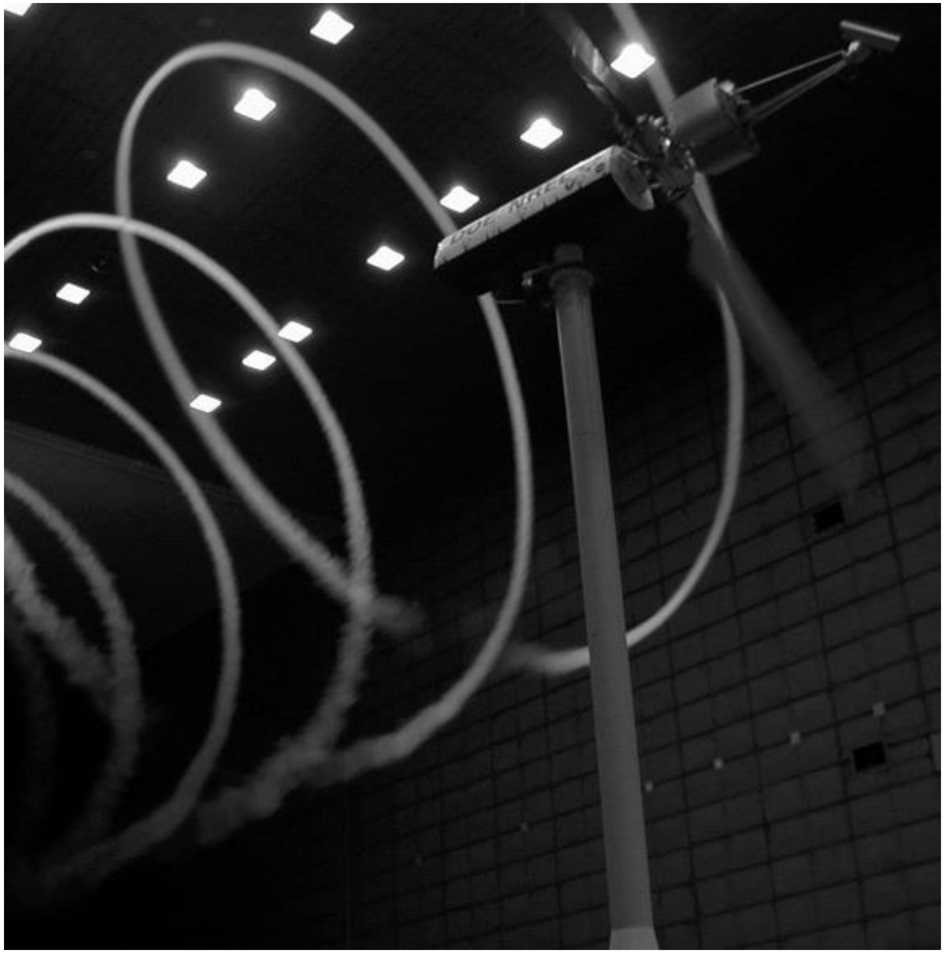
第六章：
量纲分析和相似理论



Full-scale windmill tested in NASA Ames largest wind tunnel in the world

本章内容

1. 量纲分析原理
2. 量纲一致性原理
3. 相似准则
4. 流体运动方程的无量纲化

量纲分析和相似理论

◆空气动力学问题的研究方法

① 解析方法

② 计算流体力学方法（CFD）

③ 实验研究方法：实物实验，模型实验

◆ 模型实验在空气动力学问题研究中的重要作用。

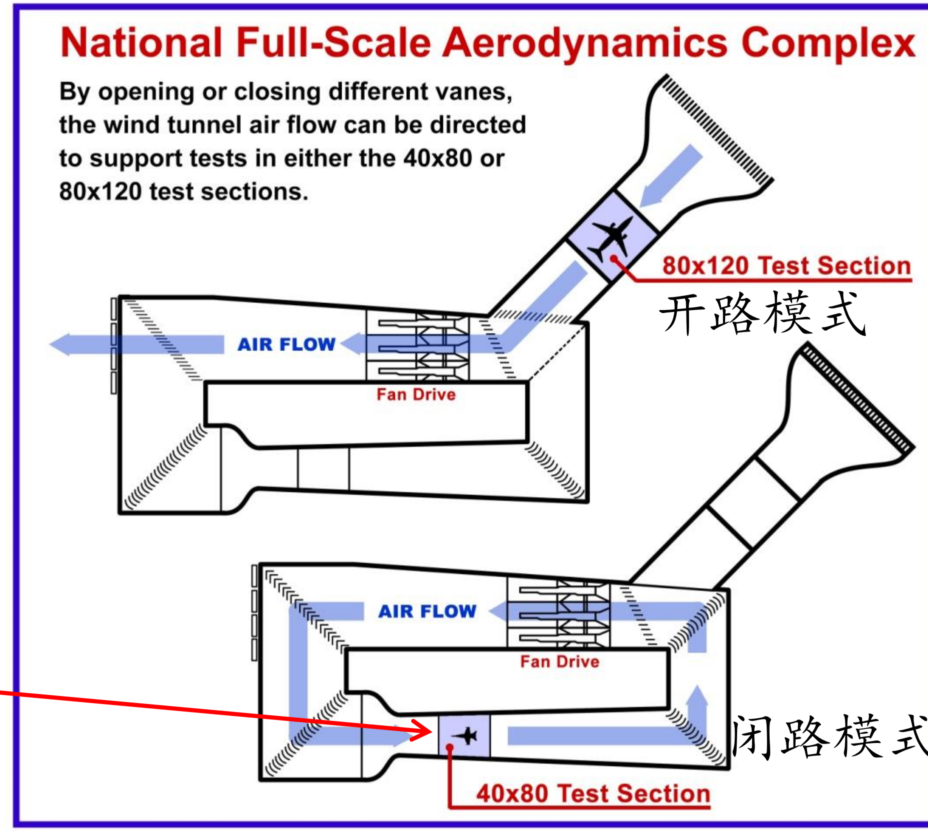
◆ 如何科学地组织和开展实验，并对实验结果进行整理和分析？

- 量纲分析可以提供复杂实验中各物理量之间的关系
- 相似理论是模型试验的理论基础

◆ 也是空气动力学问题其他研究方法所需理论工具

NASA Ames 世界上最大的风洞

NASA ames 世界上最大的风洞



B747-8:展68.5米(224.7英尺)，高19.4米(63.6英尺)
A380:展79.75米(261.8英尺)，高24.09米(79.1英尺)
→模型试验

NASA ames 雷诺数最高的跨音速风洞

1/50尺寸的B747模型的风洞试验

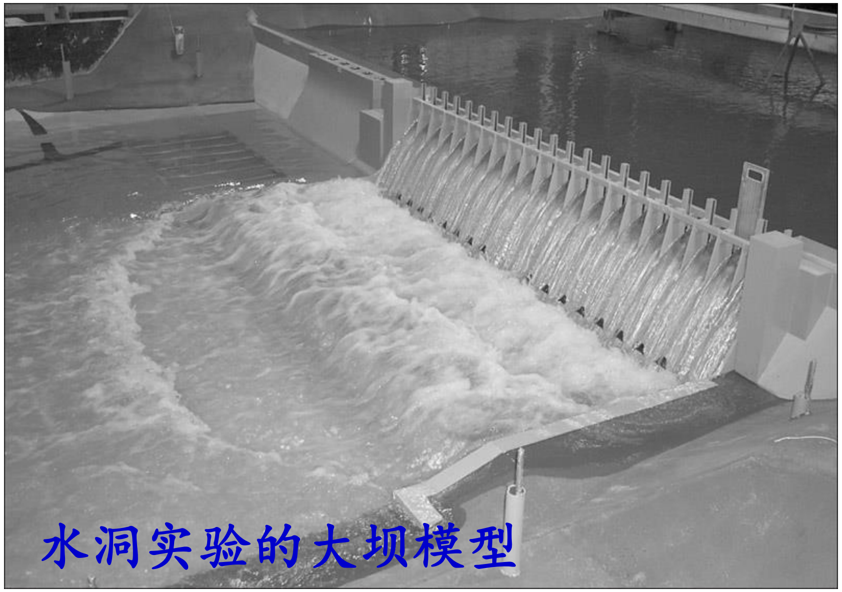
NTF增压低温风洞（2.5米x2.5米）：极低温高压氮气来模拟高雷诺数下飞行

- 低温高压：高密度，低粘性 + 尺寸缩小？？？

1. 量纲分析(1)

◆由于流体流动十分复杂，至今对一些工程中的复杂流动问题，仍不能完全依靠理论分析来求解。因此，实验常常是流动研究中最基本的手段，而**实验的理论基础则是相似原理**，**实验数据分析则要应用量纲分析**。

◆量纲分析可用于设计、表达和分析实验数据，可以减少描述物理现象的变量数目和复杂度。


水洞实验的大坝模型

量纲分析(2)

◆在物理现象中，**确定物理量之间的函数关系**

●如流体中的受力 $F = f(L, V, \rho, \mu)$

◆**物理量无量纲化**：简化实验结果中物理量之间的关系

$$\frac{F}{\rho L^2 V^2} = g\left(\frac{\rho V L}{\mu}\right) = g(\mathrm{Re}_L)$$

◆给出**无量纲形式的方程组**(确定描述物理现象的控制参数)

◆给出**相似律**，使用模型测试来替代昂贵的大型原型实验

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_n \qquad \frac{F_m}{F_n} = \frac{\rho_m}{\rho_n}\left(\frac{V_m}{V_n}\right)^2\left(\frac{L_m}{L_n}\right)^2$$

物理量的量纲

◆有量纲量

- 长度、时间、质量、力、速度、压力、温度、粘性、应力
- 有一定的度量单位来衡量
  - 基本单位制：长度-质量-时间-热力学温度

◆无量纲量

- 弧度、面积比、升力系数、雷诺数、马赫数
- 不取决于度量单位的纯粹数字
  - 如两个量纲相同的物理量之比

量纲公式

◆量纲公式

● 力F的量纲 $\dim F = \dfrac{ML}{T^2}$

● 任何物理量的度量单位都可用基本单位导出

◆基本量纲 L, M, T, Θ

◆导出量纲 $L^l M^m T^n \Theta^s$

速度dim v=LT^{-1}、加速度dim a=LT^{-2}、密度dim ρ=ML^{-3}

力dim F=MLT^{-2}、压强dim p=ML^{-1}T^{-2}

表面张力dim σ=MT^{-2}、体积模量dim K=ML^{-1}T^{-2}

动力粘度dim μ=ML^{-1}T^{-1}、运动粘度dim ν=L^{2}T^{-1}

比热容dim c_p= dimc_V=L^{2}T^{-2}Θ^{-1}

气体常数dim R=L^{2}T^{-2}Θ^{-1}

常用的物理量和量纲

物理量	量纲	物理量	量纲	物理量	量纲
长度	L	能量	ML^2T^{-2}	应力	MLT^{-2}
面积	L^2	功率	ML^2T^{-3}	力矩	ML^2T^{-2}
体积	L^3	密度	ML^{-3}	惯性矩	ML^2
速度	LT^{-1}	表面张力	MT^{-2}	角速度	T^{-1}
加速度	LT^{-2}	时间	T	角加速度	T^{-2}
线动量	MLT^{-1}	质量	M	动量矩	ML^2T^{-1}
角动量	ML^2T^{-1}	频率	T^{-1}	弹性系数	$ML^{-1}T^{-2}$
力	MLT^{-2}	压强	$ML^{-1}T^{-2}$	粘性系数	$MT^{-1}L^{-1}$
				扩散系数	L^2T^{-1}

2. 量纲一致性原则

◆**量纲一致性原则**：描述物理现象的物理方程中的各项量纲必然相同

- 以伯努利方程为例：

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=const$$

$[L^2T^{-2}]$　$[L^2T^{-2}]$　$[L^2T^{-2}]$　$[L^2T^{-2}]$

◆**量纲分析**：利用量纲一致性原则寻求物理量之间的关系

瑞利法

◆瑞利法是用定性物理量x_1、x_2、….、x_n的某种幂次之积的函数来表示被决定的物理量y。

$$y = kx_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

k为无量纲系数，由试验确定。

◆a_1、a_2、….、a_n为待定指数，根据量纲一致性原则求出。

例1：管流特征速度

[例1] 已知管流的特征流速V_c与流体的密度ρ、动力粘度μ和管径d有关，试用瑞利量纲分析法建立V_c的公式结构。

[解] 假定 $v_c = k\rho^{\alpha}\cdot\mu^{\beta}\cdot d^{\gamma}$

式中k为无量纲常数。

将各物理量的量纲

$$\dim v_c = LT^{-1}, \dim\rho = ML^{-3}$$

$$\dim\mu = ML^{-1}T^{-1}, \dim d = L$$

代入指数方程，则得相应的量纲方程

$$LT^{-1} = (ML^{-3})^{\alpha}\cdot(ML^{-1}T^{-1})^{\beta}\cdot L^{\gamma}$$

例1：管流特征速度

根据量纲齐次性原理，有

$$M:0=\alpha+\beta$$

$$L:1=-3\alpha-\beta+\gamma$$

$$T:-1=-\beta$$

解上述三元一次方程组得： $\alpha=-1,\beta=1,\gamma=-1$

故得： $v_c=k\dfrac{\mu}{\rho d}$

其中常数k需由实验确定。

【例 2】 不可压缩粘性流体在粗糙管内定常流动时，沿管道的压强降Δp与管道长度L，内径d，绝对粗糙度ε，流体的平均流速v，密度ρ和动力粘度μ有关。试用瑞利法导出压强降的表达式。

【解】 按照瑞利法可以写出压强降

$$\Delta p = kL^{a_1} d^{a_2} \varepsilon^{a_3} v^{a_4} \rho^{a_5} \mu^{a_6} \tag{b}$$

如果用基本量纲表示方程中的各物理量，则有

$$ML^{-1}T^{-2} = L^{a_1} L^{a_2} L^{a_3} \left(LT^{-1}\right)^{a_4} \left(ML^{-3}\right)^{a_5} \left(ML^{-1}T^{-1}\right)^{a_6}$$

根据物理方程量纲一致性原则有

对 L $\quad -1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 3a_5 - a_6$

对 T $\quad -2 = -a_4 - a_6$

对 M $\quad 1 = a_5 + a_6$

瑞利法一般用于影响流动的参数个数不超过3时较为方便。

令 $h_f = \Delta p / \rho g$，则得单位重量流体的沿程损失为

$$h_f = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

这就是计算沿程损失的**达西-魏斯巴赫（Darcy-Weisbach）公式**。

可以看出，对于变量较少的简单流动，用瑞利法可以方便的直接求出结果；对于变量较多的复杂流动，比如说有 n 个变量，由于按照基本量纲只能列出三个代数方程，待定系数便有 n-3 个，这样便出现了待定系数选取的问题。

Π定理（铂金汉定理）

◆如果一个物理过程涉及到 *n*个物理量和*m*个基本量纲，则这个物理过程可以由*n*个物理量组成的*n-m*个无量纲量（相似准则数π_i）的函数关系来描述。

$$F(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots,\ \ x_n)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f(\pi_1,\ \ \pi_2,\ \ \ldots,\ \ \pi_{n-m})=0$$

应用Π定理的步骤

① 确定影响此物理现象的各个物理量：

$$F(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n) = 0$$

② 从n个物理量中选取m个基本物理量作为m个基本量纲的代表。m一般为3，应使其分别具有质量量纲、时间量纲、长度量纲，如ρ、v、d。

③ 从三个基本物理量以外的物理量中，每次轮取一个，连同三个基本物理量组合成一个无量纲的π项，一共写出 *n*-3 个π项。

$$x_i = \pi_i x_{n-2}^{\ a_i} x_{n-1}^{\ b_i} x_n^{\ c_i} \quad \text{即} \quad \pi_i = \frac{x_i}{x_{n-2}^{\ a_i} x_{n-1}^{\ b_i} x_n^{\ c_i}}$$

④ 据因次齐次性求各π项的指数 a_i，b_i，c_i

⑤ 写出描述物理现象的无因次关系式

$$F(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{n-m}) = 0$$

【例 2】 试用π定理导出不可压缩粘性流体在粗糙管内的定常流动压强降的表达式。

【解】 根据与压强降有关的物理量可以写出物理方程式

$$F(\Delta p, \mu, L, \varepsilon, d, v, \rho) = 0$$

式中有 7 个物理量，选取d, v, ρ为基本量，可以用它们组成 4 个零量纲量，即

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{d^{a_1} v^{b_1} \rho^{c_1}}, \quad \pi_2 = \frac{\mu}{d^{a_2} v^{b_2} \rho^{c_2}}, \quad \pi_3 = \frac{L}{d^{a_3} v^{b_3} \rho^{c_3}}, \quad \pi_4 = \frac{\varepsilon}{d^{a_4} v^{b_4} \rho^{c_4}}$$

用基本量纲表示π_1中的各物理量，得

$$ML^{-1}T^{-2} = L^{a_1}\left(LT^{-1}\right)^{b_1}\left(ML^{-3}\right)^{c_1}$$

根据物理方程量纲一致性原则有：

对 L $\qquad -1 = a_1 + b_1 - 3c_1$

对 T $\qquad -2 = -b_1$

对 M $\qquad 1 = c_1$

解得$a_1 = 0, b_1 = 2, c_1 = 1$，故有：$\pi_1 = \dfrac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu$

用基本量纲表示π_2中的各物理量，得

$$ML^{-1}T^{-1} = L^{a_2}\left(LT^{-1}\right)^{b_2}\left(ML^{-3}\right)^{c_2}$$

根据物理方程量纲一致性原则有：$a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 1$，故有

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v d} = \frac{1}{\mathrm{Re}}$$

用基本量纲表示π_3和π_4中的各物理量，得相同的量纲

$$L = L^{a_{3,4}}\left(LT^{-1}\right)^{b_{3,4}}\left(ML^{-3}\right)^{c_{3,4}}$$

根据物理方程量纲一致性原则有：$a_{3,4} = 1, b_{3,4} = 0, c_{3,4} = 0$，故有

$$\pi_3 = \frac{L}{d} \quad ; \qquad \pi_4 = \frac{\varepsilon}{d}$$

将所有π值代入$f\left(\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{n-m}\right) = 0$，可得

$$f\left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{1}{\mathrm{Re}}, \frac{l}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right) = 0$$

例2：不可压管流压降问题

◆ 至此，问题求解结束，进一步对上式整理规范。由上式可知$\Delta p / \rho v^2$与其余三个无量纲数有关，那么

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = f_1(\frac{l}{d}, \frac{\varepsilon}{d}, \frac{1}{Re}) = \frac{l}{d} f_2(\frac{\varepsilon}{d}, \frac{1}{Re})$$

◆ 令 $\lambda = f_2(\frac{\varepsilon}{d}, \frac{1}{Re})$

$$h_w = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

◆ 这就是达西公式，λ为沿程阻力系数，表示了等直圆管中流动流体的压降与沿程阻力系数、管长、速度水头成正比，与管径成反比。

例3：粘性流体中球体的阻力

[例3] 实验发现，球形物体在粘性流体中运动所受阻力F_D与球体直径d、球体运动速度v、流体的密度ρ和动力粘度μ有关，试用π定理量纲分析法建立F_D的公式结构。

[例3] 实验发现，球形物体在粘性流体中运动所受阻力F_D与球体直径d、球体运动速度v、流体的密度ρ和动力粘度μ有关，试用π定理量纲分析法建立F_D的公式结构。

[解]　假定 $f_1(F_D, l, v, d, \mu) = 0$

选基本物理量ρ、v、d，根据π定理，上式可变为

$$\varphi(\pi_1, \pi_2) = 0$$

其中

$$\pi_1 = \rho^{\alpha_1} \cdot v^{\beta_1} \cdot d^{\gamma_1} \cdot F_D$$

$$\pi_2 = \rho^{\alpha_2} \cdot v^{\beta_2} \cdot d^{\gamma_2} \cdot \mu$$

对π_1：$M^0 L^0 T^0 = (ML^{-3})^{\alpha_1} \cdot (LT^{-1})^{\beta_1} \cdot L^{\gamma_1} \cdot MLT^{-2}$

$$M: 0 = \alpha_1 + 1$$

$$L: 0 = -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + 1$$

$$T: 0 = -\beta_1 - 2$$

[例3续]

解上述三元一次方程组得： $\alpha_1=-1,\beta_1=-2,\gamma_1=-2$

其中 $$\pi_1=\frac{F_D}{\rho v^2 d^2}$$

同理： $$\pi_2=\frac{\mu}{\rho v d}=\frac{1}{\mathrm{Re}}$$

代入 $\varphi(\pi_1,\pi_2)=0$，并就F_D解出，可得

$$F_D=f(\mathrm{Re})\rho v^2 d^2=C_D\rho v^2 d^2$$

式中 $C_D=f(\mathrm{Re})$ 为绕流阻力系数，由实验确定。

3. 流动的相似理论

表征流动过程的物理量

按性质分

- **描述几何形状的**
  如长度、面积、体积等
- **描述运动状态的**
  如速度、加速度、体积流量等
- **描述动力特征的**
  如质量力、表面力、动量等

- 几何相似
- 运动相似
- 动力相似

流动相似应满足的条件

相似原理

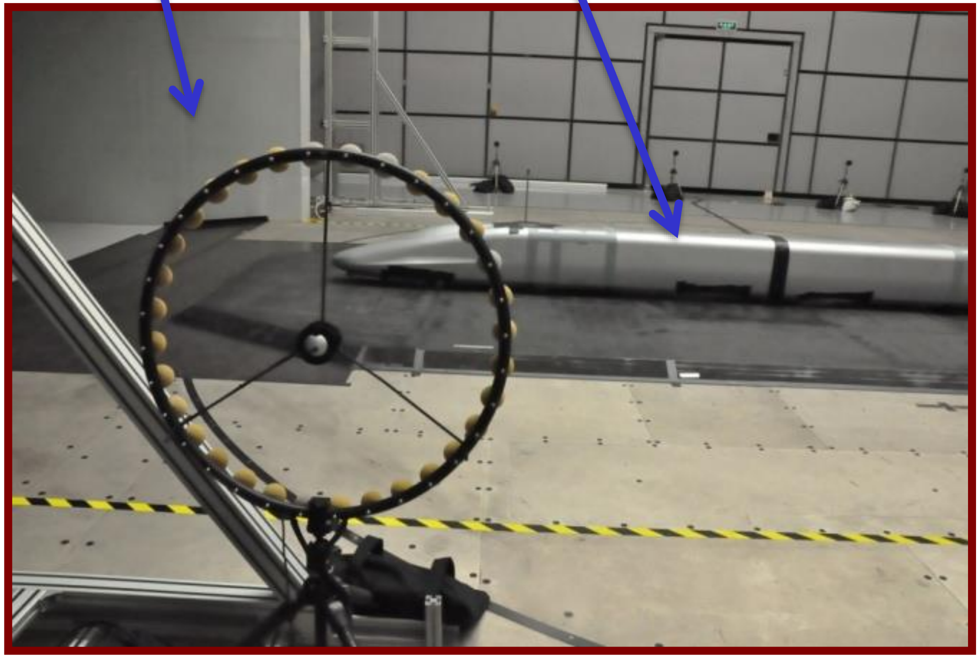
高速列车模型
风洞试验

运动相似：对试验流场的要求

几何相似：对试验对象的要求

动力相似：对试验对象和流场相互作用的要求

缩尺比例：1：8
原型长度：27m/节
三车编组



几何相似(空间相似)

◆定义： 模型和原型的全部对应线形长度的比值为一定常数 。

$$k_l = \frac{l'}{l}$$

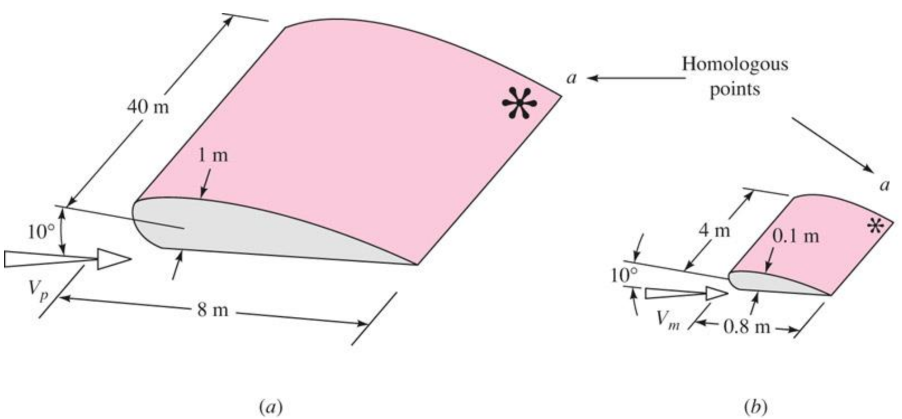
带“/”的表示模型的有关物理量

不带“/”的表示原型的有关物理量

长度比例尺 $k_l = \dfrac{l'}{l}$

面积比例尺 $k_A = \dfrac{A'}{A} = \dfrac{l'^2}{l^2} = k_l^2$

体积比例尺 $k_V = \dfrac{V'}{V} = \dfrac{l'^3}{l^3} = k_l^3$

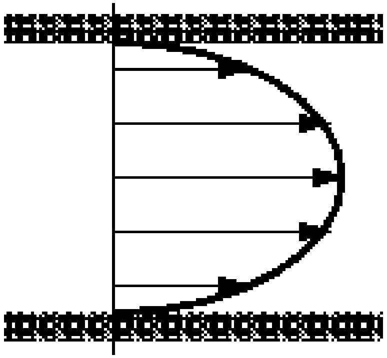


运动相似（空间相似+时间相似）

◆**定义**：满足几何相似的流场中，对应时刻、对应点流速（加速度）的方向一致，大小的比例相等，即它们的速度（加速度场）相似。

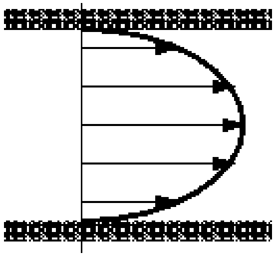
● 或者说模型与原形的流场所有对应点上、对应时刻的流速方向相同而流速大小的比例相等。

➢**速度比例尺** $k_v = \dfrac{v'}{v}$



➢**时间比例尺** $k_t = \dfrac{t'}{t} = \dfrac{l'/v'}{l/v} = \dfrac{k_l}{k_v}$

➢**加速度比例尺** $k_a = \dfrac{a'}{a} = \dfrac{v'/t'}{v/t} = \dfrac{k_v}{k_t} = \dfrac{{k_v}^2}{k_l}$



运动相似

- 体积流量比例尺

$$k_{q_V}=\frac{q_V'}{q_V}=\frac{l'^3/t'}{l^3/t}=\frac{k_l^3}{k_t}=k_l{}^2k_v$$

- 运动粘度比例尺

$$k_\nu=\frac{\nu'}{\nu}=\frac{l'^2/t'}{l^2/t}=\frac{k_l^2}{k_t}=k_lk_v$$

- 角速度比例尺

$$k_\omega=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{v'/l'}{v/l}=\frac{k_v}{k_l}$$

动力相似

◆**定义**：模型与原型的流场所有对应点作用在流体微团上的各种力彼此方向相同，而它们大小的比例相等。

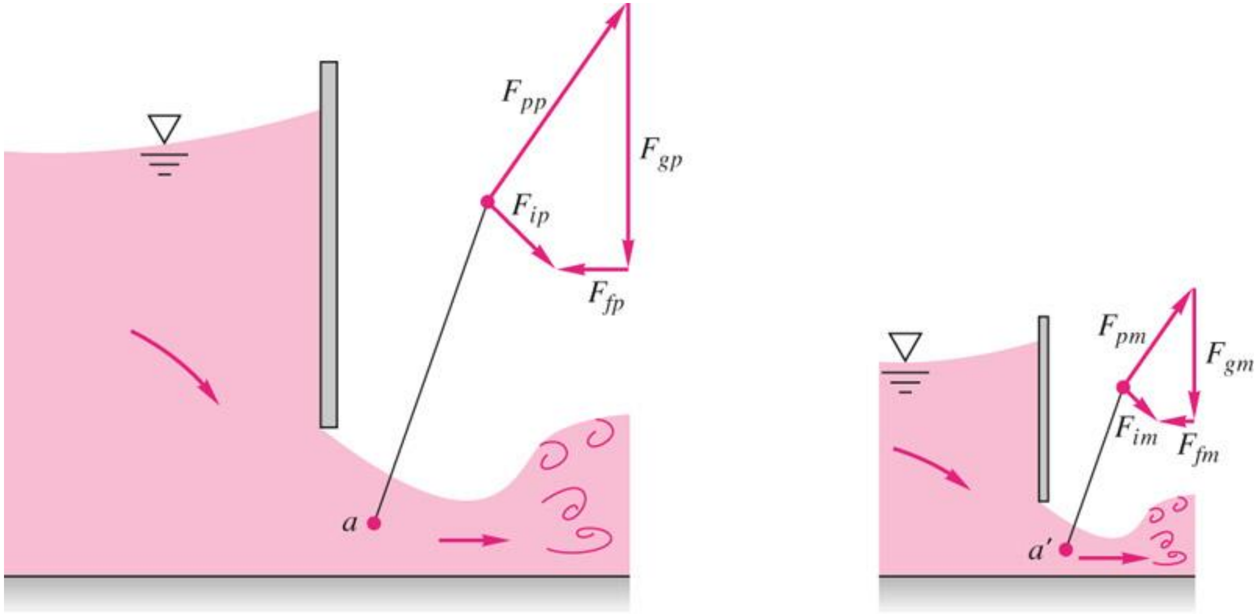
➢力的比例尺 $$k_F = \frac{F_P'}{F_P} = \frac{F_\tau'}{F_\tau} = \frac{F_g'}{F_g} = \frac{F_i'}{F_i}$$

F_P ——总压力

F_τ ——切向力

F_g ——重力

F_i ——惯性力



相似判据

◆流场模拟的基本要求（相似的必要性）：

只有在满足以上三个相似之后，模型流动才能够真实地模拟出原型流动，模拟才具有实际价值和意义。

◆相似判据

- 几何相似、运动相似有比较清晰的关系表达式
- 判断什么条件下两流场才满足动力相似？？

1. **方程分析法**：描述流体的运动方程应该是一致的。从而得到必须满足的关系式，即相似判据。
2. **量纲分析方法**：以量纲分析为基础的一种方法。

方程分析法

◆考虑垂直方向（z方向）运动方程

● **原形流动**：反映实际流场的动力学性质和过程

$$\rho_1\frac{\partial w_1}{\partial t_1}+\rho_1\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial w_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)=-\rho_1 g_1-\frac{\partial p_1}{\partial z_1}+\mu_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1{}^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1{}^2}\right)$$

● **模型流动**：反映实验流场的动力性质和过程

$$\rho_2\frac{\partial w_2}{\partial t_2}+\rho_2\left(u_2\frac{\partial w_2}{\partial x_2}+v_2\frac{\partial w_2}{\partial y_2}+w_2\frac{\partial w_2}{\partial z_2}\right)=-\rho_2 g_2-\frac{\partial p_2}{\partial z_2}+\mu_2\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2{}^2}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial z_2{}^2}\right)$$

● **将相似系数代入模型流动方程**

$$c_l=x_2/x_1=y_2/y_1=z_2/z_1;\quad c_v=u_2/u_1=v_2/v_1=w_2/w_1;\quad c_t=t_2/t_1$$

$$c_\rho=\rho_2/\rho_1;\quad c_\mu=\mu_2/\mu_1;\quad c_g=g_2/g_1$$

运动方程相似分析

◆相似系数代入模型方程，得

$$\frac{c_\rho c_v}{c_t}\rho_1\frac{\partial w_1}{\partial t_1}+\frac{c_\rho c_v^{\ 2}}{c_l}\rho_1\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial w_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)$$

$$=-c_\rho c_g\rho_1 g_1-\frac{c_p}{c_l}\frac{\partial p_1}{\partial z_1}+\frac{c_\mu c_v}{c_l^{\ 2}}\mu_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^{\ 2}}\right)$$

◆对比原形方程

$$\rho_1\frac{\partial w_1}{\partial t_1}+\rho_1\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial w_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)=-\rho_1 g_1-\frac{\partial p_1}{\partial z_1}+\mu_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^{\ 2}}\right)$$

◆两流场动力相似的充要条件

$$\frac{c_\rho c_v}{c_t}=\frac{c_\rho c_v^{\ 2}}{c_l}=c_\rho c_g=\frac{c_p}{c_l}=\frac{c_\mu c_v}{c_l^{\ 2}}$$

运动方程相似分析

$$\frac{C_\rho C_v}{C_t}=\frac{C_\rho C_v^{\ 2}}{C_l}=C_\rho C_g=\frac{C_p}{C_l}=\frac{C_\mu C_v}{C_l^{\ 2}}$$

◆对上式稍作变换，各项同除以 $c_\rho c_v^2/c_l$ ，最后可得：

$$\frac{c_l}{c_v c_t}=1,\frac{c_g c_l}{c_v^{\ 2}}=1,\frac{c_p}{c_\rho c_v^{\ 2}}=1,\frac{c_\mu}{c_v c_l c_\rho}=1$$

给出了两流场相似时，各相似常数必须满足的关系式。

运动方程相似分析

◆进一步得到：

$$\frac{l_1}{t_1u_1}=\frac{l_2}{t_2u_2},\frac{u_1^2}{g_1l_1}=\frac{u_2^2}{g_2l_2},\frac{p_1}{\rho_1u_1^2}=\frac{p_2}{\rho_2u_2^2},\frac{l_1u_1\rho_1}{\mu_1}=\frac{l_2u_2\rho_2}{\mu_2}$$

◆包含的无量纲数有：

斯特劳哈尔数 $S_t\equiv\frac{l}{tu}$

雷诺数 $\mathrm{Re}\equiv\frac{Vl}{\nu}=\frac{\rho Vl}{\mu}$

欧拉数 $Eu\equiv\frac{\Delta p}{\rho V^2}$

弗劳德数 $Fr\equiv\frac{V^2}{gl}$

运动方程相似判据

◆对于动量方程

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

◆四个无量纲数　S_t，Eu，Re，Fr

◆**相似判据**：只要四个无量纲数在两流场中是相同的，那么原型和模型流场相似，则两方程应反映同一事实。

◆对于特定的流动，相似判据中的无量纲数可能还会减少。

Reynolds准则——粘性力相似

◆雷诺数Re——惯性力与粘性力的比值。

- 惯性力：$m\,\vec{a}\quad or\quad m\vec{V}.\vec{\nabla}\vec{V}\propto\rho L^3U^2L^{-1}=\rho L^2U^2$
- 粘性力：$\tau\,S=\mu\dfrac{dV}{dy}S\propto\mu UL$

$$\boxed{\mathrm{Re}_L=\frac{\rho L^2U^2}{\mu UL}=\frac{\rho UL}{\mu}=\frac{UL}{\nu}}$$

- Re_L很大，说明粘性力作用可以忽略（除了靠近壁面附近的流动），湍流
- Re_L很小，惯性力<<粘性力，层流

Froude准则——重力相似

◆弗劳德数Fr——惯性力与重力的比值。

- ●惯性力： $m\,\vec{a} \quad or \quad m\vec{V}.\vec{\nabla}\vec{V} \propto \rho L^3U^2L^{-1} = \rho L^2U^2$
- ●重力： $m\,g \propto \rho L^3 g$

$$\boxed{Fr = \frac{\rho L^2U^2}{\rho L^3 g} = \frac{U^2}{gL}}$$

- ●在水动力学中使用广泛
  - ➢在惯性力和重力起重要作用的流动中，欲使两几何相似的物体(相似比为$n=L_p/L_m$,下标p代表实物，m代表模型)满足动力相似条件，必须保证模型和实物的弗劳德数相等。在水动力学中，重力加速度取作常数,则模型缩小n倍，流体流动速度就必须缩小sqrt(n)倍。

Strouhal准则——非定常性相似

◆斯特劳哈尔准则——当地惯性力和迁移惯性力的比值。

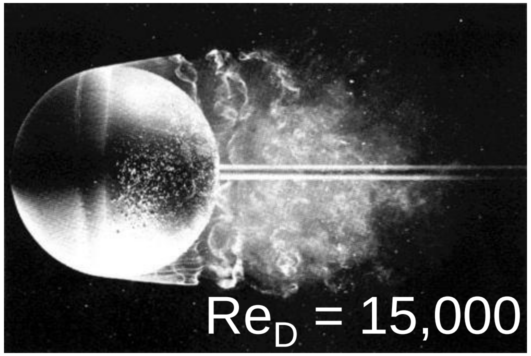
$$S_t \equiv \frac{L}{tU} = \frac{fL}{U}$$

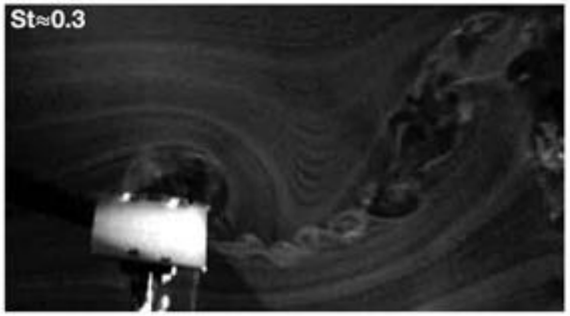
f—特征频率

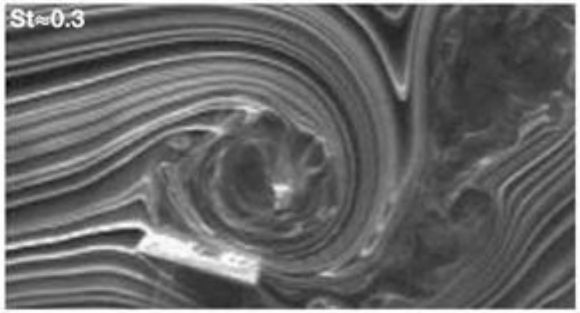
●在考虑周期性振荡流体现象时经常使用

➢如均匀来流条件下的圆球绕流问题，在800<Re<200,000范围内，尾迹涡中低频的脉动频率跟Re无关，St=0.2

➢在动物的飞行或游泳（如海豚、鲨鱼、硬骨鱼、鸟、蝙蝠、昆虫）中，St数一般在0.2至0.4之间。







(Taylor et al., Nature 2003)

Euler准则——压力相似

◆欧拉数——所受压力与惯性力之比

- 所受压力：$\Delta p\ S \propto \Delta p\ L^2$
- 惯性力：$m\ \vec{a} \quad or \quad m\vec{V}.\vec{\nabla}\vec{V} \propto \rho L^3 U^2 L^{-1} = \rho L^2 U^2$

$$\boxed{Eu = \frac{\Delta p\ L^2}{\rho U^2 L^2} = \frac{\Delta p}{\rho U^2}}$$

- 工程上，常用来表示当地压降与单位体积动能之间的关系，表示了流动的压力损失特征。

- 压力系数：$\boxed{C_p = \frac{\Delta p}{0.5\rho U^2}}$

Mach相似——弹性力相似准则

◆马赫数——惯性力和弹性力之比。

- 惯性力： $m\,\vec{a} \quad or \quad m\vec{V}.\vec{\nabla}\vec{V} \propto \rho L^3 U^2 L^{-1} = \rho L^2 U^2$
- 弹性力： $E_V S \equiv \rho \dfrac{dp}{d\rho} S \propto \rho c_0^2 L^2$

$$\boxed{Ma^2 = \frac{\rho U^2 L^2}{\rho {c_0}^2 L^2} = \frac{U^2}{{c_0}^2}}$$

- 完全不可压缩流动： c_0无穷大， Ma=0
  - ➢Ma<0.3，近似认为是不可压流动

相似准则的选择

◆在流体力学实验中，要保证满足全部相似准则是困难的。模型相似律选择的原则就是保证对流动起主要作用的力相似，而忽略次要力的相似。

◆例如：

- 堰顶溢流、闸孔出流、明渠流动、自然界中的江河溪流等，重力起起主要作用，应按**弗劳德数相似准则设计模型**；
- 有压管流、低速翼型绕流、流体机械中的流动，粘性力起主要作用，应按**雷诺数相似准则设计模型**；
- 对于可压缩流动，应按**马赫数相似准则设计模型**。

4. 方程的无量纲化

◆物理量的表示

物理量＝特征值×无量纲数

(A)　　　　　(B)

(A)用大写字母表示，含有量纲，反映该物理量的特征量；

(B)用带 ＊ 的小写字母表示，反映该物理量的具体大小；

流速 $u=3$ m/s　　　特征流速 $U=10$ m/s

$$u = U u^* \qquad u^* = 0.3$$

无量纲方程

◆在不可压粘性流体的连续方程和运动方程中

$$\nabla . \vec{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \boxed{\mu \nabla^2 \vec{V}}$$ 粘性项

●这个方程组M, L, T具有3个基本量纲。

●所有变量*p*, *V*, *x*, *y*, *z*, *t*，可以由ρ和两个参考特征量L和U无量纲化。

➢L—特征长度

➢U—特征速度

方程无量纲化

◆引入无量纲量

$$V^* = \frac{V}{U} \qquad \nabla^* = L\nabla$$

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{L} \qquad z^* = \frac{z}{L} \qquad R^* = \frac{R}{L}$$

$$t^* = \frac{tU}{L} \qquad p^* = \frac{p+\rho gz}{\rho U^2}$$

◆化简后得到

$$\boxed{\nabla^* . \vec{V}^* = 0}$$

$$\frac{D\vec{V}^*}{Dt^*} = -\vec{\nabla}^* p^* + \frac{\mu}{\rho UL} \nabla^{*2}\vec{V}^* \xrightarrow{\text{引入Re数}} \boxed{\frac{D\vec{V}^*}{Dt^*} = -\vec{\nabla}^* p^* + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^{*2}\vec{V}^*}$$

$$\mathrm{Re}_L = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

空气动力学问题中的动力相似准则

- ◆对无粘不可压缩流动：
  - ●只需满足几何相似的流场条件，即绕流体的几何相似，迎角、侧滑角等。
- ◆对于不可压粘性流动：（下一次课内容）
  - ●除满足上述条件外，雷诺数Re相等。
- ◆无粘可压缩流动：（冬学期）
  - ●除满足几何相似，迎角、侧滑角相等条件外，马赫数及绝热指数相等。
- ◆可压缩粘性流动：（冬学期）
  - ●几何相似，迎角、侧滑角相等条件外，马赫数及绝热指数、雷诺数Re相等。
- ◆当考虑热传导时，普朗特数Pr相等。

作业

1. 设计时速为160km的汽车，在风洞中进行模型实验以预测空气阻力。已知汽车车高为1.5米，风洞最大风速为60m/s，模型的高度不得小于多少？若测量的摩擦阻力为1.5kN，则汽车的阻力将是多少？已知阻力是汽车速度V，汽车尺寸L，空气密度ρ和粘度μ的函数。

2. 飞机以400m/s速度在高空飞行，该处的温度T为228K，压力p为30.2kPa。现在缩小20倍的模型在风洞中做实验。已知风洞中温度T=288K，粘度 $\mu=\mu(T)=\dfrac{T^{1.5}}{T+110.4}$ ，求风洞的风速及压力。

3. 通过对二维稳态可压缩粘性流体能量方程的相似律分析，推导无量纲普朗特数Pr，分析其物理含义。

$$\rho u\frac{\partial(e+V^2/2)}{\partial x}+\rho v\frac{\partial(e+V^2/2)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial(up)}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial(vp)}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}$$