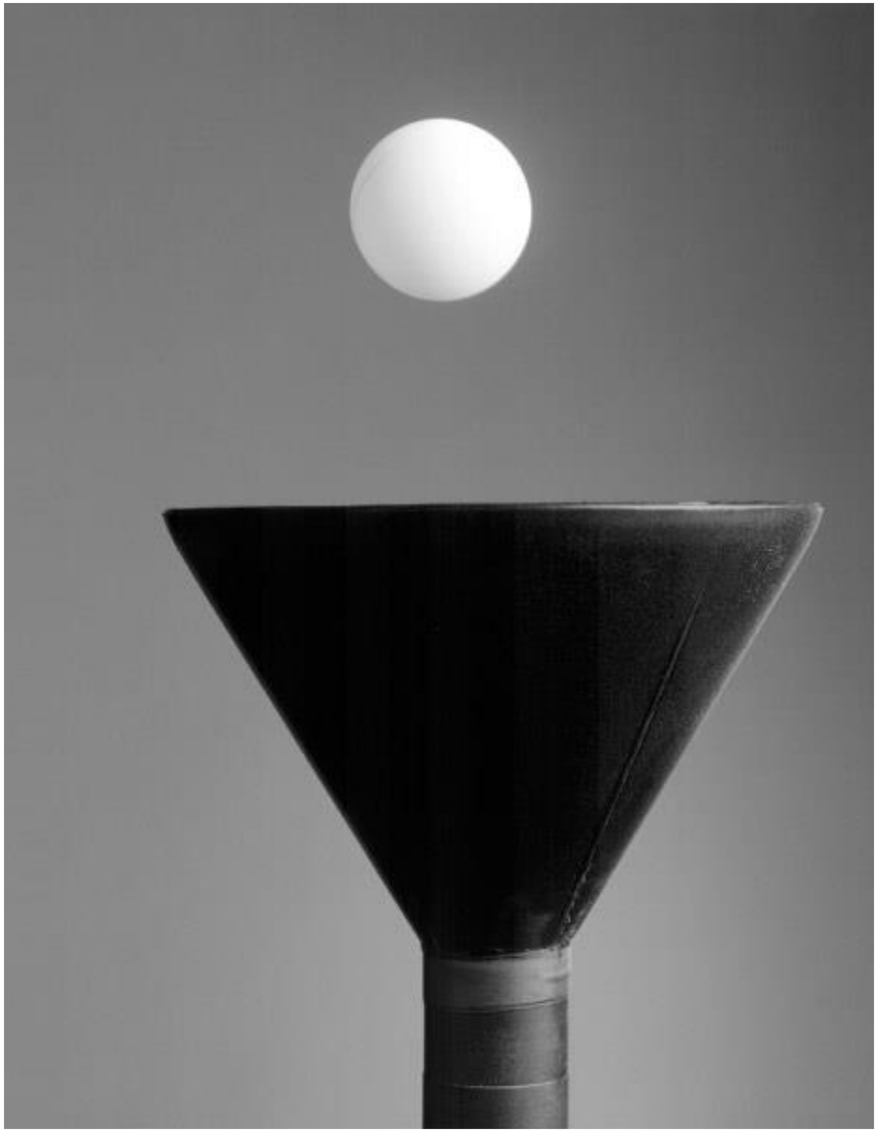
第二章：
流体力学基本方程



Balle de ping-pong en suspension par un jet d'air

本章内容

1. 流体运动的描述方法
2. 流体微元运动
3. 连续方程
4. 动量方程
5. 能量方程
7. 流动的分类
8. 流线、迹线和脉线
10. 环量与涡

1. 流体运动的描述方法

◆描述流体运动

- 流动参数在各个不同空间位置上随时间连续变化规律
- 流体的流动参数——表征运动流体的物理量

  位移、速度、加速度、密度、压强、动量、动能等

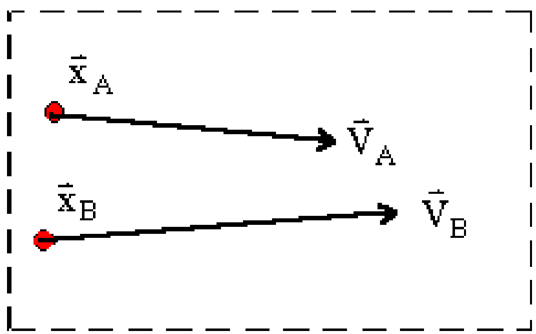
◆两种描述方式:

- **拉格朗日法**—着眼于流体质点
- **欧拉法**—着眼于空间位置

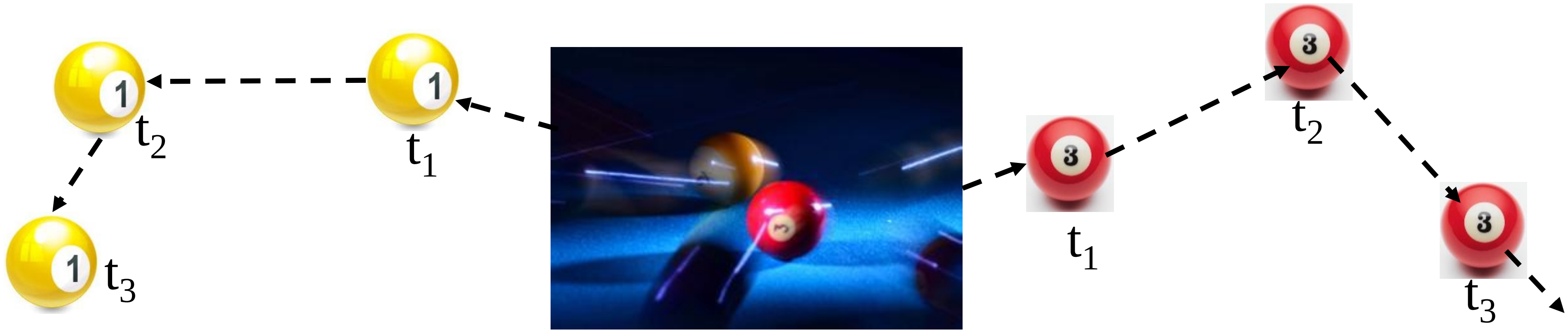
拉格朗日描述

◆跟踪流体质点来描述其力学和其它物理状态。

- 观察点随流体质点移动。



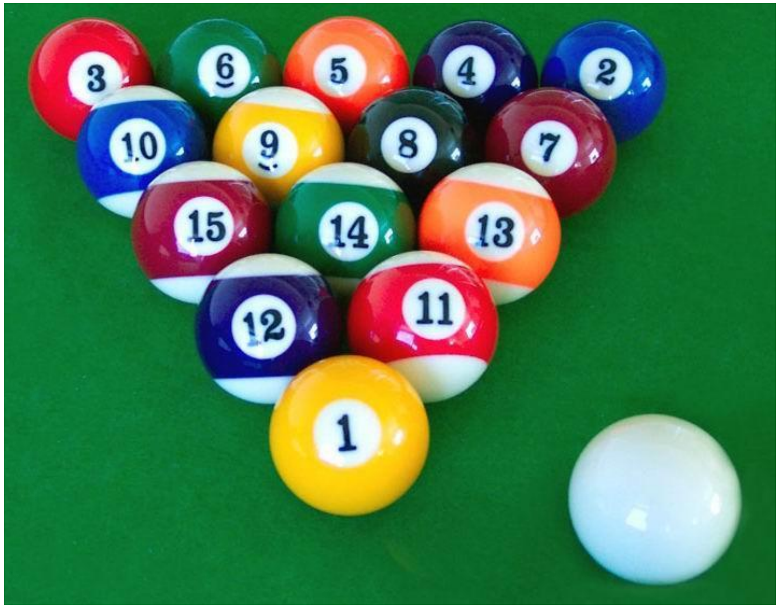
拉格朗日描述



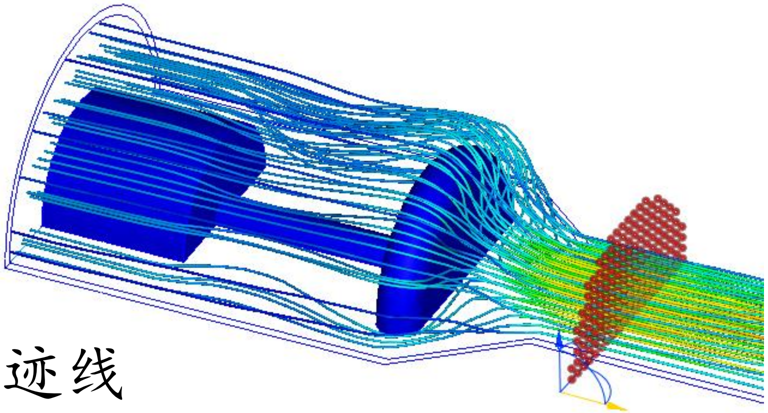
质点运动坐标	质点速度	质点加速度
$x = x(\underline{a,b,c},\underline{t})$ 流体质点标识　时间	$v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_x(a,b,c,t)$	$a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt} = a_x(a,b,c,t)$
$y = y(a,b,c,t)$	$v_y = \dfrac{dy}{dt} = v_y(a,b,c,t)$	$a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv_y}{dt} = a_y(a,b,c,t)$
$z = z(a,b,c,t)$	$v_z = \dfrac{dz}{dt} = v_z(a,b,c,t)$	$a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dv_z}{dt} = a_z(a,b,c,t)$

$$F = ma$$

拉格朗日描述



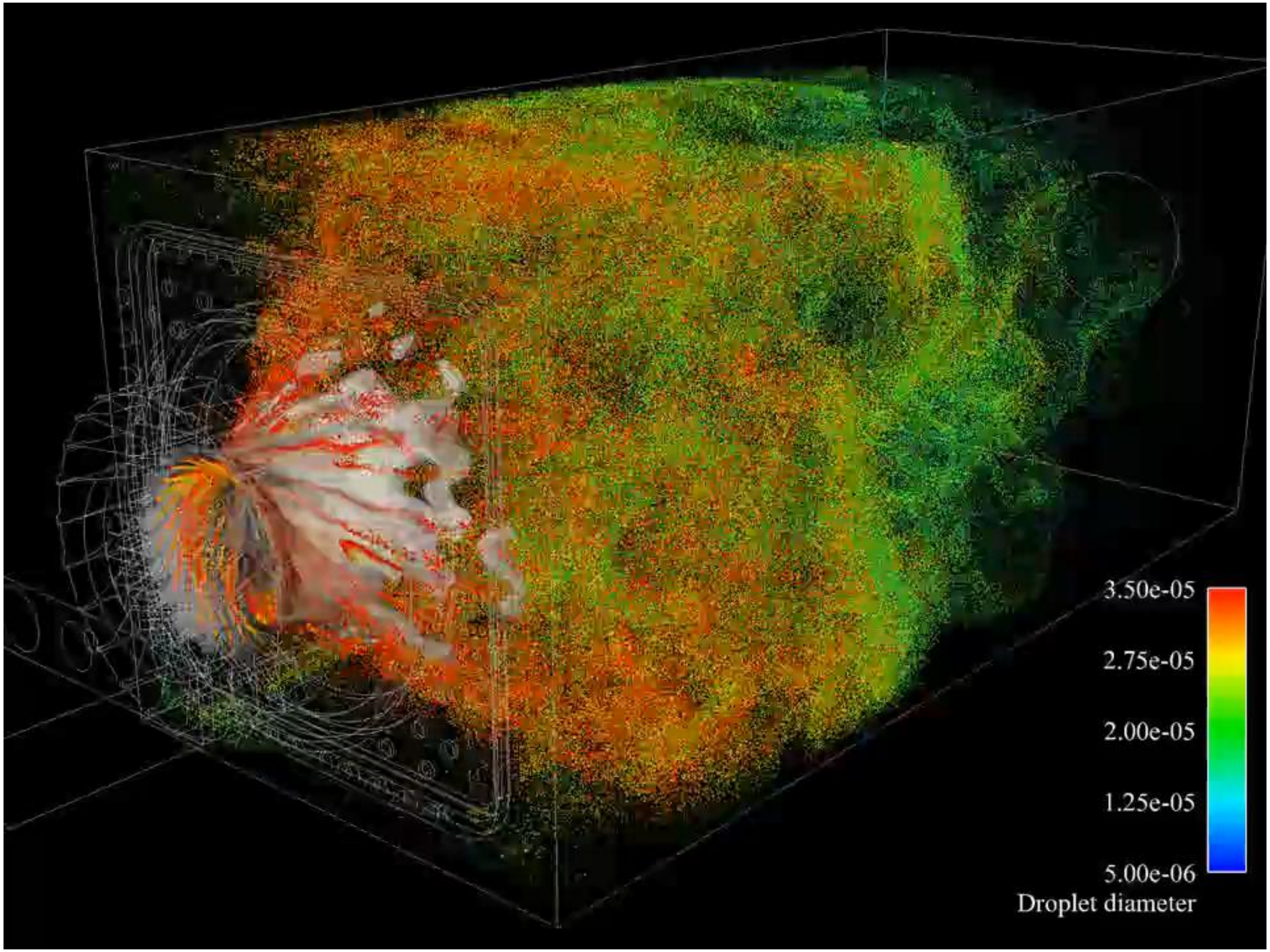
(x_i, y_i, z_i, t_0)　　$i = 1,2,3,4, \ldots n$



迹线

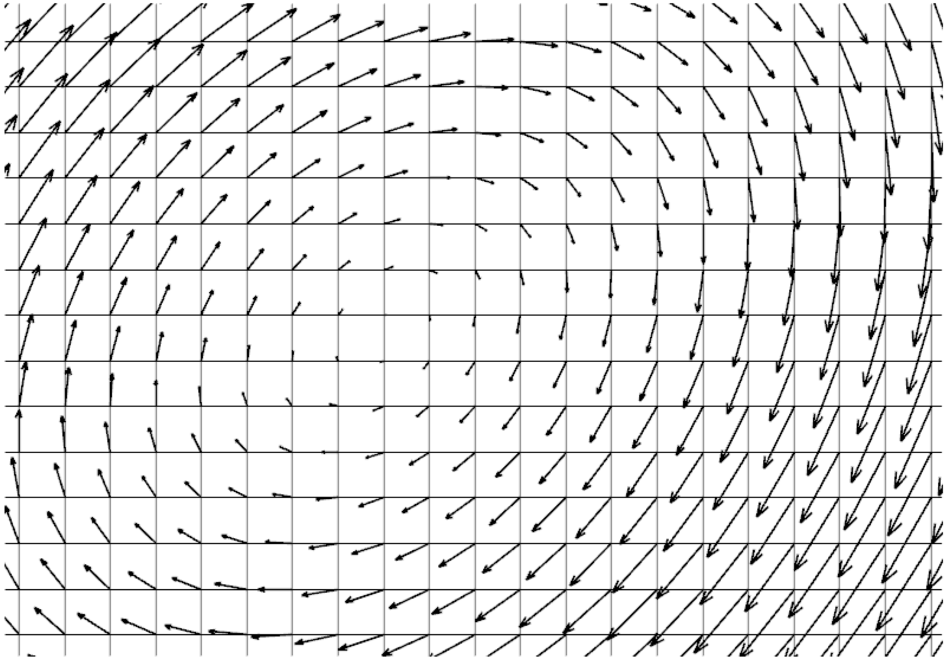
But n is too big in most of the time … …

基于拉格朗日方法的燃料喷注模拟

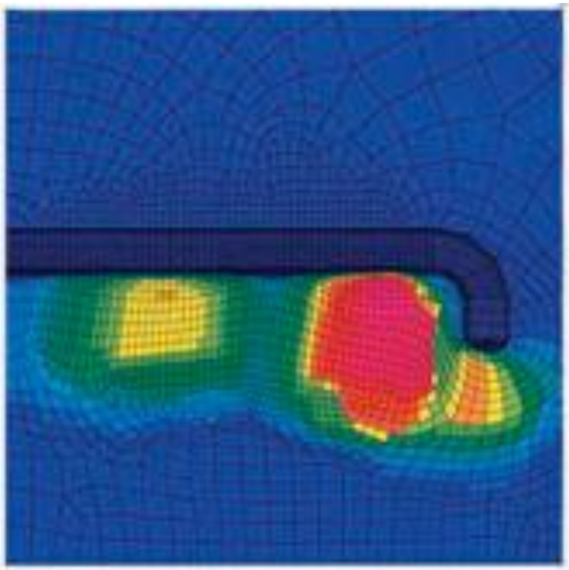


欧拉描述

- 在选定的时空坐标中观察流动中物理参量的分布。
  - 着眼于流场空间点的描述方法，观察点不随流体质点运动。

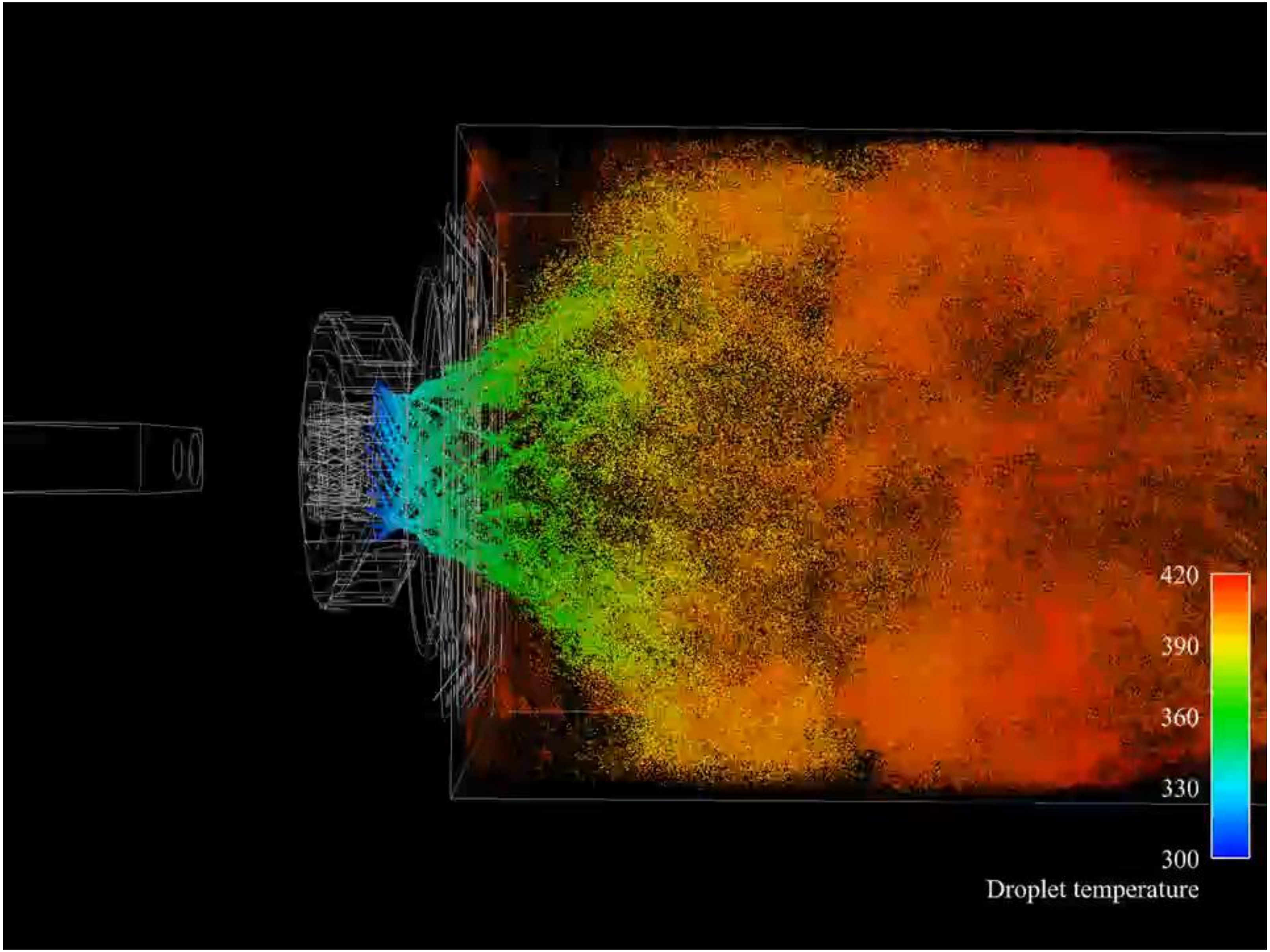


$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$$



$$T=T(\mathbf{r},t)=T(\mathbf{x},t)$$

气相—欧拉；液相—拉格朗日法



流体质点的速度和加速度

- 流体质点在空间运动，某一瞬时的速度

$$\mathbf{V}=\frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad 即 \quad u=\frac{dx}{dt},v=\frac{dy}{dt},w=\frac{dz}{dt}$$

欧拉法 $\mathbf{V}(t,x,y,z)=\mathbf{i}u(t,x,y,z)+\mathbf{j}v(t,x,y,z)+\mathbf{k}w(t,x,y,z)$

- 流体质点的加速度

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{i}\frac{du}{dt}+\mathbf{j}\frac{dv}{dt}+\mathbf{k}\frac{dw}{dt}$$

速度对时间的全导数

$$a_x=\frac{du(t,x,y,z)}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

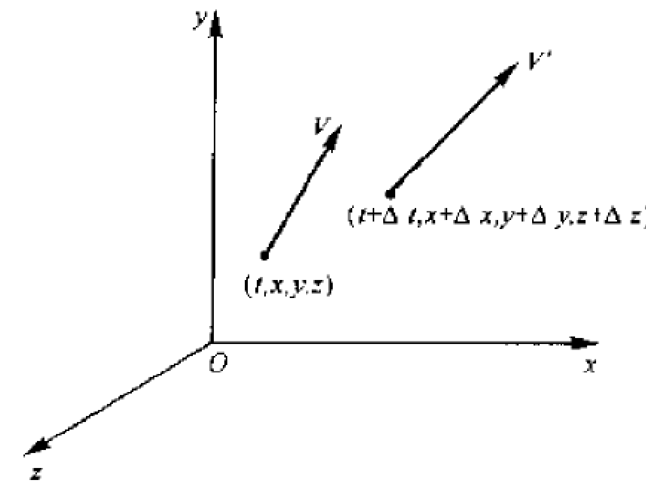
$$\mathbf{a}=\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$$

当地加速度　对流加速度

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

物理量的随体导数

◆速度的随体导数 $\dfrac{D\mathbf{v}}{Dt}=\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}$



- 流体质点的加速度

当地加速度+迁移加速度

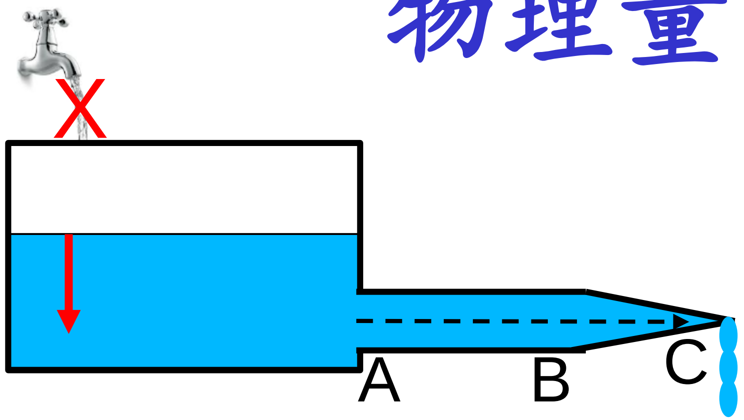
$$a_x=\frac{du}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u\left(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z,t+\Delta t\right)-u\left(x,y,z,t\right)}{\Delta t}$$

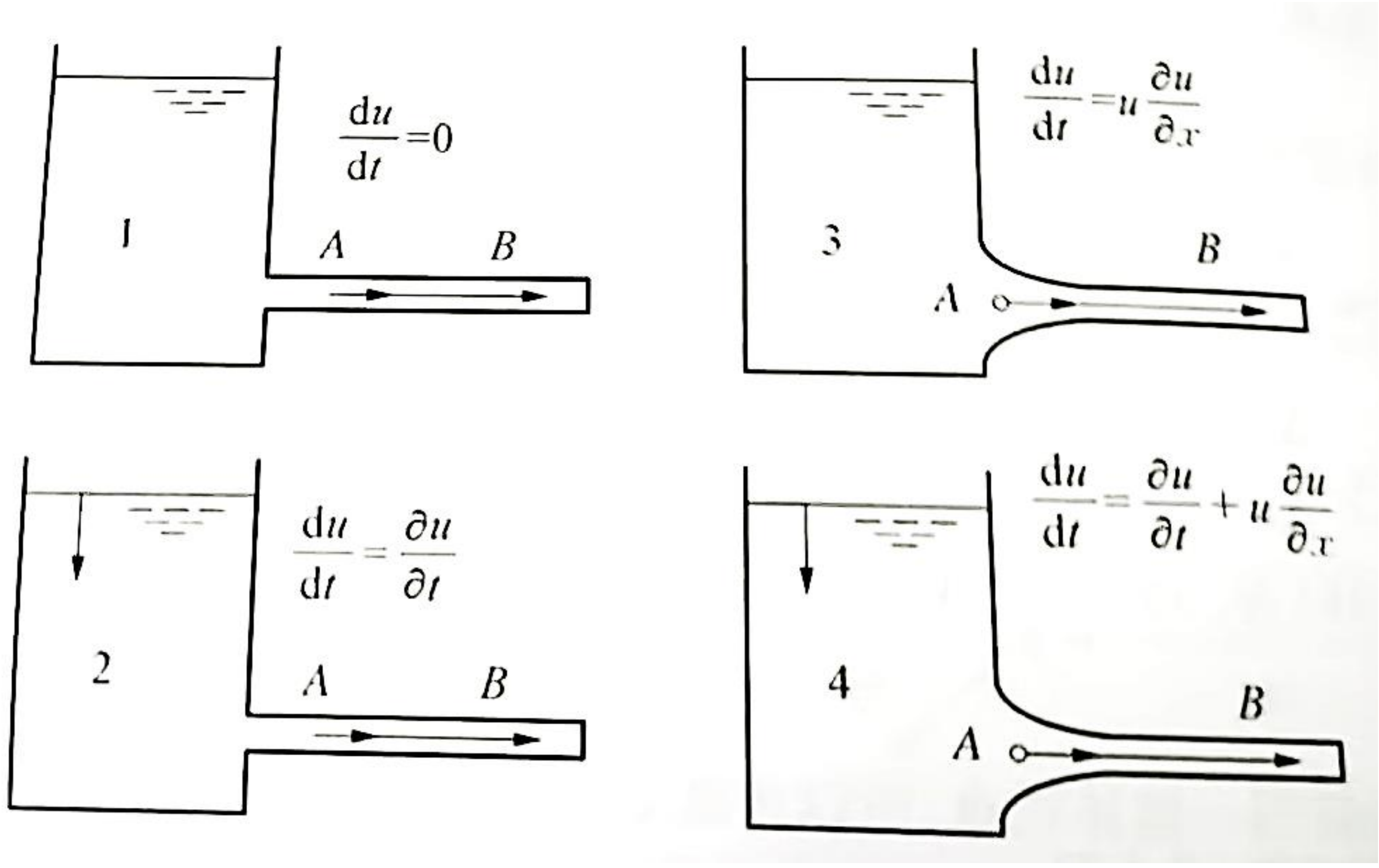
$$=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

◆温度、密度、压强的随体导数

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\qquad \frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}\qquad \frac{dP}{dt}=\frac{\partial P}{\partial t}+u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}$$

物理量的随体导数


X
A
B
C


$\frac{du}{dt}=0$
1
A
B
$\frac{du}{dt}=u\frac{\partial u}{\partial x}$
3
A
B
$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}$
2
A
B
$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}$
4
A
B

随体导数

◆物理量对时间的变化率

- 拉格朗日描述 $\dfrac{DB}{Dt}=\dfrac{dB(\mathbf{X}_0,t)}{dt}=\dfrac{\partial B}{\partial t}$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}=\mathbf{v}$$

- 欧拉描述 $\dfrac{DB}{Dt}=\dfrac{dB(\mathbf{x},t)}{dt}=\dfrac{\partial B}{\partial t}+\dfrac{\partial B}{\partial \mathbf{x}}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$

$$=\frac{\partial B}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}}=\frac{\partial B}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)B$$

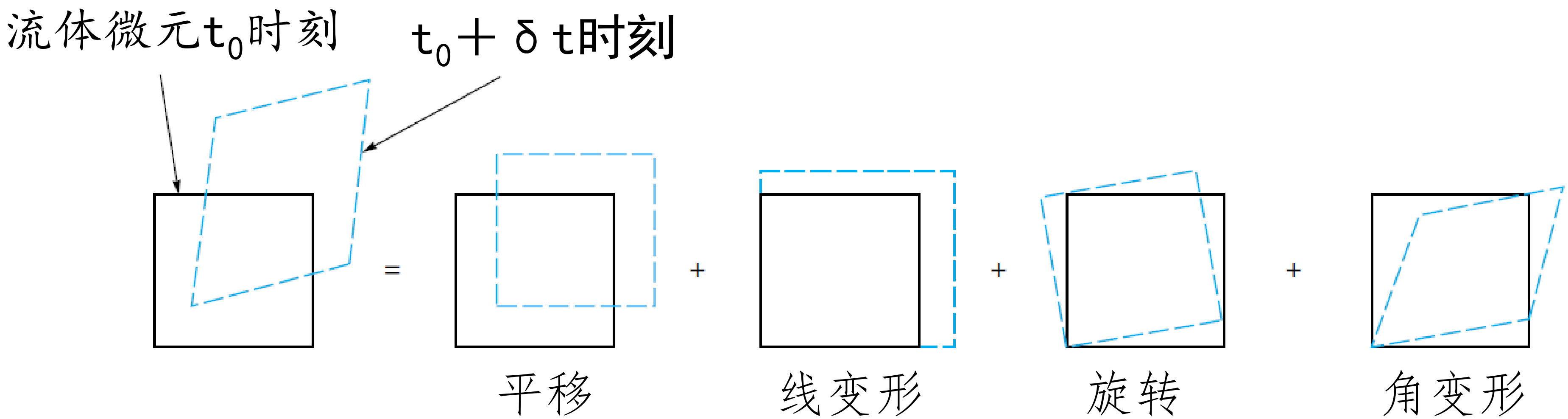
哈密顿算符 $\nabla=\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

- **局部导数**（当地导数）
由时间非定常性引起物理量的变化

- **迁移导数**（对流导数）
由空间分布的不均匀引起物理量的变化

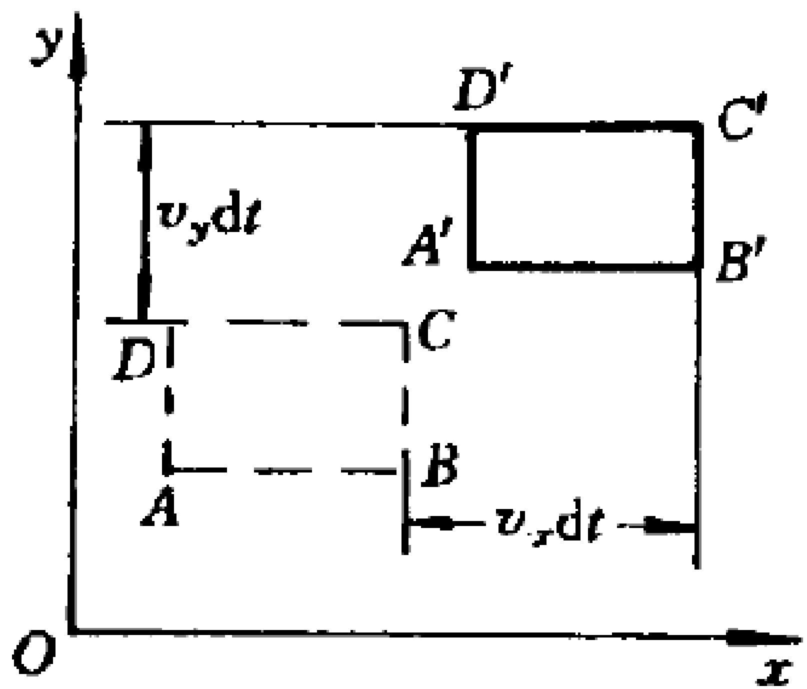
流体通过二维收缩通道的变形

2. 流体微元的运动和变形

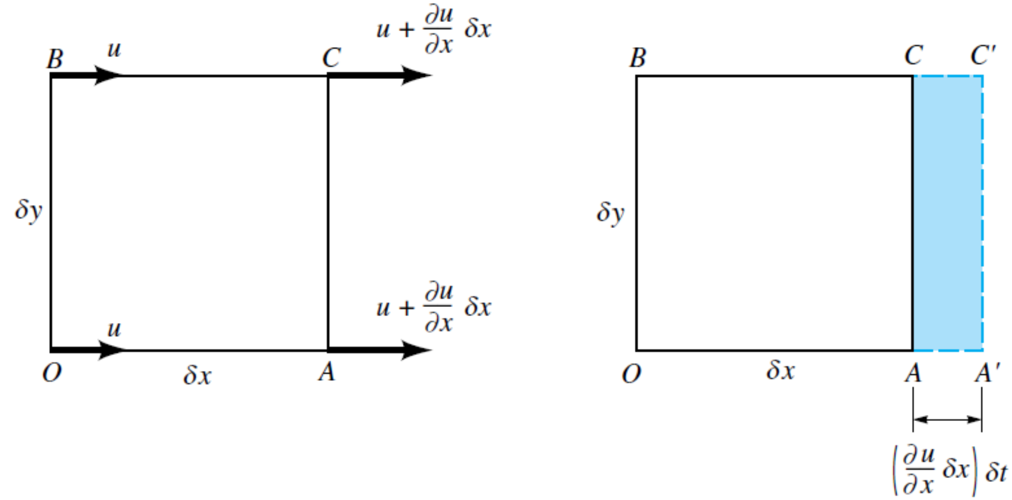


平移运动

- 平移：和流体微元的速度直接相关。
  - 经过dt时间，微元ABCD平移到A'B'C'D',微元形状不变



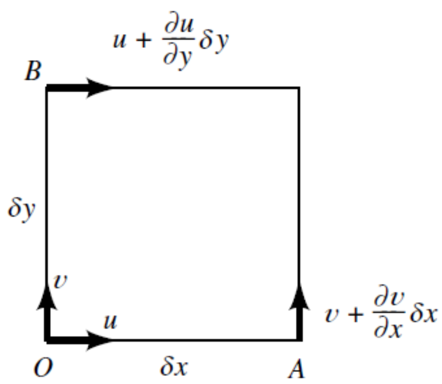
线变形

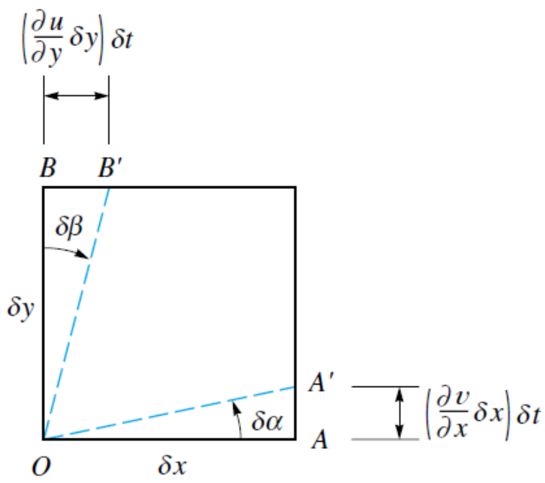


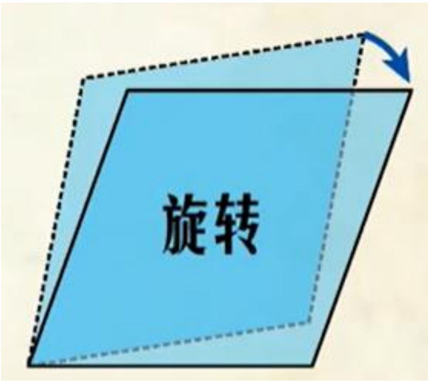
$$d(\delta V)=\delta V\big|_{t=t_0+\delta t}-\delta V\big|_{t=t_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\delta y\delta z dt$$

- x方向上单位体积改变率 $\varepsilon_x=\dfrac{1}{\delta V}\dfrac{d(\delta V)}{dt}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$
- 线变形率 $\boxed{\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_z=\dfrac{\partial w}{\partial z}}$
- 体积膨胀率 速度**V**的散度 $\boxed{\dfrac{1}{\delta V}\dfrac{d(\delta V)}{dt}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\mathbf{V}}$

旋转







- 线段OA的角速度 $\omega_{OA}=\dfrac{\delta\alpha}{dt}\approx\dfrac{d(\tan\delta\alpha)}{dt}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$

- 线段OB的角速度 $\omega_{OB}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$

绕Z轴的旋转定义为OA和OB的角速度的平均，按照右手法则

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

同理：$\omega_x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)$ $\omega_y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$

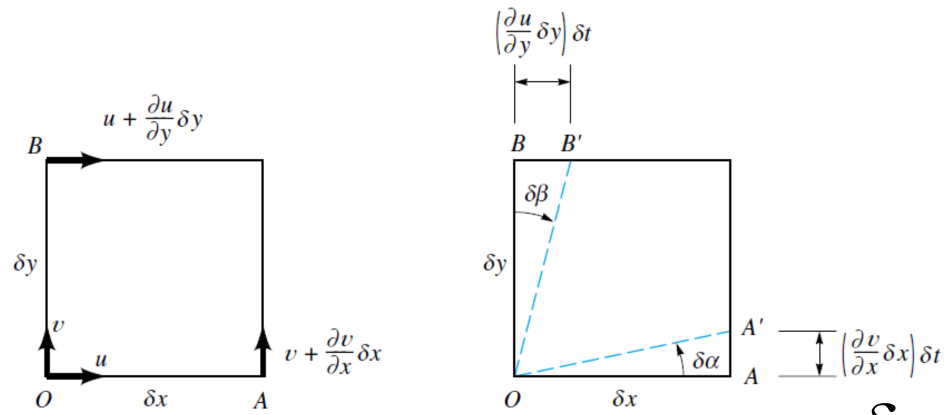
旋转的角速度

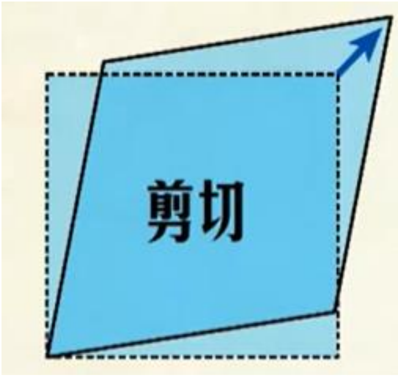
$$\omega = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}$$

涡量定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega} &= rot\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

角变形





- 线段OA的角速度 $\omega_{OA}=\frac{\delta\alpha}{dt}\approx\frac{d(\tan\delta\alpha)}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}$
- 线段OB的角速度 $\omega_{OB}=\frac{\partial u}{\partial y}$
- 单位时间内一个直角的变化量定义为角变形率

$$2\gamma_z=\frac{d\left(\delta\alpha+\delta\beta\right)}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

- 角变形率 $\boxed{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z}$

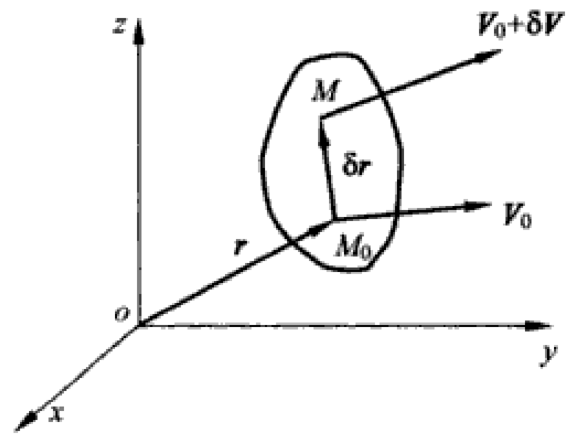
$$\gamma_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\qquad \gamma_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\qquad \gamma_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

流体速度的梯度、散度和旋度

◆ 速度的梯度

- 空间不均匀性
- 亥姆霍兹速度分解

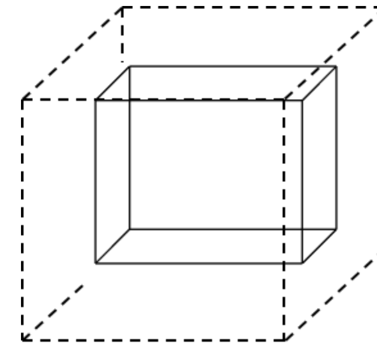
$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}$$



$$\mathbf{V}(M)=\mathbf{V}(M_0)+\delta\mathbf{V}=\mathbf{V}(M_0)+\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{r}$$

流体速度的散度

◆ 速度的散度



$$div\vec{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t\right)\Delta x\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta t\right)\Delta y\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\Delta t\right)\Delta z-\Delta x\Delta y\Delta z\right]$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{V}$$

$$\Delta x\to\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t\right)\Delta x$$

$$\Delta y\to\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta t\right)\Delta y$$

$$\Delta z\to\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\Delta t\right)\Delta z$$

- 三个相互垂直方向的线变形率之和
  - 表示流体微团相对体积膨胀率
  - 密度不变，$div\vec{V}=0$
  - 密度有变化，$div\vec{V}\neq 0$

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}=0$$

流体速度的旋度

- 流体微团绕自身轴的旋转角速度的三个分量为 ω_x, ω_y, ω_z，合角速度可用矢量表示为$\frac{1}{2}rot\vec{V}$

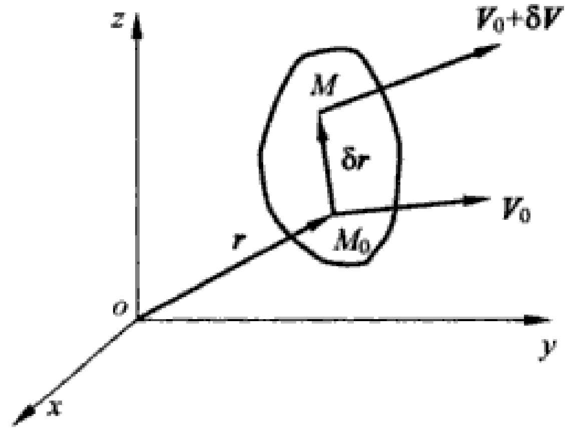
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} = \frac{1}{2}rot\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{V}$$

- 涡量定义为

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= rot\mathbf{V} = \nabla\times\mathbf{V}\\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega}}$$

亥姆霍兹速度分解



$$\mathbf{V}(M)=\mathbf{V}(M_0)+\delta\mathbf{V}=\mathbf{V}(M_0)+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}}\delta\mathbf{r}$$

$$\delta\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\\ \delta w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}+\mathbf{a}_{ij}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

应变率张量：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

转动角速度矢量：

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2} e_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i$$

$$e_{\mathrm{ijk}} = \begin{cases} 1 & \text{当i, j, k为正序排列时} \\ -1 & \text{当i, j, k为逆序排列时} \\ 0 & \text{当i, j, k中两个指标值相同时} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(M_0) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \delta\mathbf{r}}$$

速度分解 $\vec{u}(M_1)=\vec{u}(M_0)+\vec{\omega}\times\Delta\vec{r}+[\varepsilon]\bullet\Delta\vec{r}$

流体微团平动速度：

$$u_x(x,y,z,t),u_y(x,y,z,t),u_z(x,y,z,t)$$

流体微团线变形速度：

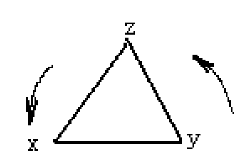
$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y},\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

流体微团角变形速度（剪切变形速度）：

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right),\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right),\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

流体微团旋转角速度：

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right),\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right),\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$



应变变化率张量

$$\vec{u}(M_1)=\vec{u}(M_0)+\vec{\omega}\times\Delta\vec{r}+[\varepsilon]\bullet\Delta\vec{r}$$

变形率张量（应变变化率张量）

在速度分解定理中，最后一项是由流体微团变形引起的，其中$[\varepsilon]$（或S）称为变形率矩阵，或变形率张量。该项与流体微团的粘性应力存在直接关系。

每个分量的大小与坐标系的选择有关，但有三个量是与坐标系选择无关的不变量。

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}$$

$$I_1=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$$

$$I_2=\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}+\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xy}^2-\varepsilon_{yz}^2-\varepsilon_{zx}^2$$

$$I_3=\begin{vmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{vmatrix}$$

体积变化率

对于第一不变量，具有明确的物理意义。

在dt时间内单位体积流体的体积变化

$$\frac{(1+\varepsilon_{xx}dt)dx(1+\varepsilon_{yy}dt)dy(1+\varepsilon_{zz}dt)dz-dxdydz}{dxdydz}=\varepsilon_{xx}dt+\varepsilon_{yy}dt+\varepsilon_{zz}dt$$

表示速度场的散度，或流体微团的相对体积膨胀率。

$$I_1=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{u}$$

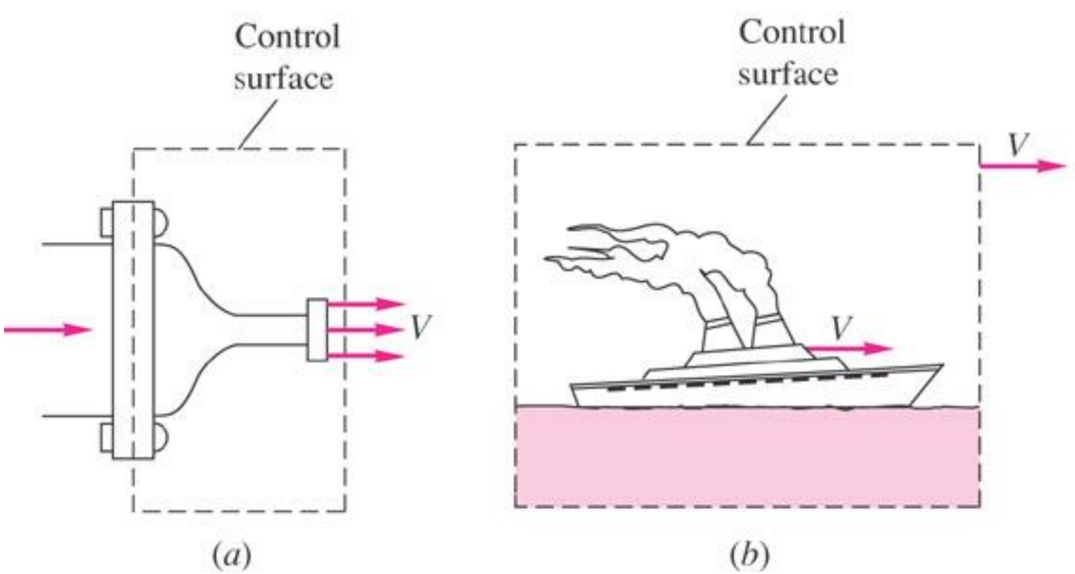
流体微团的体积只受应变变化率张量主对角线上分量的影响。

非主对角线的分量，即角变形率不影响体积，只引起剪切或角变形。

控制体

◆流场中，假定通过一个有限大小且封闭的体来圈定一定区域的流体进行分析，这个空间体积称为**控制体**，其边界定义为**控制面**。

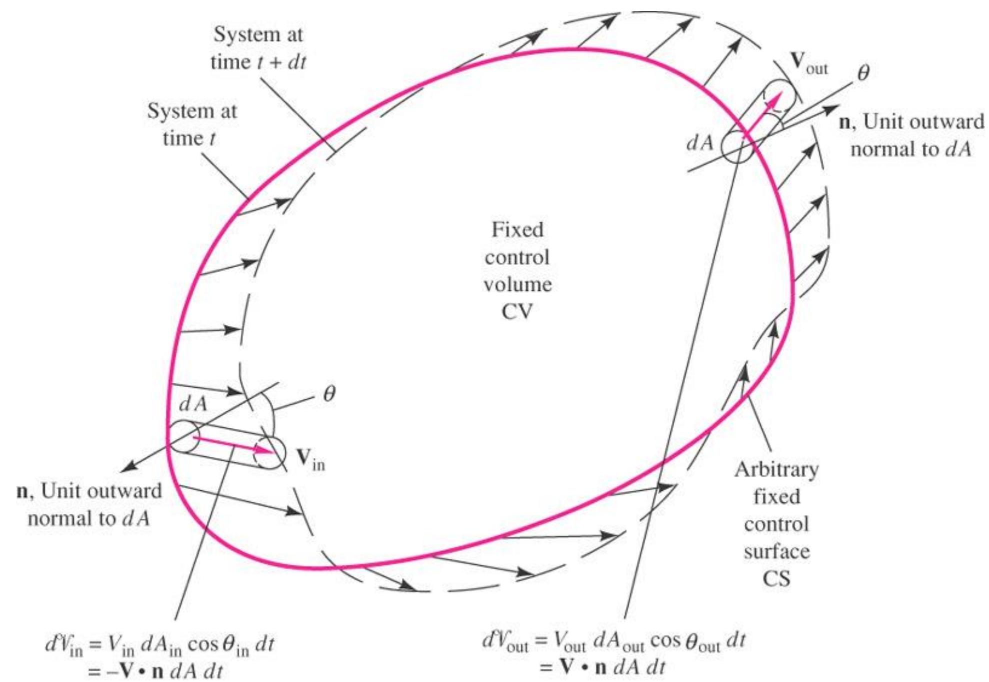
- 控制体形状、大小可以任意，相对于坐标系位置固定。
- 控制面可以是实际的流体面，也可以是假想的几何面。
- **流体质点**系可按照自身运动规律穿越控制面出入控制体。



雷诺输运定理

◆雷诺输运定理

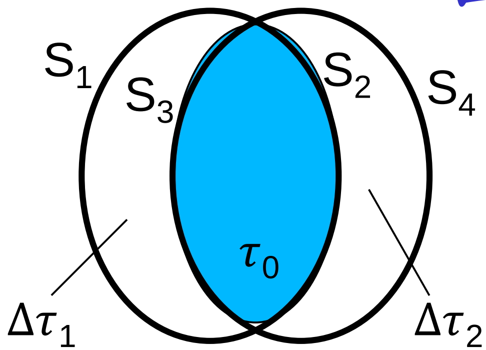
某一瞬间，**控制体**内的流体所构成的体系，它所具有的物理量总量的随体导数，等于同一瞬间控制体系中所含同一物理量的增加率与该物理量通过**控制面**的净流出率之和。



$$\frac{D}{Dt}\int_V B dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V B dV + \int_S B(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) dS = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}B + \nabla\cdot(B\mathbf{v})\right) dV$$

B可以是质量、动量、能量等等

雷诺输运定理的推导



$$\tau(t)=\tau_0+\Delta\tau_1$$
$$S(t)=S_1+S_2$$
$$\tau(t+\Delta t)=\tau_0+\Delta\tau_2$$
$$S(t+\Delta t)=S_3+S_4$$

流体微团内总物理量

$$\Phi=\int_{\tau(t)}\varphi(t)\mathrm{d}\tau$$

流体微团总物理量随时间变化

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t}=?$$

流体微团的物质导数

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{\tau(t+\Delta t)}\varphi(t+\Delta t)\mathrm{d}\tau-\int_{\tau(t)}\varphi(t)\mathrm{d}\tau\right]$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{\tau_0}[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)]\mathrm{d}\tau+\int_{\Delta\tau_2}\varphi(t+\Delta t)\mathrm{d}\tau-\int_{\Delta\tau_1}\varphi(t)\mathrm{d}\tau\right\}$$

当Δt趋于0时，$\tau_0\to\tau(t)$，$\quad\varphi(t+\Delta t)\to\varphi(t)$

$$\int_{\Delta\tau_2}\mathrm{d}\tau=\int_{S_2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\Delta t\,\mathrm{d}s,\quad\int_{\Delta\tau_1}\mathrm{d}\tau=-\int_{S_1}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\Delta t\,\mathrm{d}s$$

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Delta t\,\mathrm{d}\tau+\int_{s_2}\varphi(t+\Delta t)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\Delta t\,\mathrm{d}s+\int_{s_1}\varphi(t)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\Delta t\,\mathrm{d}s\right]$$
$$=\int_{\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}t+\oiint_{S}\varphi(t)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$
$$=\int_{\tau}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}\tau$$

流体力学方程组

- 流体运动遵循的三条基本物理定律

质量守恒定律——连续性方程；

动量守恒定律——动量方程；

能量守恒定律——能量方程。

2. 连续性方程

◆质量守恒定律 $B=\rho$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_V \rho dV = 0}$$

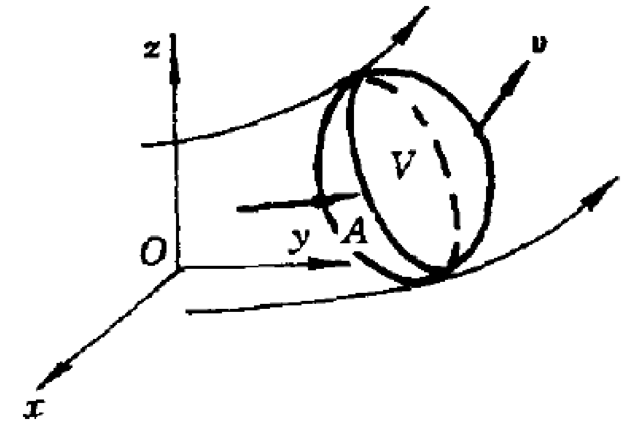
引入雷诺输运定理

◆积分形式 $$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) \right) dV = 0$$

◆微分形式 $$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

连续方程的基本原理

- 控制体质量守恒
  - 保持流体呈连续流动状态
  - 控制体V中质量增加
  - 控制面流入与流出的质量差



$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV + \oiint_A \rho \mathbf{v}\cdot d\mathbf{A} = 0$$

高斯定律

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV + \iiint_V \nabla\cdot(\rho \mathbf{v}) dV = 0$$

连续方程的微分形式

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\rho = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

定常流动的连续方程

◆ 定常流动

- 流场任何空间点处的密度均不随时间变化

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0$$

- 定常流动的连续方程式

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = 0$$

- 说明：在定常流动中，从控制体流出的质量流量永远等于流入控制体的质量流量。
- 简化为：

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

不可压缩流体流动的连续方程

◆ 不可压缩流体流动

- 流体密度不随空间变化，也不随时间变化

$$\int_V \left[\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \nabla \cdot (\cancel{\rho}\mathbf{v}) \right] dV = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0 \qquad \oiint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- 说明：在不可压缩流体流动时，任何瞬时从控制体流出的流量永远等于流入控制体的流量。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

一般牛顿流体的应力状态

◆ 压强从法向应力中分离出来

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{matrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{matrix} + \begin{matrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{matrix}$$

压强项　　　　　　　　　偏应力项

偏应力项：

- 由流体运动产生，静止消失
- 牛顿内摩擦定律--应力与应变率成线性关系

◆ 可压缩粘性流体

- 流体微元既改变形状又改变体积
  - 平均压强

本构关系

- 本构方程：确定应力与应变速度关系的方程式
- 牛顿流体 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}\left(\boldsymbol{\varepsilon},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}},\cdots\right)=\boldsymbol{\tau}\left(\mathbf{V},\dot{\mathbf{V}},\cdots\right)$
  - 应力张量和应变率张量成线性关系；
  - 这种线性关系在流体中各向同性；
  - 流体静止的时候，应变率为零，流体中的偏应力为零，正应力就是各项等值的静压强。

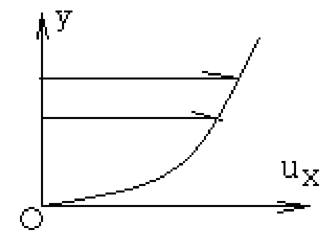
$$\boldsymbol{\tau}=-p\mathbf{I}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{2}{3}\mu\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right)\mathbf{I}$$

广义牛顿内摩擦定理（本构关系）

- 牛顿内摩擦定理（牛顿粘性应力公式）

粘性流体作直线层状流动时，流层之间的切应力与速度梯度成正比。即

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy}$$



如果用变形率矩阵和应力矩阵表示，有 $\frac{\partial u_y}{dx} = 0$

$$\tau_{yx} = 2\mu\varepsilon_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \mu \frac{du_x}{dy}$$

说明应力矩阵与变形率矩阵成正比。对于一般的三维流动，Stokes（1845年）通过引入三条假定，将牛顿内摩擦定律进行推广，提出广义牛顿内摩擦定理。

斯托克斯Stokes假设

- 斯托克斯假设（1845年）（Stokes，英国数学家、力学家，1819–1903年）
  ① 流体是连续的，它的应力矩阵与变形率矩阵成线性关系，与流体的平动和转动无关。
  ② 流体是各向同性的，其应力与变形率的关系与坐标系的选择和位置无关。
  ③ 当流体静止时，变形率为零，流体中的应力为流体静压强。

静止流体的应力状态

- 由第三条件假定可知，在静止状态下，流体的应力只有正应力，无切应力。

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p_0$$

- 在静止状态下，流体的应力状态为

$$[\tau] = -p_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -p_0 [I]$$

本构关系

- 根据第一条假定，并受第三条假定的启发，可将应力矩阵与变形率矩阵写成如下线性关系式。

$$[\tau]=a[\varepsilon]+b[I]$$

- 式中，系数a、b是与坐标选择无关的标量。
- 参照牛顿内摩擦定理，系数a只取决于流体的物理性质，取

$$a=2\mu$$

- 由于系数b与坐标系的转动无关，要保持应力与变形率成线性关系，系数b只能由应力矩阵与变形率矩阵中的那些线性不变量构成。

本构关系

- 系数b由应力矩阵和变形率矩阵中的第一不变量的线性组合构成。

$$b=b_1(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})+b_2(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})+b_3$$

$$b=b_1(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})+b_2\nabla\cdot\vec{u}+b_3$$

- 将a、b代入，有

$$[\tau]=2\mu[\varepsilon]+\{b_1(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})+b_2\nabla\cdot\vec{u}+b_3\}[I]$$

- 取等式两边矩阵主对角线上的三个分量之和

$$(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})=2\mu\nabla\cdot\vec{u}+3b_1(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})+3b_2\nabla\cdot\vec{u}+3b_3$$

本构关系

上式归并同类项，得到

$$(1-3b_1)(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})=(2\mu+3b_2)\nabla\cdot\vec{u}+3b_3$$

在静止状态下

速度的散度为零 $\nabla\cdot\vec{u}=0$

正应力之和 $(\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz})=-3p_0$

得到 $-p_0(1-3b_1)=b_3$

由于b_1和b_3均为常数，且要求p_0在静止状态的任何情况下均成立，则

$$b_3=0 \quad \mathrm{b}_1=\frac{1}{3}$$

代入第一式，有 $b_2=-\dfrac{2}{3}\mu$

本构方程

令 $p=-\dfrac{\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}}{3}$ 为流体的压强

有广义牛顿内摩擦定理，即为牛顿流体的本构方程

$$[\tau]=2\mu[\varepsilon]-\left(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}\right)[I]$$

用指标法标记

$$\tau_{ij}=\begin{cases}\mu\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}+\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) & \mathrm{i}\neq\mathrm{j}\\ -\mathrm{p}+2\mu\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}-\dfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u} & \mathrm{i}=\mathrm{j}\end{cases}$$

6. 动量方程

◆动量守恒定律

$$B = \rho \mathbf{V}$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_V \rho \mathbf{V} dV = \mathbf{F}_{body} + \mathbf{F}_{surface}}$$

$$\mathbf{F}_{surface} = \int_S p_n dS = \int_S \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} dS$$

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho \mathbf{V} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} dS$$

$$\int_V \left(\rho \frac{D}{Dt}\mathbf{V} - \rho\mathbf{f} - \nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\right) dV = 0$$

◆微分形式

$$\rho \frac{D}{Dt}\mathbf{V} = \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau}$$

结合连续性方程

动量方程的特例

$$\frac{DB}{Dt}=\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}}\cdot\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

- 定常流动

$$\mathbf{V}\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial\mathbf{X}}=\rho\mathbf{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}$$

- 无粘流体

$$\rho\frac{D}{Dt}\mathbf{V}=\rho\mathbf{f}-\nabla\cdot p$$

7. 能量方程

◆能量守恒定律 $B=\rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}E=Q+N}$$

$$E=\int_V \rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)dV$$

$$Q=\int_V \rho q dV+\int_S k\nabla T\cdot\mathbf{n}dS$$

热源项（辐射、燃烧、化学反应等）

传导项

◆外力的功率 $N=\int_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}dV+\int_S \mathbf{p}_n\cdot\mathbf{V}dS$

能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)dV+\int_S \rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dS$$
$$=\int_V \rho q dV+\int_S k\nabla T\cdot\mathbf{n}dS+\int_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}dV+\int_S \mathbf{p}_n\cdot\mathbf{V}dS$$

- 微分形式 $\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{v^2}{2}\right)=\rho q+\nabla\cdot(k\nabla T)+\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{V})$
- 动能方程

动量方程 $\rho\frac{D}{Dt}\mathbf{V}=\rho\mathbf{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}$ 两边点乘速度

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{V}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})$$

等价于运动方程，不独立

内能方程

内能方程 = 能量方程—动能方程

$$\rho\frac{D}{Dt}e=\rho q+\nabla\cdot\left(k\nabla T\right)+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{V}\right)-\mathbf{V}\cdot\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\right)$$

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{V}\right)-\mathbf{V}\cdot\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\right)=\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\rho\frac{D}{Dt}e=\rho q+\nabla\cdot\left(k\nabla T\right)+\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}$$

应变率张量：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

控制方程组

质量守恒 $$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{v}\right)=0$$

动量守恒 $$\rho\frac{D}{Dt}\mathbf{V}=\rho\mathbf{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}$$

能量守恒 $$\rho\frac{D}{Dt}e=\rho q+\nabla\cdot\left(k\nabla T\right)+\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}$$

本构方程 $$\boldsymbol{\tau}=-p\mathbf{I}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{2}{3}\mu\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right)\mathbf{I}$$

状态方程 $$\rho=\rho\left(p,T\right)$$

状态方程

◆基本的热力学状态参量：密度、压强、温度

◆平衡态：对一个确定的系统，如果没有外界环境影响，无论时间多长，表征热力学状态各有一定的值，这个状态称为平衡态。**平衡态下，只有两个独立变量**。

◆一般流体运动不是严格的平衡态，但实践表明，连续介质假设下，大多数流动的热力学状态无限趋近于平衡态–“准平衡态”。

$$\rho = \rho(p, T)$$

$$e = e(p, T)$$

$$\cdots$$

8. 流动分类

- 流体的物理属性影响其运动特性
  - 粘性、可压缩性和传热性等
  - 针对具体问题做一些简化，忽略一些次要的物理属性
- 理想流体
  - 无粘流体模型——流体微元不受粘性力的作用
  - 空气粘性很小；物面边界层外，速度梯度不大。
- 不可压缩流体
  - 体积弹性模量无穷大，或者认为密度等于常数
  - 液体；流动马赫数较低的气体。
  - 飞行速度较低时，飞行器周围的空气密度变化很小。
- 绝热流体——不考虑流体热传导性
  - 低速流动，除专门研究传热问题场合外
  - 高速流动中，温度梯度不太大的地方

流体介质

$\nabla \cdot \mathbf{V} \neq 0$ 可压缩流体 $PV = nRT$ 理想气体

$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ 不可压缩流体

$\mu = 0$ 无粘流体

$\mu \neq 0$ 粘性流体 → 牛顿流体 / 非牛顿流体

$\rho = \rho(p)$ 正压流体

斜压流体

流动类型

$\partial/\partial t = 0$ 定常流动

$\partial/\partial t \neq 0$ 非定常流动

$\nabla \cdot \mathbf{V} \neq 0$ 可压缩流动 →

- $Ma < 1$ 亚声速流动
- $Ma = 1$ 跨声速流动
- $Ma > 1$ 超声速流动

$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ 不可压缩流动

$\mu = 0$ 无粘流动 →

- $\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$ 有旋
- $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ 无旋

$\mu \neq 0$ 粘性流动 →

- 层流
- 湍流

常用的简化方程组

◆粘性正压牛顿流体流动

物理量与温度无关，粘度为常数。

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{V}\right)=0$$

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{f}-\nabla p+\mu\nabla^{2}\mathbf{V}+\frac{1}{3}\mu\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right)$$

$$\rho=\rho\left(p\right)$$

常用的简化方程组

◆粘性不可压缩流动

密度、粘度为常数

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

能量方程独立于连续性方程和动量方程，若需关心温度，在解出以上方程后带入将速度带入能量方程求解。

无粘不可压缩流动

密度为常数、粘度为0、忽略热传导

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p$$

研究液体和理想气体流动的理想化模型。

无粘可压缩流动

比热为常数的完全气体，粘度为0，忽略体积力和热传导：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0$$

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=-\nabla p$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho^{r}}\right)=0$$

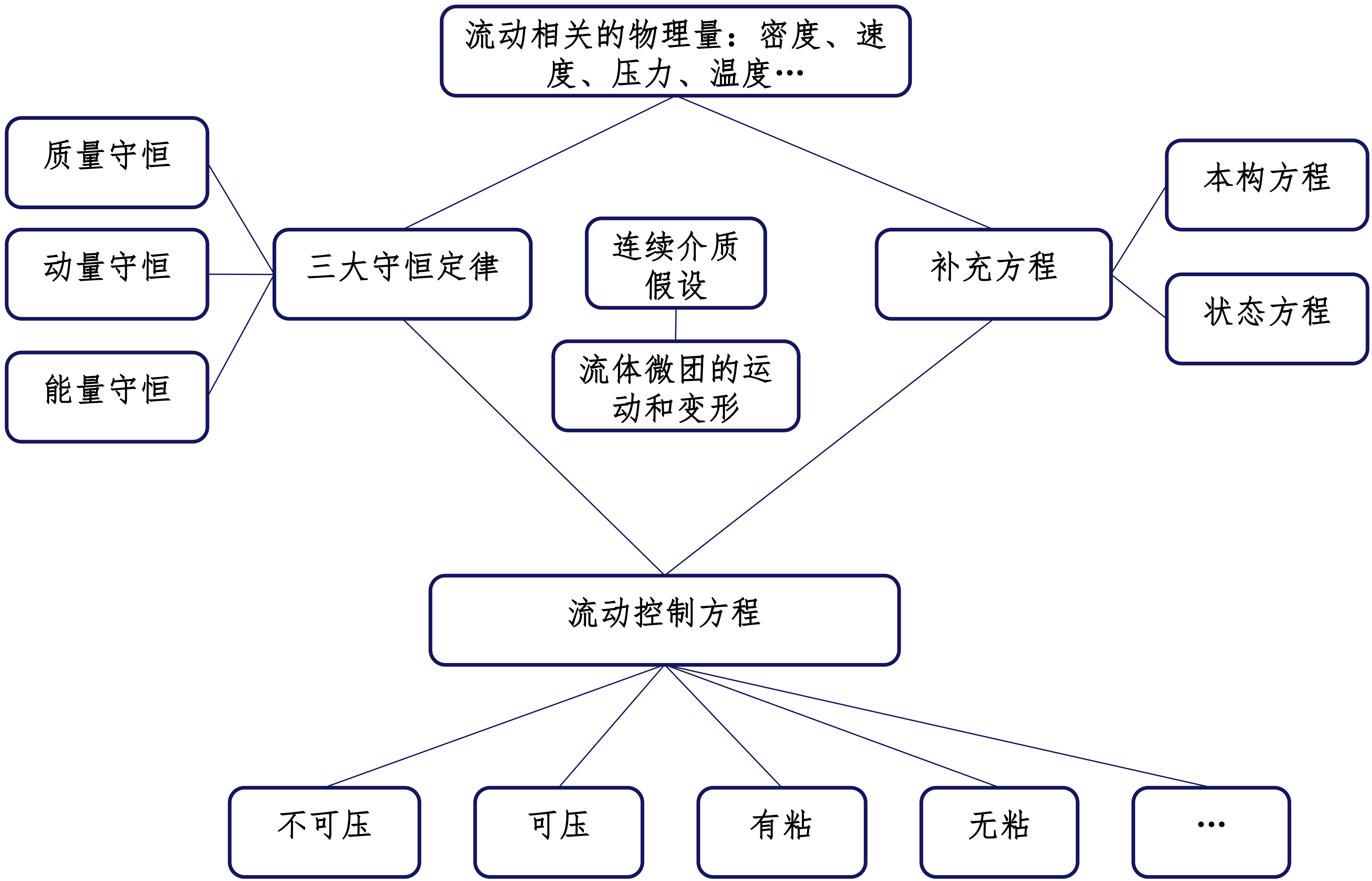
忽略粘性和热传导的流动为等熵流动，能量方程可采用等熵方程。

常用的简化方程组

◆流体静力学方程 $\mathbf{V}=0$

$$\downarrow$$

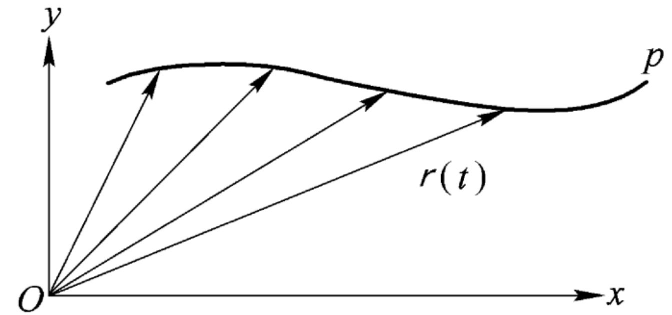
$$\rho\mathbf{f}-\nabla p=0$$


流动相关的物理量：密度、速度、压力、温度…
质量守恒
动量守恒
能量守恒
三大守恒定律
连续介质假设
流体微团的运动和变形
补充方程
本构方程
状态方程
流动控制方程
不可压
可压
有粘
无粘
…

9. 流线、迹线、脉线

◆ 迹线(pathline)

- 流体质点在流场中运动的轨迹。



$$d\mathbf{r} = \mathbf{V}dt$$

◆ 直角坐标系下：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x,y,z,t) \\ \dfrac{dy}{dt} = v(x,y,z,t) \\ \dfrac{dz}{dt} = w(x,y,z,t) \end{cases}$$

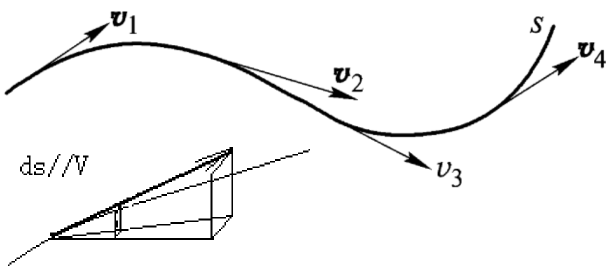
或者 $$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} = dt$$

流线

◆ 流线(streamline)

- 某时刻，该曲线上所有点的运动（速度）方向都与这条曲线相切。

时间 t 固定



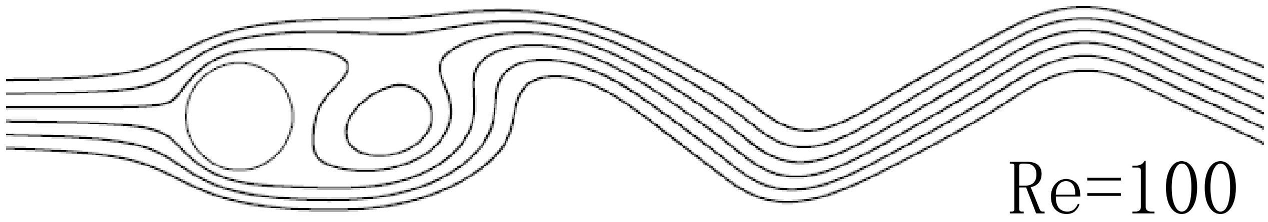
- 流线微分方程

$$d\mathbf{r}\times\mathbf{V}=0$$

- 直角坐标系

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t_0)}=\frac{dy}{v(x,y,z,t_0)}=\frac{dz}{w(x,y,z,t_0)}$$

- 流线的引入，对定性刻画流具有重要意义。



流线性质

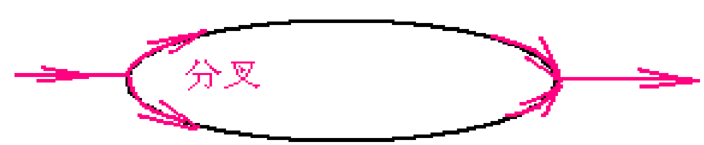
◆ 流线的性质

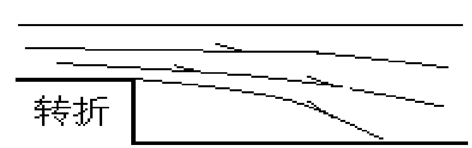
- 一般情况下流线不会相交（速度的单值性）
  - 在同一时刻，一点处只能通过一条流线。
  - 连续介质假设下，允许流场在孤立的点线面上存在物理量的不连续。如：

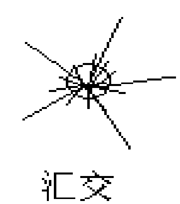
✓速度间断点：速度方向相同，大小不同

✓驻点：速度为0

✓奇点：速度无穷大







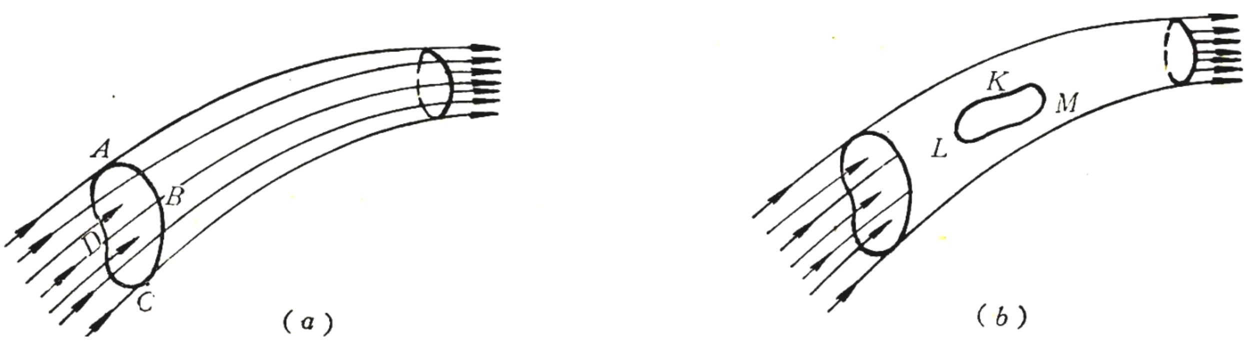
流管与流面

◆ 流管

- 在三维流动里，经过一条有流量穿过的封闭曲线的所有流线围成封闭管状曲面称为流管。
- 由一系列相邻的流线围成，也正像一根具有实物管壁一样的一根管子，管内的流体不会越过流管流出来，管外的流体也不会越过管壁流进去。

◆ 流面

- 由许多相邻的流线连成的一个曲面，这个曲面不一定合拢成一根流管。当然流管的侧表面也是一个流面。不管合拢不合拢，流面也是流动不会穿越的一个面。



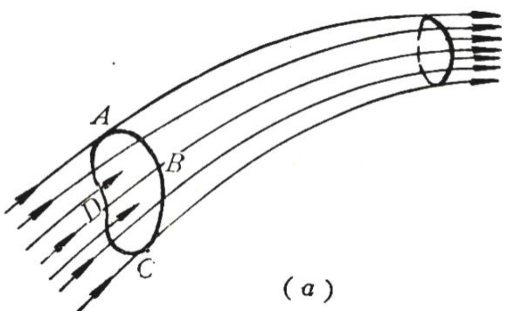
流量

- 流量是单位时间内穿过指定截面的流体量
  - 穿过流管中任意截面A的
    - 体积流量

$$Q = \int_A (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

    - 质量流量

$$\dot{m} = \int_A \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$



其中，$\vec{V}$ 是局部速度向量，ρ 是密度，$\vec{n}$ 是微元面积 dA 的法线向量。

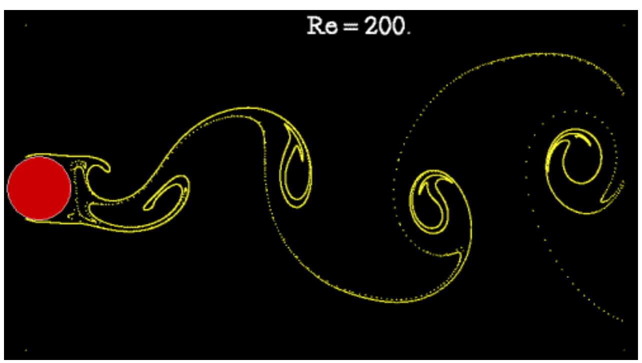
脉线、染色线(streakline)

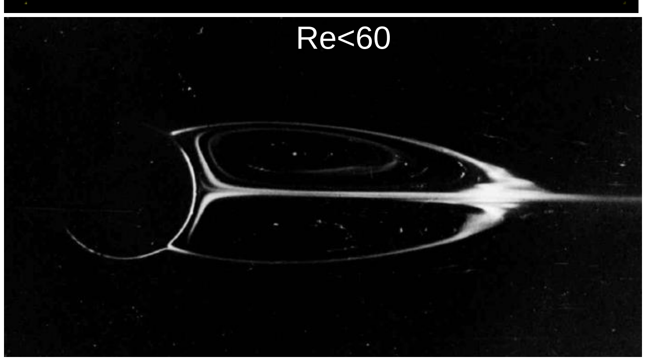
在一段时间内，会有不同的流体质点相继通过流场中某一空间固定点，在某一瞬间将这些质点所处的位置连接而成的线。

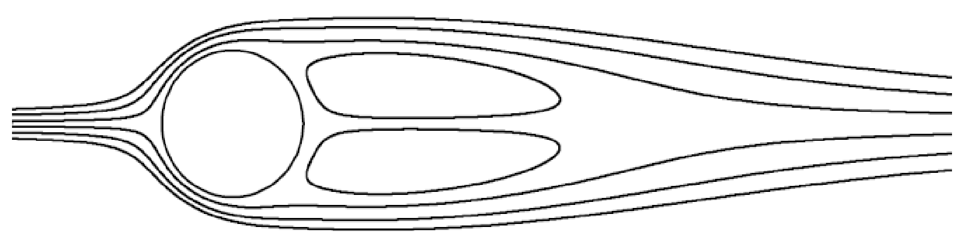
用照相机拍摄下某瞬时的从固定点出发的染色剂或烟的脉络线就是脉线，也称为染色线、烟线或条纹线。在定常流中脉线的形状不变，与流线、迹线重合，因此常用它来代表流线。

流线、迹线、脉线

- 一般情况下，流线、迹线、脉线不重合。
  - 流线：某时刻，空间点，速度
  - 迹线：一段时间，单个流体质点，轨迹
  - 脉线：某时刻，多个流体质点，分布
- 定常情况下，三者是重合的。

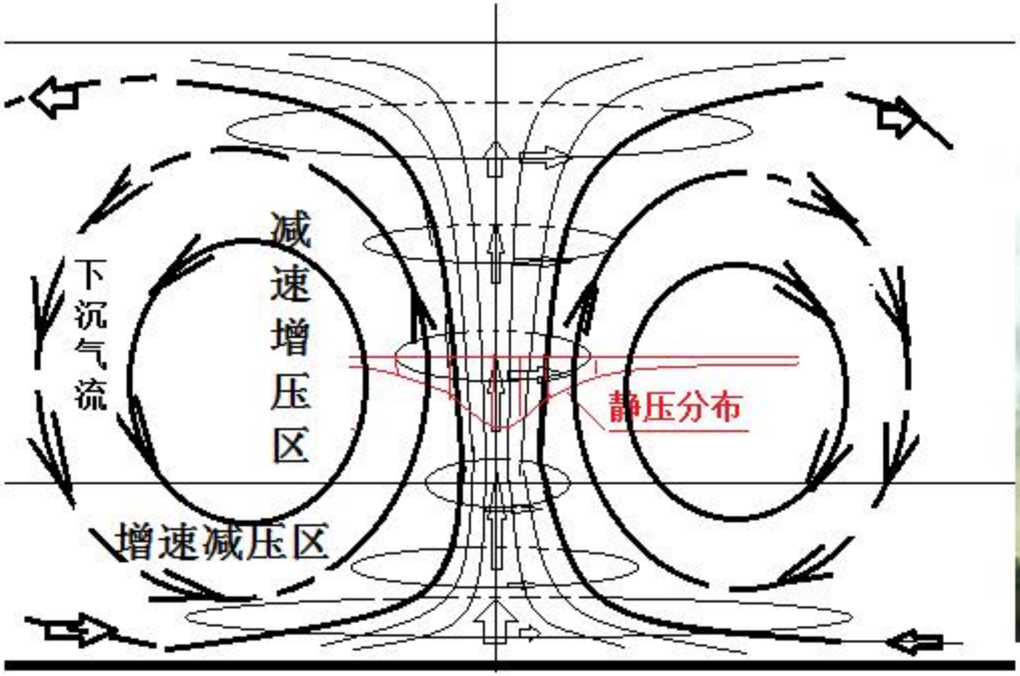






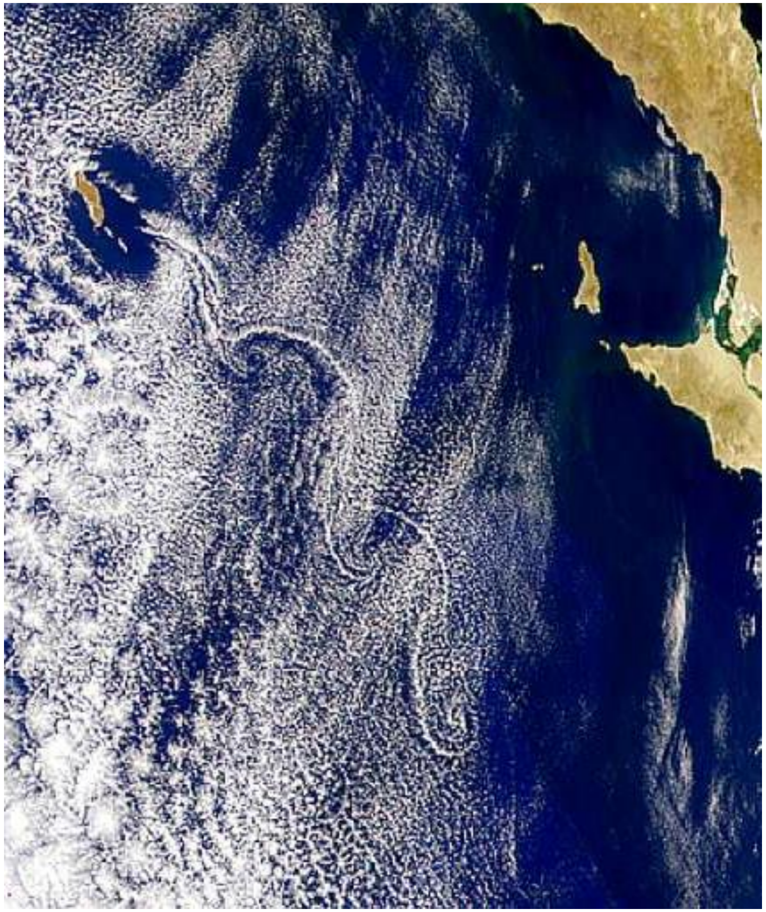
自然界和工程中的涡

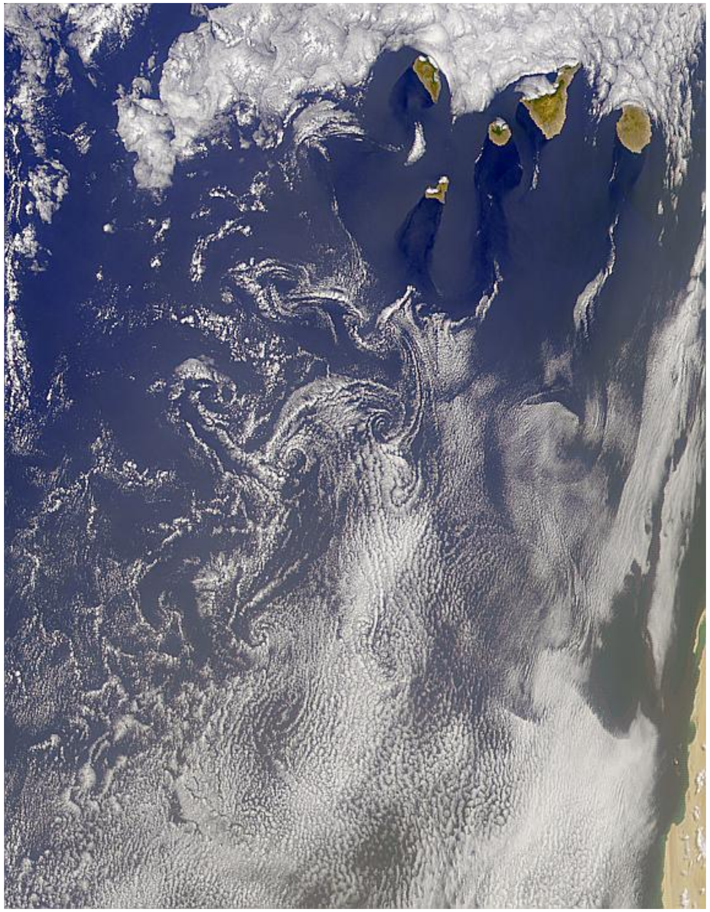
龙卷风



自然界和工程中的涡

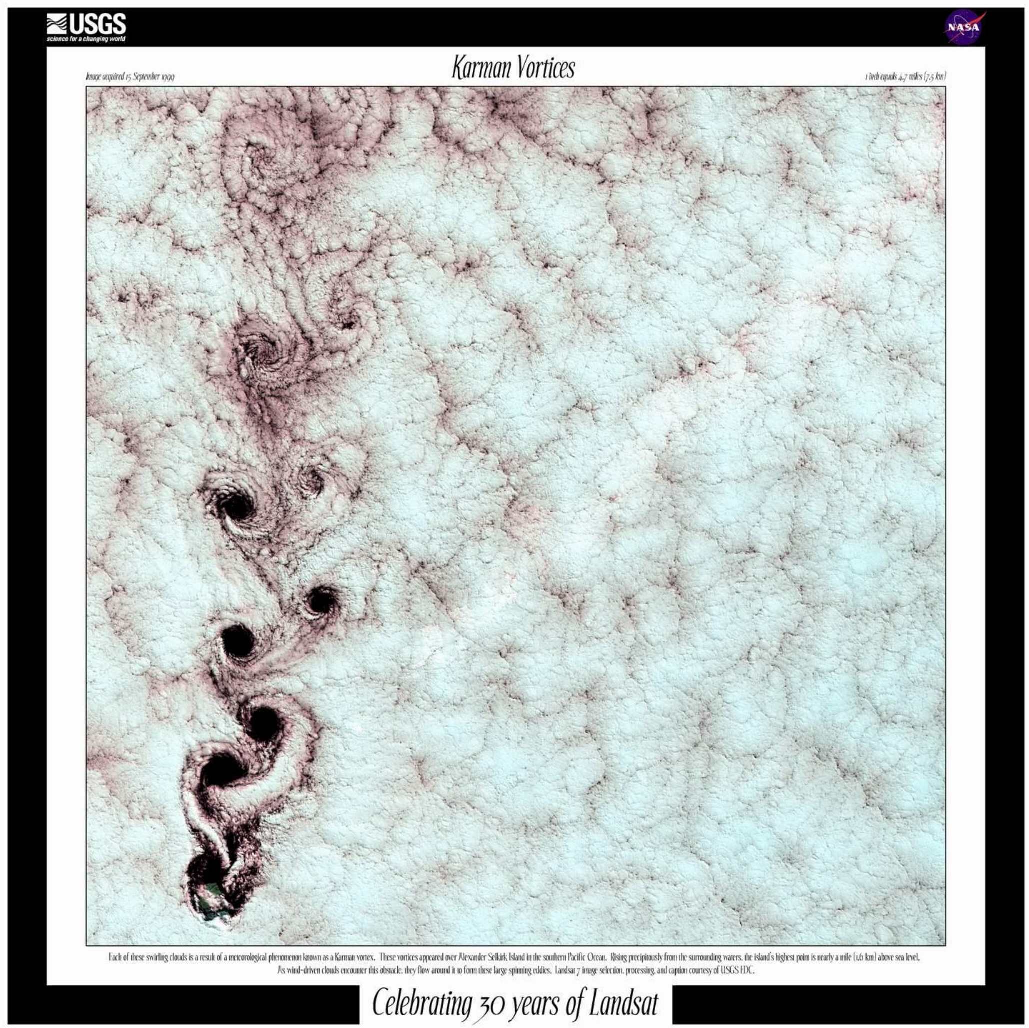
海洋表面的涡





自然界和工程中的涡

云层中的涡旋



自然界和工程中的涡现象

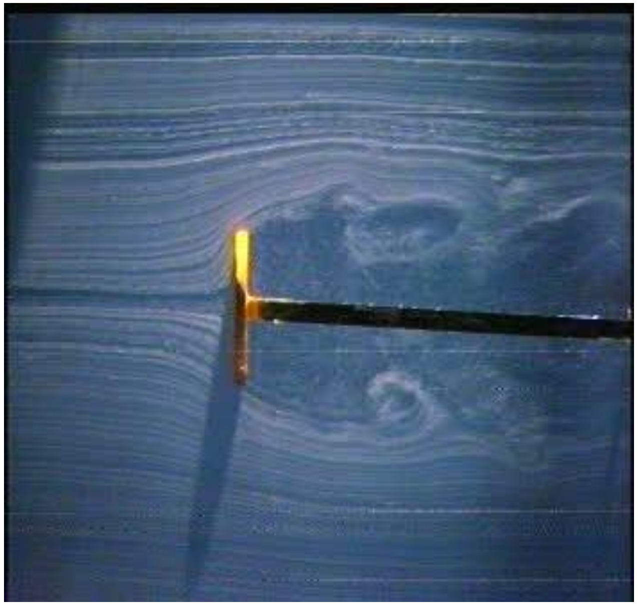
翼梢涡

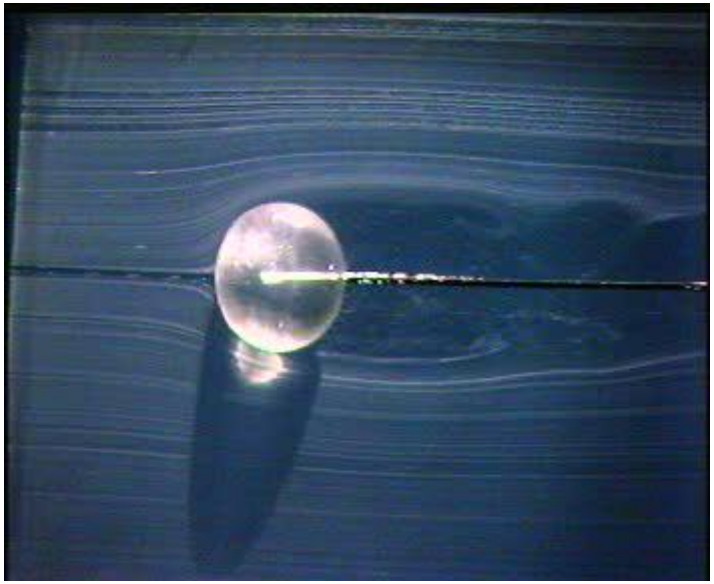
自然界和工程中的涡现象

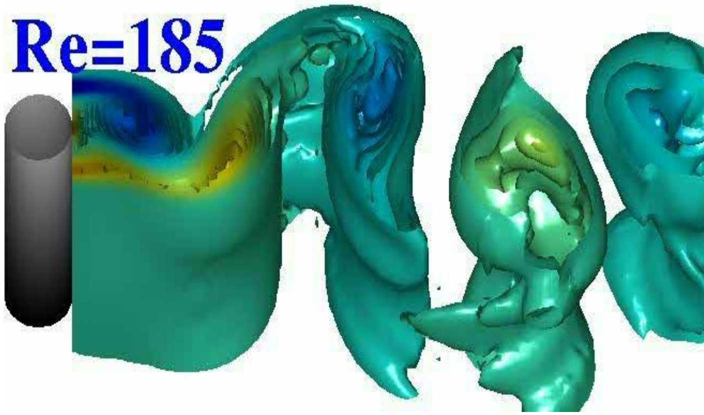
点燃火柴产生的涡

自然界和工程中的涡现象

圆盘、圆球和圆柱绕流的尾流场中的旋涡

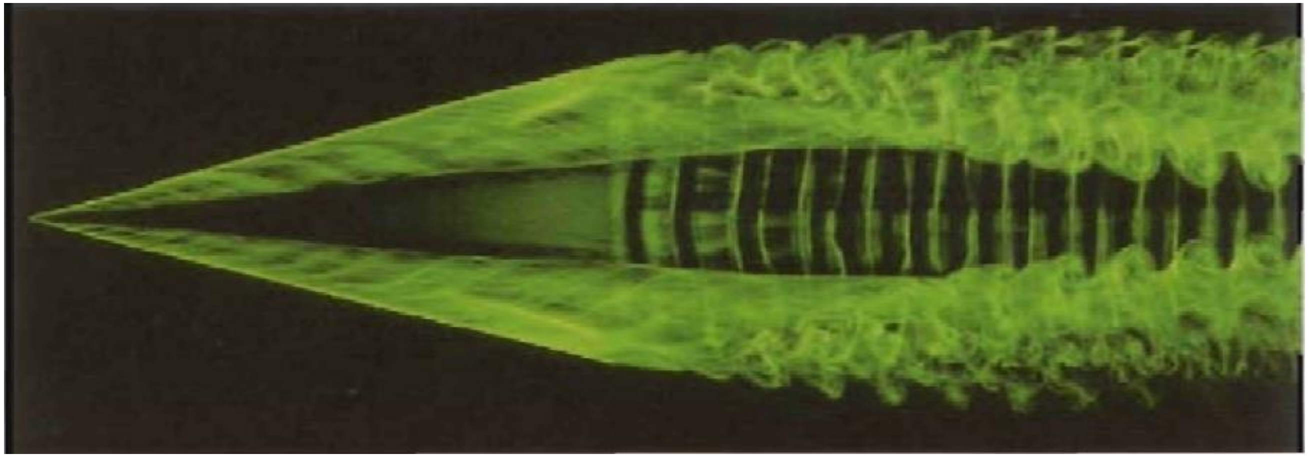


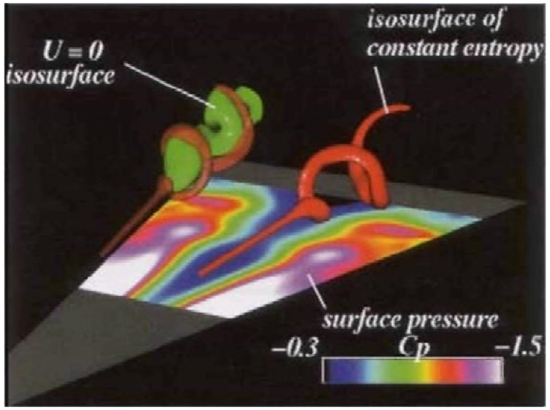




自然界和工程中的涡现象

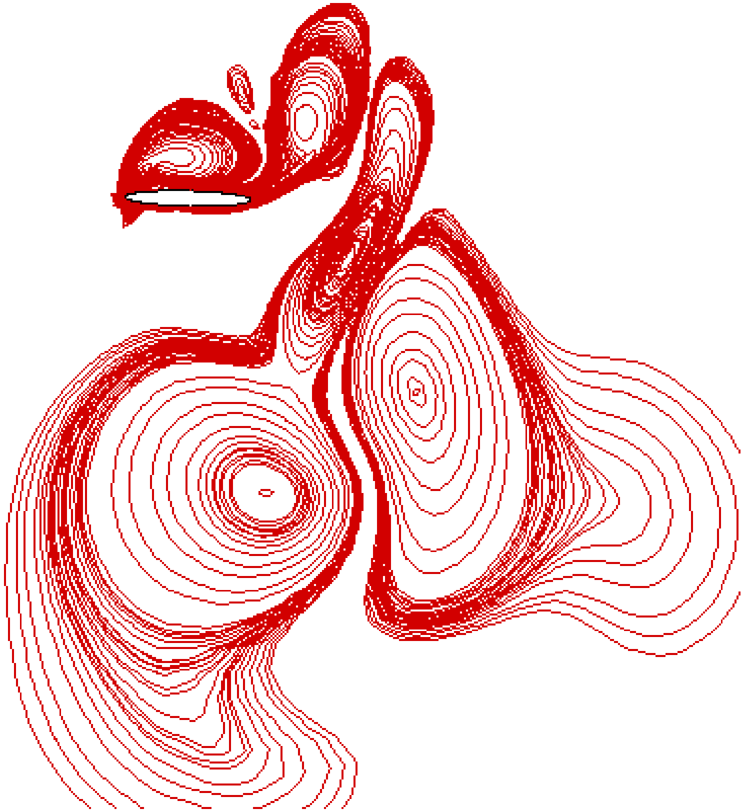
三角翼的前缘涡





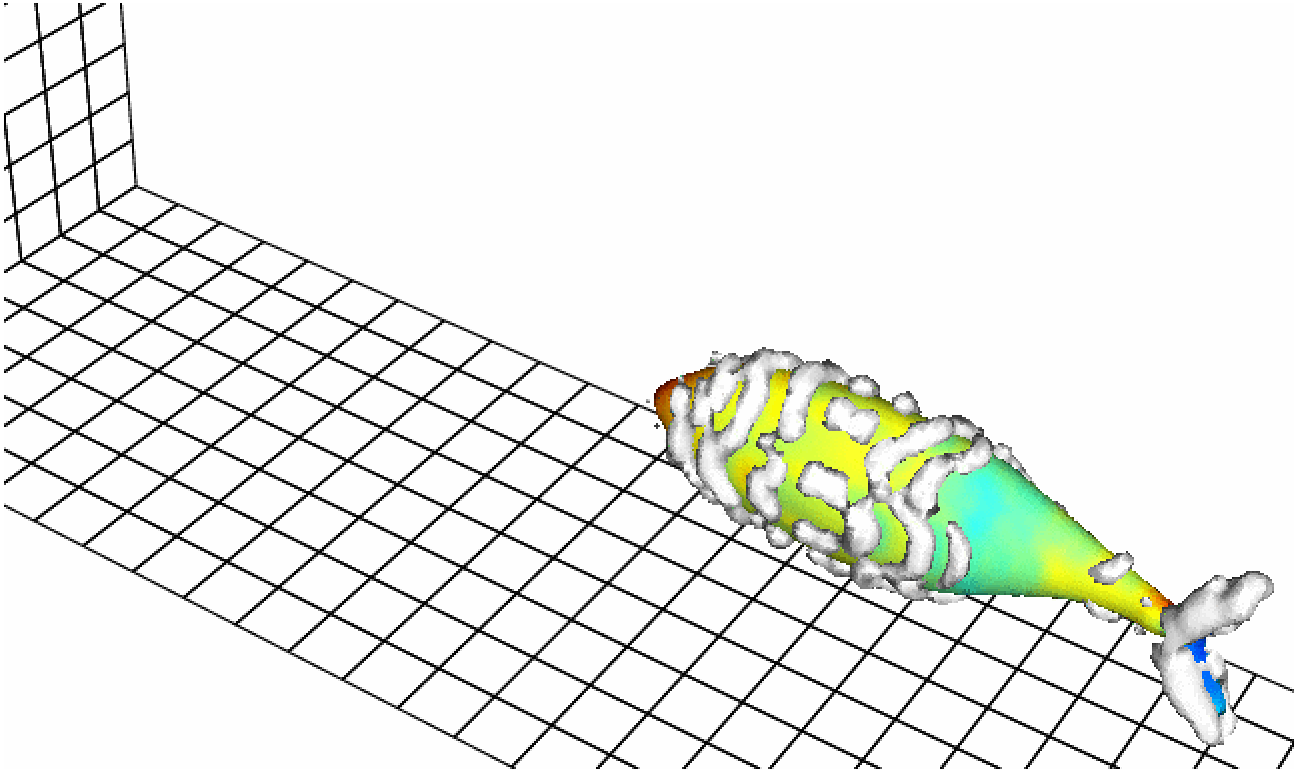
自然界和工程中的涡现象

震荡翼型的脱落涡



自然界和工程中的涡现象

三维鱼游尾流模拟（涡脱落）



10. 环量与涡

- 环量和涡是研究流动问题中两个极重要的概念。
  - 涡量概念

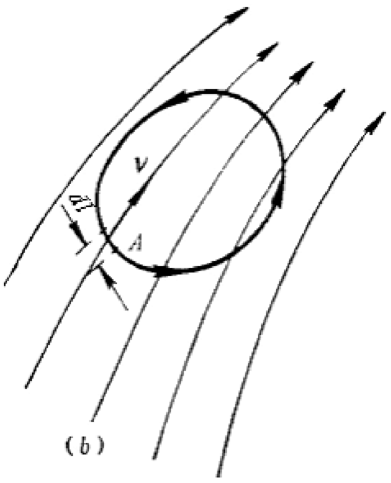
$$\mathbf{\Omega} = rot\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = 2\boldsymbol{\omega}$$

- 有旋 $rot\mathbf{V} \neq 0$ 无旋 $rot\mathbf{V} = 0$

  - 环量的定义

- 在流场中任取一条封闭曲线，速度沿该封闭曲线的线积分称为该封闭曲线的速度环量。

$$\Gamma = \oint_L \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint_L V \cos\alpha ds$$

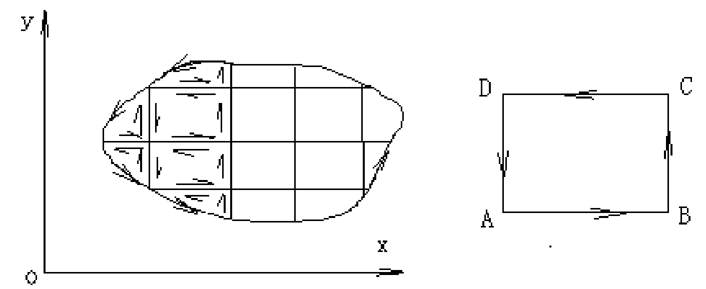


- 写成分量形式，有 $\vec{V} \cdot d\vec{s} = udx + vdy + wdz$

$$\Gamma = \oint_L (udx + vdy + wdz)$$

环量和旋度的关系

◆ 以二维问题为例：



- 对于微元ABCD，速度环量为

$$d\Gamma = \int_{ABCDA} \vec{V}\cdot d\vec{s}$$

$$= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dy$$

$$- \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dx - \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dy$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy = 2\omega_z dxdy$$

- 绕整个封闭曲线的速度环量为

二维问题中的格林公式

$$\Gamma = \oint_L \vec{V}\cdot d\vec{s} = \oint_L (udx + vdy) = \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dS = \int_S 2\omega_z dS$$

环量和旋度的关系

- 三维空间，由斯托克斯定理：

$$\Gamma = \oint_L \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint_L (udx + vdy + wdz) = \int_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k} \right] \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \int_S \left(\nabla \times \mathbf{V}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

- 环量的性质
  - **无旋流场中沿任何一条封闭围线的环量都等于零。**
  - **流线呈封闭圆形的流动不一定是旋流。**
    - 如点涡流动
  - **旋流不一定需要流线呈封闭圆形。**
    - 如边界层

涡线、涡面和涡管

◆ 涡线

- 在同一瞬时，该线上每一点的涡轴线都与曲线相切
- 微分方程

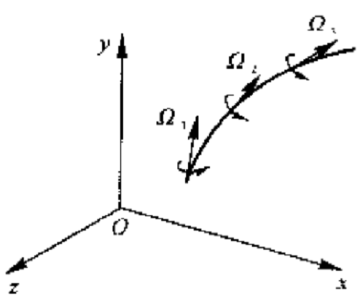
$$\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}$$

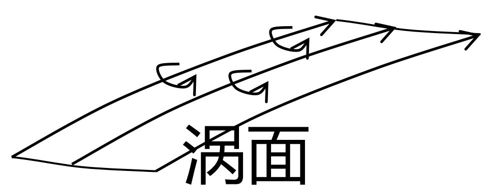
◆ 涡面

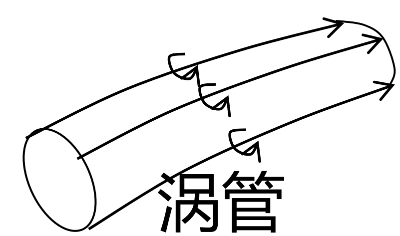
- 在同一瞬时，通过某一曲线（本身不是涡线）的所有涡线构成的曲面。
- 涡面上的任何一点，涡量必与涡面的法线相垂直。
  - 涡量不会穿过涡面

● 涡管

- 在同一瞬时，通过某一封闭围线（本身不是涡线）的所有涡线所组成的涡面。





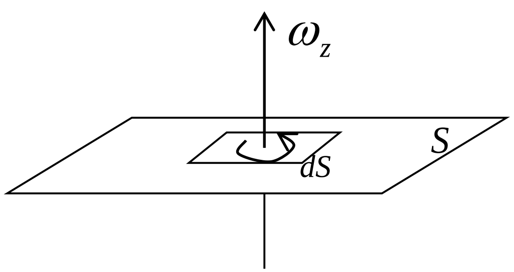


涡通量

◆ 涡通量

- 涡量在一个截面上的面积分称为涡通量，也叫涡强

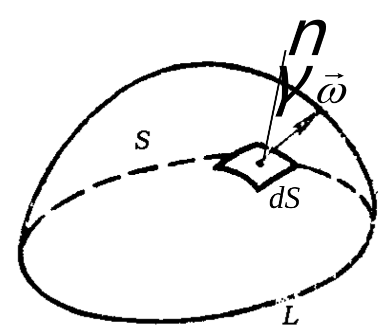
- 平面问题中 $\iint\limits_{A} 2\omega_z dA$



平面问题的涡通量

- 在三维空间问题中，涡通量就是

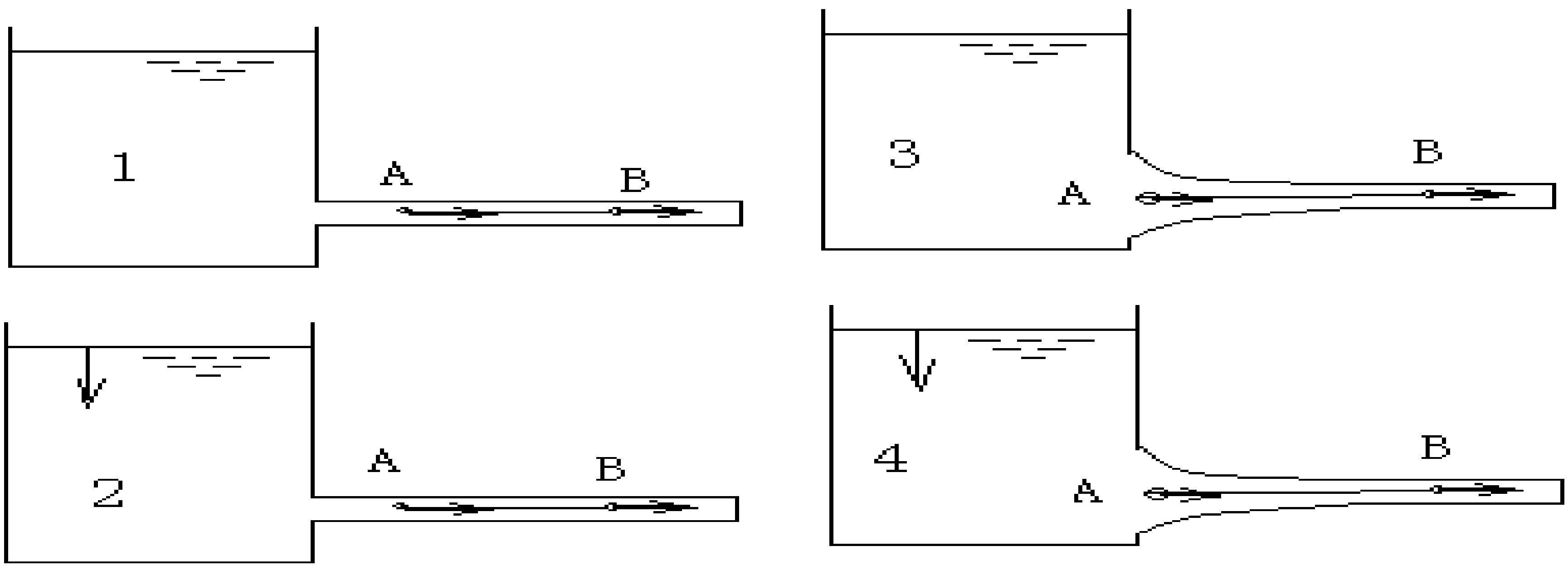
$$\iint\limits_{S} 2\vec{\omega}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{S} rot\vec{V}\cdot d\vec{S}$$



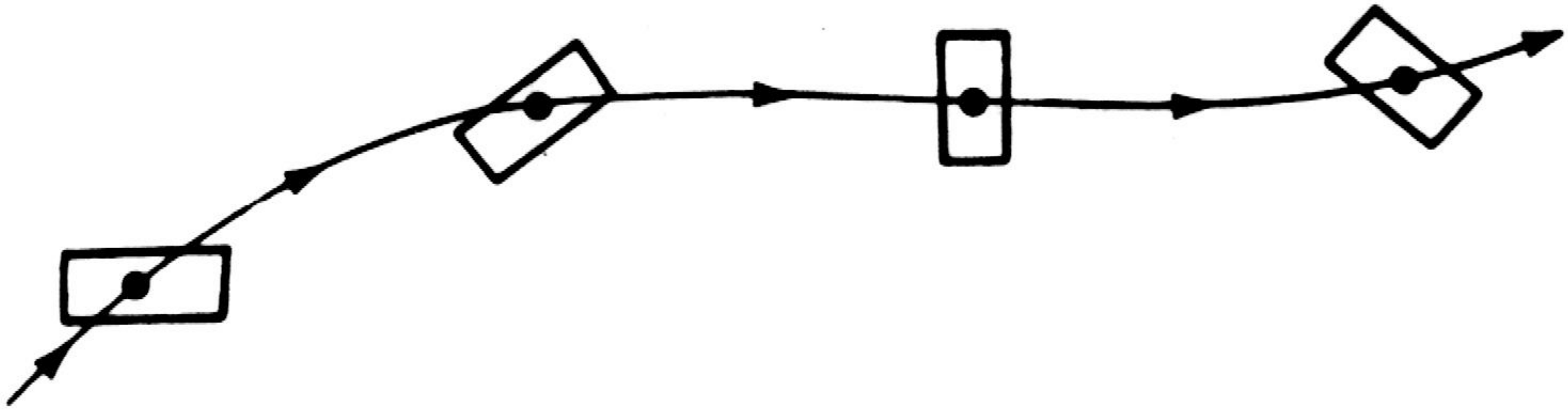
空间问题的涡通量

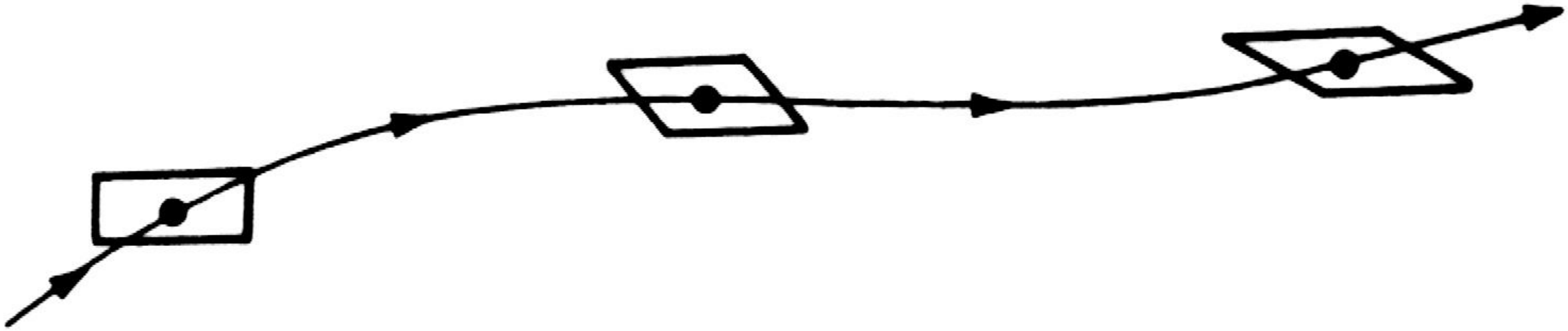
作业

- 推导恒等式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{V})-\mathbf{V}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})=\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\varepsilon}$
- 以分量形式写出无粘流体微分形式动量方程的。
- 给出下图中流体质点从A->B过程中加速度的表达式，并阐明流体不均匀性和非定常性对流体质点速度变化的影响。

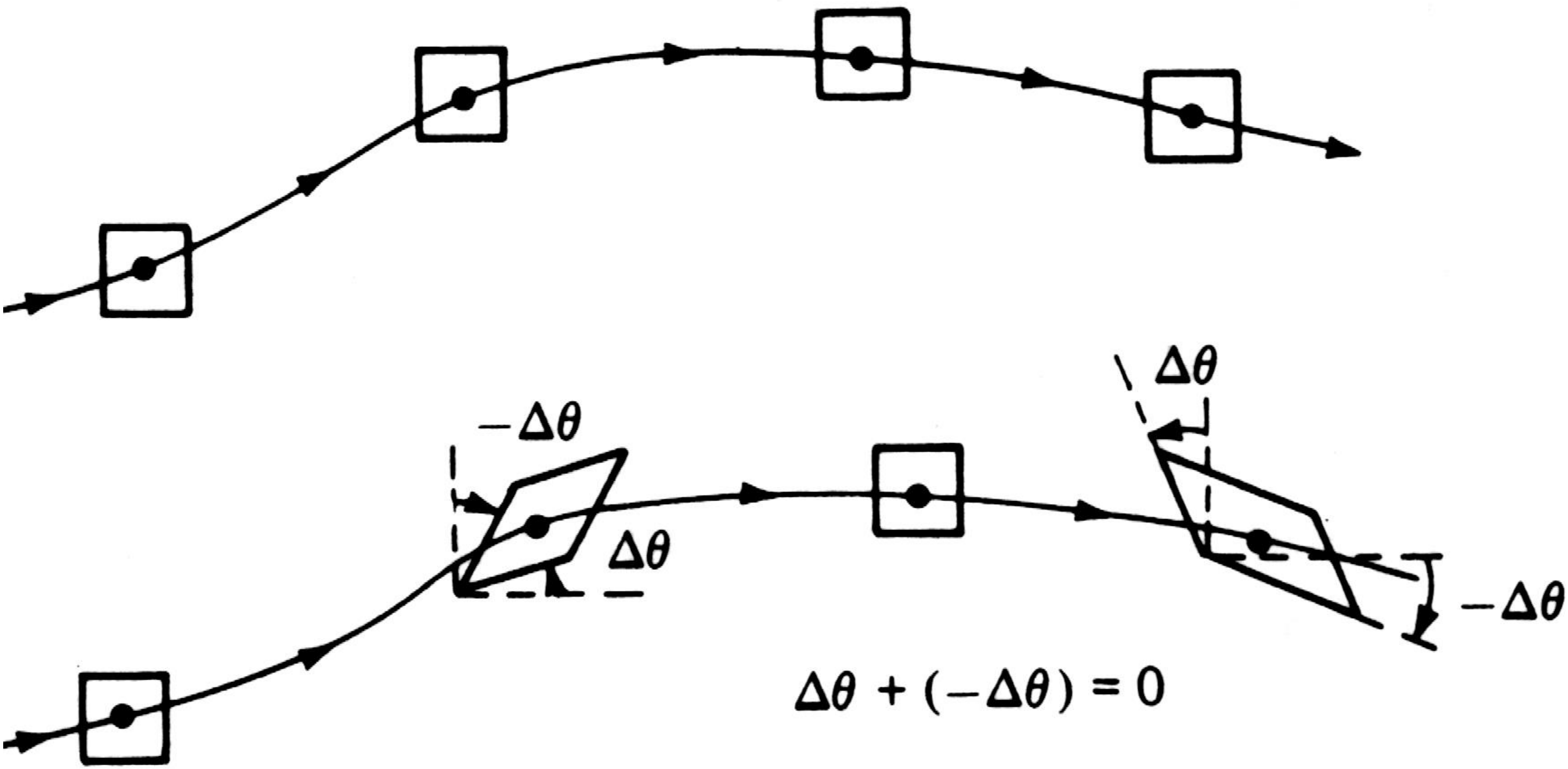


作业：判断有旋、无旋





作业：判断有旋、无旋


$-\Delta\theta$
$\Delta\theta$
$\Delta\theta$
$-\Delta\theta$
$\Delta\theta + (-\Delta\theta) = 0$

作业

2.5 假设有一流场的速度场为 $u = xy + 20t$, $v = x - \frac{1}{2}y^2 + t^2$，求当 $t = 4$ 时，$P(2,1)$ 处的流体微团的 x 及 y 方向的加速度(使用实质导数的定义)。

2.6 已知某流场的速度场为 $u = y + 2z$, $v = z + 2x$, $w = x + 2y$，求：

(1) 涡量及涡线方程；

(2) 求在 $x + y + z = 1$ 平面上，横截面为 $dS = 1\ \mathrm{mm}^2$ 的涡管强度；

(3) 求在 $z = 0$ 平面上，$dS = 1\ \mathrm{mm}^2$ 上的涡通量。