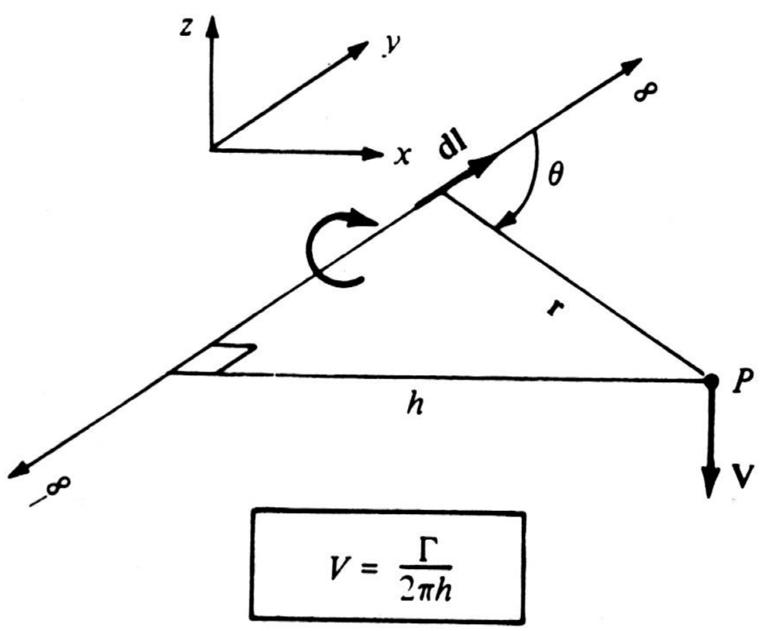
◆ 涡丝示意图



◆ 毕奥-沙瓦定律(Biot-Savart Law)

$$d\mathbf{V}=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{|r|^{3}}$$

无限长直涡丝的诱导速度



$$V=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|d\mathbf{l}\times\mathbf{r}|}{|r|^{3}}$$

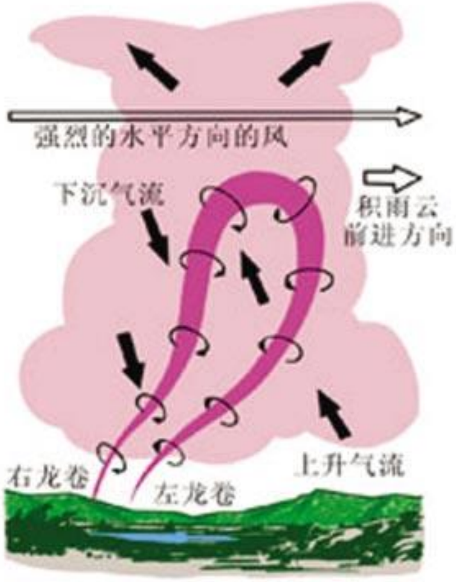
$$=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\theta}{r^{2}}dl$$

$$=\frac{\Gamma}{2\pi h}$$

半无限长直涡丝的诱导速度

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h}$$

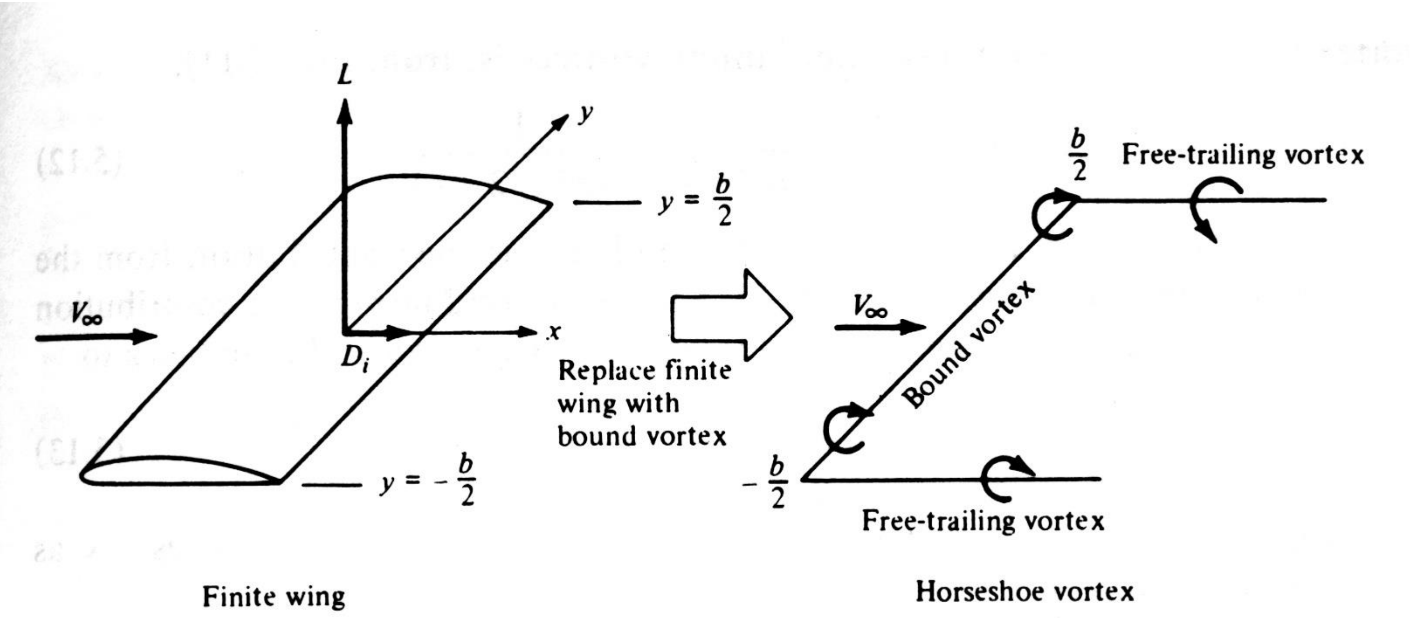
- 亥姆霍兹定理(Helmholtz’s Theorems)
  - ✓ 涡丝强度沿长度方向不变；
  - ✓ 涡丝不能在流体中中断；涡丝或者延长到流体的边界（可以为无穷远），或者形成闭合回路。



有限翼展展向升力分布

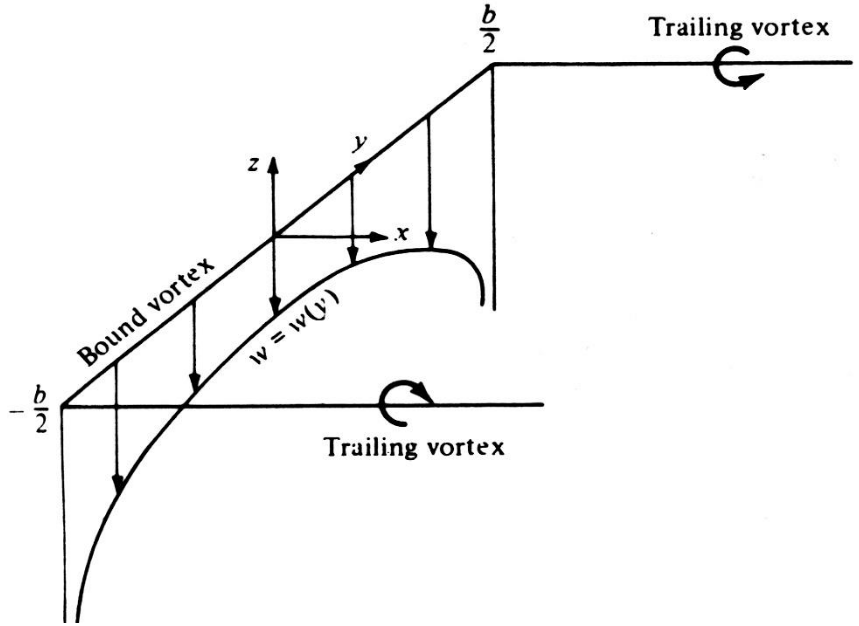
- 升力分布为翼展方向的函数：$L'(y_1)$ ；
- 一般来说，弦长沿翼展变化；
- 攻角沿翼展变化：**几何扭转**；翼尖攻角小于翼根攻角，称为外洗，反之，称为内洗；
- 零升力攻角沿翼展方向变化，称为**气动扭转**；
- 由于环量和单位展长升力成比例，因此环量也是展长的函数。
- 升力在翼尖为零。

9.4 普朗特经典升力线理论



- ✓ 首次提出了能预测有限长机翼气动特性的理论；
- ✓ 用附着涡和自由拖曳涡描述绕流有限长机翼流场；
- ✓ 用附着涡代替有限长机翼。

◆ 单个马蹄涡



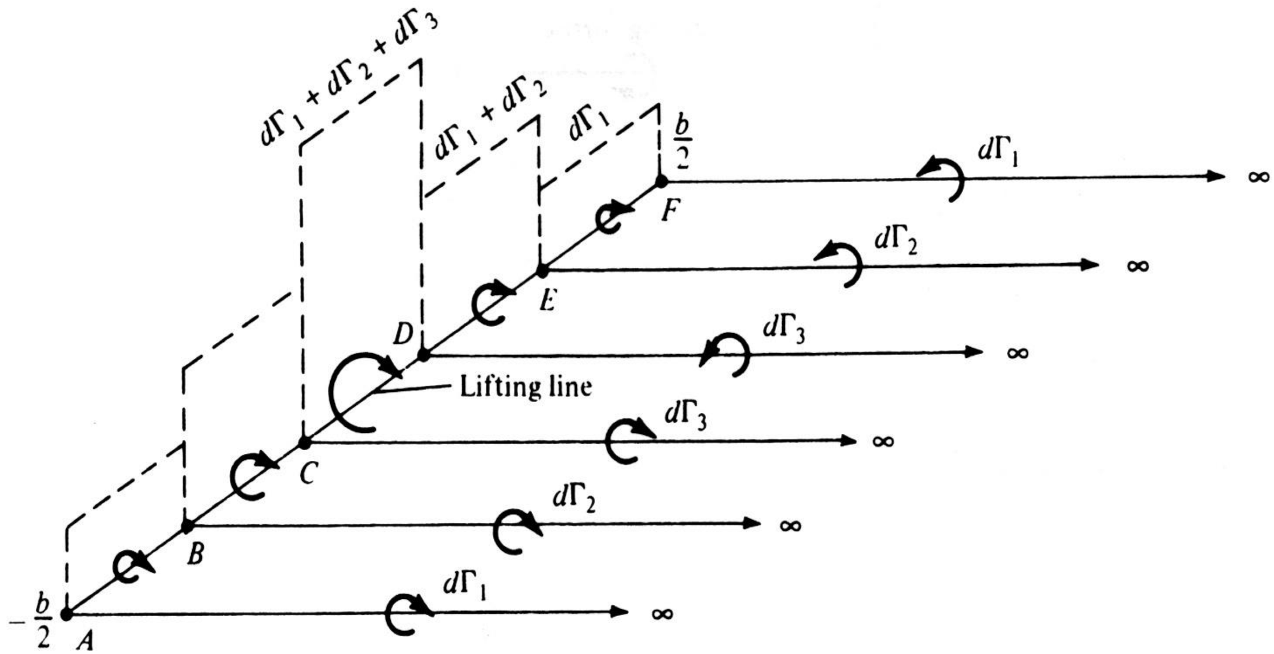
✓ 附着涡在其自身上没有诱导速度；

✓ 两个拖曳涡在附着涡方向沿下洗方向有诱导速度；

✓ 若原点在附着涡中间，则附着涡上y点处拖曳涡的诱导速度为

$$w(y)=-\frac{\Gamma}{4\pi(b/2+y)}-\frac{\Gamma}{4\pi(b/2-y)} \Rightarrow w(y)=-\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{b}{(b/2)^2-y^2}$$

◆ 多个马蹄涡的叠加

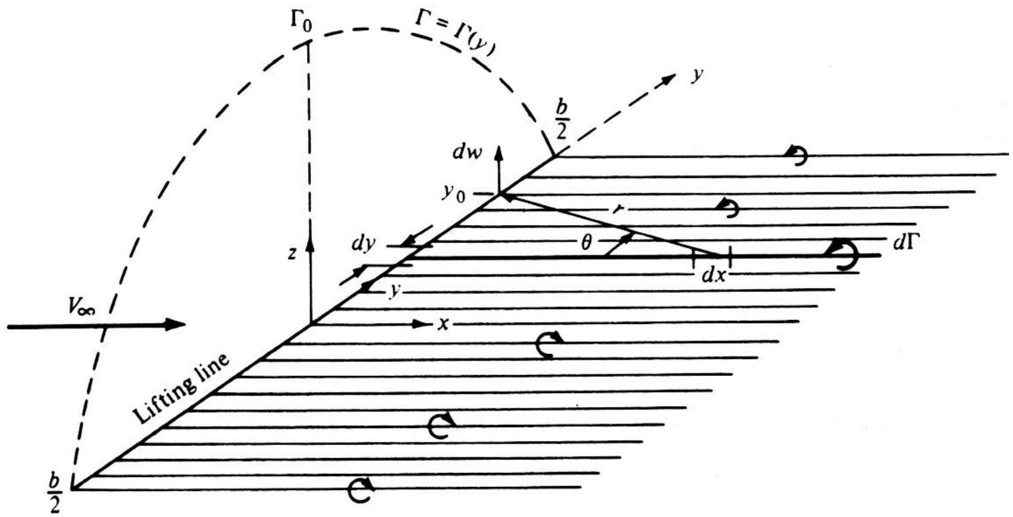


✓ 单个马蹄涡在翼尖处诱导速度无穷大；

✓ 将多个马蹄涡叠加，附着涡长度不同，但都处于同一条线上，这条线称为升力线；

✓ 每个拖曳涡强度的变化等于沿附着涡环量的变化。

◆ 无限个马蹄涡的叠加



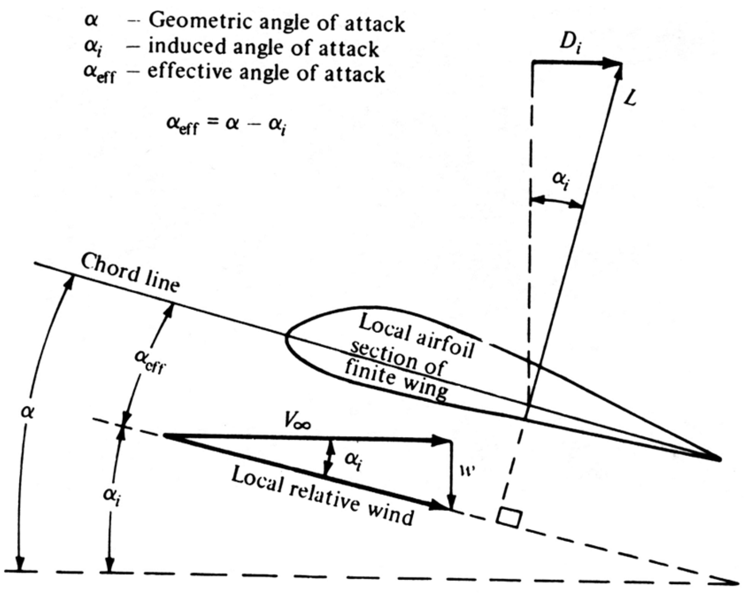
✓ 环量成为连续函数；

✓ 拖曳涡组成了一个平行于流动方向的涡面升力线上dy长度的环量变化为

$$d\Gamma = (d\Gamma / dy)dy$$

在升力线上 y_0 处诱导的速度

$$dw = -\frac{(d\Gamma/dy)dy}{4\pi(y_0 - y)}$$



整个涡面在 y_0 的诱导速度：

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{(d\Gamma/dy)dy}{(y_0 - y)}$$

则诱导攻角：

$$\alpha_i(y_0) = \tan^{-1}\left(\frac{-w(y_0)}{V_\infty}\right)$$

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{w(y_0)}{V_\infty}$$

$$\boxed{\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{(d\Gamma/dy)dy}{(y_0 - y)}}$$

- 有效攻角和升力系数的关系

$$c_l = a_0\left[\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0}\right] = 2\pi\left[\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0}\right]$$

a_0： 当地升力线斜率

$$L' = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c(y_0) c_l = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0) \longrightarrow c_l = \frac{2\Gamma(y_0)}{V_\infty c(y_0)}$$

$$\longrightarrow \alpha_{eff} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}$$

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$$

普朗特升力线理论基本方程：

$$\longrightarrow \boxed{\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}(y_0) + \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{(y_0 - y)}}$$

翼型理论的任务：

1. 得到已有翼型的气动特性；

2. 按照气动需求设计翼型。

$$\boxed{\alpha(y_0)=\frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)}+\alpha_{L=0}(y_0)+\frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{(d\Gamma/dy)dy}{(y_0-y)}}$$

求解出环量： $\Gamma=\Gamma(y)$

求解升力分布： $L'(y_0)=\rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0)$

总升力： $L=\int_{-b/2}^{b/2}L'(y)dy=\rho_\infty V_\infty\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)dy$

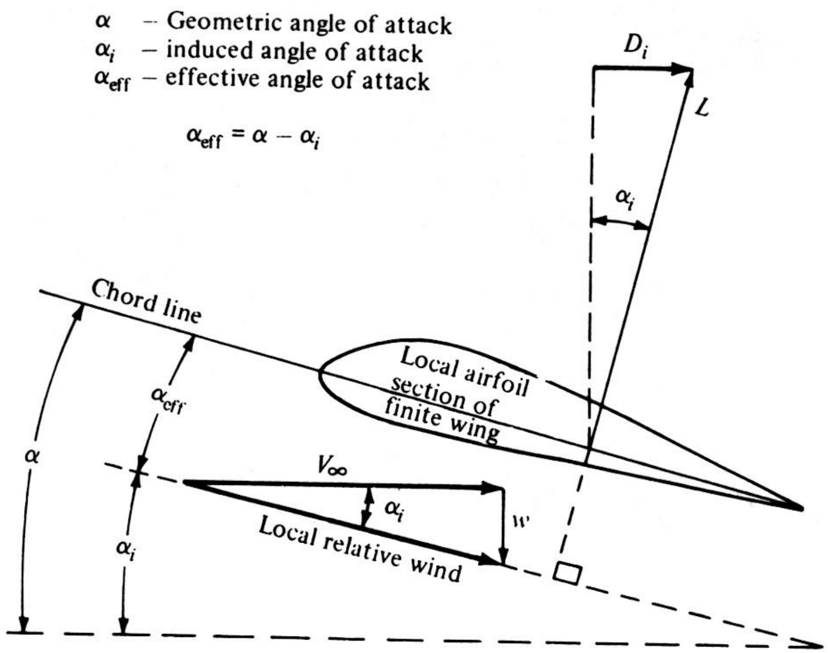
升力系数： $C_L=\frac{L}{q_\infty S}=\frac{\rho_\infty V_\infty\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)dy}{0.5\rho_\infty V_\infty^2 S}=\frac{2}{V_\infty S}\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)dy$

单位展长诱导阻力：

$$D_i' = L' \sin\alpha_i$$

$\alpha_i \ll 1$

$$D_i' = L'\alpha_i$$



总诱导阻力：

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y)\alpha_i(y)dy = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y)\alpha_i(y)dy$$

诱导阻力系数：

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S}\int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y)\alpha_i(y)dy$$

◆ 椭圆型翼载分布

$$\Gamma(y)=\Gamma_0\sqrt{1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

- ✓ 中心处（翼根）环量为Γ_0；
- ✓ 由茹科夫斯基定理，升力也呈椭圆分布：

$$L'(y)=\rho_\infty V_\infty\Gamma(y)=\rho_\infty V_\infty\Gamma_0\sqrt{1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

- ✓ 翼尖处环量为零。

由此反向设计机翼形状

下洗速度：

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\frac{4\Gamma_0}{b^2}\frac{y}{\left(1-4y^2/b^2\right)^{1/2}}$$

$$w(y_0) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{y}{\left(1-4y^2/b^2\right)^{1/2}(y_0-y)}dy$$

变量替换：

$$y = \frac{b}{2}\sin\theta \qquad dy = \frac{b}{2}\cos\theta d\theta$$

解得：

$$\boxed{w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b}}$$

椭圆升力分布情况下，下洗速度沿展向为常数

诱导攻角：

$$\boxed{\alpha_i = -\frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}}$$

总升力：

$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \frac{b}{2}\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \frac{b}{4}\pi = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S C_L$$

定义展弦比：

$$AR = \frac{b^2}{S}$$

b为翼展长度，S为翼面积。另外一种定义方式为翼展长度与标准平均弦长的比值

$$\rightarrow \quad \alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}$$

椭圆升力分布情况下，诱导攻角和展弦比成反比

诱导阻力系数：

$$\boxed{C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}}$$

- ✓ 诱导阻力系数与升力系数的平方成正比。这是由于诱导阻力和升力均为机翼上下表面压力分布差异造成，因此诱导阻力常被称为升致阻力；
- ✓ 诱导阻力系数和展弦比成反比

椭圆形翼载分布：

- ✓ 若有限长机翼没有气动扭转和几何扭转，即

$$\alpha = const. \qquad \alpha_{L=0} = const. \qquad \alpha_i = const.$$

则：
$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i = const.$$

又：
$$c_l = a_0(\alpha_{eff} - \alpha_{L=0})$$

薄翼：
$$a_0 = 2\pi$$

则 c_l 沿翼展为常数

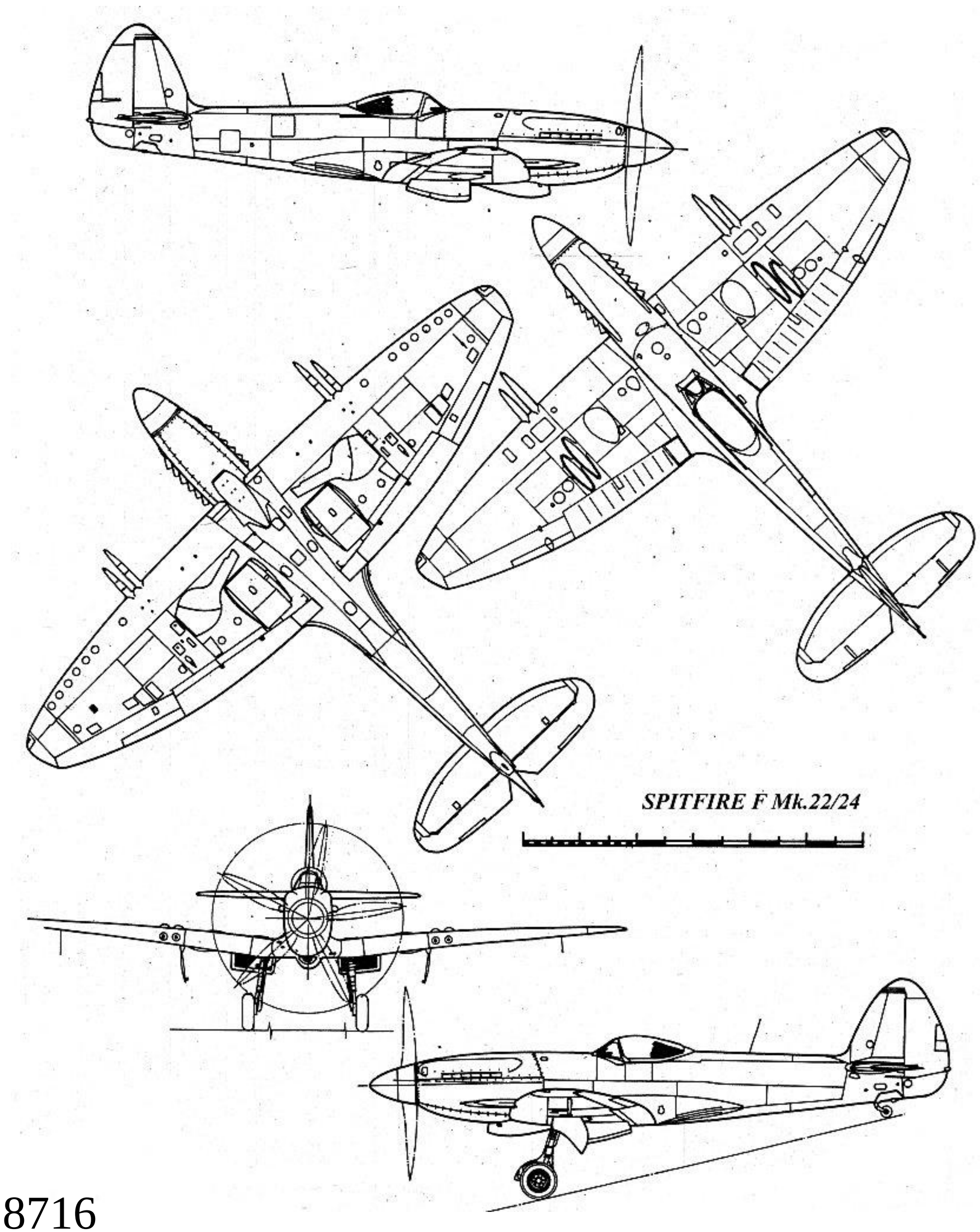
✓ 单位展长升力分布：

$$L'(y) = q_\infty c c_l$$

得到弦长沿展向分布为：

$$\boxed{c(y) = \frac{L'(y)}{q_\infty c_l}}$$

若动压和升力系数为常数，弦长沿展向的变化也是椭圆型



https://zhuanlan.zhihu.com/p/429618716

◆ 一般翼载分布

$$\Gamma(\theta)=2bV_\infty\sum_1^N A_n \sin n\theta$$

$$\frac{d\Gamma}{dy}=\frac{d\Gamma}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}=2bV_\infty\sum_1^N nA_n\cos n\theta\frac{d\theta}{dy}$$

普朗特升力线理论基本方程变为：

$$\alpha(y_0)=\frac{2b}{\pi c(\theta_0)}\sum_1^N A_n\sin n\theta+\alpha_{L=0}(\theta_0)+\sum_1^N nA_n\frac{\sin n\theta_0}{\sin\theta_0}$$

通过数值方法求解系数

求得环量后，升力系数：

$$C_L = \frac{2}{V_\infty S}\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)dy = \frac{2b^2}{S}\sum_1^N A_n\int_0^\pi \sin n\theta \sin\theta d\theta$$

$$\boxed{C_L = A_1\pi\frac{b^2}{S} = A_1\pi AR}$$

诱导攻角：

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{(d\Gamma/dy)dy}{(y_0 - y)}$$

$$\boxed{\alpha_i(\theta) = \sum_1^N nA_n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}}$$

诱导阻力系数：

$$C_{D,i}=\frac{2}{V_\infty S}\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)\alpha_i(y)dy$$

$$=\frac{2b^2}{S}\int_0^{\pi}\left(\sum_1^N A_n\sin n\theta\right)\alpha_i(\theta)\sin\theta d\theta$$

$$C_{D,i}=\frac{2b^2}{S}\int_0^{\pi}\left(\sum_1^N A_n\sin n\theta\right)\left(\sum_1^N nA_n\sin n\theta\right)d\theta$$

$$\boxed{C_{D,i}=\frac{C_L^2}{\pi AR}\left(1+\sum_2^N\frac{nA_n^2}{A_1^2}\right)=\frac{C_L^2}{\pi AR}(1+\delta)}$$

其中： $\delta=\sum_2^N nA_n^2/A_1^2>0$

椭圆型载荷分布诱导阻力最小

三维机翼特性

- 展弦比
- 扭转
- 根梢比
- 厚弦比
- 翼型剖面
- 后掠

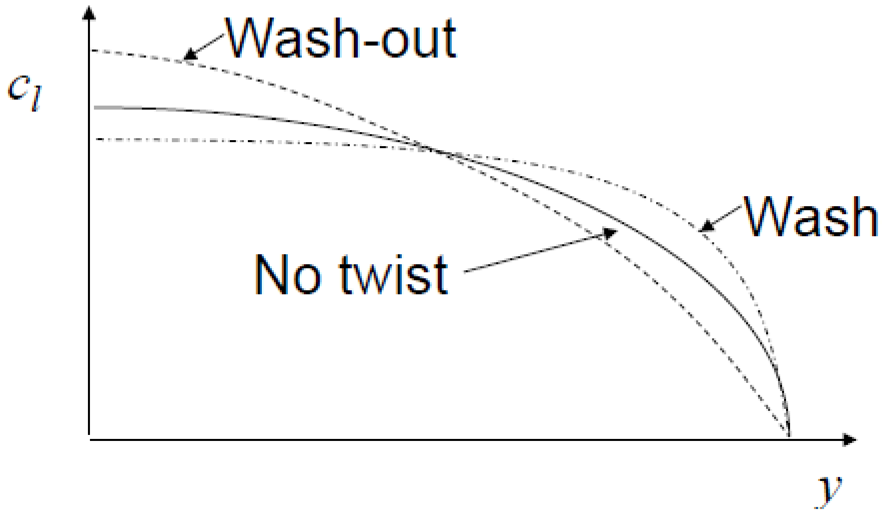
◆ 展弦比

小展弦比

大展弦比

- 几何扭转

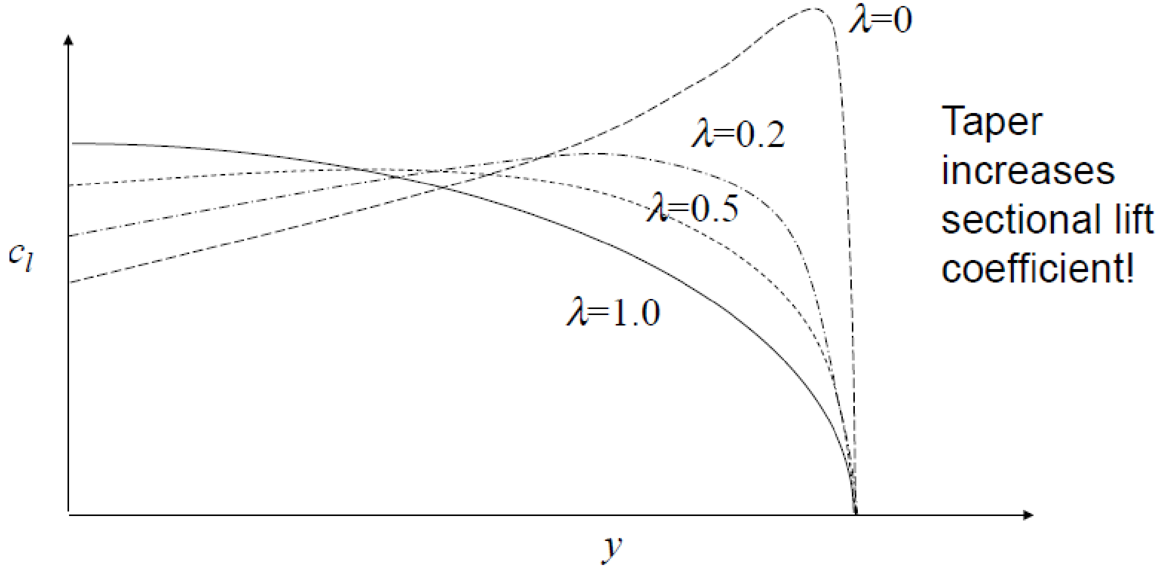
几何扭转：翼尖攻角小于翼根攻角，称为外洗，反之，称为内洗；



翼尖攻角小于翼根攻角，称为外洗;反之，称为内洗;

调整负载;调整失速特性

- 根梢比
  - ✓ 调整负载；
  - ✓ 减小诱导阻力；
  - ✓ 减轻结构重量；
  - ✓ 合适的根梢比对升力影响不大。



P-51

非线性变化根梢比

Cessna 120

根梢比为1

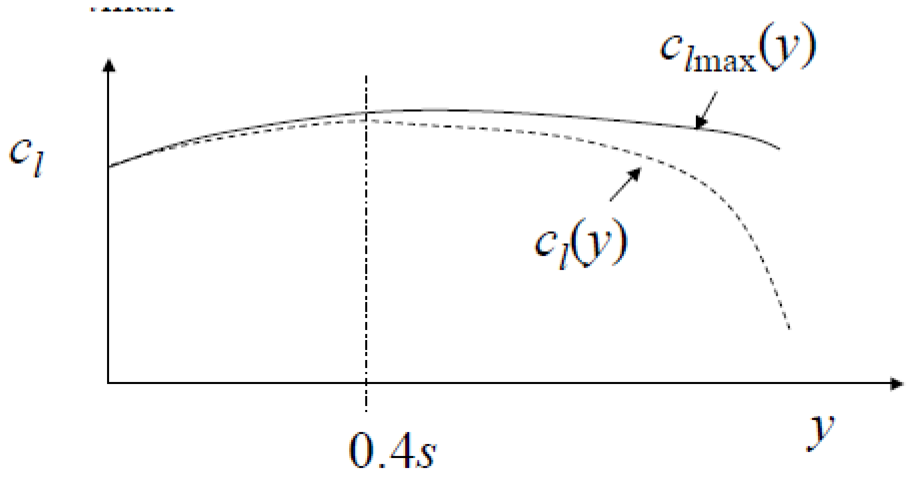
- 厚弦比

翼型的最大厚度和弦长的比

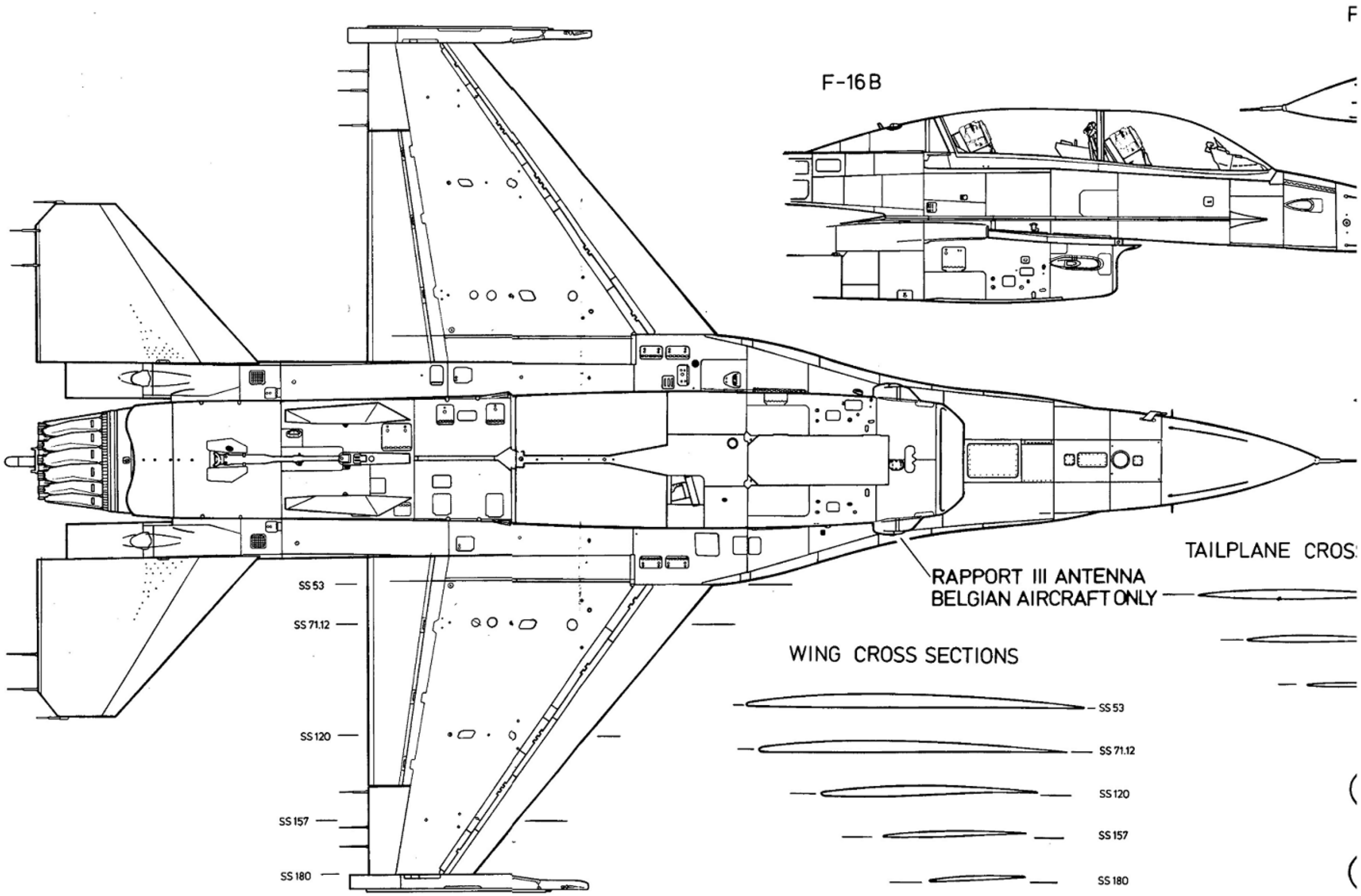
- ✓ 调整结构重量;
- ✓ 调整阻力;
- ✓ 影响升力;
- ✓ 比较优化的厚弦比:
  - 翼根附近:15%-20%
  - 翼梢附近:10%-15%
  - 不能超过20%

- 翼型剖面

  - ✓ 在小攻角情况下一般不影响升力在翼面上的分布；
  - ✓ 主要影响当地最大升力系数曲线以及剖面阻力；



- 变弯度NACA 64A-204
- 扭转:at SS 53.0-0°；at SS 180-3°



作业：

补充材料5.1、5.3题