第四章：
无粘不可压缩流动

本章内容

1. 伯努利方程
2. 无旋不可压缩流动控制方程及边界条件
3. 一些基本流的解
4. 流动的叠加
5. 绕圆柱无升力流动（均匀流＼偶极子）
6. 漩涡流
7. 绕圆柱有升力流动（均匀流＼涡旋流）
8. 库塔-茹科夫斯基定理
9. 面元法求解任意物体无升力绕流

无粘不可压缩流体基本方程

◆几种简化的流体模型

- **理想**流体：无粘流体
- **绝热**流体：流体的导热系数看做是零
- **不可压缩**流体：体积弹性模量无穷大，或密度是常数

◆**无粘不可压缩流体的基本方程**

- 理想流动
- 适用范围：液体和低速气体(Ma<0.3)流动

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\
\rho \dfrac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p
\end{cases}
$$

（即欧拉运动方程）

3.1伯努利方程

$$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho v^2=const}$$

条件1　　条件2

无粘不可压流体，忽略体积力：$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=-\nabla p$

方程两边点乘速度：
$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)=-\nabla p\cdot\mathbf{V}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)+\mathbf{V}\cdot\nabla\left(\rho\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)=-\mathbf{V}\cdot(\nabla p)$$

条件3

定常：
$$\mathbf{V}\cdot\left(\nabla\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2\right)+\nabla p\right)=0$$

伯努利方程的推导

$$\mathbf{V}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2+p\right)=0$$

条件4

在同一流线上，流线的方向即速度的方向 $d\mathbf{s}=\frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}$

$$d\left(p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2\right)=\nabla\left(p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2\right)\cdot d\mathbf{s}=\nabla\left(p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2\right)\cdot\frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}=0$$

$$p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2=const$$

无旋流动中的伯努利方程

忽略体积力：
$$\rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}=-\nabla p$$

恒等式：
$$\nabla\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)=(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}+\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})$$

条件4

无旋：
$$\nabla\times\mathbf{V}=0$$

$$\rho\nabla\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)=-\nabla p$$

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2+p\right)=0$$

任意方向上均有：
$$d\left(p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2\right)=\nabla\left(p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2\right)\cdot d\mathbf{s}=0$$

$$p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2=const$$

伯努利方程的物理意义

$$p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2=const$$

- 前提条件
  - ✓定常；
  - ✓无粘；
  - ✓不可压缩；
  - ✓不考虑体积力
- **同一条流线**上对于有旋和无旋流动均成立。
- 常数const的值随流线不同而变化。
- **对于无旋流动**，在整个流场中常数const相等。

伯努利方程的应用——（1）皮托管

◆对于不可压缩流动，忽略体积力，有：

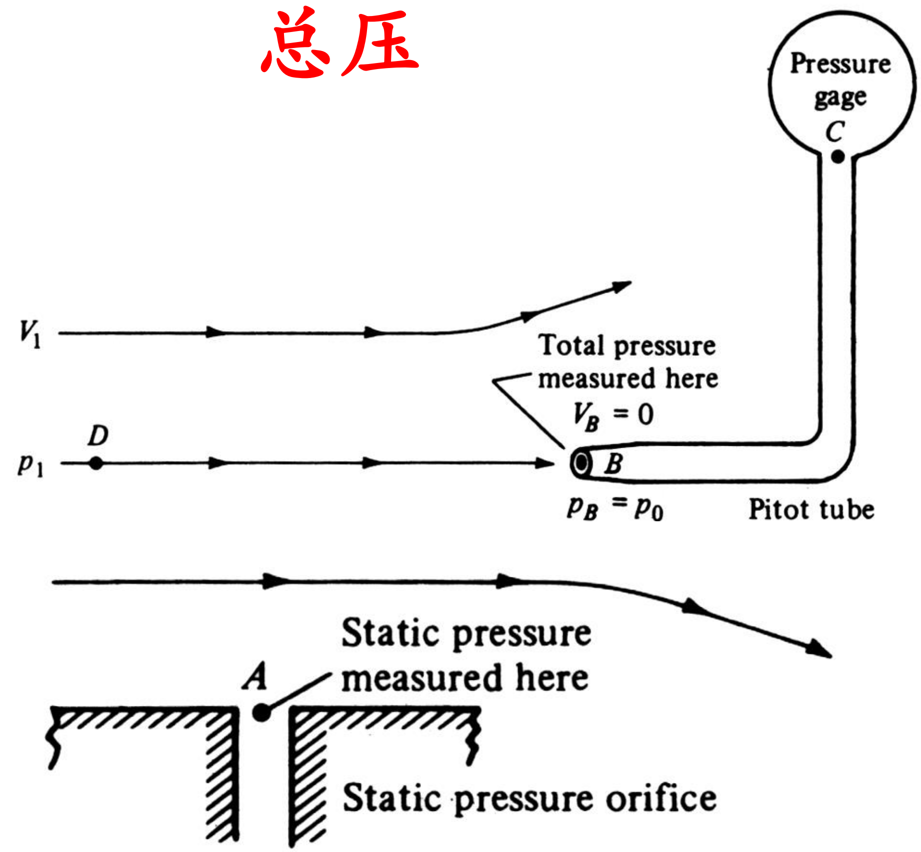
$$p_1 \quad + \quad \frac{1}{2}\rho V_1^2 \quad = \quad p_0$$

静压　　动压　　总压

◆静压：未受扰动的自由来流的压力。

◆动压：未受扰动自由来流中单位体积流体的动能。

◆总压：自由来流速度减小为0时，流体的压力。

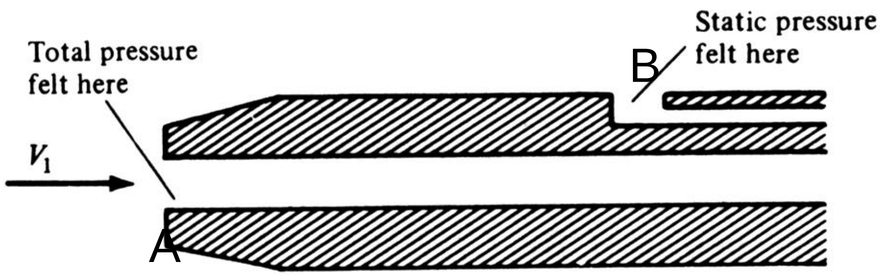


皮托管测速

◆对于A, B点，由伯努利方程：

$$p_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2$$

$$V_B = 0$$



皮托-静压管

◆得

$$V_A = \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho}}$$

伯努利方程的应用——（2）文丘里管

◆ 准一维流动假设

● 任一横截面上流动参数相同。

● 所有流动参数只是流动方向的函数。

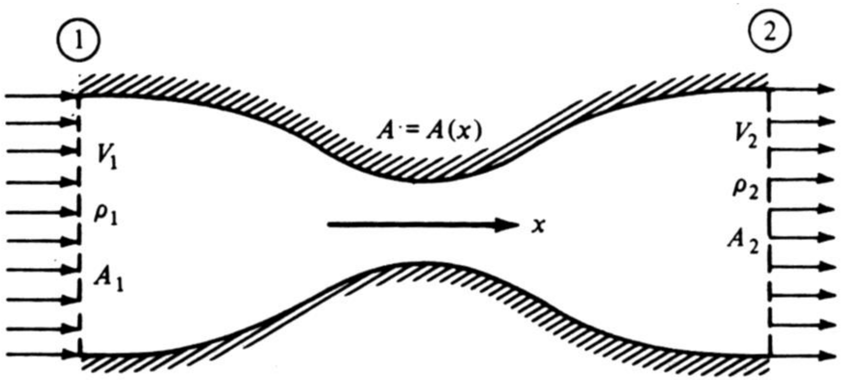
◆ 定常情况下，由积分形式的连续性方程：

$$\int_S \rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dS = 0$$

$$-\rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2 = 0$$

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

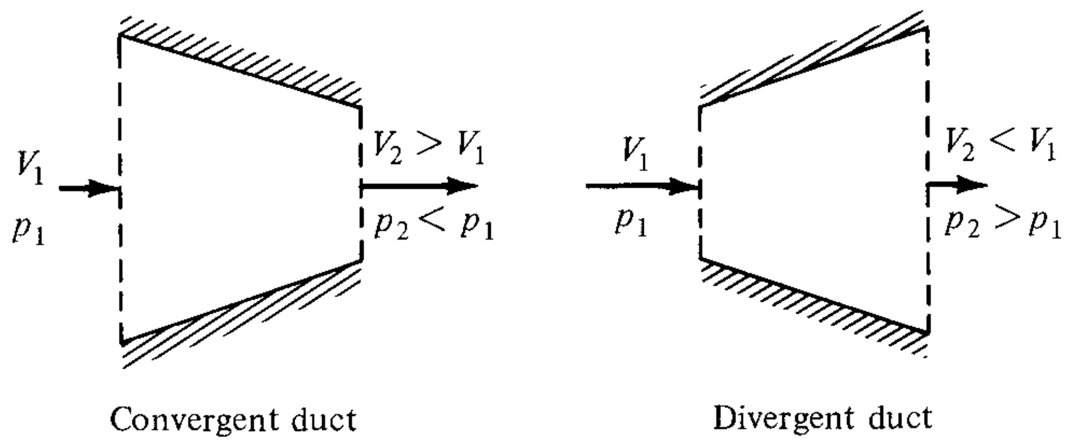
$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$



收敛管道和扩张管道

◆连续性方程 $$A_1V_1 = A_2V_2$$

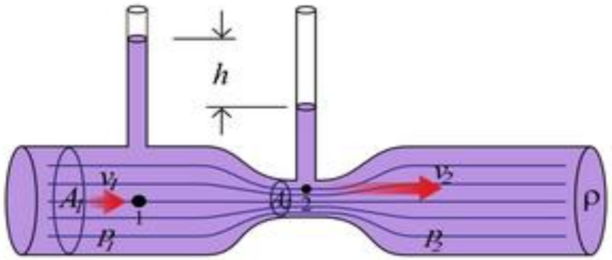
◆伯努利方程 $$p_1 + \frac{1}{2}\rho \mathbf{V}_1^{\,2} = p_2 + \frac{1}{2}\rho \mathbf{V}_2^{\,2}$$



◆ “抽刀断水水更流”

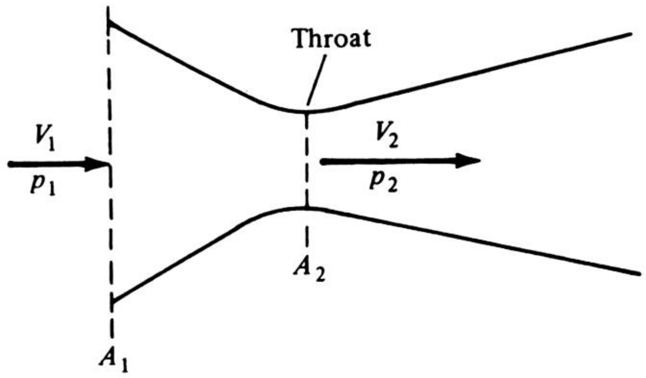
◆水龙头放水

文丘里管的流动



- 文丘里管测风速—求未知速度
  - 进口、喉道面积比已知，由伯努利方程：

$$V_1^2=\frac{2}{\rho}(p_2-p_1)+V_2^2$$

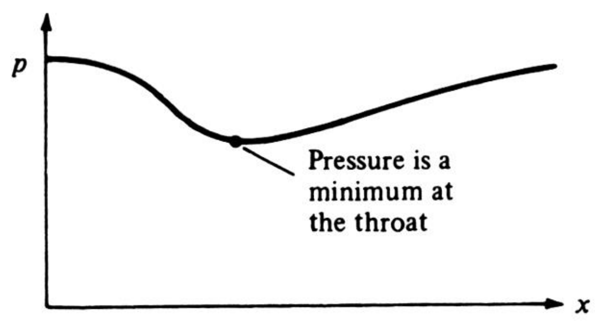


  - 由连续性方程：

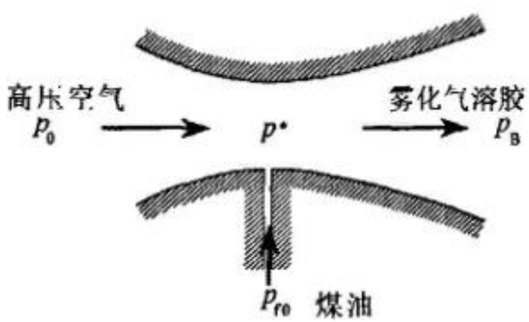
$$V_2=\frac{A_1}{A_2}V_1$$

  - 得：

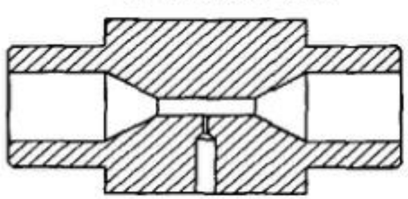
$$V_1=\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho\left[(A_1/A_2)^2-1\right]}}$$



文丘里管的应用

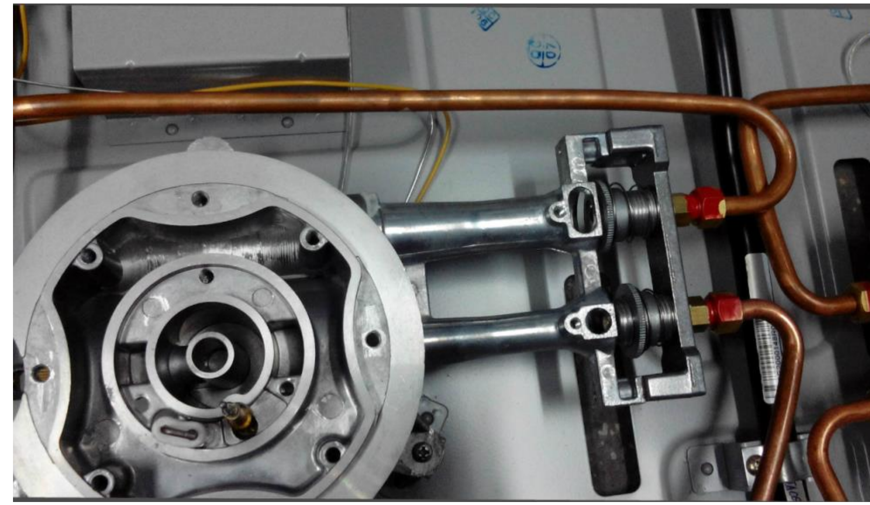


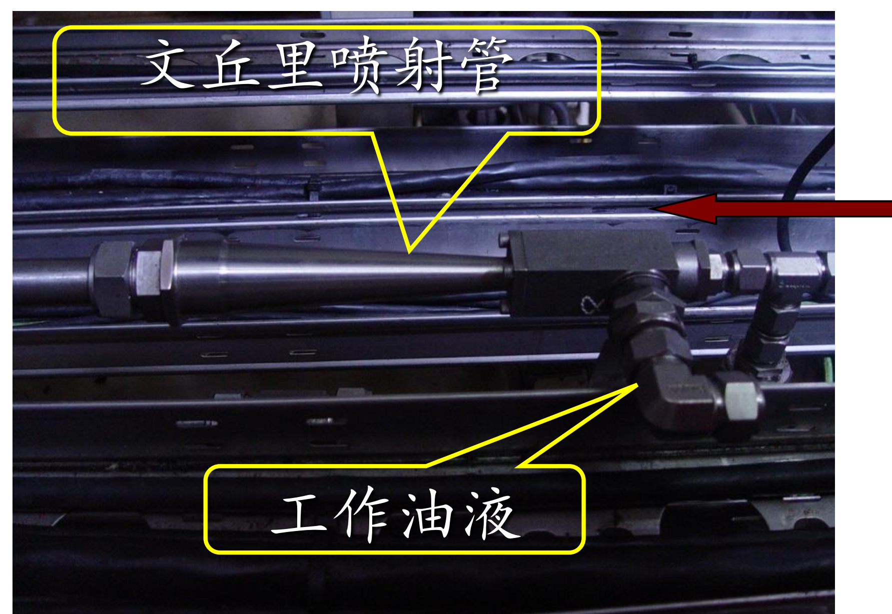
(a) 喷嘴雾化原理



(b) 喷嘴结构

图 3　喷嘴雾化原理和结构示意图

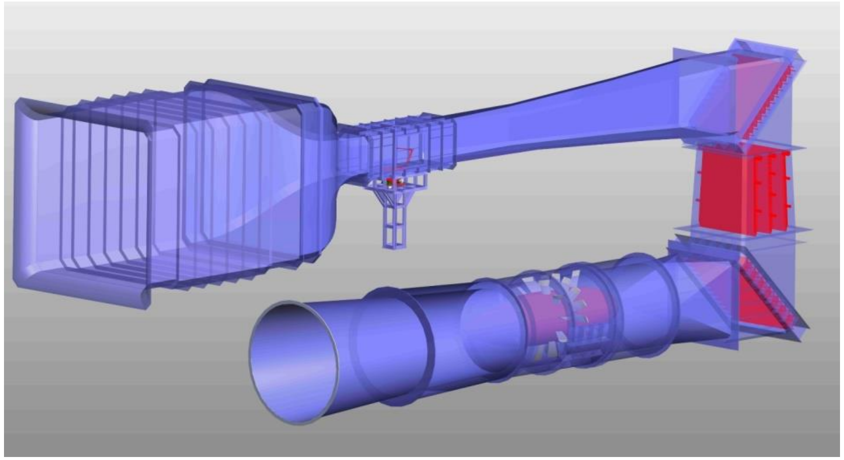


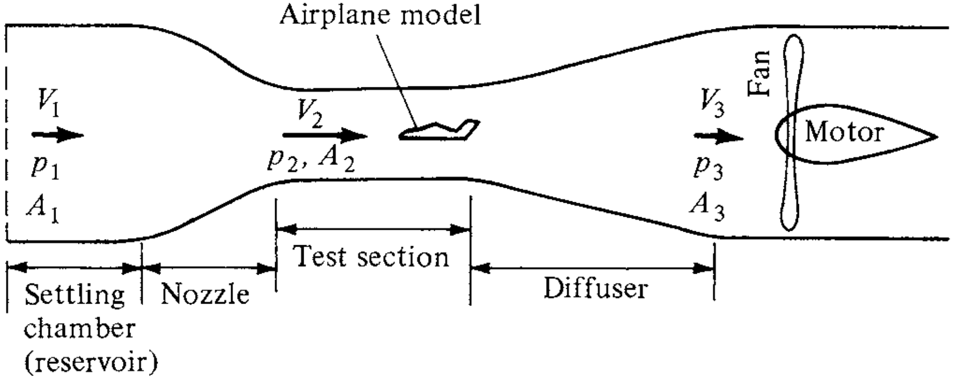


低速风洞

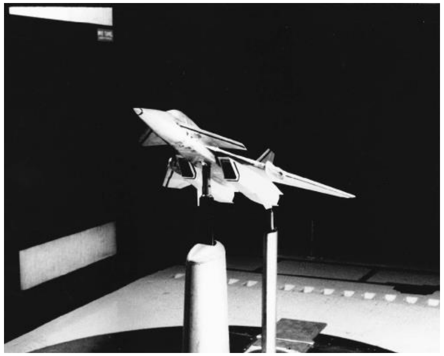
$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1$$

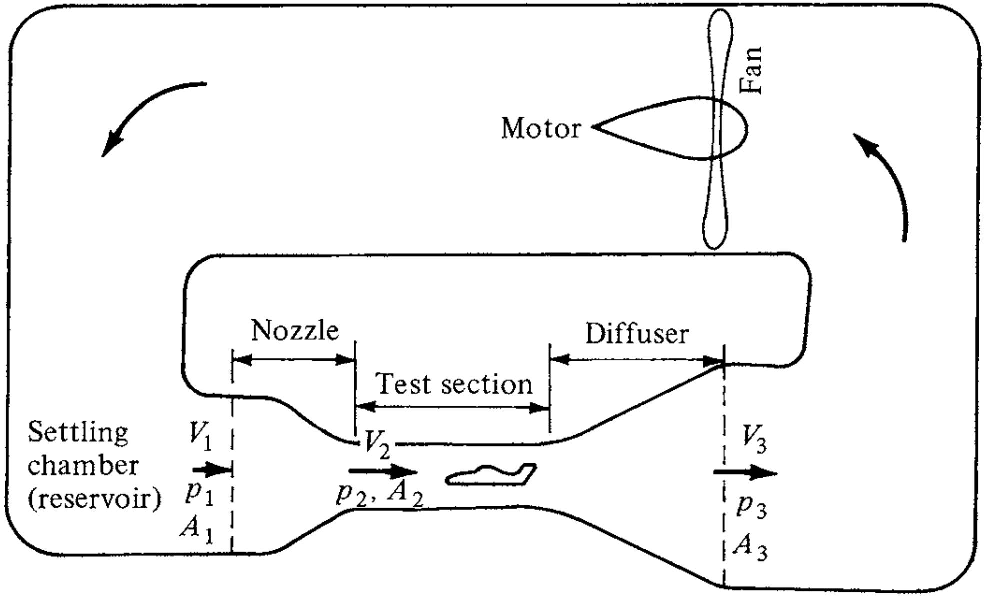
$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1 - (A_2 / A_1)^2\right]}}$$





(a) Open-circuit tunnel





(b) Closed-circuit tunnel

无粘不可压缩流体基本方程

- 以分量形式给出偏微分方程组（Review）：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \rho \dfrac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

- 初始条件：初始速度场 u_0, v_0, w_0 和压力场 p_0
- 边界条件：远场 $V = V_\infty$ 和物面 $V_n = 0$
- 非线性项……，速度和压力耦合……

2. 无旋不可压缩流动控制方程及边界条件

- 不可压缩流动
  - 速度散度为零 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
  - 连续性方程推导 $\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \nabla \cdot (\cancel{\rho}\mathbf{V}) = 0$

- 若流动无旋

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0$$

- 存在速度的势函数 ϕ ，为

$$\mathbf{V} = \nabla \phi$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

势函数和拉普拉斯方程

◆ 势函数代入不可压缩连续性方程

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}\qquad v=\frac{\partial\phi}{\partial y}\qquad w=\frac{\partial\phi}{\partial z}\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\nabla\cdot\nabla\phi=0$$

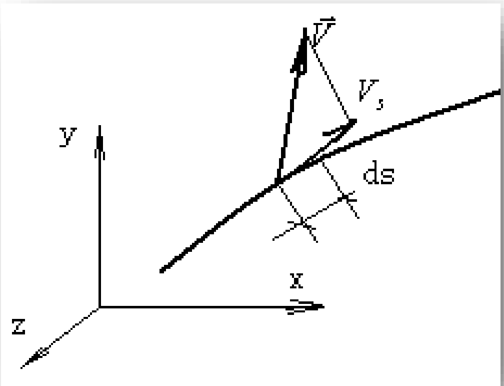
◆得到不可压缩无旋流动势函数的拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\phi=0\quad \text{或}\quad \Delta\phi=0\quad \text{或}\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

- 二阶线性偏微分方程
  - ➢ 纯运动学方程
    - 结合定解条件，单独解出势函数，继而求出速度分量
  - ➢ 与压强p没有进行耦合求解
    - 将解出的速度值作为已知量带入动量方程，解出p
    - 由伯努利方程确定流场中各点的压强。

势函数的性质

- 速度势函数沿着某一方向的偏导数等**该方向的速度分量**，速度势函数沿着流线方向增加。



$$V_s ds = \vec{V} \cdot d\vec{s} = udx + vdy + wdz$$

$$V_s = \frac{\vec{V} \cdot d\vec{s}}{ds} = u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds}$$

$$V_s = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial s}$$

- 速度势函数相等的点连成的线称为等势线，速度方向垂直于等势线。

$$d\phi = 0 \quad d\phi = \vec{V} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \vec{V} \perp d\vec{s}$$

- 连接任意两点的速度曲线等于该两点的速度势函数之差。速度线积分与路径无关，仅决定于两点的位置。如果是封闭曲线，速度环量为零。

$$\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (udx + vdy + wdz) = \int_A^B \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A$$

流动无旋⇔流动有势

- 有势必无旋，无旋必有势，两者等价
- 无旋—>有势

斯托克斯定理

$$\oint_l \vec{V}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{V})\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_{M_0}^{M} \vec{V}\cdot d\vec{l}$$

速度环量跟路径无关，起点M_0固定情况下，只跟终点M位置有关

$$\nabla\times\vec{V} = 0$$

$$\phi(x,y,z) = \int_{M_0}^{M} \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} udx + vdy + wdz$$

- 有势—>无旋

$$\mathrm{d}\phi = udx + vdy + wdz$$

$$\vec{V} = \nabla\times\phi$$

- 标量的梯度的旋度恒为0

$$\nabla\times\nabla\psi = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e_x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y}\right) - \vec{e_y}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}\right) + \vec{e_z}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\right)$$

$$= \mathbf{0}$$

流函数

◆二维不可压缩流动的连续性方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

◆格林公式（平面问题的线积分与面积分的关系）

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

令 $P=-v \quad Q=u$ ，

有 $$\oint_L -vdx+udy=\iint_\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0$$

- 线积分与路径无关

◆ 这是udy-vdx成为某个函数Ψ全微分的充要条件

$$d\psi=udy-vdx \quad \text{其中} \quad u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

流函数

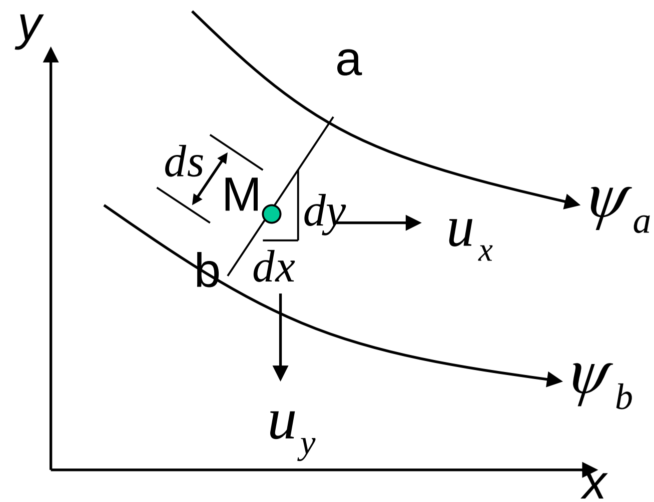
- 函数 ψ 称为流函数 $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$
  - 1781年，拉格朗日首先引进
- 要点：
  - 二维（平面）；不可压缩；
  - 流动有粘无粘均可定义流函数；
  - 有旋无旋均可定义流函数。
- 流线
  - 流函数值相等的点的连线 $\boxed{\psi = C}$
  - 由 $d\psi = udy - vdx = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{u}{dx} = \dfrac{v}{dy}$ 二维流线方程

流线

$$\boxed{\psi = C} \qquad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

通过ds段的流量为

$$dq = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = u_x dy - u_y dx$$



所以通过曲线ab的体积流量为

$$q = \int_b^a dq = \int_b^a u_x dy - u_y dx = \int_b^a d\psi = \psi_a - \psi_b$$

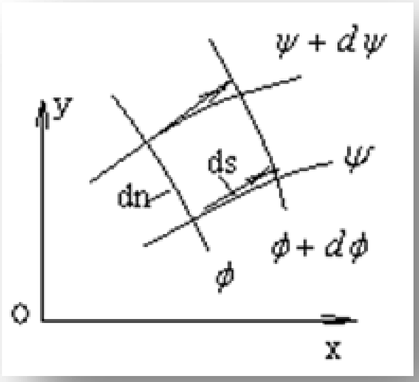
两流线间所通过的体积流量等于其流函数值之差。

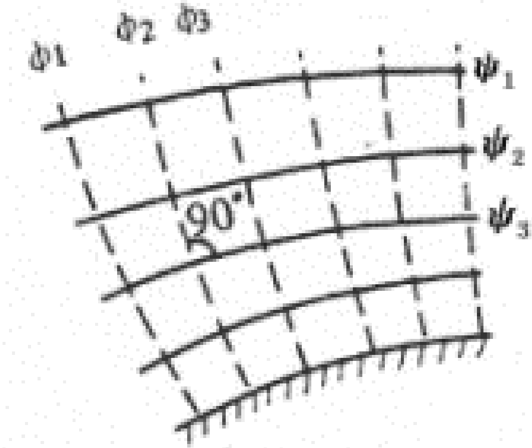
流函数与势函数的关系

◆直角坐标系下，在任意一点上：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\phi &= u\mathbf{i}+v\mathbf{j}\\ \nabla\psi &= -v\mathbf{i}+u\mathbf{j}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla\phi\cdot\nabla\psi=0$$

◆流线（等流函数线）和等势线在同一点正交

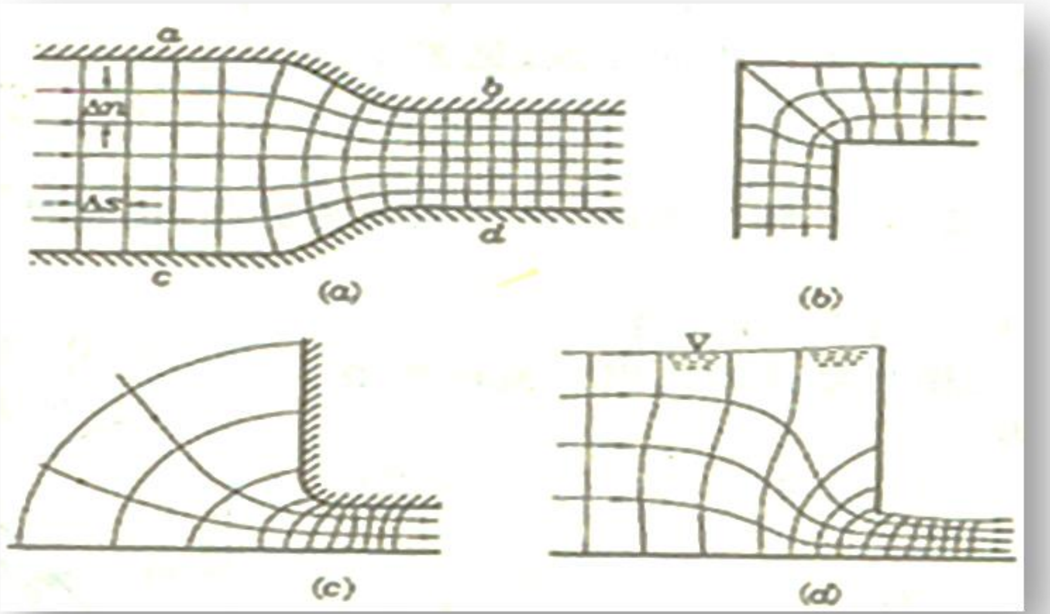




等流函数线和等势线

◆流网

- 无粘不可压缩定常平面势流场中存在两族曲线，一族为流线，另一族为等势线且彼此相互正交。把由这种正交曲线构成的网格叫做流网。
- 可以显示流速的分布情况，也可以反映速度的大小。如流线密的地方流速大，流线稀疏的地方流速小。



流函数的拉普拉斯方程

◆若流动无旋 $\nabla \times \mathbf{V} = 0$

◆在二维直角坐标系下：$\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

◆代入流函数表达式 $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$

◆得到不可压无旋流动流函数的拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{记为} \quad \nabla^2 \psi = 0$$

拉普拉斯方程

◆任何无旋不可压缩流动都有速度势函数和流函数（仅限二维流动），并满足拉普拉斯方程：

- 势函数 $\nabla^2\phi = 0$
- 流函数 $\nabla^2\psi = 0$

◆拉普拉斯方程的任何解，都可以写成关于无旋不可压缩流动的速度势函数或者流函数（二维）的形式。

拉普拉斯方程解的叠加

◆拉普拉斯方程为二阶线性偏微分方程，任何特解的线性组合仍然是拉普拉斯方程的解。

- 例如若 $\phi_1,\phi_2,\phi_3,\ldots\ldots,\phi_n$ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi_i=0$，则对于

$$\phi=\phi_1+\phi_2+\phi_3+\ldots\ldots+\phi_n$$

- 也满足 $\nabla^2\phi=\nabla^2\left(\sum\phi_i\right)=\sum\nabla^2\phi_i=0$
- 因此，一个复杂流动的解可以由一系列满足无旋不可压缩条件的的基本流的解来叠加合成。

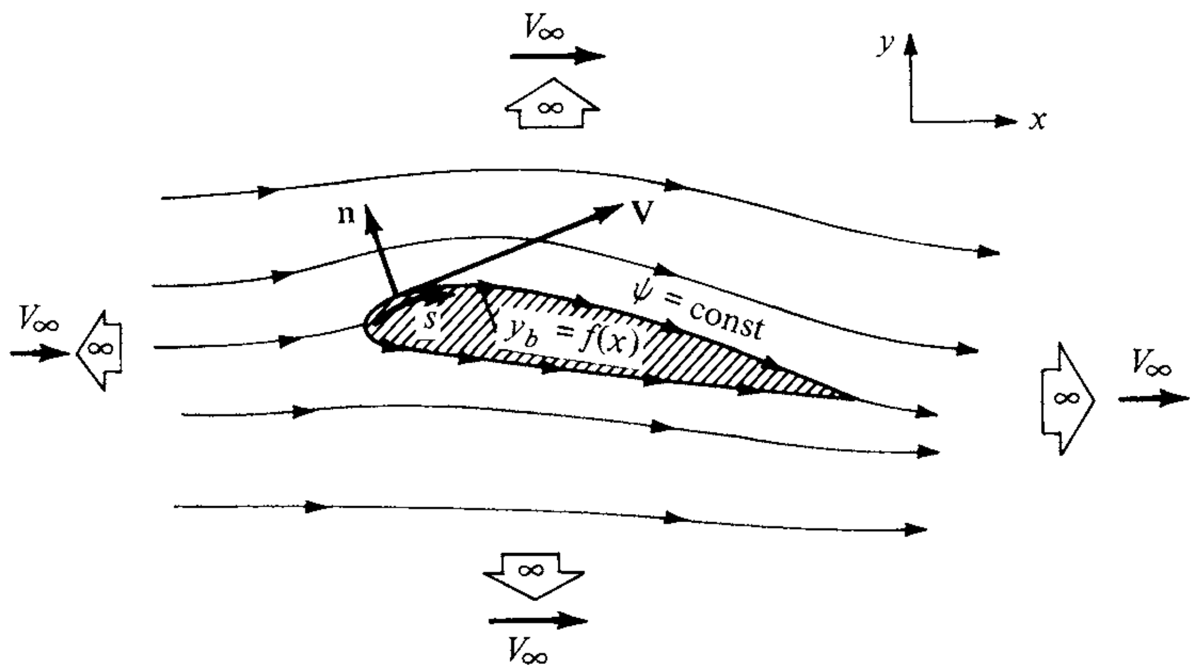
◆流场中的速度分量也可以叠加

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\left(\sum\phi_i\right)}{\partial x}=\sum\frac{\partial\phi_i}{\partial x}=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$$

- **压力与速度函数的关系不是线性关系**

远场边界条件

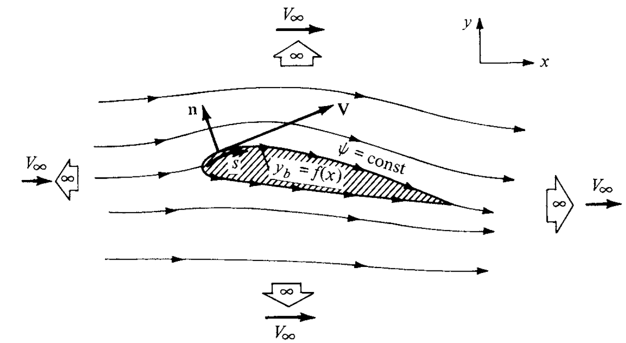
◆方程最终的定解依赖于边界条件



◆远场边界条件

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=V_\infty,\quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

固壁边界条件



◆气流不能穿越固壁表面

- 对粘性流动，在翼型表面摩擦力的影响下，物面处的气流速度为零；
- 对无粘流动，物面上的流动速度不为零，其物面上的气流速度必须与物面相切。

◆垂直于物面的法向速度分量为零

- 势函数 $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=(\nabla\phi)\cdot\mathbf{n}=0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial n}=0$
- 流函数 $\dfrac{\partial\psi}{\partial s}=0 \quad \Longrightarrow \quad \psi_{surface}=\psi_{y=y_b}=const$
- 流线方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{v}{u}$ 物面是一条流线 $\dfrac{dy_b}{dx}=\left(\dfrac{v}{u}\right)_{surface}$
  - ➢ 适用范围更广

平面不可压无旋流的基本方程

- 势函数

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \qquad \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_C=0 \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x}=u_\infty \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}=v_\infty$$

- 流函数

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \qquad \psi_C=C \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-v_\infty \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=u_\infty$$

- 以复位势w(z)为未知函数

$$w(z)=\phi+i\psi$$

  - 需要求解满足一定定解条件的在C外区域内的解析函数。

求解无旋不可压缩二维流动的一般步骤

1. 在合适的边界条件下求解 ϕ 或者 ψ 。经常可以利用叠加原理，从基本流动的解得到实际流动的拉普拉斯方程的解。

2. 从流函数或者势函数的定义求解出速度：

$$u=\partial\phi/\partial x,\quad v=\partial\phi/\partial y$$

$$or:\quad u=\partial\psi/\partial y,\quad v=-\partial\psi/\partial x$$

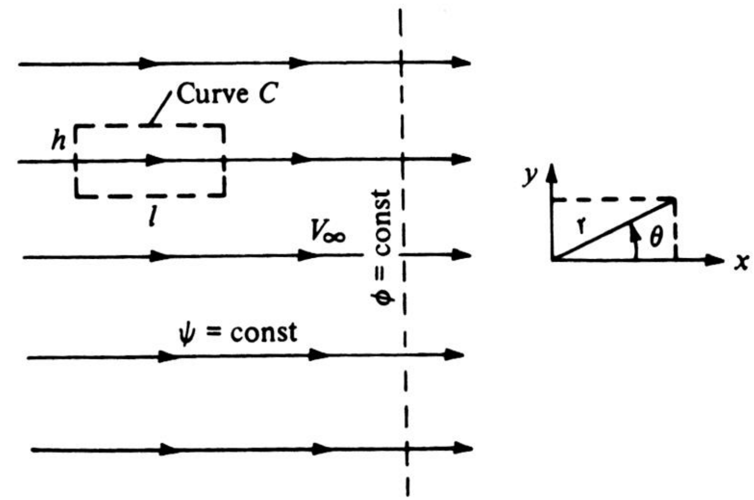
3. 根据伯努利方程求解压力：

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=p_\infty+\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$$

3. 一些基本流动的解

1. 均匀流动

◆流场中处处速度均相同的流动，不妨设大小为V_∞，方向为 x 方向



◆容易验证均匀流是不可压缩无旋流动

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0$$

均匀流动–势函数

◆由速度势函数和速度的关系：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = V_\infty, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v = 0$$

◆积分得到

$$\phi = V_\infty x + C$$

常数项C=0

◆即：

$$\boxed{\phi = V_\infty x}$$

◆极坐标形式：

$$\boxed{\phi = V_\infty r\cos\theta}$$

均匀流动–流函数

◆或者由流函数和速度的关系：

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=u=V_\infty,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-v=0$$

◆积分得到 $\psi=V_\infty y+C$

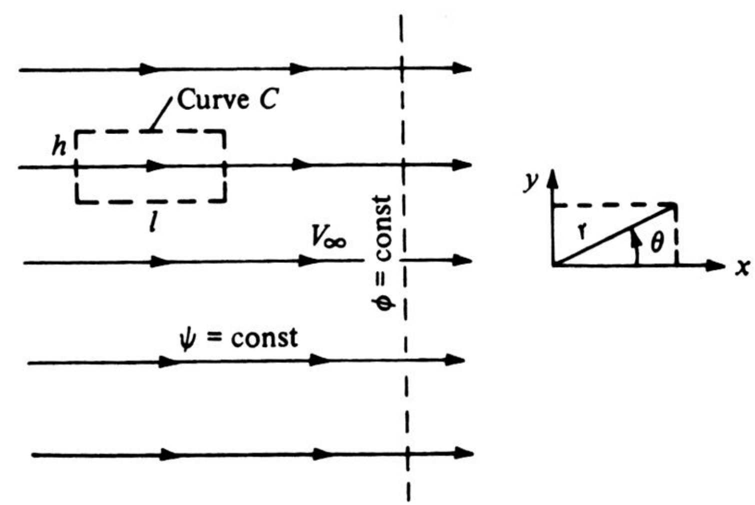
常数项C=0

◆即：

$$\boxed{\psi=V_\infty y}$$

◆极坐标形式：

$$\boxed{\psi=V_\infty r\sin\theta}$$

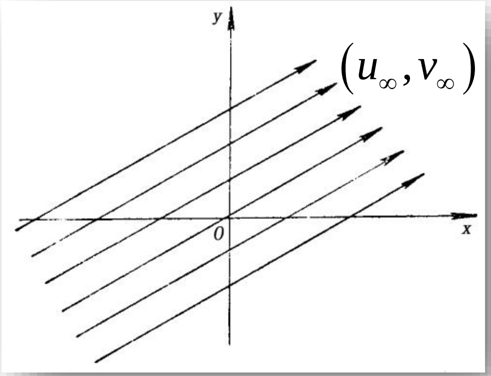


均匀流动

◆ 势函数

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = u_\infty dx + v_\infty dy$$

$$\phi = u_\infty x + v_\infty y + C$$



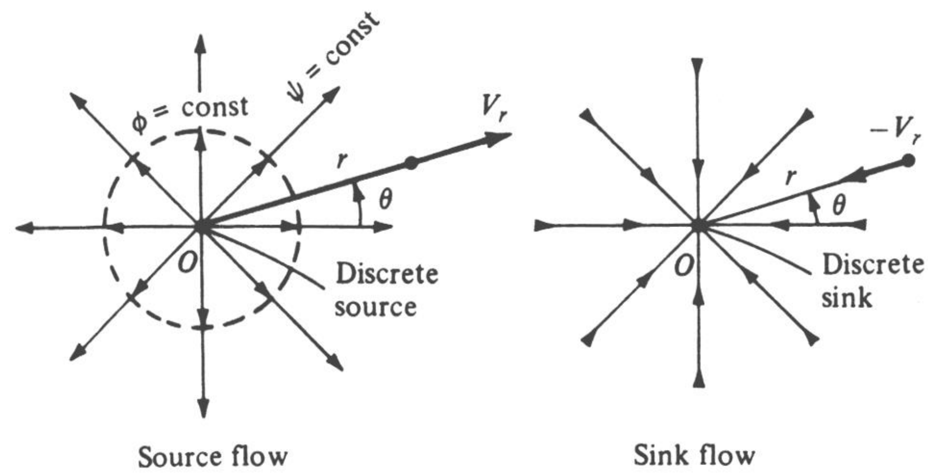
◆ 流函数

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -v_\infty dx + u_\infty dy$$

$$\psi = -v_\infty x + u_\infty y + C$$

点源（汇）

- 所有流线是从O点散开的直线；



- 速度大小和到O点的距离成反比；

- 容易验证，除了O点外

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{V}=0$$

- 流动为无旋不可压缩

除源点外，O点为奇点

点源（汇）

◆根据定义，在极坐标下

$$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi r} \qquad V_\theta = 0$$

◆Λ 称为点源（汇）的强度，即为单位长度点源流出（入）的体积流量

$$\int_0^{2\pi} V_r (r d\theta) = \frac{\Lambda}{2\pi r}\int_0^{2\pi} d\theta = \Lambda$$

◆流出为正，即为源；流入为负，即为汇

点源（汇）——势函数

◆径向： $\frac{\partial\phi}{\partial r}=V_r=\frac{\Lambda}{2\pi r}$ → $\phi=\frac{\Lambda}{2\pi}\ln r+f(\theta)$

◆周向： $\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=V_\theta=0$ → $\phi=g(r)+C$

◆综合得到： $\phi=\frac{\Lambda}{2\pi}\ln r+C$ → $\boxed{\phi=\frac{\Lambda}{2\pi}\ln r}$

◆点源描述的等势函数线

$\phi=const$ → $r=const$

以原点O为圆心的圆

点源（汇）—流函数

◆径向：$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=V_r=\frac{\Lambda}{2\pi r}$ ➡ $\psi=\frac{\Lambda}{2\pi}\theta+f(r)$

◆周向：$-\frac{\partial\psi}{\partial r}=V_\theta=0$ ➡ $\psi=g(\theta)+C$

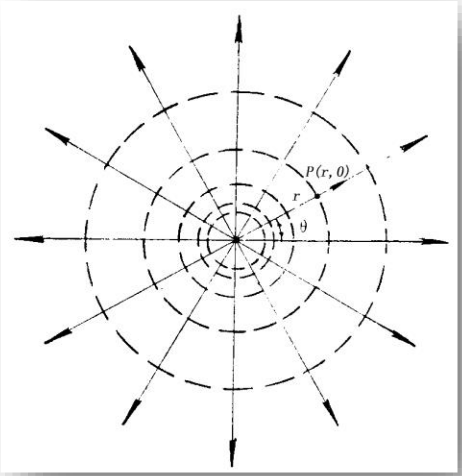
◆综合得到：$\psi=\frac{\Lambda}{2\pi}\theta+C$ ➡ $\boxed{\psi=\frac{\Lambda}{2\pi}\theta}$

◆点源描述的等流函数线

$$\psi=const \quad \Rightarrow \quad \theta=const$$

经过原点的直线

点源（汇）--直角坐标系



◆ 源点在（ξ，η）处

◆ 势函数

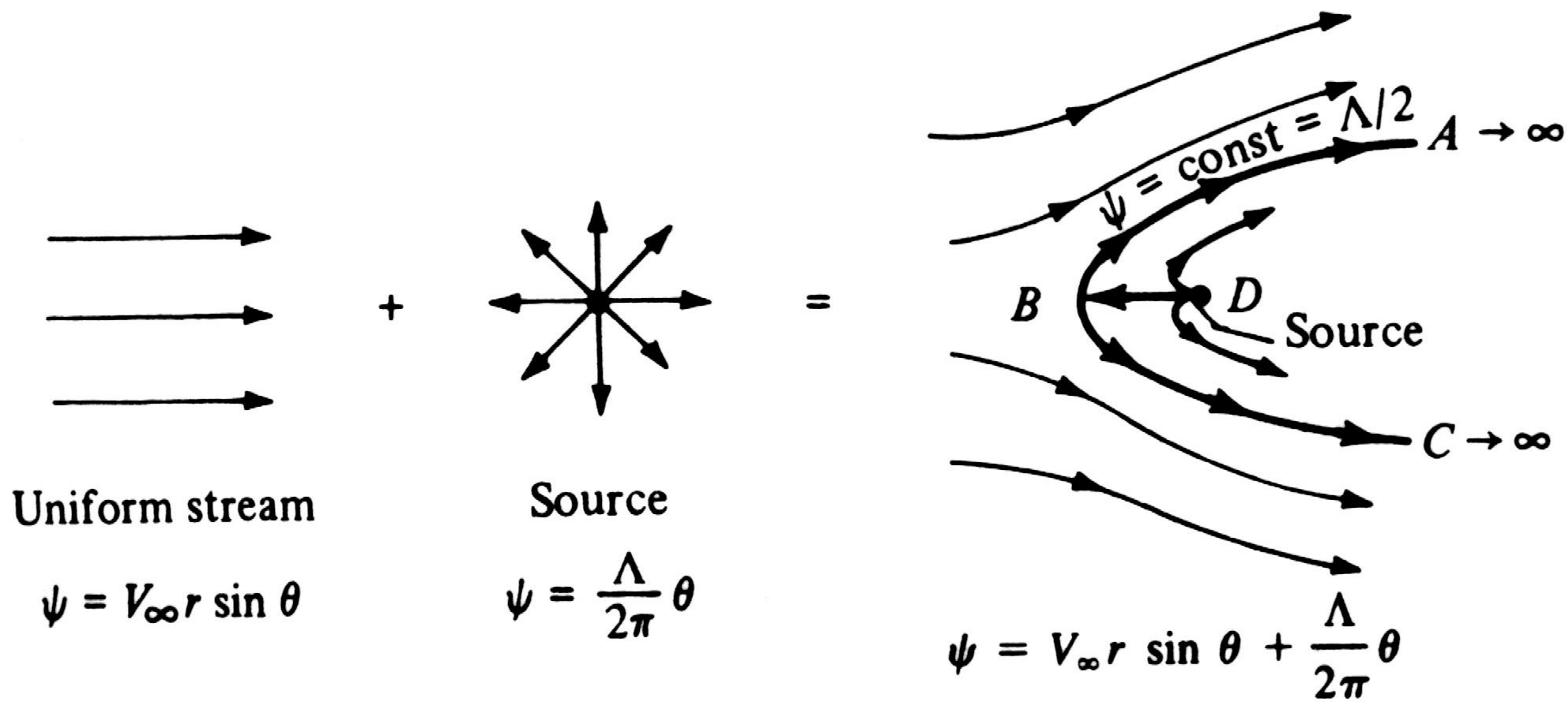
$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

◆ 流函数

$$\psi = \frac{\Lambda}{2\pi} arctg \frac{y-\eta}{x-\xi}$$

4. 流动的叠加

◆均匀流与点源的叠加：半无限体绕流



半无限体绕流

◆组合后的流函数：

$$\psi = V_\infty r \sin\theta + \frac{\Lambda}{2\pi}\theta$$

◆流场速度：

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = V_\infty \cos\theta + \frac{\Lambda}{2\pi r}$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V_\infty \sin\theta$$

◆不仅流函数或者势函数可以叠加，其导数，例如速度，也可以叠加。

半无限体绕流

◆对于每条流线：$\psi = V_\infty r\sin\theta + \dfrac{\Lambda}{2\pi}\theta = C$

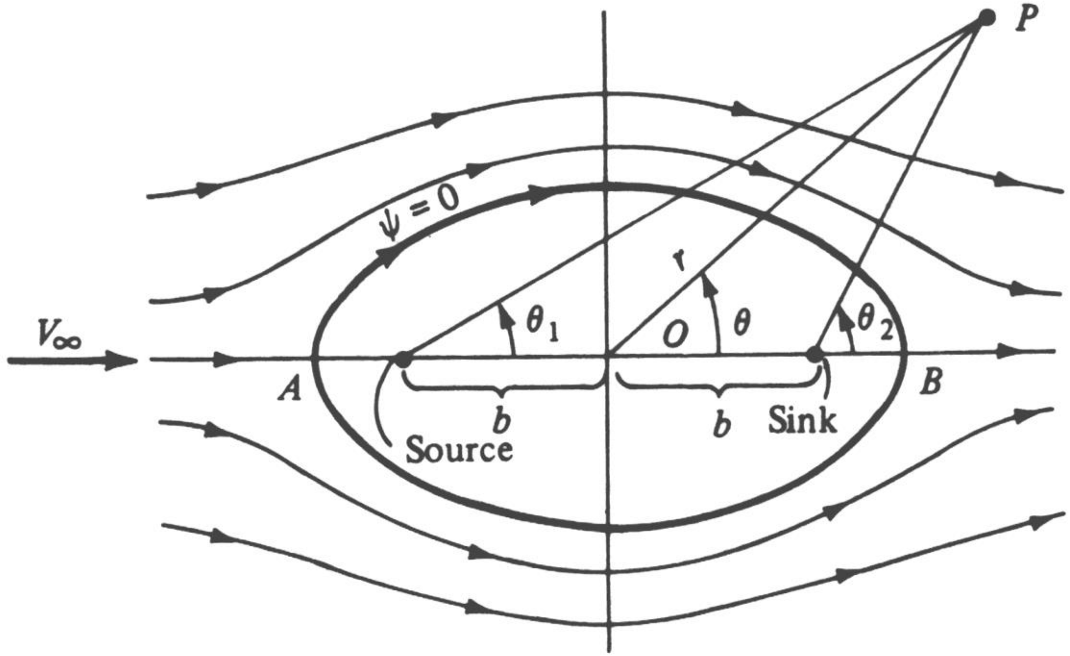
均可以看为固体壁面，但根据实际情况，一般最关心的是驻点所在流线。

$$\left.\begin{aligned} V_r &= V_\infty\cos\theta + \frac{\Lambda}{2\pi r} = 0 \\ V_\theta &= -V_\infty\sin\theta = 0 \end{aligned}\right\}$$

◆解得 $r = \dfrac{\Lambda}{2\pi V_\infty},\quad \theta = \pi$

◆则通过驻点的流线：$\psi = \dfrac{\Lambda}{2}$

兰金椭圆：均匀流+点源+点汇组合



◆组合后的流函数：$\psi = V_\infty r \sin\theta + \frac{\Lambda}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)$

θ_1, θ_2是 r, θ, b 的函数

三种基本流动组合

◆令速度为0，可以解得两个驻点A和B：

$$OA = OB = \sqrt{b^2 + \frac{\Lambda b}{\pi V_\infty}}$$

◆对应的流线为 $\psi = V_\infty r \sin\theta + \frac{\Lambda}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) = C$

- 在A点有： $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \pi$
- 在B点有： $\theta = \theta_1 = \theta_2 = 0$
- 得通过A、B点的流线： $V_\infty r \sin\theta + \frac{\Lambda}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) = 0$

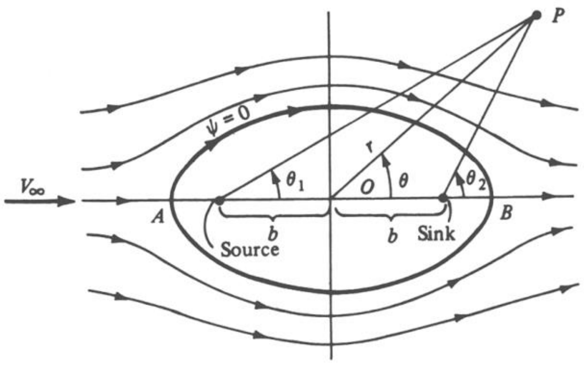
兰金椭圆

$$\boxed{V_\infty r\sin\theta+\frac{\Lambda}{2\pi}(\theta_1-\theta_2)=0}$$

◆19世纪苏格兰工程师兰金

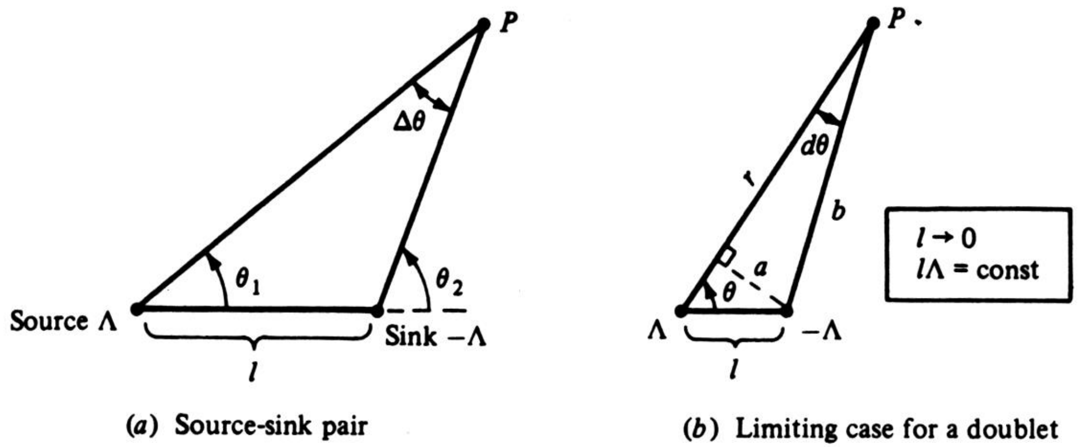
◆特点：

- 此流线是一个椭圆方程；
- 椭圆将流场分为两部分：
  - ✓ 椭圆内部区域可以用固体区域来取代；
  - ✓ 椭圆外部区域可以表现无粘不可压缩绕椭圆的有势流动。



偶极子：点源+点汇

◆偶极子：



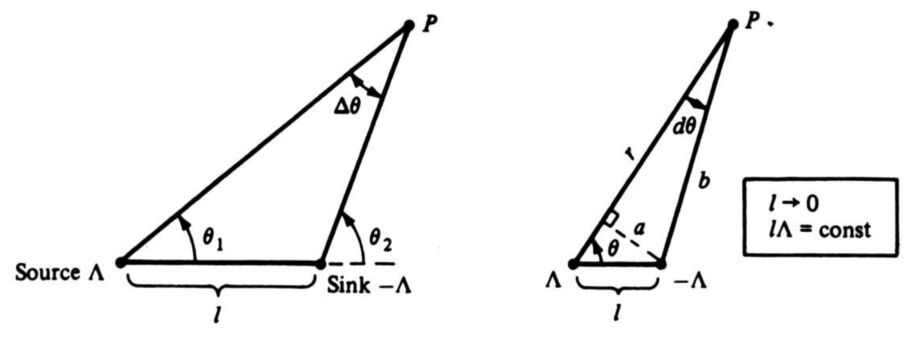
◆组合后的流函数：

$$\psi=\frac{\Lambda}{2\pi}(\theta_1-\theta_2)=-\frac{\Lambda}{2\pi}\Delta\theta$$

◆若$l\to 0$，令$l\Lambda=\kappa$，流函数的极限所代表的流动，称为偶极子

$$\psi=\lim_{l\to0,\kappa=const}\left(-\frac{\Lambda}{2\pi}d\theta\right)$$

◆偶极子强度 κ



(a) Source-sink pair
(b) Limiting case for a doublet

对于无限小$d\theta$ $a = l\sin\theta,\quad b = r - l\cos\theta,\quad d\theta = a/b$

$$d\theta = \frac{a}{b} = \frac{l\sin\theta}{r - l\cos\theta}$$

$$\psi = \lim_{l\to 0,\kappa=const}\left(-\frac{\Lambda}{2\pi}d\theta\right)$$

$$\psi = \lim_{l\to 0,\kappa=const}\left(-\frac{\Lambda}{2\pi}\frac{l\sin\theta}{r - l\cos\theta}\right)$$

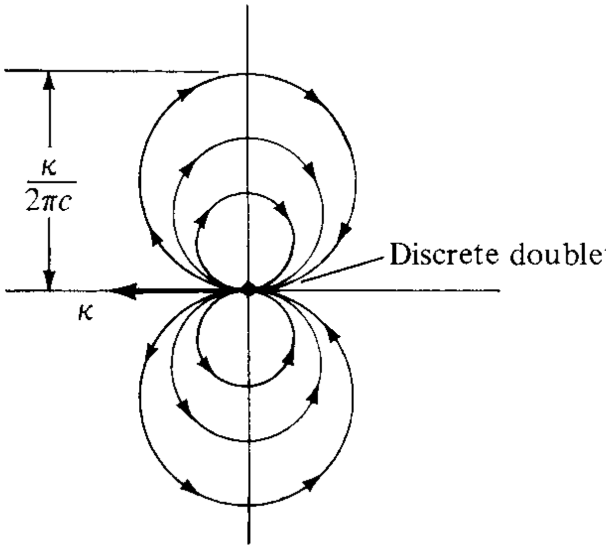
$$\psi = \lim_{l\to 0,\kappa=const}\left(-\frac{\kappa}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r - l\cos\theta}\right) \Rightarrow \boxed{\psi = -\frac{\kappa}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}}$$

偶极子的流线

◆偶极子的流线方程为

$$\psi = -\frac{\kappa}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r} = \text{const} = c$$

◆即 $r = -\frac{\kappa}{2\pi c}\sin\theta = d\sin\theta$



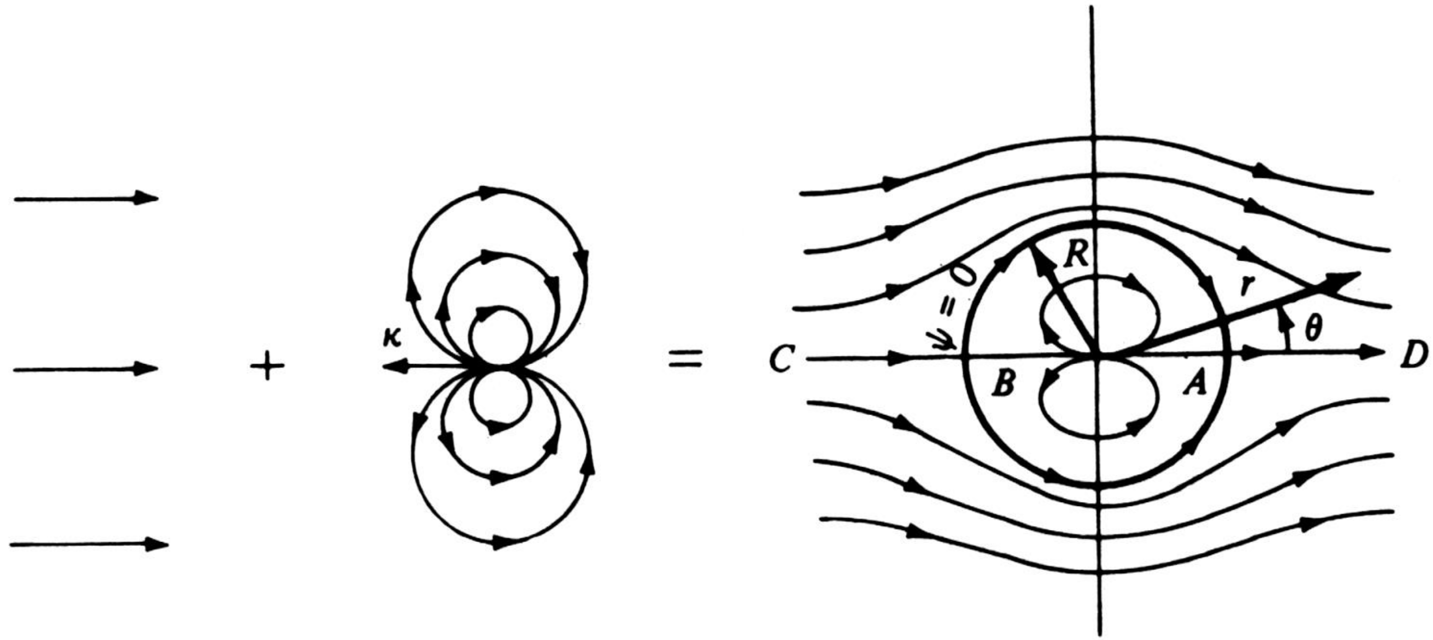
以$(d/2, \pm\pi/2)$ 为圆心，d为直径的圆方程。

偶极子的流线是一族直径为$\frac{\kappa}{2\pi c}$的圆。

◆当点源和点汇无限靠近时（$l \to 0 \quad l\Lambda = \kappa$），两者相互重合叠加，但并不是相互抵消。

5. 绕圆柱无升力流动

均匀流+偶极子



$$\psi = V_\infty r\sin\theta - \frac{\kappa}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\boxed{\psi = V_\infty r\sin\theta\left(1 - \frac{\kappa}{2\pi V_\infty r^2}\right)}$$

速度场和驻点位置

◆速度场：

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \left(1 - \frac{\kappa}{2\pi V_\infty r^2}\right)V_\infty \cos\theta$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\left(1 + \frac{\kappa}{2\pi V_\infty r^2}\right)V_\infty \sin\theta$$

◆求解驻点位置：

$$\left.\begin{aligned}\left(1 - \frac{\kappa}{2\pi V_\infty r^2}\right)V_\infty \cos\theta = 0\\ \left(1 + \frac{\kappa}{2\pi V_\infty r^2}\right)V_\infty \sin\theta = 0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

A点： $(r,\theta) = (R,0)$ B点：$(r,\theta) = (R,\pi)$ $R^2 \equiv \kappa/2\pi V_\infty$

过驻点的流函数和流线

$R^2 \equiv \kappa / 2\pi V_\infty$

◆驻点的流函数值为：

$$\psi = V_\infty r \sin\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \underset{\theta=0,\pi}{\overset{r=R}{=}} 0$$

◆则，通过驻点的流函数为：

$$\psi = V_\infty r \sin\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) = 0$$

◆讨论：

- 当 $r = R$ ，此部分流线是一个圆方程；
- 当 $\theta = 0, \pi$，此部分流线通过驻点的水平直线；
- 此流线将流场分为两部分，外流部分即是绕圆柱的不可压缩无粘流动。

圆柱面上的速度和压力分布

◆圆柱面上的速度为：

$$V_r = 0$$

$$V_\theta = -2V_\infty \sin\theta$$

◆圆柱表面的压力分布：

$$p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} = p + \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow p - p_\infty = \frac{\rho V_\infty^2}{2}\left(1 - 4\sin^2\theta\right)$$

◆压力系数定义：

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2}$$

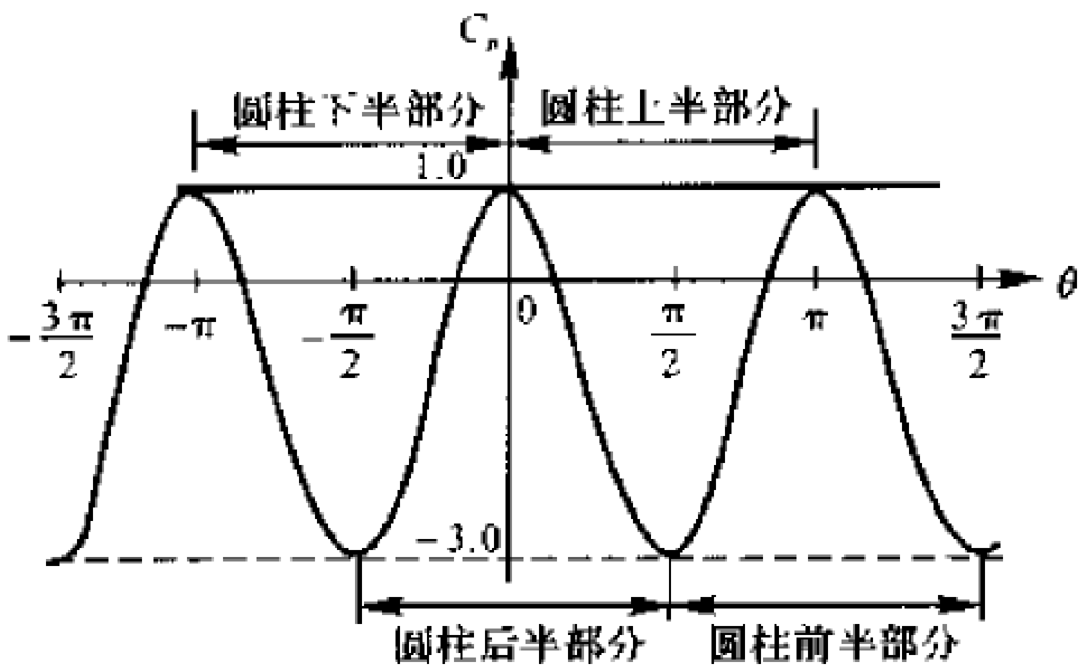
◆压力系数为：

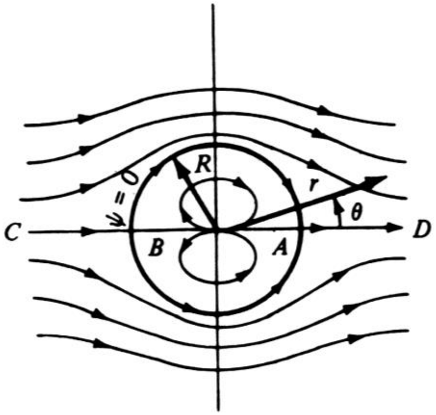
$$C_p = 1 - 4\sin^2\theta$$

圆柱表面的压力系数分布

无粘不可压缩圆柱绕流的表面压力分布

$$C_p = 1 - 4\sin^2\theta$$



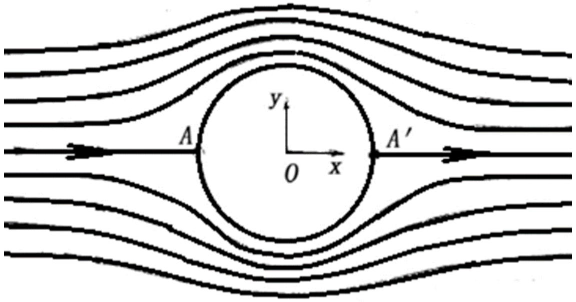


圆柱面上的速度和压力分布

◆ 圆柱面上的速度和压力分布

$$V_r = 0 \qquad V_\theta = -2V_\infty \sin\theta$$

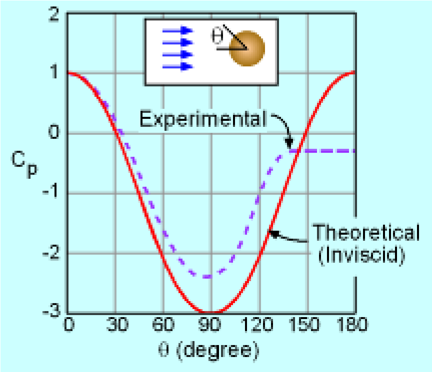
$$p - p_\infty = \frac{\rho V_\infty^2}{2}\left(1 - 4\sin^2\theta\right)$$



◆ 讨论：

- 无粘情况下，圆柱受力由压力分布决定
- 圆柱面上，压力分布关于过圆心的流动方向及其垂直方向轴对称，故圆柱受到的升力和阻力均为0（**达朗贝尔佯谬**）
  - 达朗培尔（D’Alembert）18世纪法国著名数学家，他提出，在理想不可压流中，任何一个封闭物体的绕流，其阻力都是零
  - 实际流动中，圆柱的阻力分为压差阻力和粘性阻力
- 圆柱上什么位置速度最大，是几倍的来流速度？什么位置与来流速度大小一样？
- 什么位置压力最大和最小，值是多少？

真实圆柱绕流

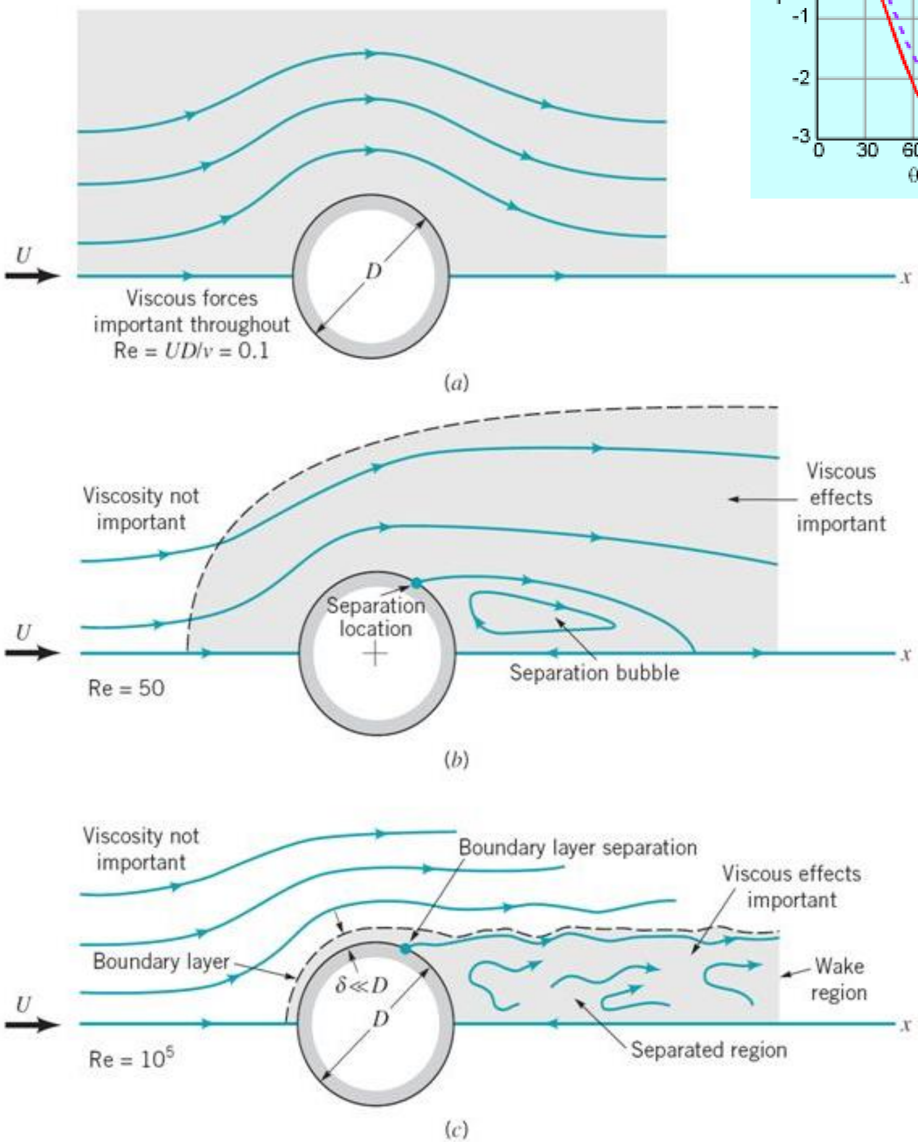


Flow Past Cylinder

Low Re: Mostly viscous flow

Moderate Re: Partial viscous flow around body with separation and re-circulation flow in wake

High Re: Viscous Boundary Layer near surface till separation and wake



6. 涡旋流

◆点涡

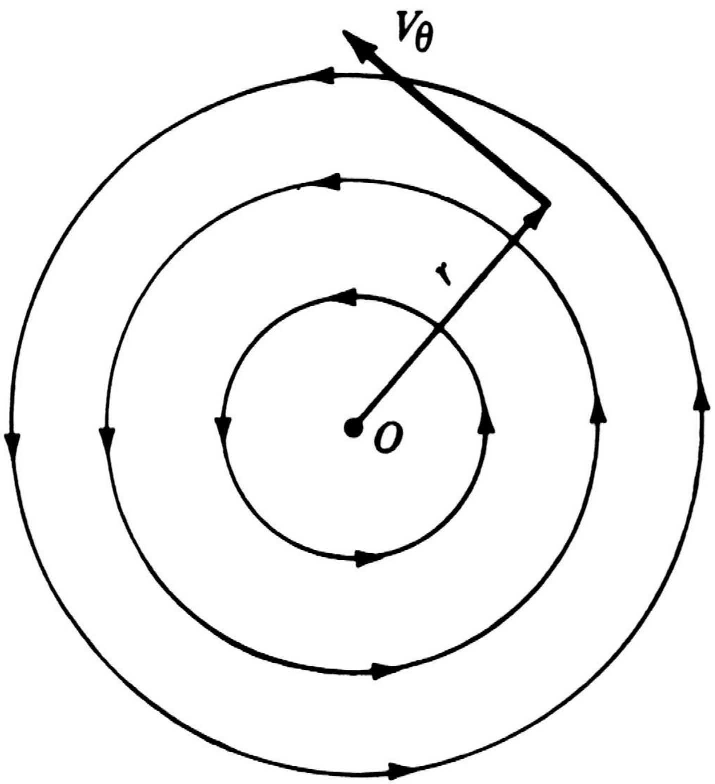
- ●所有流线为以O为原心的同心圆；
- ●流线上速度大小与其到O距离成反比；
- ●涡旋流为不可压缩流动；
- ●涡旋流除了O点，为无旋流动，O点为奇点。

◆速度 $V_r = 0 \quad V_\theta = \dfrac{C}{r}$

◆环量

$$\Gamma = -\oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = -V_\theta(2\pi r)$$

$$C = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$



涡心的旋度

◆涡心的旋度 $\Gamma = -\iint_S (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S}$

◆对于二维流动

$$C = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$

$$2\pi C = \iint_S (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S |\nabla \times \mathbf{V}| dS$$

当 $r \to 0$ 时 $\iint_S |\nabla \times \mathbf{V}| dS \to |\nabla \times \mathbf{V}| dS$

$$|\nabla \times \mathbf{V}| = \frac{2\pi C}{dS}$$

当 $dS \to 0$ $|\nabla \times \mathbf{V}| \to \infty$

◆涡心处的旋度为无穷大，涡心为奇点

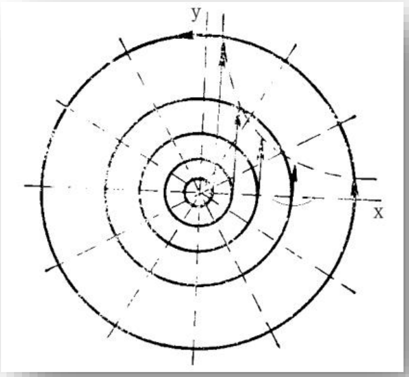
点涡的势函数和流函数

- 点涡的强度 $\Gamma = -V_\theta(2\pi r)$

- 涡旋流的速度 $V_\theta = -\dfrac{\Gamma}{2\pi r}$ $V_r = 0$

- 涡旋流的势函数和流函数

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$



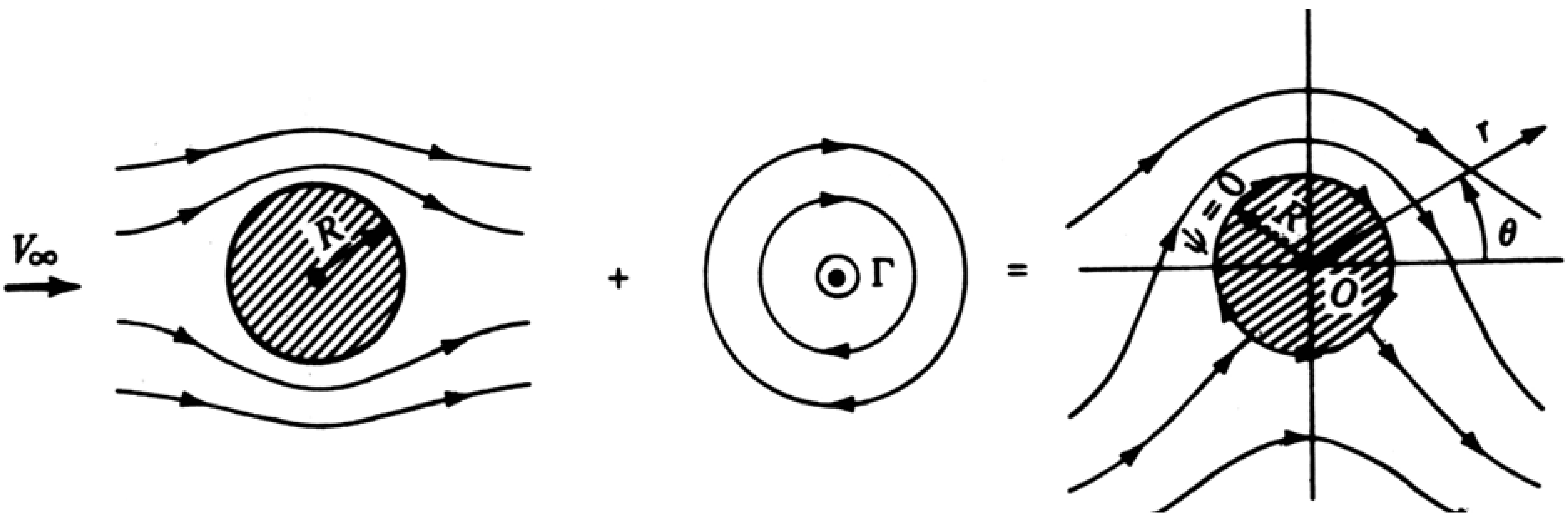
  - 等势线是射线，流线是圆

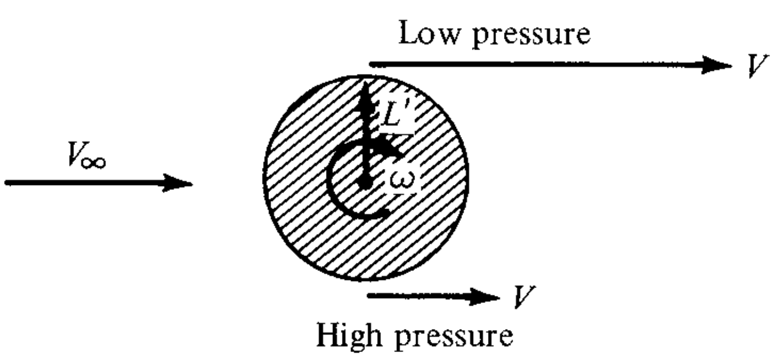
几种基本流动

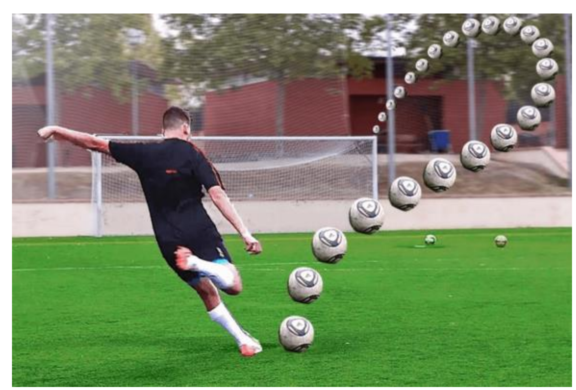
Type of flow	Velocity	ϕ	ψ
Uniform flow in x direction 均匀流	$u = V_\infty$	$V_\infty x$	$V_\infty y$
Source 点源	$V_r = \dfrac{\Lambda}{2\pi r}$	$\dfrac{\Lambda}{2\pi}\ln r$	$\dfrac{\Lambda}{2\pi}\theta$
Vortex 点涡	$V_\theta = -\dfrac{\Gamma}{2\pi r}$	$-\dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta$	$\dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r$
Doublet 偶极子	$V_r = -\dfrac{\kappa}{2\pi}\dfrac{\cos\theta}{r^2}$	$\dfrac{\kappa}{2\pi}\dfrac{\cos\theta}{r}$	$-\dfrac{\kappa}{2\pi}\dfrac{\sin\theta}{r}$
	$V_\theta = -\dfrac{\kappa}{2\pi}\dfrac{\sin\theta}{r^2}$		

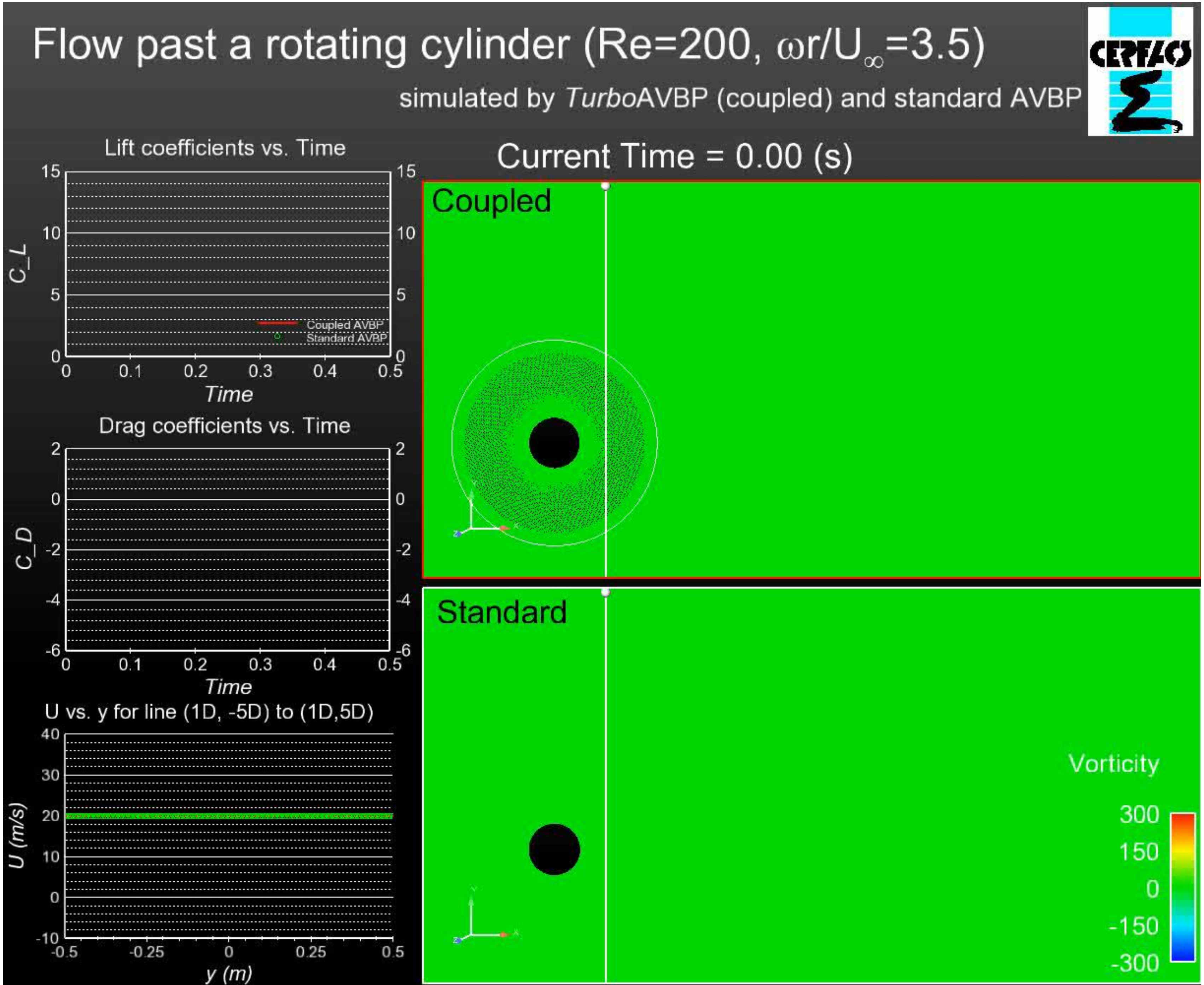
7. 绕圆柱有升力流动

绕圆柱无升力流动（均匀流+偶极子）+涡旋流





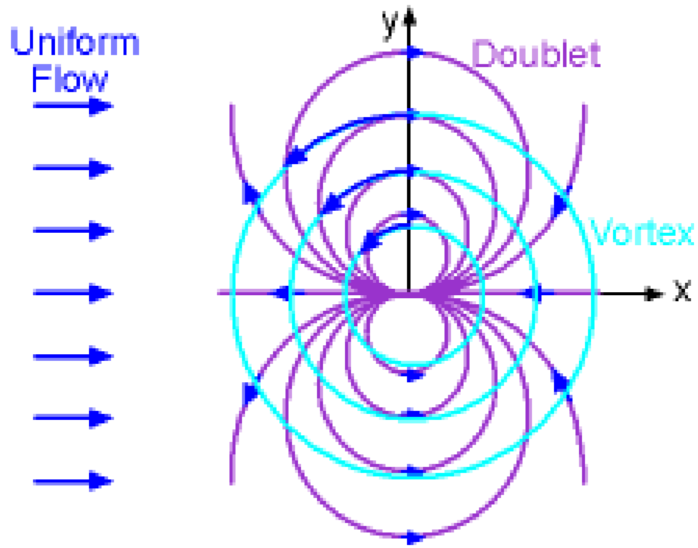



Flow past a rotating cylinder (Re=200, ωr/U∞=3.5)
simulated by TurboAVBP (coupled) and standard AVBP
Lift coefficients vs. Time
C_L
Time
Coupled AVBP
Standard AVBP
Drag coefficients vs. Time
C_D
Time
U vs. y for line (1D, -5D) to (1D,5D)
U (m/s)
y (m)
Current Time = 0.00 (s)
Coupled
Standard
Vorticity
300
150
0
-150
-300

均匀流+偶极子+涡旋流

- 绕圆柱无升力流动

$$\psi_1 = V_\infty r \sin\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

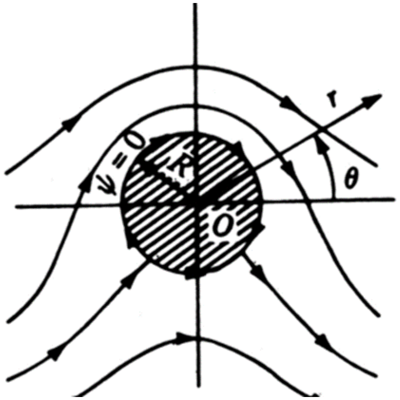


- 点涡

$$\psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + C \xrightarrow{C = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln R} \psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r}{R}$$

圆柱有升力流动的流函数

◆绕圆柱有升力流动的流函数：



$$\psi=\psi_1+\psi_2$$

$$\boxed{\psi=V_\infty r\sin\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r}{R}}$$

◆讨论：

- r=R是一条流线；
- 流线没有流动方向水平对称轴，故存在其垂直方向的力；
- 流线关于过圆心且流动方向垂直轴对称，流动方向上受到的力为0。

圆柱有升力流动的速度场

◆速度场：

$$V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cos\theta$$

$$V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

◆求解驻点：

$$\left.\begin{aligned} V_r &= \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cos\theta = 0 \\ V_\theta &= -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0 \end{aligned}\right\}$$

圆柱有升力流动的驻点

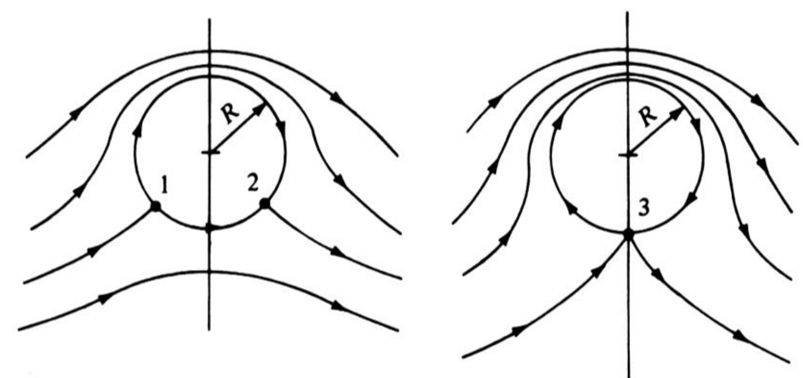
◆若 r=R

$$\sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}$$

$$\theta = \arcsin\left(-\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}\right)$$

- 当 $\dfrac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} < 1$ $\quad \theta = \pi - \arcsin\left(-\dfrac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}\right)$

- 当 $\dfrac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} = 1$ $\quad \theta = -\dfrac{\pi}{2}$



(a) $\Gamma < 4\pi V_\infty R$

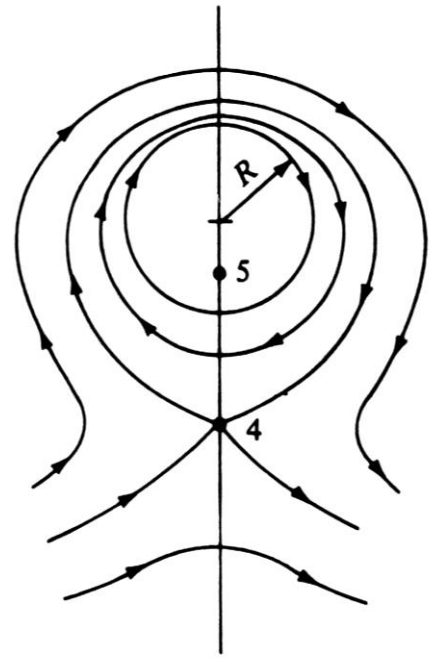
(b) $\Gamma = 4\pi V_\infty R$

圆柱有升力流动的驻点

◆若 $\cos\theta = 0$ 则 $\sin\theta = \pm 1$

$$\pm\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)V_\infty = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

左边取正 $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$

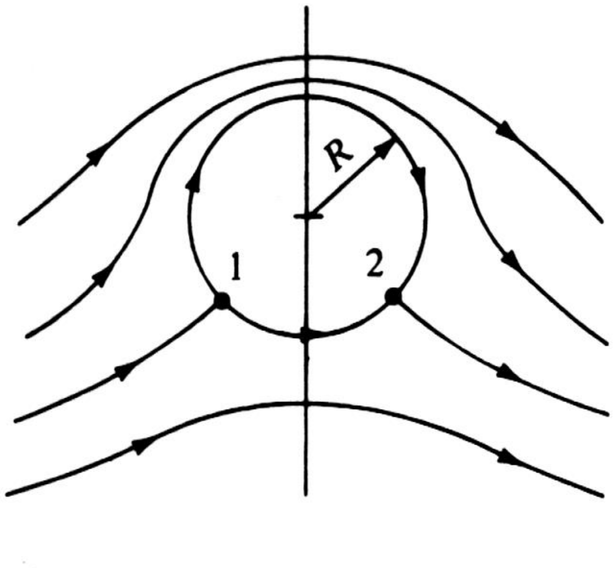


(c) $\Gamma > 4\pi V_\infty R$

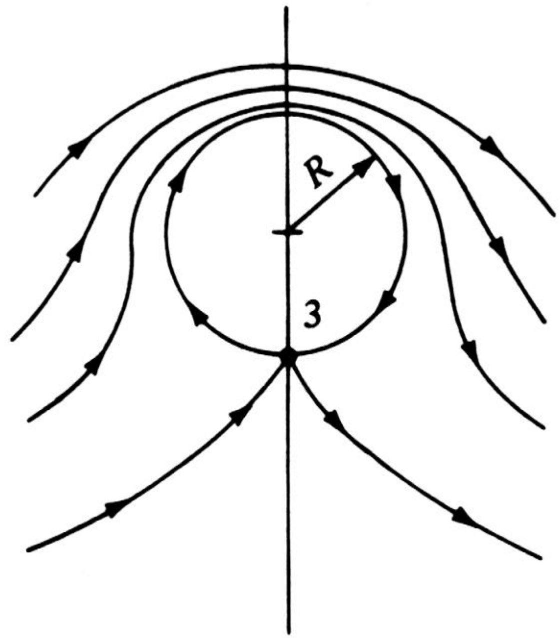
$$r = \left[\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}\right)^2 - 1}\right]R$$

当 $\dfrac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} > 1$ 有解 $r_1 > R$ $\quad r_2 < R$

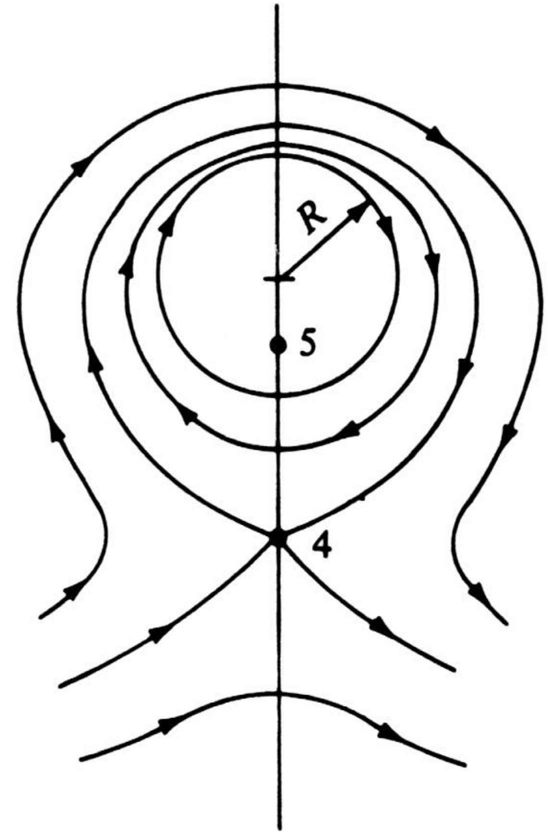
有升力圆柱绕流的驻点



(a) $\Gamma < 4\pi V_\infty R$



(b) $\Gamma = 4\pi V_\infty R$



(c) $\Gamma > 4\pi V_\infty R$

$$\left\{R,\ \arcsin\left(-\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}\right)\right\}$$

$$\left\{R, -\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\left\{\left[\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}+\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}\right)^2-1}\right]R,\ -\frac{\pi}{2}\right\}$$

圆柱面上的速度和压力分布

◆圆柱面上的速度分布：

$$V = V_\theta = -2V_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

◆圆柱面上的压力系数分布：

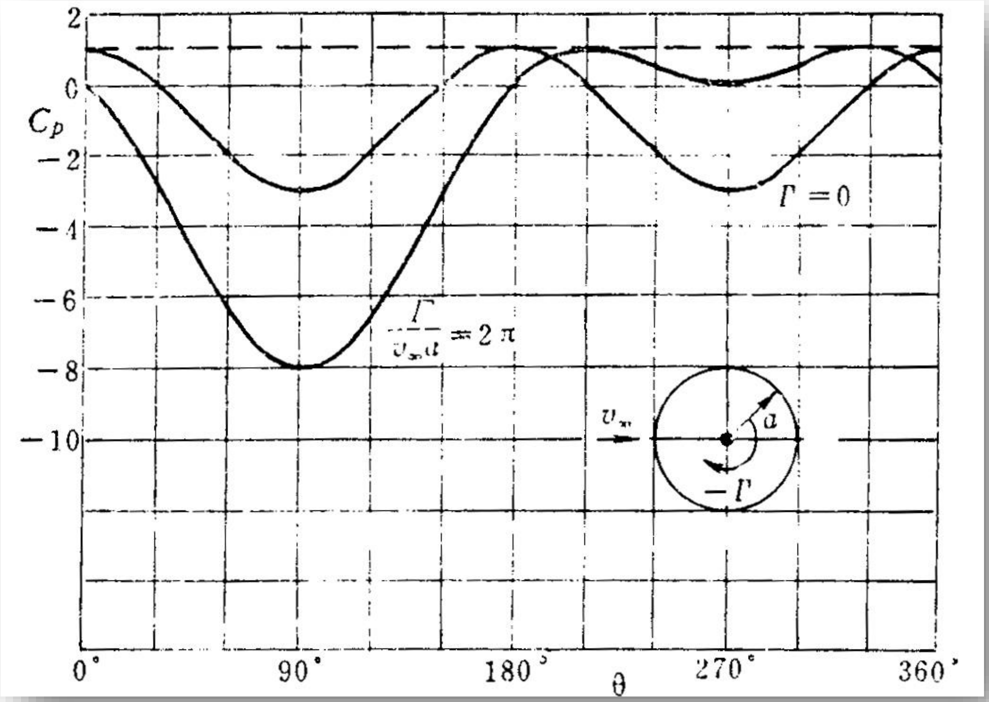
$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \qquad C_p = \left(p - p_\infty\right) / \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$$

$$C_p = 1 - \left[4\sin^2\theta + \frac{2\Gamma\sin\theta}{\pi R V_\infty} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R V_\infty}\right)^2\right]$$

圆柱面上的压力分布

圆柱面上的压力分布系数

$$C_p = 1 - \left[4\sin^2\theta + \frac{2\Gamma\sin\theta}{\pi R V_\infty} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R V_\infty} \right)^2 \right]$$



圆柱面上的升阻力系数

$$C_p = 1 - \left[4\sin^2\theta + \frac{2\Gamma\sin\theta}{\pi R V_\infty} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R V_\infty} \right)^2 \right]$$

◆圆柱单位展长的升力：

$$L' = F_l = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \int_0^{2\pi} C_p \sin\theta R d\theta = \frac{2\Gamma}{V_\infty} \cdot \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 = \rho_\infty V_\infty \Gamma$$

◆升力系数：

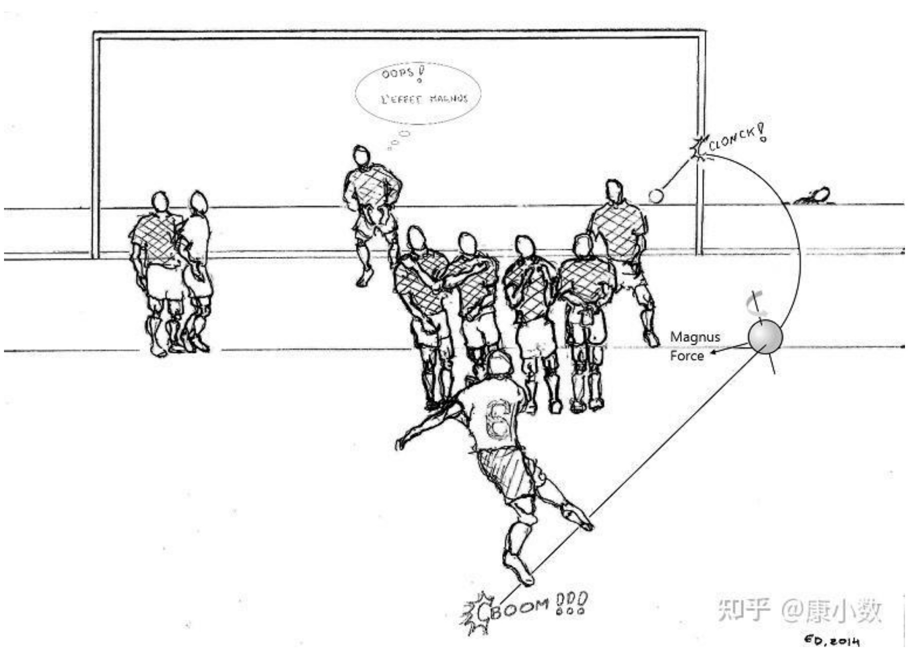
$$C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \cdot 2R} = \frac{\Gamma}{V_\infty R}$$

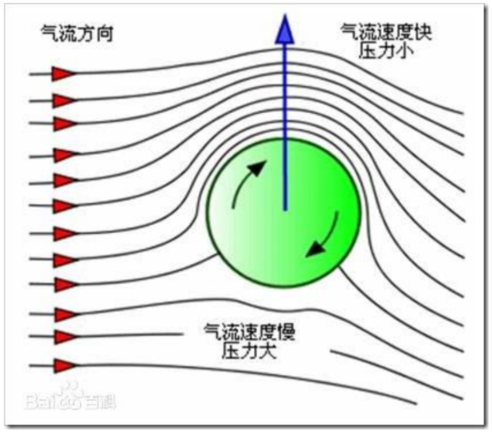
◆圆柱单位展长的阻力系数：

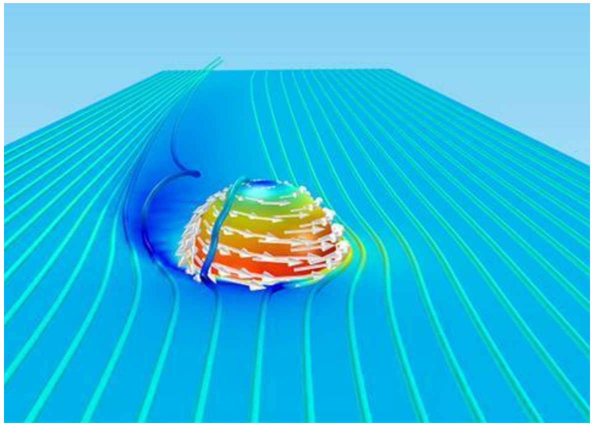
$$C_d = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} C_p \cos\theta d\theta = 0$$

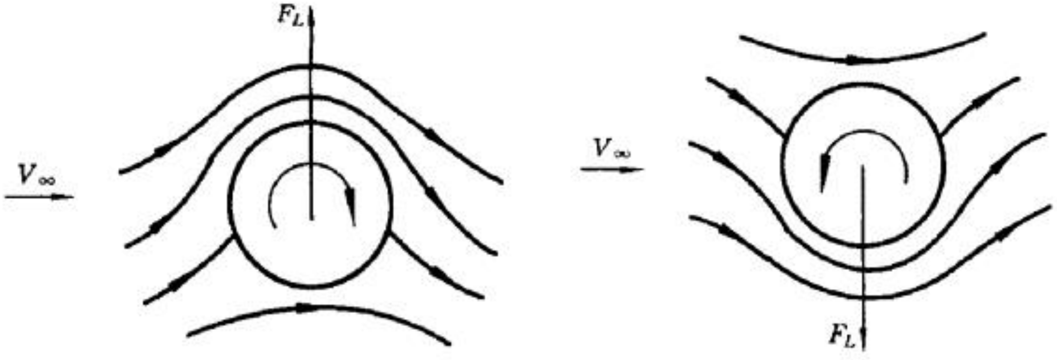
马格努斯效应（Magnus Effect）

- ◆ 乒乓球中的弧线球、足球中的香蕉球等现象
- ◆ 旋转弹丸的马格努斯效应（定轴稳定性+马格努斯力矩）

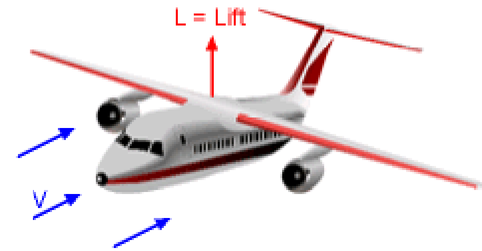






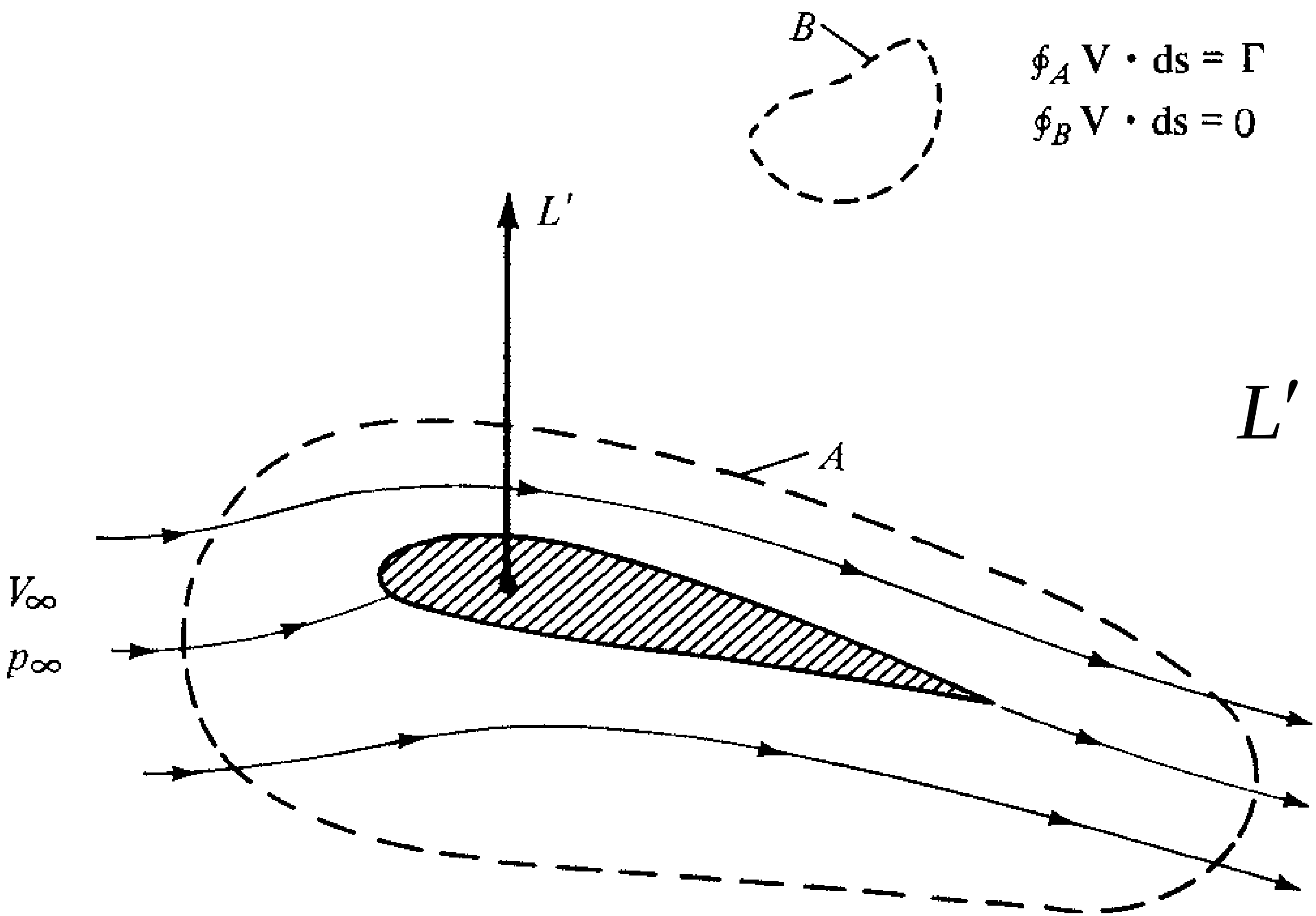


8. 库塔–茹科夫斯基定理



$$\oint_A \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} = \Gamma$$

$$\oint_B \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} = 0$$

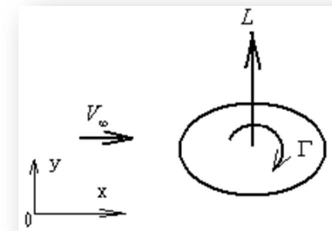


$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma$$

库塔-茹科夫斯基定理

◆ 一个封闭物体所受升力等于来流的密度乘速度再乘以环量，升力方向等于沿着气流方向逆旋涡旋转90度。

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma$$



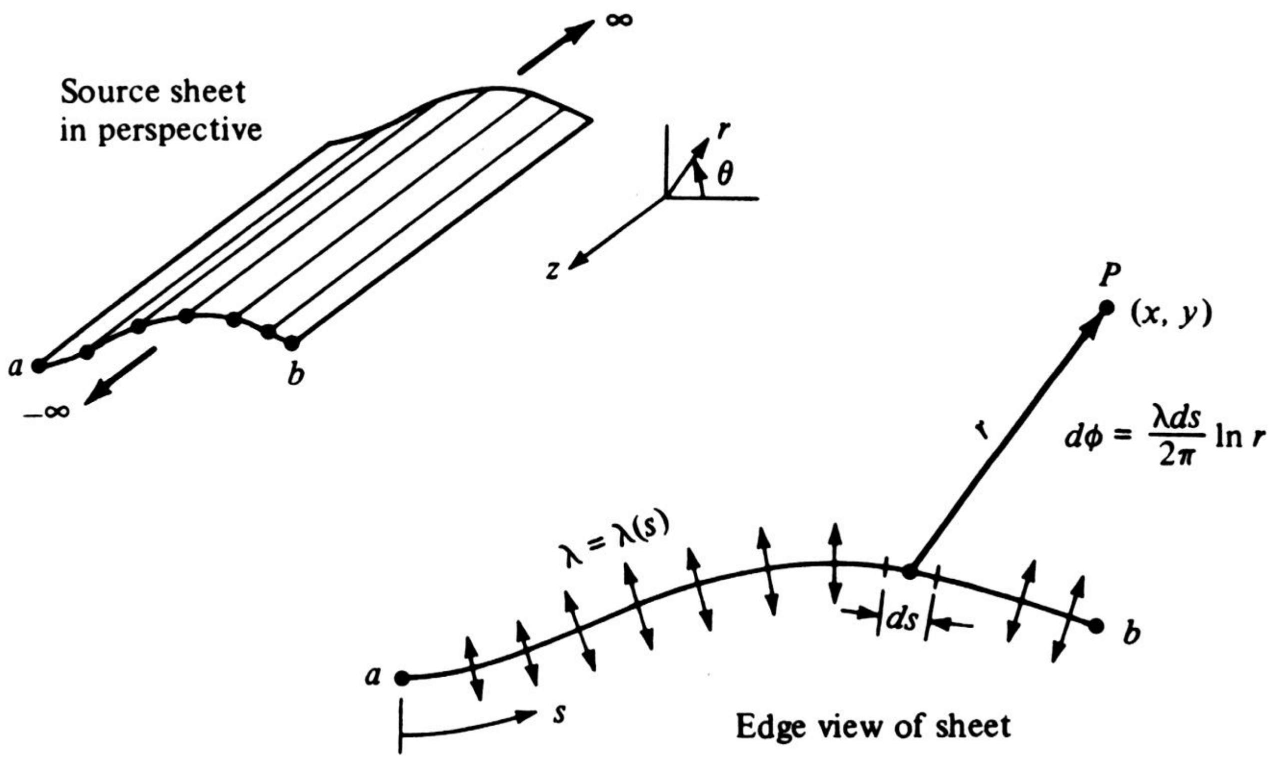
- 单位展长上的升力与环量成正比
- 不仅适合于圆柱情况，对任意截面形状的柱状体均适用

◆说明：

- 库塔-茹科夫斯基定理仅仅是表面压力分布导致的物体受力的另一种表达形式；
- 并不能说环量产生升力；
- 在不可压缩势流中，环量往往比压力分布容易求得。

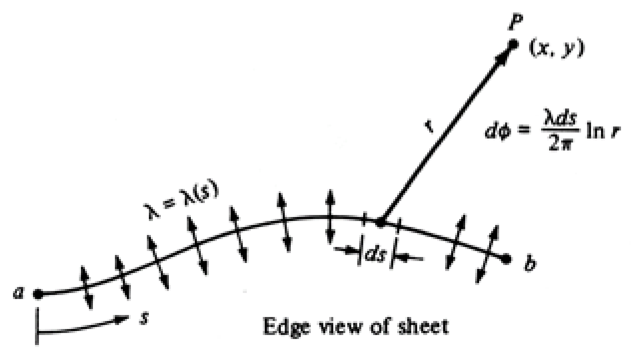
9. 面元法求解任意物体无升力绕流

◆ 源面概念



求解方法

◆若定义沿源面边缘曲线单位长度的源强度为 $\lambda(s)$ ，则源面微元ds的强度为 λds ，其对距离为r的P点的速度势的贡献为：

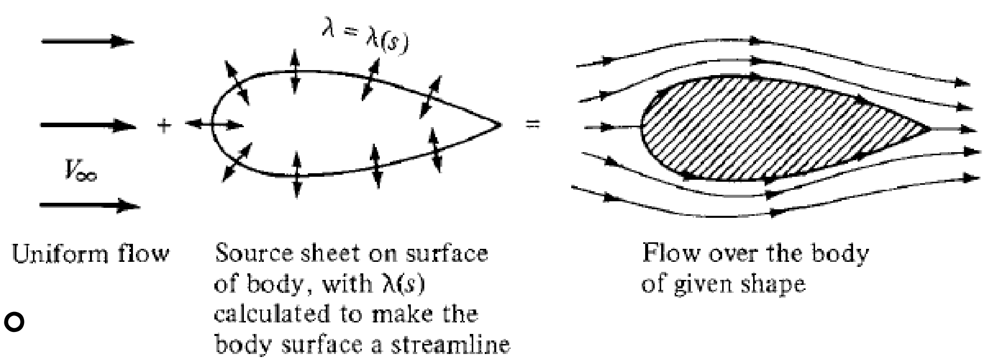


$$d\phi = \frac{\lambda ds}{2\pi}\ln r$$

◆由叠加原理，P点的速度势函数：

$$\phi(x,y) = \int_a^b \frac{\lambda ds}{2\pi}\ln r$$

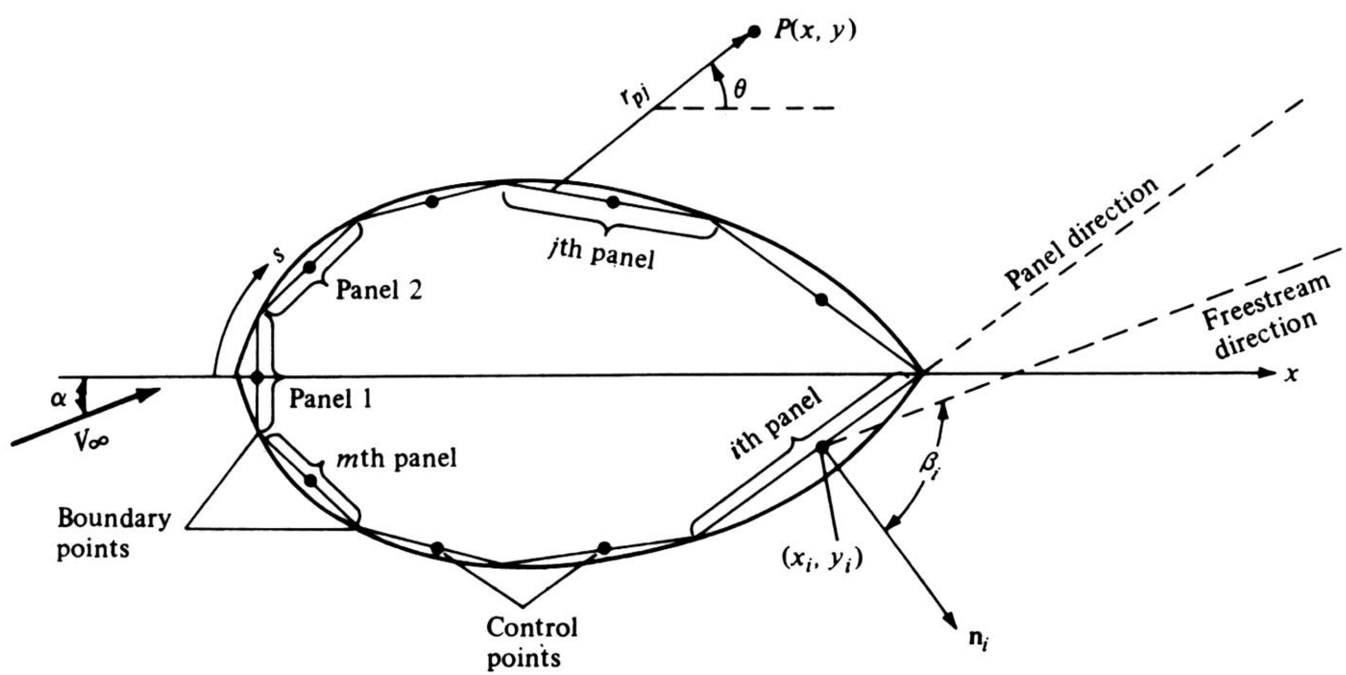
◆找到 $\lambda(s)$合适分布，使得物体表面是一条流线。



求解过程

◆ 离散

将曲线近似离散为n段直线面元，第j段单位长度的点源强度为 λ_j ，一般取面元的中点为控制点。



求解过程—速度势

◆第j个面元对P点的速度势贡献为：

$$\Delta\phi_j = \frac{\lambda_j}{2\pi}\int_a^b \ln r_{pj} ds_j$$

◆所有面元在P点的速度势的和为：

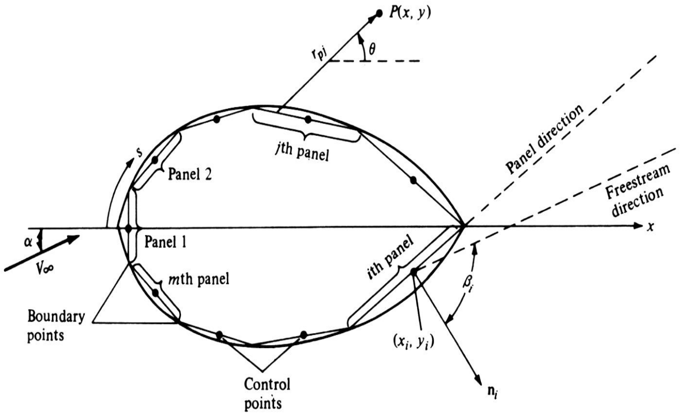
$$\phi(P) = \sum_{j=1}^{n}\Delta\phi_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{2\pi}\int_a^b \ln r_{pj} ds_j$$

其中：$r_{pj} = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$

◆则第i个面元控制点的速度势为：

$$\phi(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \ln r_{ij} ds_j$$

其中： $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$



第 i 个面元的法向速度

◆自由来流：

$$V_{\infty,n}=\mathbf{V}_\infty\cdot\mathbf{n}_i=V_\infty\cos\beta_i$$

◆所有面元在第 i 个面元控制点导致的法向速度：

$$V_n=\frac{\partial}{\partial n_i}\left[\phi(x_i,y_i)\right]$$

◆第 i 个面元的法向速度：$V_n^{\,\mathrm{i}}=\dfrac{\lambda_i}{2}$ **奇点**

$$V_n=\frac{\lambda_i}{2}+\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\ln r_{ij}\right)ds_j$$

边界条件：

$$V_{\infty,n} + V_n = 0$$

$$\boxed{\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\ln r_{ij} \right) ds_j + V_\infty \cos \beta_i = 0}$$

- 求解N个未知数的线性代数方程组
  - 计算出各个面源的强度
- 面元数目越多，求解的源强度近似值越精确

计算切向速度

◆自由来流：

$$V_{\infty,s} = V_\infty \sin \beta_i$$

◆所有面元在第i个面元控制点导致的切向速度：

$$V_s = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s} \left(\ln r_{ij} \right) ds_j$$

$$V_i = V_{\infty,s} + V_s = V_\infty \sin \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s} \left(\ln r_{ij} \right) ds_j$$

◆利用伯努利方程求解压力系数分布：

$$C_p = 1 - \left(\frac{V_i}{V_\infty} \right)^2$$

作业：

1. 从能量方程出发，推导伯努利方程。

2. 有一低速开环式亚声速风洞，其进口截面积与实验段的截面积之比为$A_1/A_2=12$。在某次实验中，使用U形管测得进口处与实验段的压力高度差为$h=10cm$，使用的液体的密度为$1.36x10^4 kg/m^3$，求此风洞实验段的空气速度。标准海平面的大气密度为$1.23kg/m^3$。

3. 分析多孔探针（5孔和7孔）流场测量技术的工作原理。

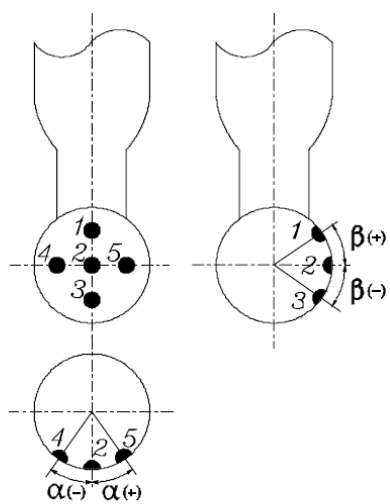
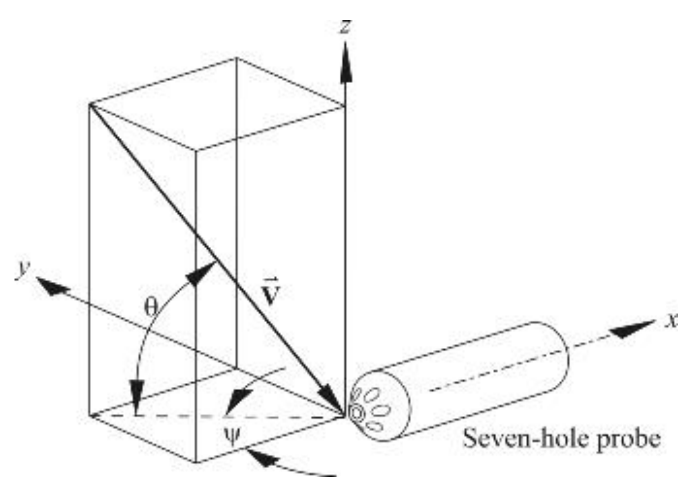
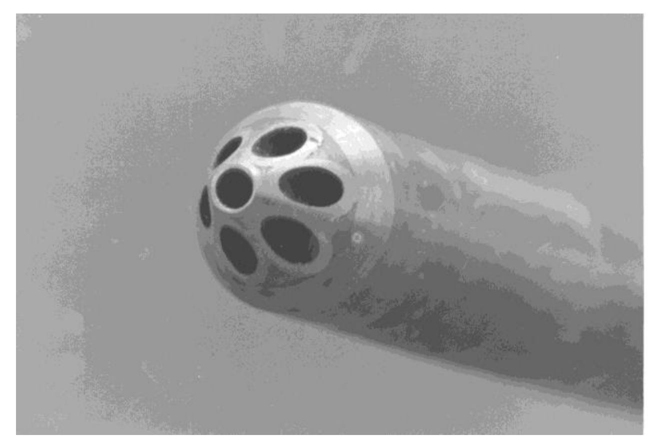


图 1 五孔探针结构示意图

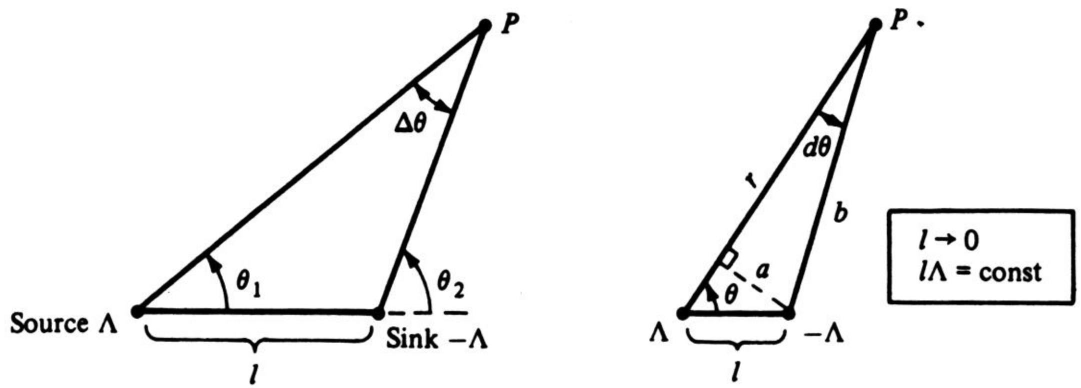




作业

4. 偶极子的速度势函数方程

$$\phi = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$



(a) Source-sink pair (b) Limiting case for a doublet

作业：

5. 将一均匀流V_∞与x轴上的相距2a的强度分布为+Q和−Q的二维点源和点汇相叠加，则这样的流动相当于均匀流线绕一个椭圆柱的流动，若已知点源和点汇的强度为Q=2πV∞，试求：(1)前后驻点的位置；（2）流函数及零流线方程。

6. 假设有一给定半径的圆柱的有升力绕流，并同时给定其环量。现将自由来流速度V_∞变成原流速的2倍，即$2V_\infty$，保持环量Γ不变，那么原流线图的形状会不会发生变化？为什么？

7. 证明速度分量 $u=U\left[1-\frac{ay}{x^2+y^2}+\frac{b^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right],v=U\left[\frac{ax}{x^2+y^2}+\frac{2b^2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]$

代表一个流体运动可能的速度分布，且是无旋的。进一步，说明它是由哪几种基本流动合成的，常数U、a、b代表什么物理意义？

作业

8. 利用源面源法，求出圆柱绕流的压力系数分布。

其中，圆柱面近似为图中所示的正八边形