



第5章 绕有限翼展机翼不可压缩流动

5.1 引言

第4章讨论分析了翼型的气动特性,而翼型的气动特性与各剖面形状相同的无限展长机翼的气动特性是一样的,即无限展长机翼绕流流场为平行平面场,垂直于翼展方向各剖面的流场完全一样。然而,所有真实飞机的机翼都是有限展长的,由于翼梢的存在,机翼沿展向不同位置处的流动就不可能一样了。本章的目的就是应用已经掌握的翼型气动特性知识分析有限展长机翼的气动特性。

现将按照图5.1给出的本章内容简介展开讨论。

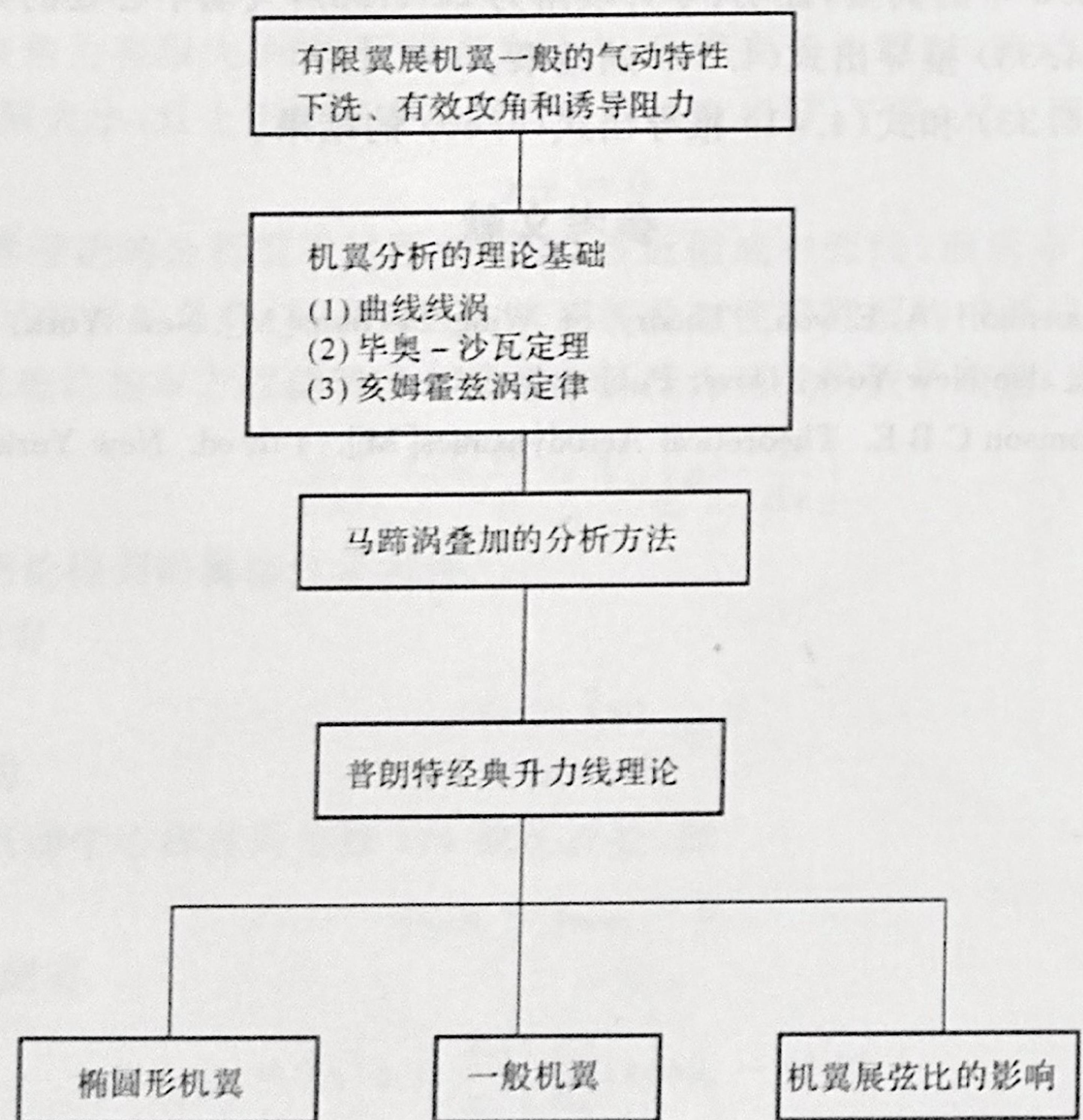


图5.1 第5章的内容简介

在这一章里,要对气动参数的符号进行说明。在前一章分析二维物体时,物体单位展长上

受到的升力、阻力和力矩分别用带有撇号的大写字母注明,即 L', D' 和 M' ;对应的升力系数、阻力系数和力矩系数分别用小写字母表示,即 c_L, c_d 和 c_m 。而三维物体(如有限翼)上作用的升力、阻力和力矩分别用不带撇号的大写字母表示,即 L, D 和 M ;对应的升力系数、阻力系数和力矩系数分别用大写字母表示,即 C_L, C_D 和 C_M 。

要特别注意,实际作用在亚声速机翼上的总阻力是由诱导阻力 D_i 、表面摩擦阻力 D_f 及流动分离产生的压差阻力 D_p 构成的。后二者取决于黏性的影响,这将在第14~18章中加以讨论。由黏性引起的阻力又称为型阻,图4.6给出的是NACA2412翼型型阻系数 c_d 。当迎角不大时,对有限翼展机翼及翼型来说,型阻系数基本相同。所以,型阻系数定义为

$$c_d = \frac{D_f + D_p}{q_\infty S} \quad (5.1)$$

诱导阻力系数(见5.2节)定义为

$$C_{D_i} = \frac{D_i}{q_\infty S} \quad (5.2)$$

有限翼的阻力系数为

$$C_D = c_d + C_{D_i} \quad (5.3)$$

在式(5.3)中, c_d 值一般从翼型数据中得到,如图4.6所示。 C_{D_i} 的值可从本章有限翼理论中得到。需要指出的是,本章的中心目的是得到诱导阻力的表达式并研究它与有限翼相关设计参数之间的关系(见参考文献[2]中的第5章对有限翼特性的讨论)。

5.2 下洗和诱导阻力的概念

仔细观察一下机翼绕流的特点,图5.2所示是低速烟风洞中显示的绕机翼流动的流线。在机翼产生升力的情况下,机翼翼尖会拖出两股旋涡,这两股旋涡也可以用图5.3的草图形式表达。而产生这两股翼尖旋涡的原因是因为机翼的绕流是三维流动,存在沿机翼展向的流动速度分量,而这在二维翼型绕流中是不存在的。为什么有限翼展机翼的气动特性与翼型的气动特性不同呢?确实,翼型就是机翼的剖面,人们都会以为机翼会表现出与翼型同样的特性。但是,正如在第4章中提到的,翼型的绕流是二维的。而有限展长的机翼是三维的物体,其绕流也是三维的,也就是说沿机翼的展向会有流动分量。图5.2可以清楚地表明这一点,图5.4给出了有限机翼的上视图和前视图。机翼产生升力的原因是高压力作用在下表面,低压力作用在上表面,上、下表面的压力差对机翼产生向上的升力。同时,上、下表面的压力差会使翼梢附近的流体由下向上产生绕过翼梢的卷动,在图5.4(b)中,可以看到这一绕过翼梢的流动。这样在机翼上表面通常会出现由翼梢向翼根的展向流动,使流过上翼面的流线向翼根偏斜;同样地,在机翼下表面会出现由翼根向翼梢的展向流动,使流过下翼面的流线向翼梢偏斜。很显然,绕有限展长机翼的流动是三维的,机翼的气动特性与其剖面的气动特性不同也就是可以理解的了。

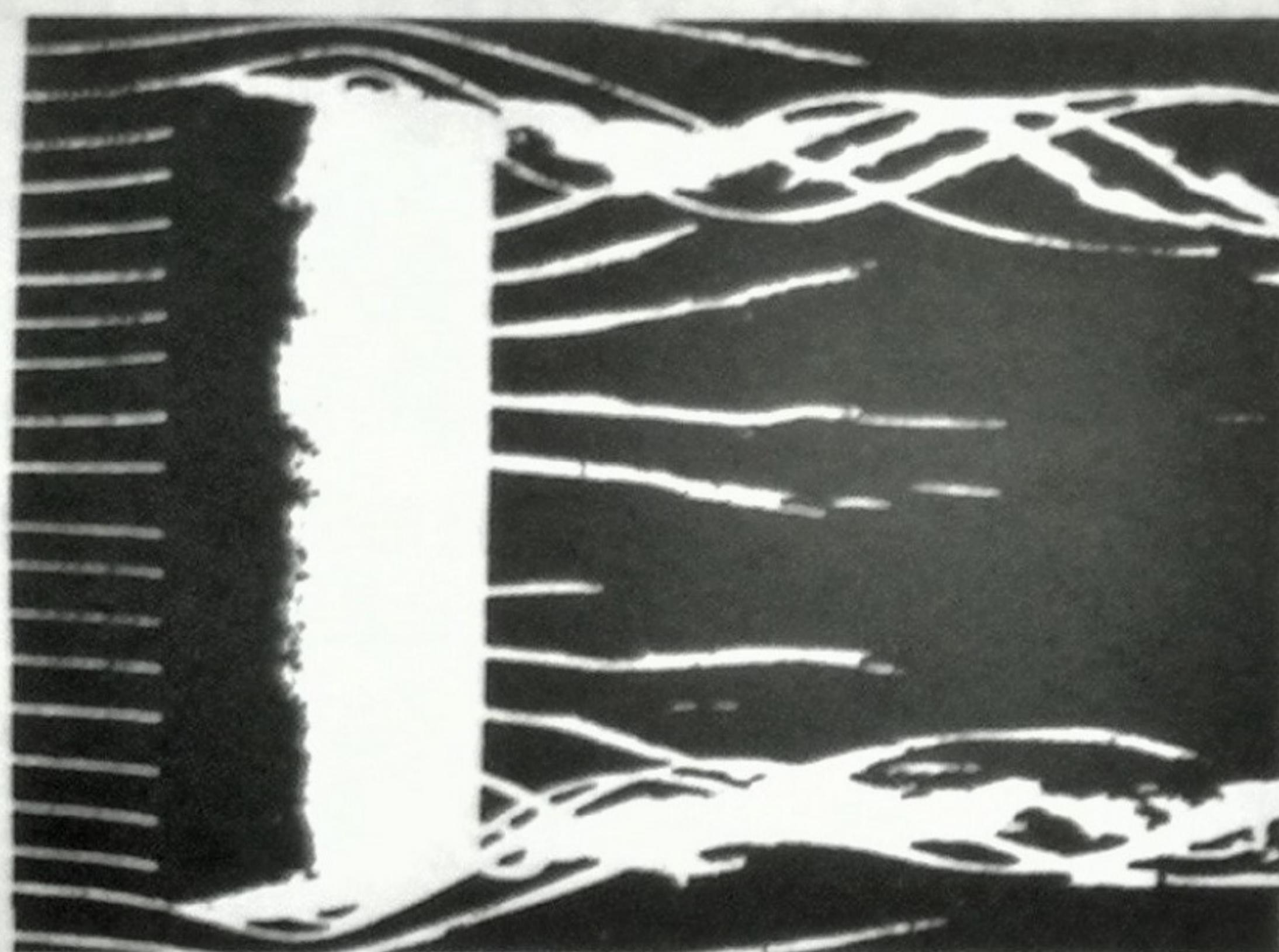


图 5.2 烟风洞中, 绕机翼的流线

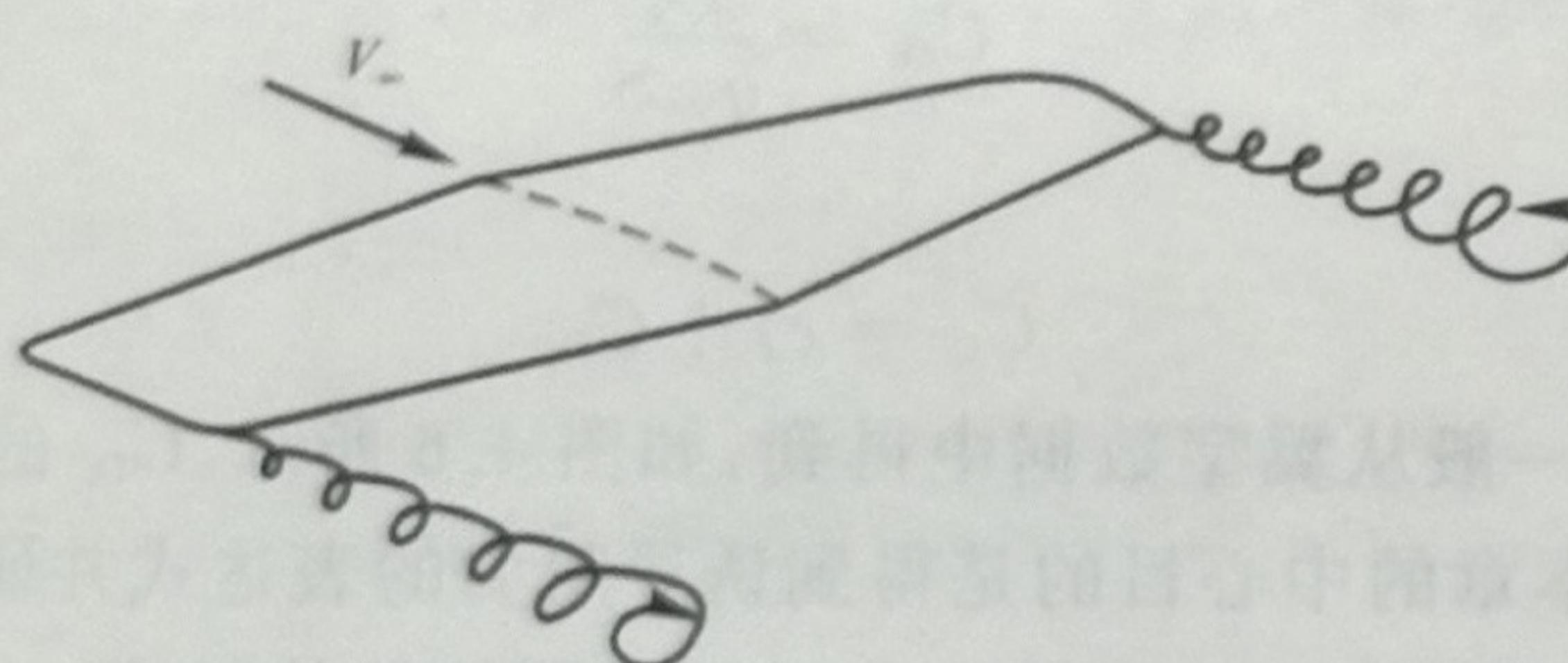


图 5.3 翼尖旋涡示意图

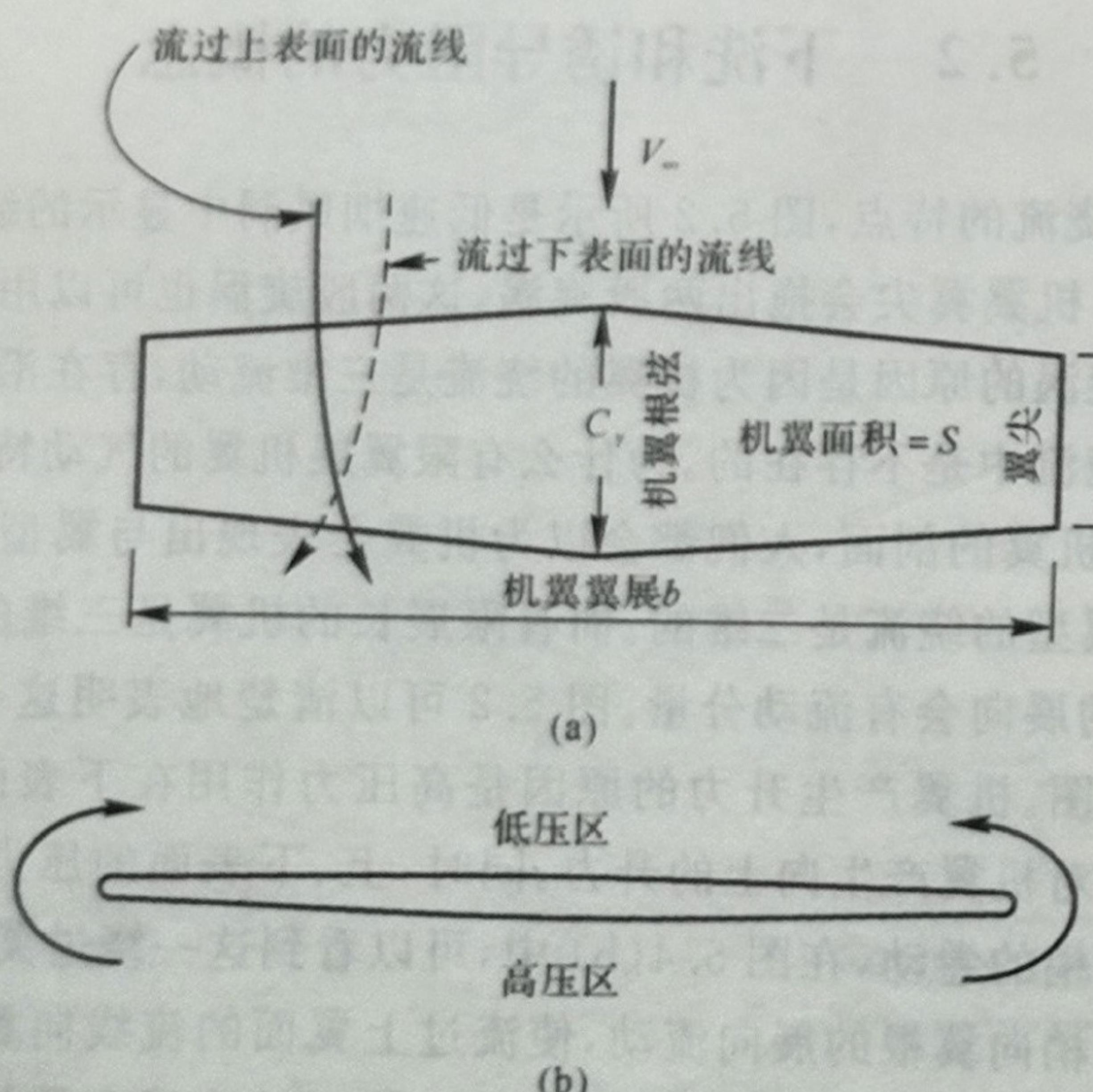


图 5.4 机翼绕流示意图

(a) 上视图; (b) 前视图

翼梢附近的流体在绕翼梢卷起的同时, 还要随着流向下游运动, 形成了像是由翼梢拖出的有旋流动, 即在每个翼梢产生一个尾旋涡, 如图 5.2、图 5.3 所示。翼梢旋涡通常可看做是由有限翼向下游拖出的旋涡(对于像波音 747 那样的大型飞机, 其下游尾涡的强度足以使紧随其后飞行的小飞机失去控制)。机翼的翼梢旋涡会在机翼周围产生一个小的向下的诱导速度。这一由尾旋涡诱导出一个很小的向下的速度分量, 我们称之为下洗速度, 用 w 表示。下洗速度与来流速度叠加后, 在机翼的各剖面附近形成了相对下偏的当地相对速度, 如图 5.5 所示。

现在, 我们对图 5.5 所示的几何关系做一个细致的分析: 定义翼型弦线与来流 V_∞ 的夹角 α 为迎角, 也叫几何迎角; 当地相对来流的方向定义为来流 V_∞ 下偏一个角度 α_i 后所得的方向, 并称 α_i 为下洗角。下洗的存在, 以及下洗使得相对来流向下偏转的效应, 对当地翼型剖面具有以下两个重要的影响:

(1) 当地翼型剖面真正感受到的迎角是翼型弦线与当地相对来流之间的夹角 α_{eff} , 定义 α_{eff} 为有效迎角, 如图 5.5 所示。所以, 尽管对于机翼来说, 几何迎角为 α , 但是当地翼型剖面所感受到的是一个较小的迎角 α_{eff} , 即有效迎角。由图 5.5 可以得

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i \quad (5.1)$$

(2) 各翼型剖面的当地升力方向与当地相对来流方向垂直, 即升力方向在与来流垂直向上的基础上又向后偏转了一个 α_i 角, 如图 5.5 所示。所以, 当地升力矢量在来流方向上会产生一个分量 D_i , 这个分量就是由于下洗存在而产生的阻力, 称为诱导阻力。

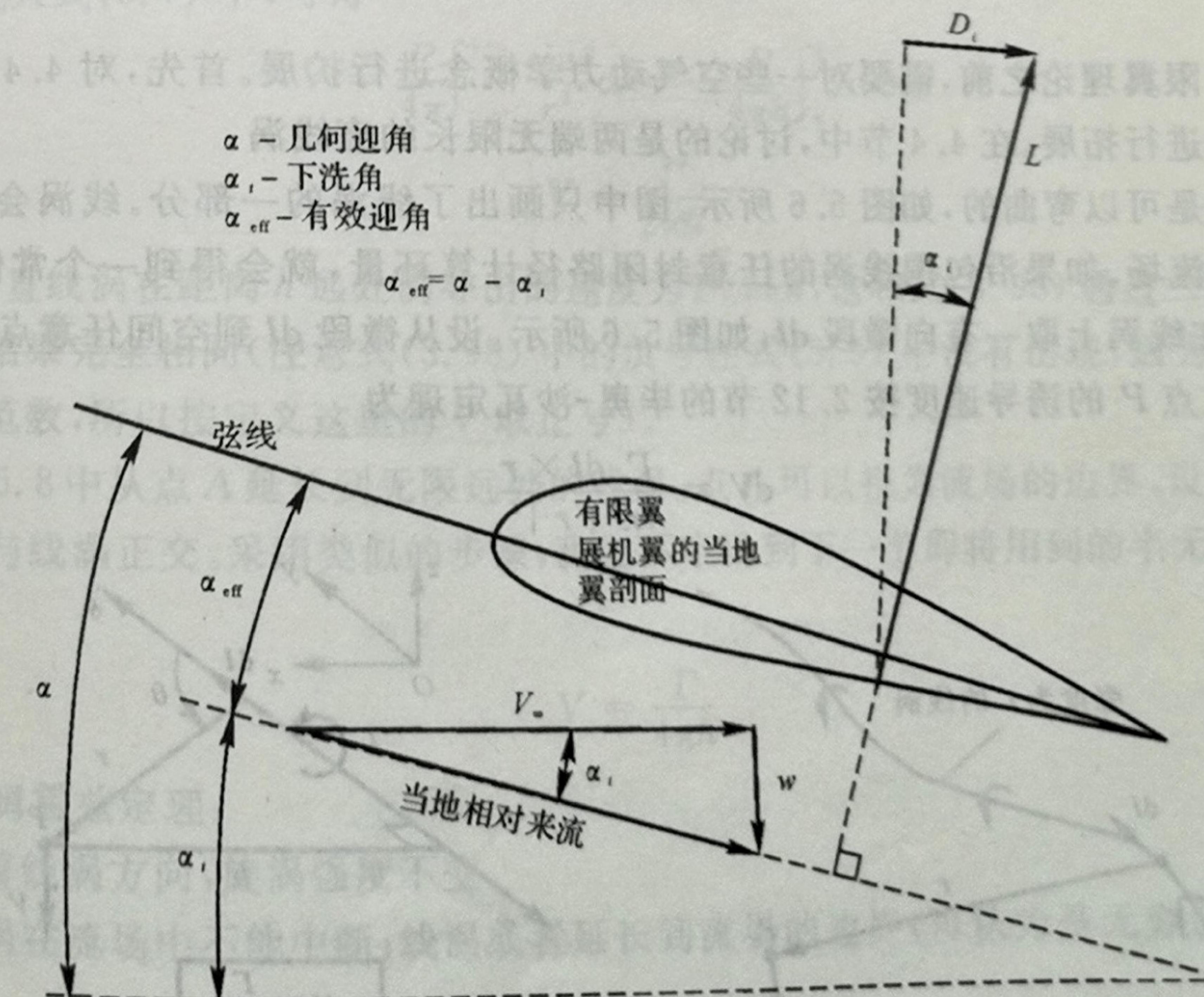


图 5.5 下洗效应对有限翼展机翼当地剖面流动的影响



通过上面的分析,可以发现,作用在有限展长机翼上的下洗减小了机翼每个翼型剖面所感受到的迎角,并且产生了一个阻力分量——诱导阻力 D_i 。注意,在这里讨论的仍然是不可压缩无黏流动问题,流动中不存在摩擦阻力或流动分离现象。但对于这样的流动,机翼上也会出现一个有限大的阻力——诱导阻力。

在图 5.5 中,当地升力矢量的后倾可以解释诱导阻力的产生。下面两种说法也可以解释诱导阻力的产生:

(1) 如图 5.2 和图 5.3 所示,翼梢旋涡改变了有限翼展机翼表面的压力分布,使得机翼在来流方向上的压力不能相互抵消或平衡,于是产生了阻力。从这一角度出发,可以将诱导阻力视为“压差阻力”。

(2) 翼梢旋涡具有很大的平动和转动动能。翼梢旋涡不断地向下游运动,其能量也在不断地增加。由于发动机是飞机唯一的动力来源,所以这一能量的补充只能由发动机提供。因为翼梢旋涡的能量没有任何可利用之处,所以由发动机提供的这部分能量只能白白地浪费掉。实际上,这部分由发动机转移到翼梢旋涡上的额外能量,正是发动机提供的克服诱导阻力的动力。

显然,由这一节的讨论可知,具有三维效应的有限展长机翼,其气动特性与其翼剖面的气动特性是不同的。这就需要发展能够分析有限翼展机翼气动特性的理论。

5.3 线涡及其诱导速度

在建立有限翼理论之前,需要对一些空气动力学概念进行扩展。首先,对 4.4 节中介绍的直线涡的概念进行拓展。在 4.4 节中,讨论的是两端无限长的直线涡。

通常线涡是可以弯曲的,如图 5.6 所示。图中只画出了线涡的一部分。线涡会在周围的空间中产生诱导流场。如果沿包围线涡的任意封闭路径计算环量,就会得到一个常值 Γ ,定义为线涡的强度。在线涡上取一有向微段 dl ,如图 5.6 所示。设从微段 dl 到空间任意点 P 的矢径为 r ,则微段 dl 在点 P 的诱导速度按 2.12 节的毕奥-沙瓦定理为

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \times r}{|r|^3} \quad (5.5)$$

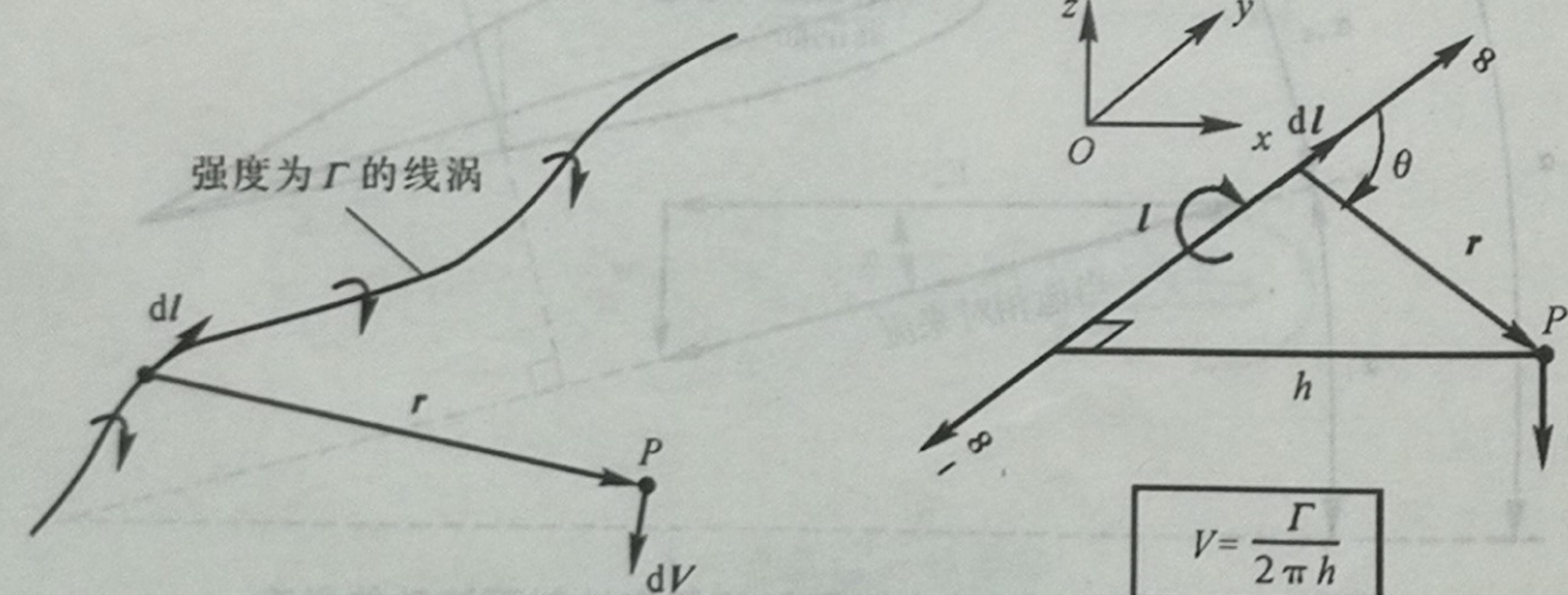


图 5.6 线涡的诱导速度

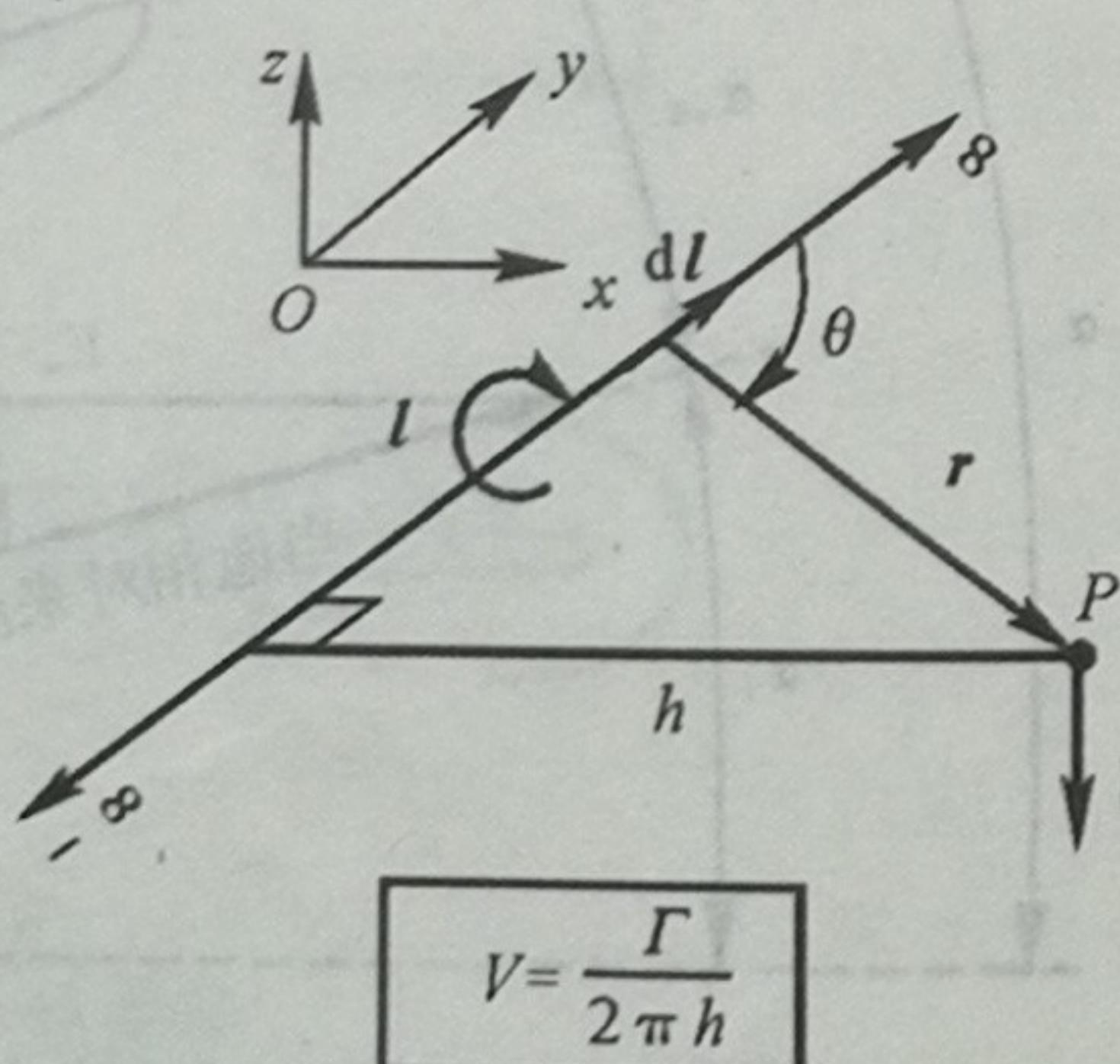


图 5.7 无限长直线涡的诱导速度

它是无黏不可压缩流动中最重要的基本关系式之一。

对所有实际应用,线涡及其诱导的流场都只是不可压缩无黏流动的解,即满足拉普拉斯方程,但并不具有实际意义。但是,当把许多线涡与均匀来流叠加在一起时,便可合成出有实际意义的流动,绕有限展长机翼的流动就是线涡与均匀来流叠加的例子。

我们把毕奥-沙瓦定理应用于无限长直线涡。设涡的强度为 Γ ,则点 P 处由无限个微段 dl 引起的诱导速度为

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{|dl \times r|}{r^3} \quad (5.6)$$

根据矢量外积的定义,上式可以进一步写成如下形式:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{r^2} dl \quad (5.7)$$

在图 5.7 中,设 h 为 P 到线涡的距离,由几何关系,得

$$r = \frac{h}{\sin\theta} \quad (5.8a)$$

$$l = \frac{h}{\tan\theta} \quad (5.8b)$$

$$dl = -\frac{h}{\sin^2\theta} d\theta \quad (5.8c)$$

把式(5.8)代入式(5.7)中,可得

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{r^2} dl = -\frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\pi}^{0} \sin\theta d\theta$$

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h} \quad (5.9)$$

于是,无限长直线涡在距离 h 远处诱导出的速度为 $\Gamma/2\pi h$,这和式(3.98)通过二维流场中点涡理论得到的结果完全相同(注意式(3.98)中的负号在式(5.9)中没有出现,因为式(5.9)中的 V 是速度的范数,所以按定义这里的 V 取正号)。

观察图 5.8 中从点 A 延长到无限远处的线涡。点 A 可以视为流场的边界,设空间一点 P 与点 A 的连线与线涡正交。采用类似的步骤,我们不难得到下一节即将用到的半无限长线涡诱导速度公式

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h} \quad (5.10)$$

回顾亥姆霍兹定理:

- (1) 沿着线涡方向,旋涡强度不变。
- (2) 线涡在流场中不能中断;线涡或者延长到流场的边界(可认为是无穷远处)或者形成闭合回路。

现在介绍一下有限翼的翼载分布的概念。设展向一点处,坐标为 y_1 ,弦长为 c ,对应的几何

迎角为 α ,且翼型型号给定,单位展长上的升力为 $L'(y_1)$ 。下面考虑展向另一点处,设坐标为 y_2 ,弦长和迎角可能变化(大多数机翼是变弦长的,简单直机翼例外)。而且,许多机翼是有扭转的,所以不同位置处有不同的迎角——这种情况叫几何扭转。如果翼尖迎角小于翼根迎角,就称机翼外洗;反之称为内洗。许多现代飞机机翼展向有不同的翼型、不同的零升迎角——这种情况叫做气动扭转)。所以,机翼不同截面上的升力一般是不同的,而是截面坐标的函数,即 $L' = L'(y)$;相应的环量可以写成 $\Gamma(y) = L'(y)/(\rho_\infty V_\infty)$ 。注意图5.9中的载荷分布,在翼尖处为0。这是因为在两个翼尖处上、下表面压力差为零,在翼尖处没有提供任何升力。载荷分布 $L'(y)$ (或环量分布 $\Gamma(y)$)的计算是有限翼展机翼理论的核心问题,将在下一节中论述。

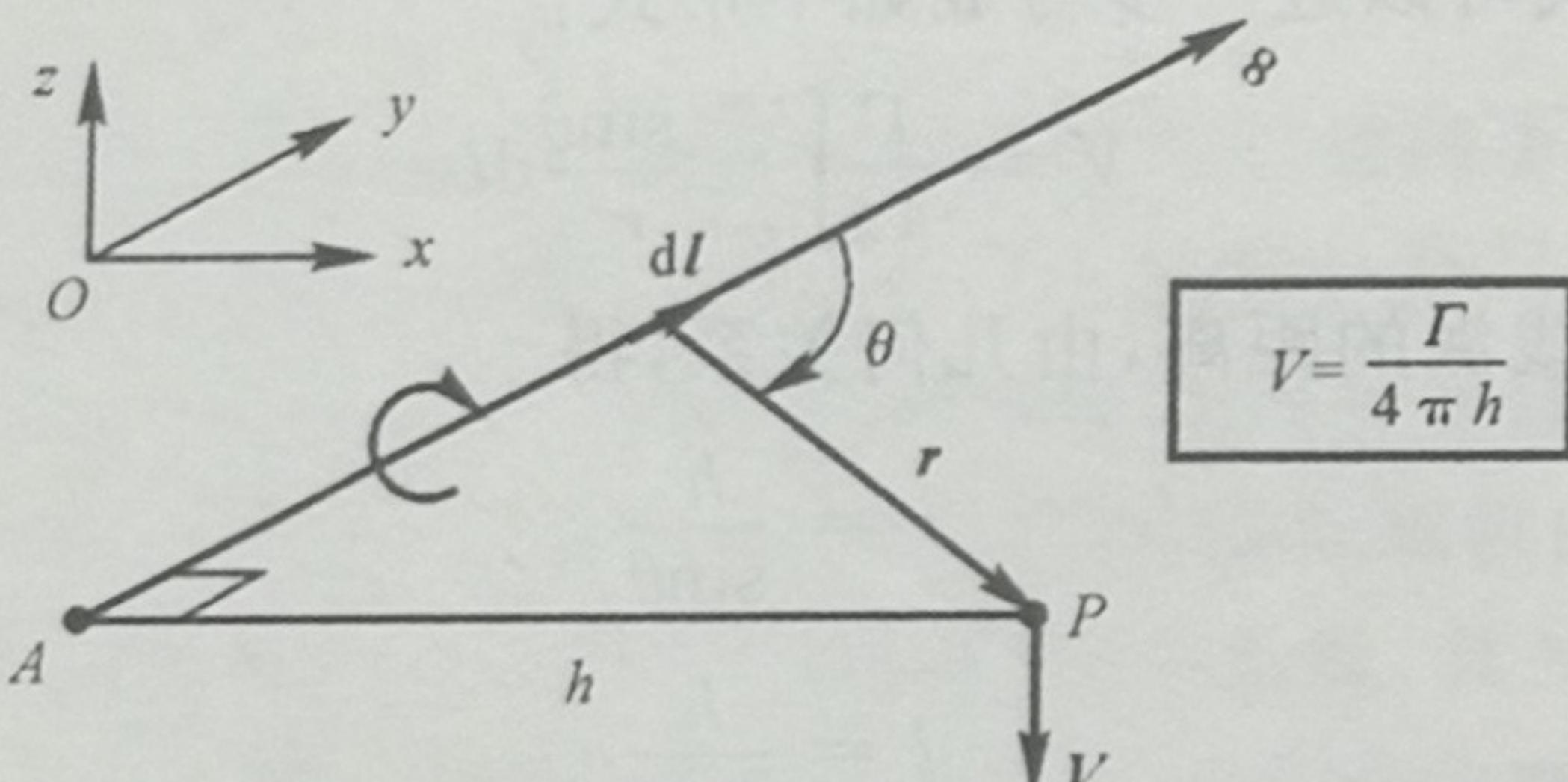


图 5.8 半无限长线涡的诱导速度

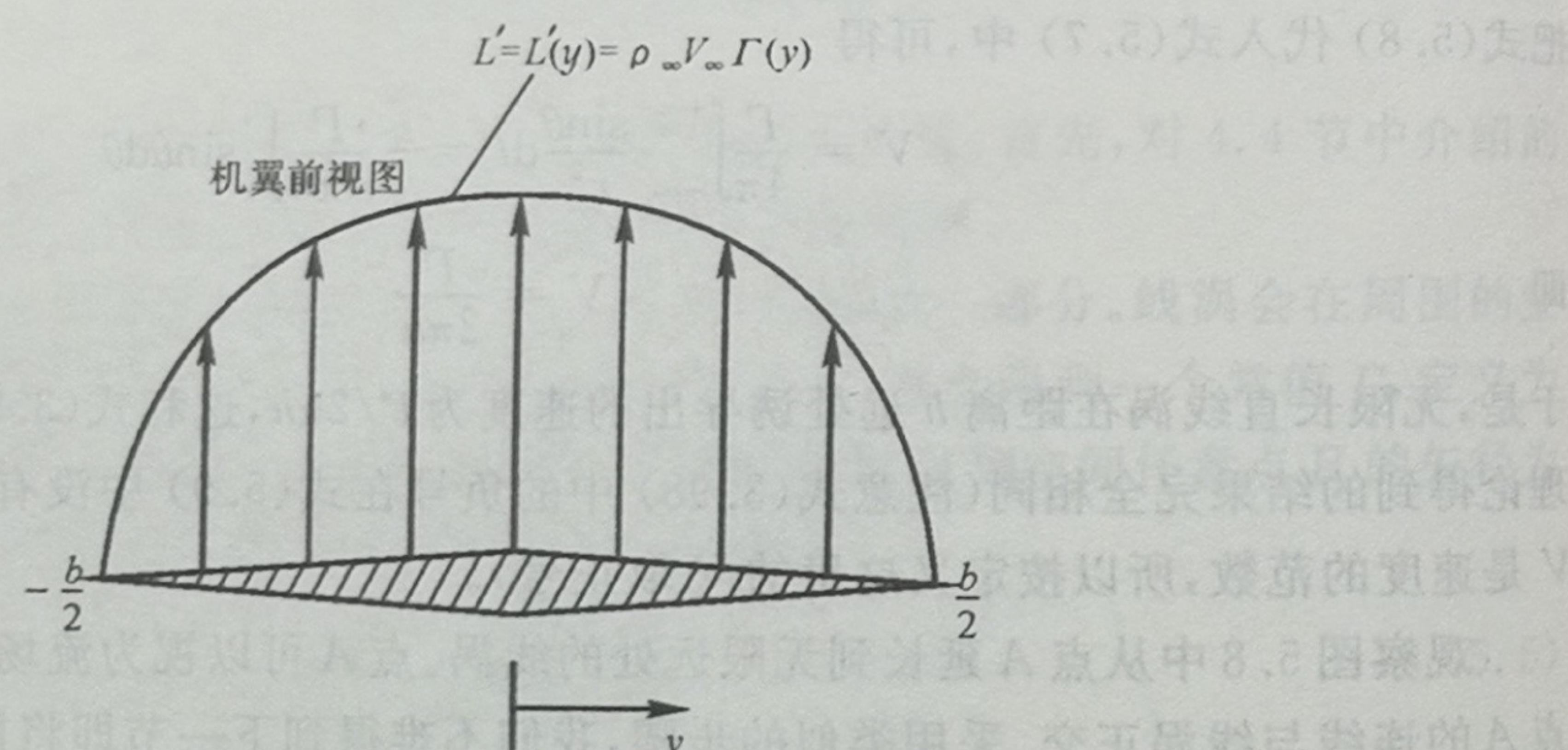


图 5.9 机翼展向载荷分布示意图

5.4 经典升力线理论

20世纪初,德国空气动力学家普朗特及其哥廷根大学的同事第一次提出了能预测有限翼展机翼空气动力特性的理论。这一理论奠定了现代机翼理论的基础。

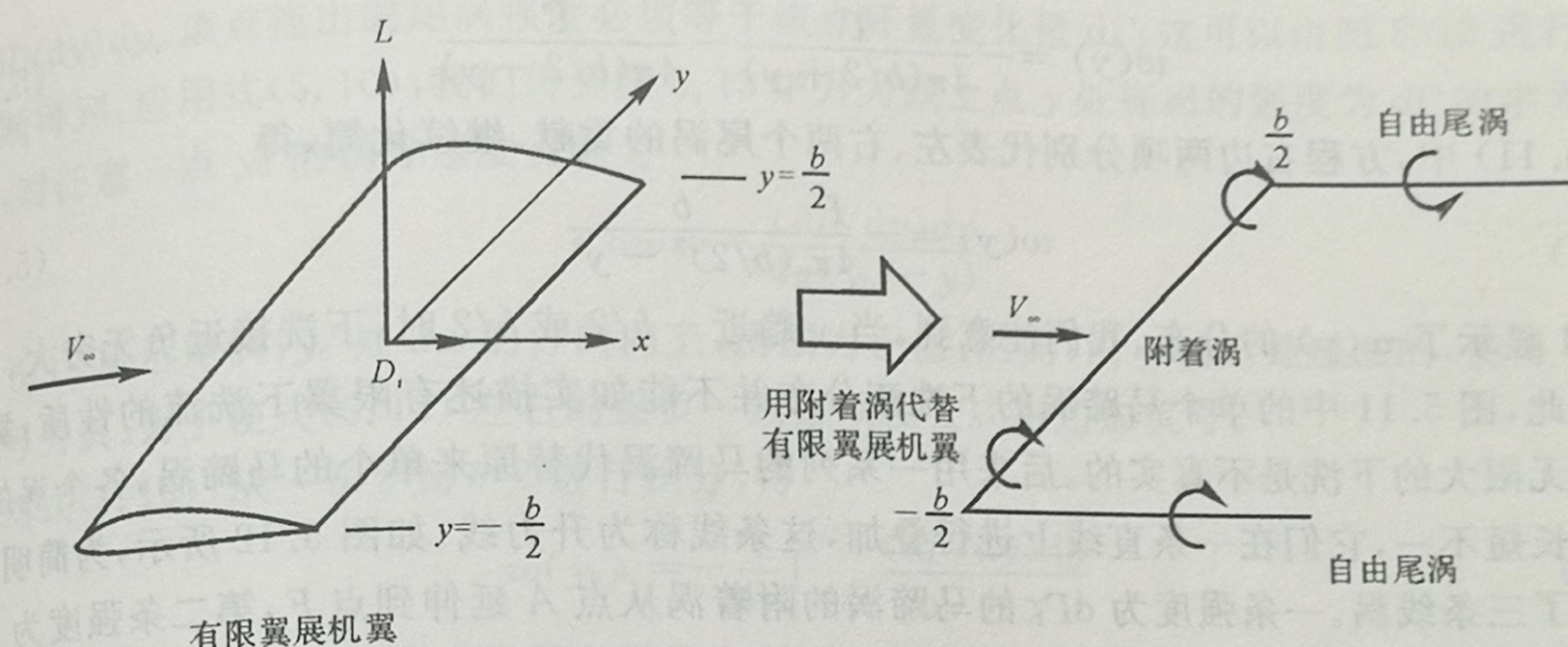


图 5.10 马蹄涡

设流场中有一个强度为 Γ 的马蹄形状的线涡,根据库塔-儒可夫斯基的定理, $L = \rho_\infty V_\infty \Gamma$,它将产生升力。类比随流体微团一起在流场中运动的自由涡,我们用线涡来代替展长为 b 的有限翼展机翼。但是,根据亥姆霍兹理论,线涡不能在流场中消失,所以假定线涡在翼尖处延伸到无穷远处,如图5.10所示。这种形状的线涡称为马蹄涡。

图5.11展示了一个单独的马蹄涡。附着涡(与 y 轴重合)沿其本身没有诱导速度;但是两个尾涡沿附着涡方向都诱导出了速度,而且方向都是沿着下洗方向。根据图示坐标系,下洗速度应该为负值,如果与 z 轴正向相同,则 w 符号为正,否则为负。

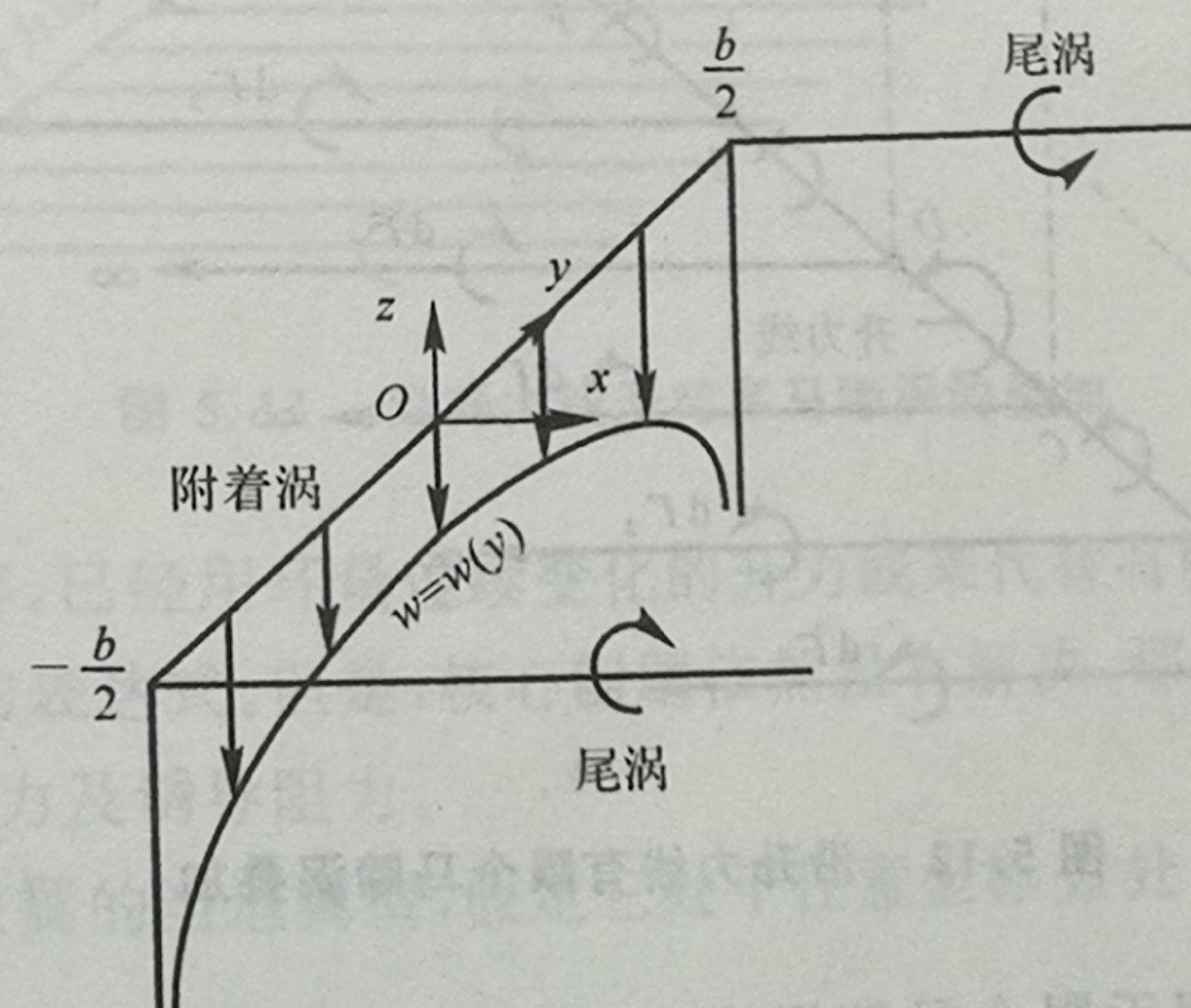


图 5.11 单个马蹄涡沿 y 轴引起的下洗分布

根据式(5.10),如果原点在附着涡中点处,那么附着涡上坐标为 y 点处由尾涡引发的下洗速度为

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi(b/2+y)} - \frac{\Gamma}{4\pi(b/2-y)} \quad (5.11)$$

在式(5.11)中,方程右边两项分别代表左、右两个尾涡的贡献。继续化简,得

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{(b/2)^2 - y^2} \quad (5.12)$$

图 5.11 显示了 $w(y)$ 的分布。我们注意到,当 y 趋近 $-b/2$ 或 $b/2$ 时,下洗接近负无穷大。

因此,图 5.11 中的单个马蹄涡的下洗流分布并不能如实描述有限翼下洗流的性质;翼尖处接近无限大的下洗是不真实的。后来用一系列的马蹄涡代替原来单个的马蹄涡,各个涡的附着线涡长短不一,它们在一条直线上进行叠加,这条线称为升力线。如图 5.12 所示,为简明计,只列出了三条线涡。一条强度为 $d\Gamma_1$ 的马蹄涡的附着涡从点 A 延伸到点 F,第二条强度为 $d\Gamma_2$ 的马蹄涡的附着涡从点 B 延伸到点 E,最后一条马蹄涡的附着涡从点 C 延伸到点 F。结果,沿升力线方向环量是变化的。沿 AB 和 EF 只有一条涡,环量为 $d\Gamma_1$;但是沿 BC 和 DE 是两条线涡的叠加,环量为 $d\Gamma_1 + d\Gamma_2$;沿 CD 段三条涡叠加在一起,环量为 $d\Gamma_1 + d\Gamma_2 + d\Gamma_3$ 。在图 5.12 中,环量变化是以直方图形式加以描述的;同时, xOy 平面内出现了多条尾涡,而不是图 5.11 中仅有的两条。图 5.12 中的尾涡是成对出现的,每一对对应一条马蹄涡。我们发现,沿着升力线的方向每一个尾涡的强度等于该点处环量的变化量。

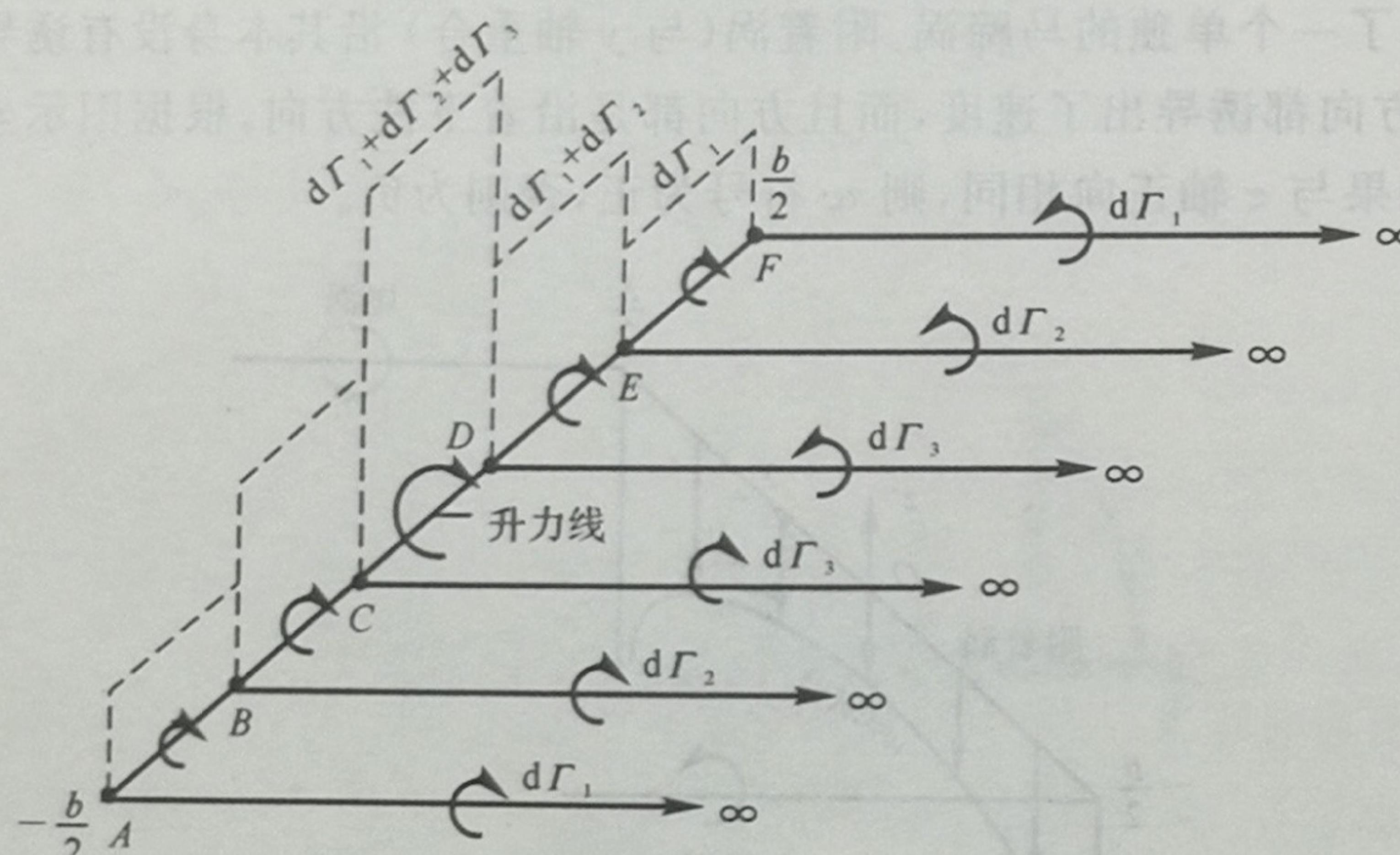


图 5.12 沿升力线有限个马蹄涡叠加

把图 5.12 拓展一下,用无限个马蹄涡来合成升力线,每一条的强度视为一个强度微元 $d\Gamma$,如图 5.13 所示。原点处的环量记为 Γ_0 。在图中我们发现,沿升力线方向,环量成为连续变化的了。这样图 5.12 就变为如图 5.13 所示的连续区域了。假设这个尾涡面与来流方向平行,它们在翼展内的强度总和为 0,因为尾涡成对出现,且方向相反。

在升力线上取一段微元 dy ,设坐标为 y ,如图 5.13 所示,该点环量为 $\Gamma(y)$,环量变化为 $d\Gamma$

$= (d\Gamma/dy)dy$ 。该点拖出的尾涡强度必须等于该点环量变化量 $d\Gamma$,这可以由图 5.12 进行简单的推断得到。应用式(5.10),我们得到图 5.13 中升力线上点 y_0 处拖出的强度为 $d\Gamma$ 的半无限长尾涡,对任意一点 y_0 的诱导速度贡献为

$$dw = -\frac{(d\Gamma/dy)dy}{4\pi(y_0 - y)} \quad (5.13)$$

按图 5.13 所示尾涡, y_0 处 dw 的方向向上,所以为正值;然而,沿 y 轴 Γ 是递减的,使得 $d\Gamma/dy$ 的符号为负。为了使式(5.13)左右的正负一致必须在公式右边加负号。

对式(5.13),从 $-b/2$ 到 $b/2$ 进行积分,得

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_0 - y} \quad (5.14)$$

式(5.14)的意义在于,它给出了所有尾涡在任意一点处引起的下洗速度的值(注意:虽然规定下洗流指向 y 轴负方向,但是其正负依然是由坐标轴的方向来决定)。

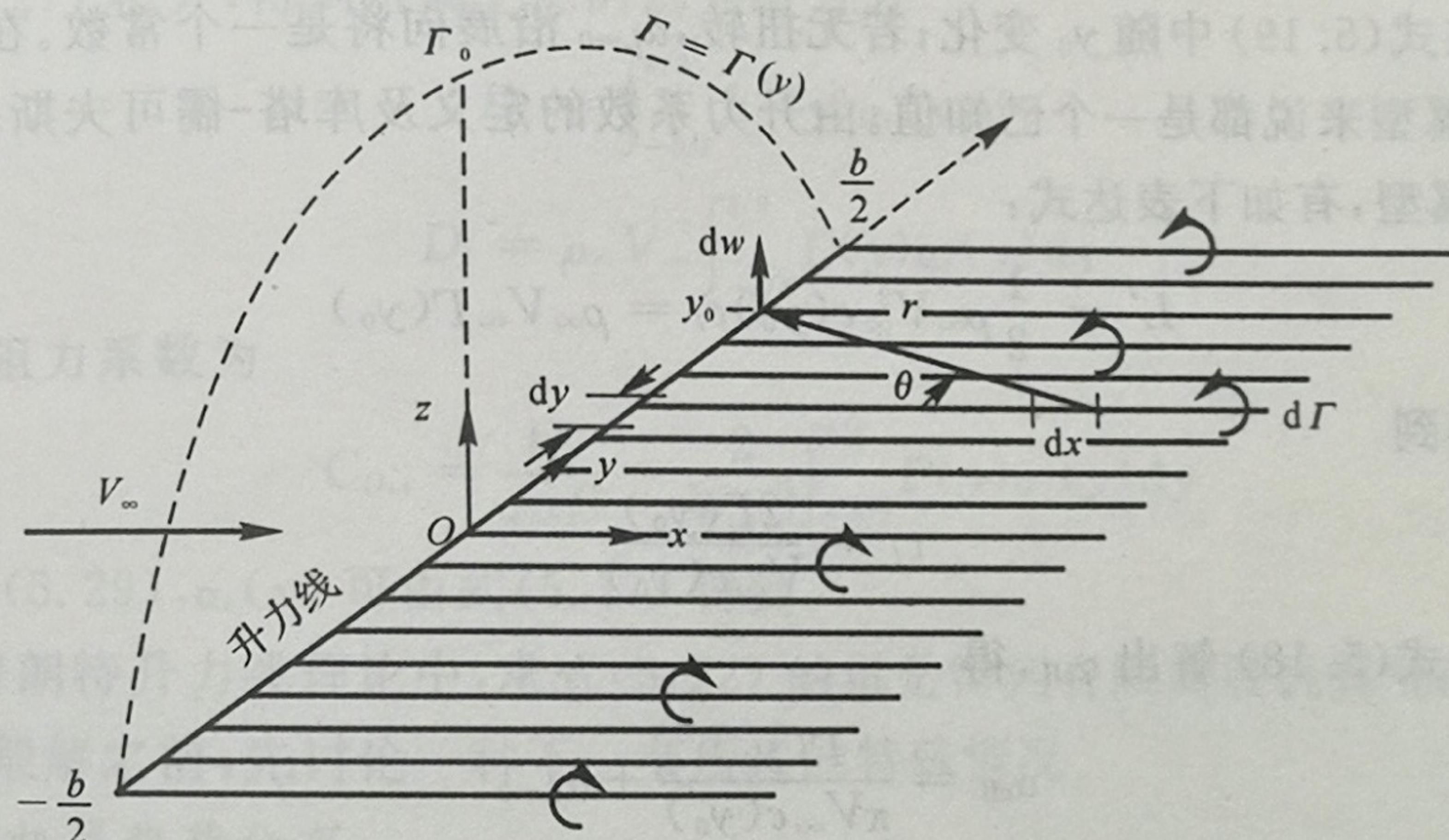


图 5.13 沿升力线无穷多马蹄涡的叠加

回顾一下讨论的内容。已经用环量连续变化的升力线来代替有限翼展机翼,并且给出了沿着升力线下洗速度的表达式。但是,核心问题依然没有解决,那就是求出给定机翼上环量的分布,以及相关的总升力及诱导阻力。

图 5.5 所示的是有限翼的当地翼型,假定它处于任意坐标 y_0 处,从图中得到诱导迎角的表达式如下:

$$\alpha_i(y_0) = \arctan\left(\frac{-w(y_0)}{V_\infty}\right) \quad (5.15)$$

注意:在图 5.5 中 w 是向下的,因此数值为负值。 α_i 在图 5.5 中为正,式(5.15)中的负号是为了满足一致性。

一般情况下, w 远小于 V_∞ ,故 α_i 是一个很小的角度,至多达到几度。对于小角度而言,式



(5.15) 可简化为

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{w(y_0)}{V_\infty} \quad (5.16)$$

把式(5.14)代入式(5.16),得

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_0 - y} \quad (5.17)$$

这就是在给定机翼环量分布的条件下,求诱导迎角的表达式。

再考虑一下有效迎角 α_{eff} ,如图 5.5 所示。根据 5.1 节所述, α_{eff} 是当地翼型感受到的实际迎角。因为沿展向下洗速度是变化的,所以 α_{eff} 也是变化的;在 y_0 点, $\alpha_{eff} = \alpha_{eff}(y_0)$, 当地翼型的升力系数表达式为

$$c_l = \alpha_0 [\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0}] = 2\pi [\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0}] \quad (5.18)$$

在式(5.19)中,当地升力线斜率 α_0 已被薄翼型的理论值 2π 代替。而且,对于有扭转的翼型,零升力迎角 $\alpha_{L=0}$ 在式(5.19)中随 y_0 变化;若无扭转, $\alpha_{L=0}$ 沿展向将是一个常数。在任意一种情况下, $\alpha_{L=0}$ 对当地翼型来说都是一个已知值。由升力系数的定义及库塔-儒可夫斯基定律,针对坐标为 y_0 的当地翼型,有如下表达式:

$$L' = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y_0) c_l = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0) \quad (5.19)$$

从式(5.19)可得到

$$c_l = \frac{2\Gamma(y_0)}{V_\infty c(y_0)} \quad (5.20)$$

把式(5.20)代入式(5.18)解出 α_{eff} ,得

$$\alpha_{eff} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0} \quad (5.21)$$

结合式(5.1),则有

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i \quad (5.1)$$

把式(5.17)、式(5.21)代入式(5.1),我们得到

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}(y_0) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_0 - y} \quad (5.22)$$

这就是普朗特升力线理论基本方程,它表示:几何迎角等于有效迎角加上诱导迎角。在式(5.22)中, α_{eff} 以 Γ 的形式来表述, α_i 以 $d\Gamma/dy$ 的形式来表述。故式(5.22)是一个积分微分混合方程,唯一未定的参数是 Γ ,而其余参数 α, c, V_∞ 和 $\alpha_{L=0}$ 对于给定有限翼、给定几何迎角、给定来流速度来说是已知的。所以,解方程,即得 $\Gamma = \Gamma(y_0)$, $-b/2 < y_0 < b/2$ 。

由式(5.22)解出 $\Gamma = \Gamma(y_0)$ 后,得到有限翼的三种主要的空气动力特性,表述如下:

(1) 根据库塔-儒可夫斯基定律,升力分布为

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0) \quad (5.23)$$

(2) 沿展向对式(5.23)积分,得

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) dy \\ L = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (5.24)$$

或

由式(5.24)升力系数立即可以得

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (5.25)$$

(3) 图 5.4 中,单位翼展上的诱导阻力为

$$D'_i = L' \sin \alpha_i$$

因为 α_i 很小,所以上式变为

$$D'_i = L' \alpha_i \quad (5.26)$$

沿翼展对式(5.27)积分,得到机翼上总的诱导阻力为

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) \alpha_i(y) dy \quad (5.27)$$

或

$$D_i = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (5.28)$$

总的诱导阻力系数为

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (5.29)$$

式(5.26)到式(5.29), $\alpha_i(y)$ 可由式(5.17)得到。

因此,在普朗特升力线理论中,求式(5.22)的解是得到有限翼展机翼气动特性的关键。在讨论方程的一般解之前,先讨论一种下一节所述的特殊情况。

1. 椭圆形机翼载荷分布

考虑如下形式的环量分布,即

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad (5.30)$$

式(5.30)有如下特征:

(1) Γ_0 是原点处的环量,如图 5.13 所示。

(2) 沿展向环量按椭圆规律分布;由于 $L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y)$, 得

$$L'(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

或

$$\left(\frac{L'(y)}{\rho_\infty V_\infty \Gamma_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{b/2}\right)^2 = 1$$

显然,以 y 作横坐标轴,则 $L'(y)$ 的值为对应的椭圆分布。所以,处理的是椭圆形机翼载荷



分布。

(3) 因为 $\Gamma(b/2) = \Gamma(-b/2) = 0$, 所以翼尖处的升力及环量是零, 如图 5.13 所示。这并不是从式(5.22)中直接得到式(5.30), 而是规定一种按椭圆规律分布的载荷。我们要问, 这种机翼载荷对应何种有限翼展机翼?

首先, 计算一下下洗速度。对式(5.30)进行微分, 得

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\frac{4\Gamma_0}{b^2} \frac{y}{(1-4y^2/b^2)^{1/2}} \quad (5.31)$$

将式(5.31)代入式(5.14), 得

$$w(y_0) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y}{(1-4y^2/b^2)^{1/2}(y_0-y)} dy \quad (5.32)$$

作如下变量置换, 得

$$y = \frac{b}{2} \cos\theta, \quad dy = -\frac{b}{2} \sin\theta d\theta$$

所以, 式(5.32)变为

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_{-\pi}^0 \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta} d\theta$$

或

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^\pi \frac{\cos\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta \quad (5.33)$$

式(5.33)是式(4.26)对于 $n=1$ 的特殊情况, 所以式(5.33)变形为

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b} \quad (5.34)$$

这说明了一个十分重要的事实——对椭圆形翼载荷分布的机翼, 下洗速度沿展向始终是一个常数。根据式(5.16), 得到诱导迎角为

$$\alpha_i = -\frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty} \quad (5.35)$$

对于椭圆形翼载荷分布, 诱导迎角沿展向也是常数。注意式(5.34)和式(5.35), 当翼展趋近于无限大时, 下洗速度和诱导迎角都将趋近于零。这和先前讨论的翼型理论一致。把式(5.30)代入式(5.24), 就得到应用更广的表达式, 即

$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{1/2} dy \quad (5.36)$$

再一次应用坐标变换 $y = (b/2)\cos\theta$, 式(5.36)变为

$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \frac{b}{2} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \frac{b}{4} \pi \quad (5.37)$$

解式(5.37), 得

$$\Gamma_0 = \frac{4L}{\rho_\infty V_\infty b \pi} \quad (5.38)$$

因为 $L = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S C_L$, 所以式(5.38)变为

$$\Gamma_0 = \frac{2V_\infty S C_L}{b \pi} \quad (5.39)$$

把式(5.39)代入式(5.35), 得

$$\alpha_i = \frac{2V_\infty S C_L}{b \pi} \frac{1}{2bV_\infty} \quad \text{或} \quad \alpha_i = \frac{S C_L}{\pi b^2} \quad (5.40)$$

另一个重要的几何参数是展弦比, 用 AR(aspect ratio) 表示, 即

$$AR \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b^2}{S}$$

于是, 式(5.40)变为

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR} \quad (5.41)$$

式(5.35)说明诱导迎角是与机翼对称面处环量 Γ_0 相关的常数, 而式(5.41)则给出了诱导迎角与机翼升力系数间的关系, 这是一个非常有用的表达式。

注意到 α_i 是一个常数, 则诱导阻力系数可以从式(5.29)得

$$C_{D_i} = \frac{2\alpha_i}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2\alpha_i \Gamma_0}{V_\infty S} \frac{b}{2} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi \alpha_i \Gamma_0 b}{2V_\infty S} \quad (5.42)$$

把式(5.39)和式(5.41)代入式(5.42)中, 可得

$$C_{D_i} = \frac{\pi b}{2V_\infty S} \left(\frac{C_L}{\pi AR} \right) \frac{2V_\infty S C_L}{b \pi} \quad \text{或} \quad C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} \quad (5.43)$$

式(5.43)是一个重要的结论。它表明诱导阻力系数与升力系数的平方成正比。在 5.2 节中, 我们看到, 由于翼面上、下表面压力差的存在, 在翼尖处产生了尾涡, 诱导阻力是在这种条件下产生的。升力也是由这种压力差产生的。所以诱导阻力与有限翼的升力的产生有关。因此, 诱导阻力常被称为升致阻力。式(5.43)形象地说明了这一点。显然, 一架飞机不可能毫无代价地产生升力, 而诱导阻力就是产生升力的代价。飞机发动机用来克服诱导阻力的能量也就是用来产生升力的能量。由于 $C_{D_i} \propto C_L^2$, 所以当 C_L 增大时, C_{D_i} 急剧增大。尤其是当 C_L 较高时, 比如飞机以低速起飞或着陆时, 诱导阻力就占了总阻力的大部分。即便是在高速巡航阶段, 诱导阻力依然占据全部阻力的 25% 左右。

诱导阻力系数的另一个显著特征是与展弦比成反比, 如式(5.43)所示。所以, 为降低诱导阻力, 应尽量增大机翼的展弦比。图 5.14 表示了大展弦比和小展弦比的机翼。遗憾的是, 大展弦比机翼对结构强度提出了更为苛刻的要求。所以一架飞机机翼展弦比的确定应综合考虑空气动力学和结构力学的要求。有趣的是 1903 年莱特兄弟的飞机机翼展弦比是 6, 而今天常规亚声速飞机的机翼展弦比是 6~8(洛克西德公司展弦比 $AR = 14.3$ 的 U-2 高空侦察机及展弦比在 10~22 之间的滑翔机例外)。

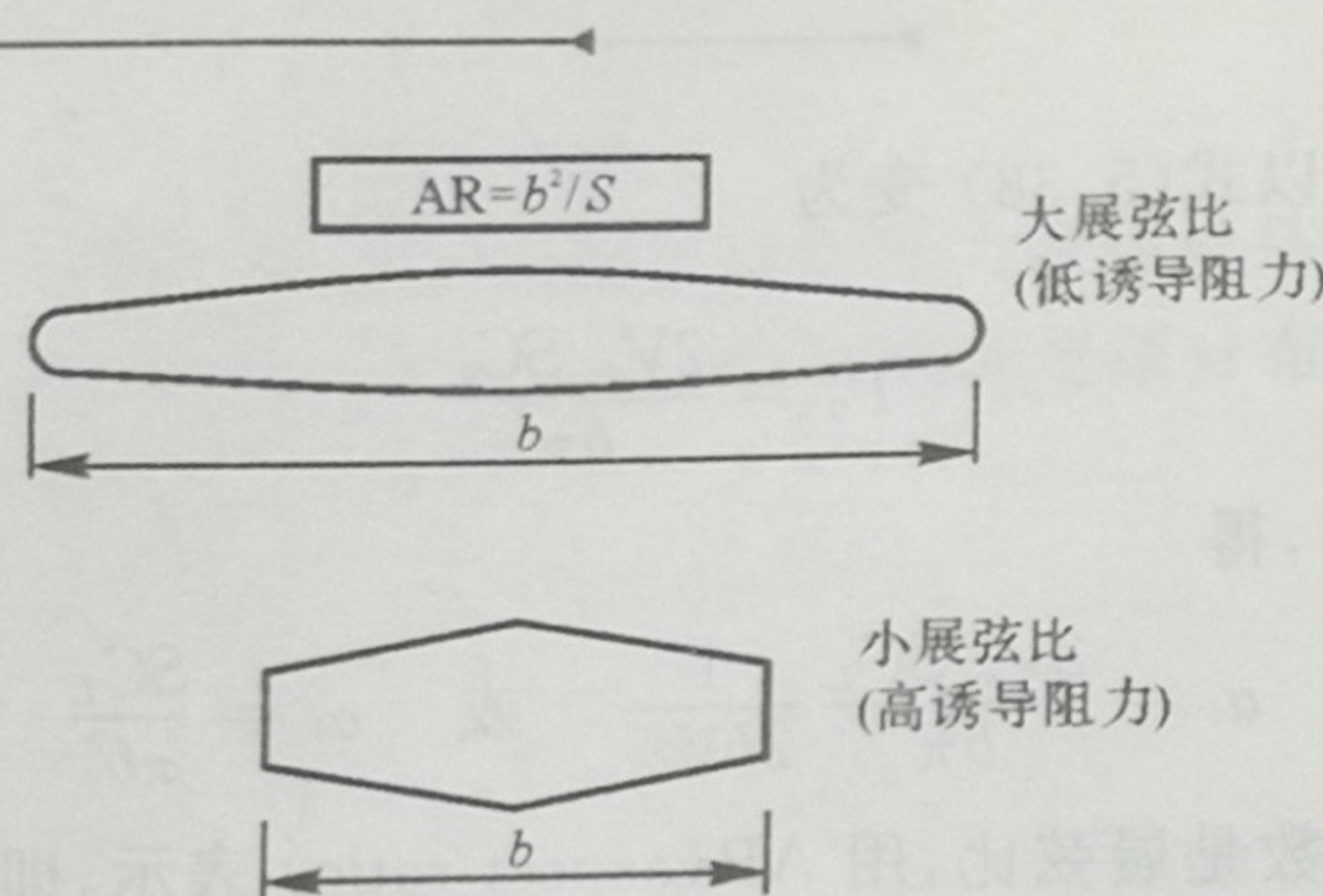


图 5.14 大展弦比与小展弦比机翼示意图

椭圆形翼载荷还有另外一个特性。假设机翼无几何扭转(即迎角沿展向是一个常数)且无气动扭转(即零升迎角沿展向是一个常数)。从式(5.41)中看到, α_i 沿展向是一个常数, 所以沿展向有效迎角 $\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$ 也是一个常数。因为当地升力系数由下式给出:

$$c_l = \alpha_0 (\alpha_{\text{eff}} - \alpha_{L=0})$$

假设 α_0 对任意截面是一个常数(对于薄翼型, 有 $\alpha_0 = 2\pi$), 那么 c_l 沿展向也必然是一个常数。单位展长上产生的升力为

$$L' = q_\infty c c_l \quad (5.44)$$

从式(5.44)中解出弦长, 得

$$c(y) = \frac{L'(y)}{q_\infty c_l} \quad (5.45)$$

在式(5.45)中, 沿展向, q_∞ 和 c_l 皆为常数, 但 $L'(y)$ 沿展向按椭圆规律分布, 所以式(5.45)表明弦长沿展向必然以椭圆规律分布。

图 5.15 描述了椭圆形翼载荷分布和椭圆翼面, 以及为常值的下洗速度。虽然椭圆形翼载荷分布是个特殊情况, 但实际上它能近似模拟任意有限翼展机翼诱导阻力系数的分布, 只要对式(5.43) C_{D_L} 的表达形式作简单的修正就可以了。下面将讨论机翼一般载荷分布的情形。

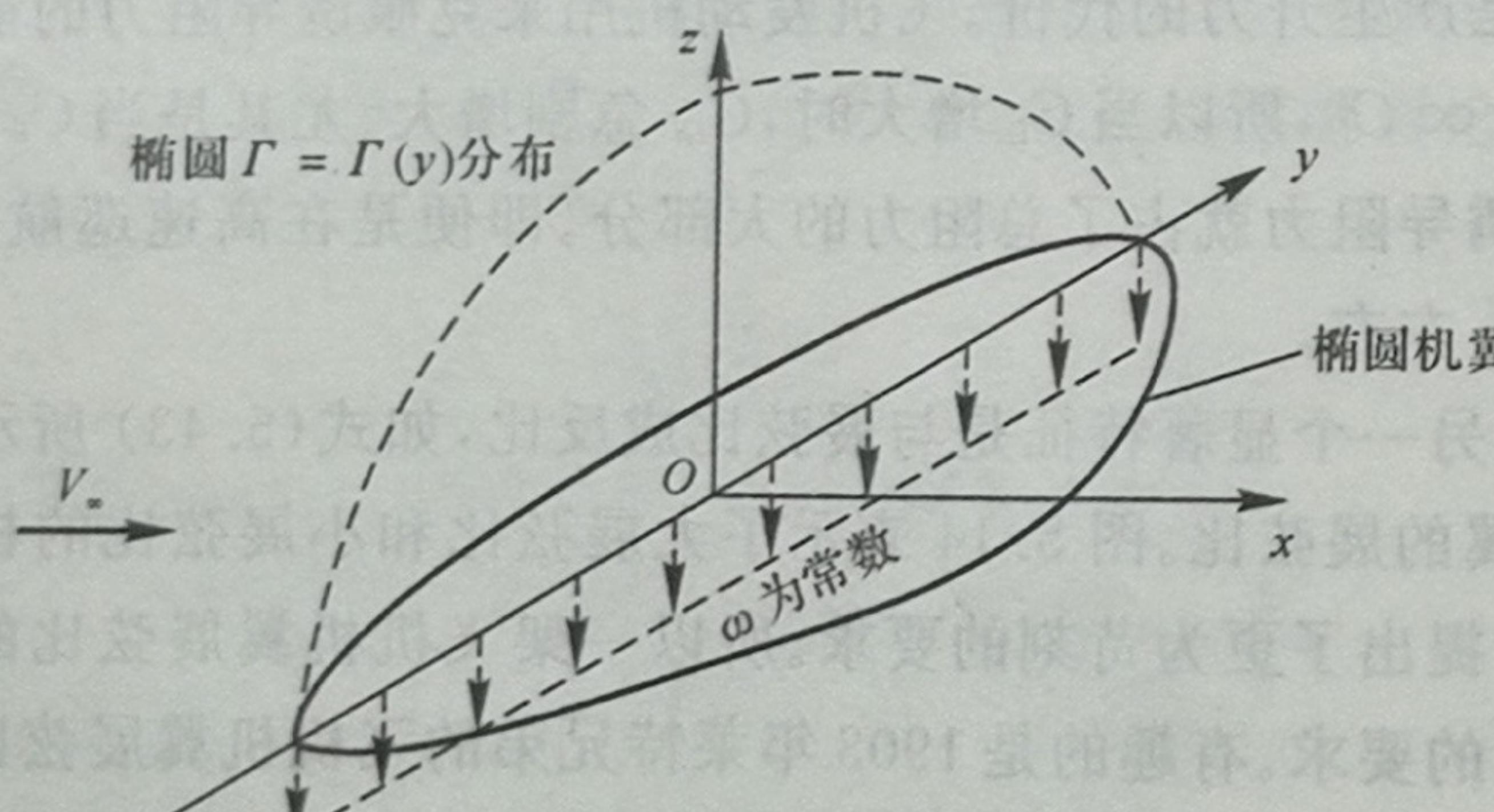


图 5.15 椭圆机翼、椭圆载荷分布及常值下洗的示意图

2. 一般机翼的载荷分布 考虑变量置换, 即

$$y = -\frac{b}{2} \cos\theta \quad (5.46)$$

展向坐标用 θ 描述, 且 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。于是式(5.30)可以写为

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin\theta \quad (5.47)$$

式(5.47)表示一个傅里叶正弦级数, 可以用来描述任意有限翼展机翼沿展向的环量分布, 假设一般形式的环量分布为如下形式, 即

$$\Gamma(\theta) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \quad (5.48)$$

项数越多, 描述就越精确。式(5.48)中的傅里叶系数是未知的, 但是它们必须满足普朗特升力线理论的基本方程, 即 A_n 必须满足式(5.22)。对式(5.48)进行微分, 得

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{d\theta}{dy} = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N nA_n \cos n\theta \frac{d\theta}{dy} \quad (5.49)$$

将式(5.48)和式(5.49)代入式(5.22), 得

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2b}{\pi c(\theta_0)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta_0 + \alpha_{L=0}(\theta_0) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^N nA_n \cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta \quad (5.50)$$

由式(4.25)计算式(5.50)中的积分项, 化简得

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2b}{\pi c(\theta_0)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta_0 + \alpha_{L=0}(\theta_0) + \sum_{n=1}^N nA_n \frac{\sin n\theta_0}{\sin\theta_0} \quad (5.51)$$

观察式(5.51), 它是沿翼展某个固定点的计算值, θ_0 是指定的。而且 $b, c(\theta_0)$ 和 $\alpha_{L=0}(\theta_0)$ 可以从有限翼的几何参数和剖面参数得到。只有 A_n 是未知的。但是可以选取 n 个不同的位置, 让 n 个方程联立解出 n 个未知的 A_n 。以这种形式, 可以用数值方法来模拟任意形式的环量分布, 进而满足有限翼展机翼理论的基本式(5.22)。

将式(5.48)代入式(5.25), 得

$$C_L = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2b^2}{S} \sum_{n=1}^N A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin\theta d\theta \quad (5.52)$$

式(5.52)中的积分为

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin\theta d\theta = \begin{cases} \pi/2, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

所以, 式(5.52)变为

$$C_L = \begin{cases} A_1 \pi \frac{b^2}{S} = A_1 \pi AR, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \quad (5.53)$$



注意 C_L 仅依赖于傅里叶级数中第一项的系数(尽管 C_L 仅依赖于 A_1 , 但必须同时求解所有的 A_n 来得到 A_1)。

式(5.48)代入式(5.29), 即得到诱导阻力系数为

$$\begin{aligned} C_{D_i} &= \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy = \\ &\quad 2b^2 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \right) \alpha_i(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (5.54)$$

式(5.46)和式(5.49)代入式(5.17), 即得到诱导迎角的表达式为

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy) dy}{y_0 - y} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N n A_n \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta \quad (5.55)$$

用式(4.25)计算式(5.55)中的积分, 化简式(5.55), 得

$$\alpha_i(y_0) = \sum_1^N n A_n \frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0} \quad (5.56)$$

式(5.56)中的 θ_0 从 0 变到 π , 用 θ 代替 θ_0 , 方程进一步写为

$$\alpha_i(\theta) = \sum_1^N n A_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (5.57)$$

式(5.57)代入式(5.54), 得

$$C_{D_i} = \frac{2b^2}{S} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \right) \left(\sum_{n=1}^N n A_n \sin n\theta \right) d\theta \quad (5.58)$$

仔细观察式(5.58); 它引入了两个级数的乘积, 注意如下等式, 即

$$\int_0^\pi \sin m\theta \sin k\theta d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \pi/2, & m = k \end{cases} \quad (5.59)$$

所以式(5.58)可以化为

$$\begin{aligned} C_{D_i} &= \frac{2b^2}{S} \left(\sum_{n=1}^N n A_n^2 \right) \frac{\pi}{2} = \pi AR \sum_{n=1}^N n A_n^2 = \pi AR \left(A_1^2 + \sum_{n=2}^N n A_n^2 \right) = \\ &= \pi A R A_1^2 \left[1 + \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.60)$$

将求 C_L 的式(5.53)代入式(5.60), 得

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta) \quad (5.61)$$

式中, $\delta = \sum_{n=2}^N n (A_n/A_1)^2$ 因为 $\delta \geq 0$, 所以 $1 + \delta \geq 1$ 。令 $e = (1 + \delta)^{-1}$, 定义 e 为机翼的有效系数, 那么式(5.61)可以写为

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi e AR} \quad (5.62)$$

式中, $e \leq 1$ 。把式(5.61)及式(5.62)所表示的一般机翼载荷分布和式(5.41)所表示的椭圆形载荷分布相比较。注意对于椭圆形翼载荷分布, $\delta = 0$ 和 $e = 1$ 。所以, 椭圆形翼载分布的诱导阻力最小, 这就是对椭圆形载荷分布感兴趣的原因。

对于一个无气动扭转和几何扭转的机翼, 椭圆形平面将产生以椭圆形式分布的载荷, 如图 5.16 所示第一种情况。过去一些飞机的机翼设计成椭圆形的, 最著名的要数英国在第二次世界大战中使用的“喷火”式战斗机了。椭圆机翼加工起来非常昂贵, 所以一些飞机采用如图 5.16 所示的矩形机翼, 但它的载荷分布并不能让人乐观。折衷的方案是采用如图 5.16 所示最下方的梯形机翼。梯形机翼可以依据梯形比设计, 即翼尖弦长 / 翼根弦长 $\equiv c_t/c_r$, 这样机翼载荷分布与椭圆分布近似相同。图 5.17 描述了不同展弦比下变量 δ 与随机翼梯形比变化的函数关系。 δ 的计算首先由著名的英国空气动力学家格劳特完成, 并在其 1926 年出版的著作中加以论述, 见参考文献[3]。从图 5.17 中可以看出, 梯形机翼的设计在最大限度上降低了诱导阻力系数, 而且机翼的前缘和后缘比椭圆机翼更容易加工。因此, 一般机翼采用梯形机翼来代替椭圆形机翼。

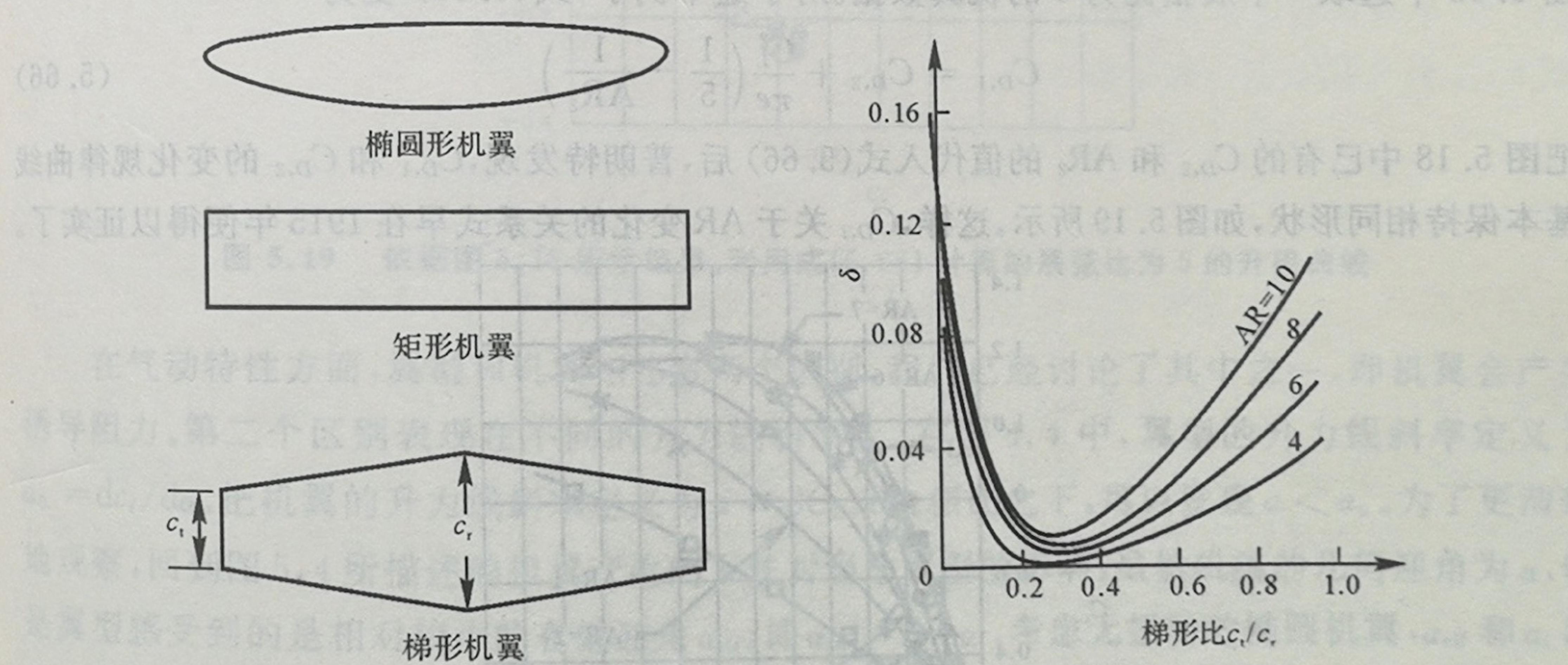


图 5.16 不同机翼平面形状

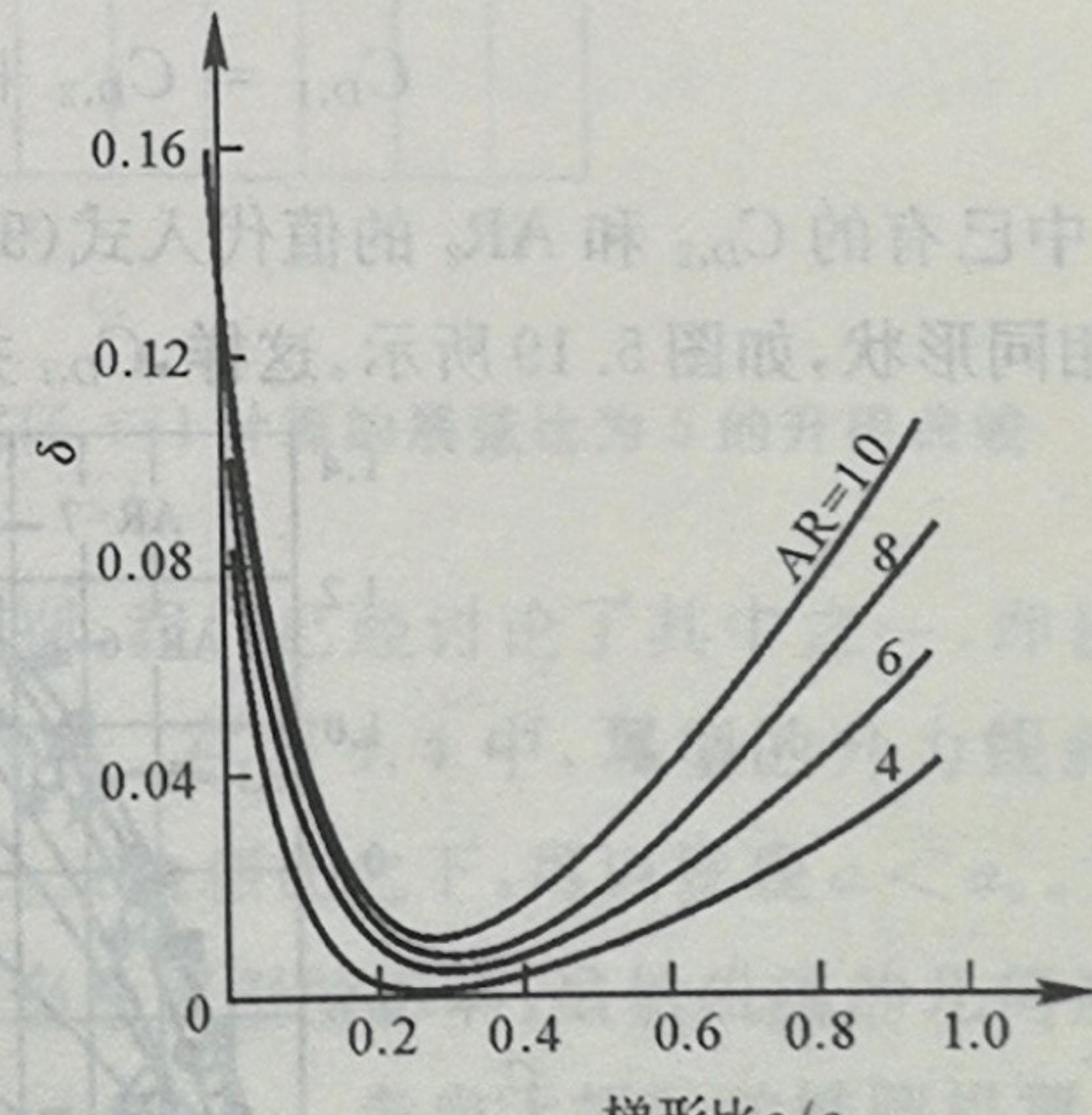


图 5.17 诱导阻力系数与梯形比的关系(见参考文献[1])

3. 机翼展弦比的影响

从式(5.61)和式(5.62), 发现具有一般载荷分布的有限机翼, 其诱导阻力系数与机翼的展弦比成反比, 这和先前讨论的椭圆机翼是一样的。标准的亚声速飞机和滑翔机的展弦比变化范围是 6 ~ 22。 δ 只能使诱导阻力系数在 10% 以内变化, 相比之下, 展弦比对诱导阻力系数的影响更大一些。因此, 为降低机翼的诱导阻力, 首先应考虑的设计因素是尽量增大机翼的展弦比, 而不是使外形尽量接近椭圆机翼。诱导阻力系数与机翼展弦比成反比, 这是普朗特升力线理论得到的重要结论。1915 年, 普朗特通过对 7 种不同展弦比的矩形机翼的实验研究, 证实了

这一结果。实验数据如图 5.18 所示。式(5.3)给出的总的阻力系数表达式变为

$$C_D = c_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR} \quad (5.63)$$

式(5.63)中, C_D 与 C_L 的变化关系反映在图 5.18 上, 对不同展弦比的两种机翼, 它们的阻力系数分别表述如下:

$$C_{D,1} = c_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR_1} \quad (5.64a)$$

$$C_{D,2} = c_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR_2} \quad (5.64b)$$

假设在同一升力系数 C_L 下, 它们各自的翼型相同, 那么它们对应的 c_d 也必然相等。而且, 由于 c_d 变动范围很小, 可以忽略, 所以由式(5.64a), (5.64b), 得

$$C_{D,1} = C_{D,2} + \frac{C_L^2}{\pi e} \left(\frac{1}{AR_1} - \frac{1}{AR_2} \right) \quad (5.65)$$

式(5.65)可以用一种展弦比的机翼的数据计算另一种展弦比的机翼的数据。比如, 普朗特在图 5.18 中选取一个展弦比为 5 的机翼数据。对于这个例子, 式(5.65)变为

$$C_{D,1} = C_{D,2} + \frac{C_L^2}{\pi e} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{AR_2} \right) \quad (5.66)$$

把图 5.18 中已有的 $C_{D,2}$ 和 AR_2 的值代入式(5.66)后, 普朗特发现, $C_{D,1}$ 和 $C_{D,2}$ 的变化规律曲线基本保持相同形状, 如图 5.19 所示。这样, $C_{D,i}$ 关于 AR 变化的关系式早在 1915 年便得以证实了。

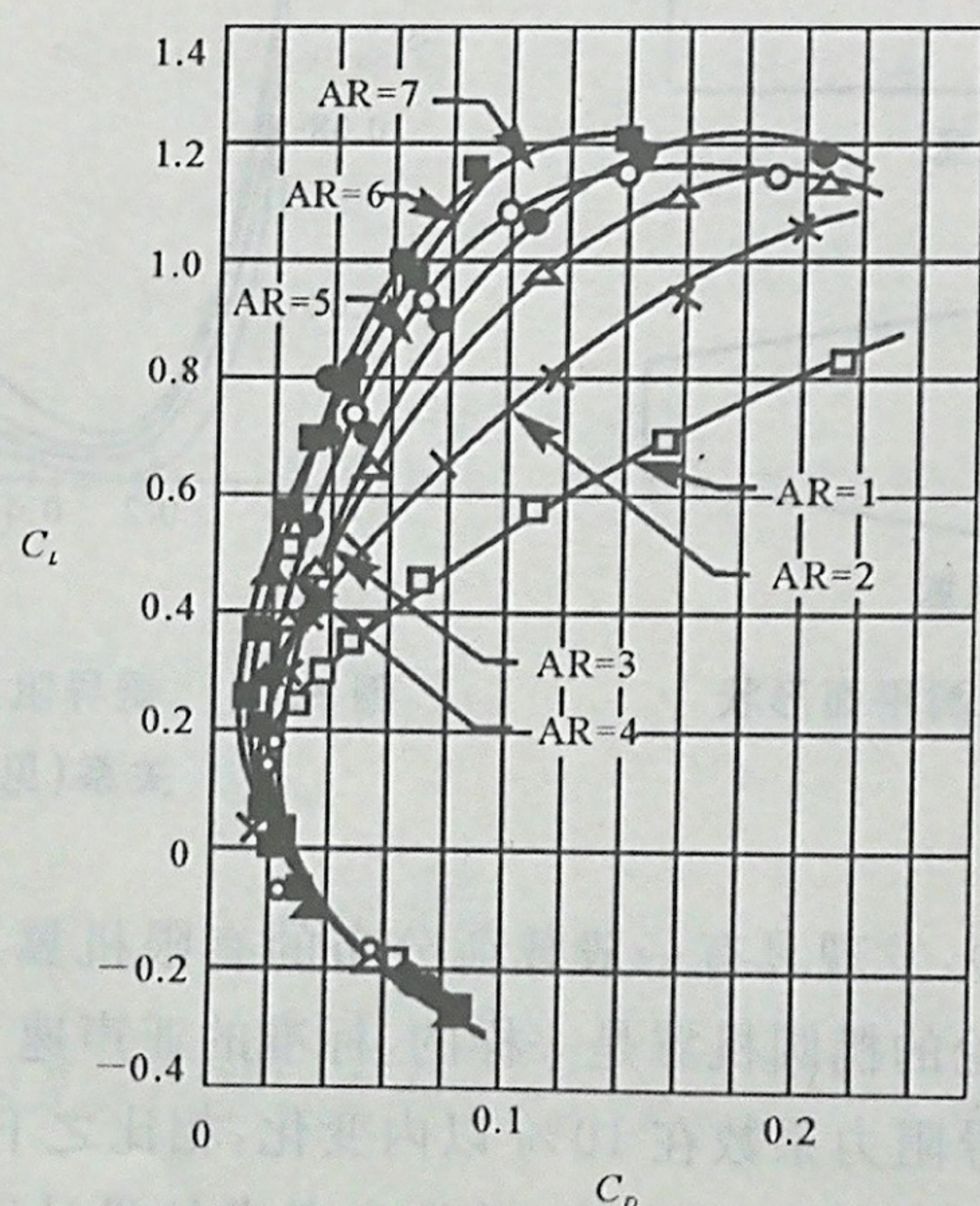


图 5.18 不同展弦比矩形翼升阻曲线实验结果
(见参考文献[2])

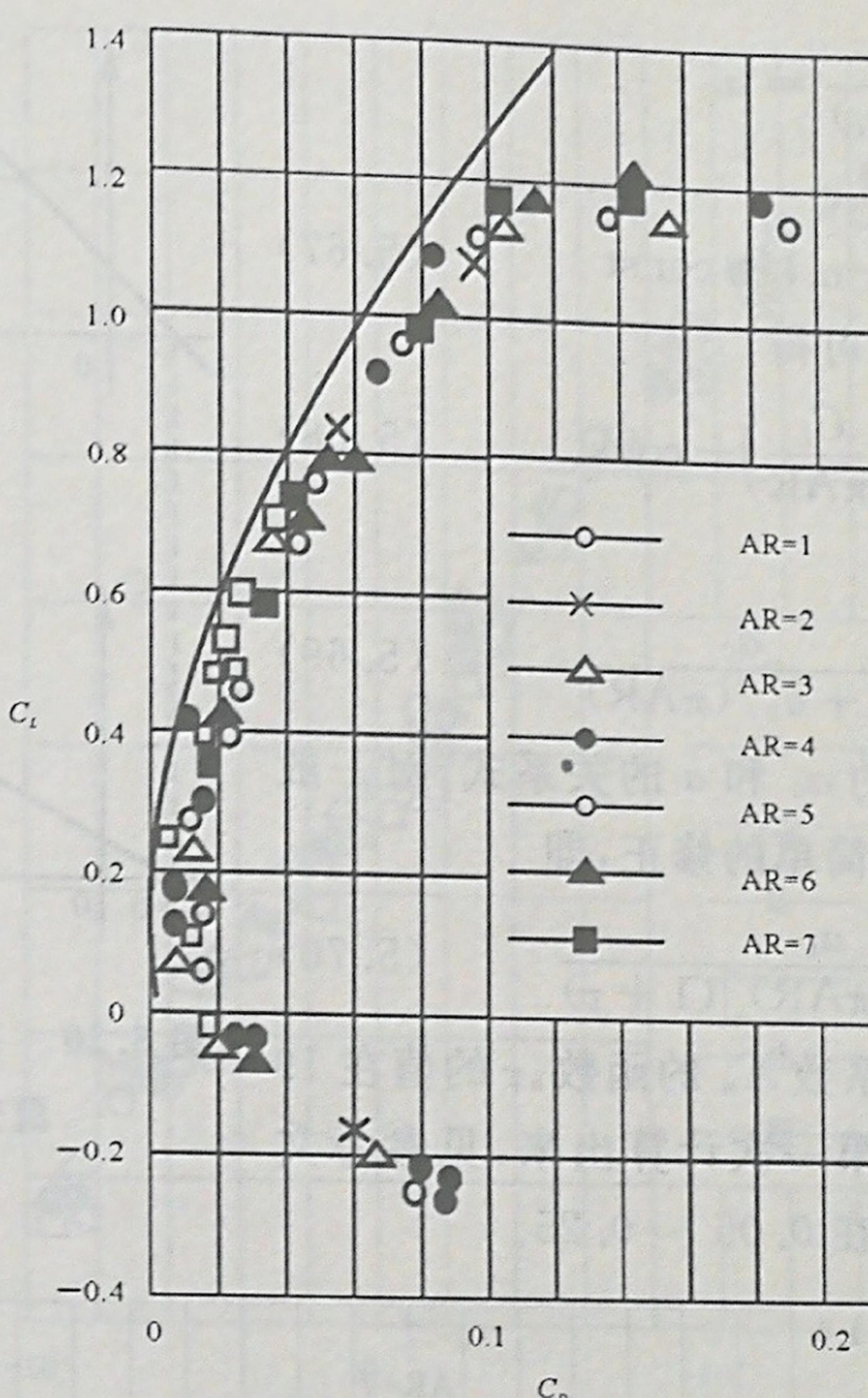


图 5.19 依据图 5.18 所示结果, 利用式(5.66)计算的展弦比为 5 的升阻曲线

在气动特性方面, 翼型和机翼相比有两个区别。我们已经讨论了其中之一, 即机翼会产生诱导阻力。第二个区别表现在不同的升力线斜率上。在图 4.4 中, 翼型的升力线斜率定义为 $a_0 = dc_L/d\alpha$ 。把机翼的升力线斜率定义为 $a = dC_L/d\alpha$ 。相比之下, 可以发现 $a < a_0$ 。为了更清楚地观察, 回到图 5.4 所描述的机翼产生的下洗对当地翼型的影响。虽然机翼的几何迎角为 α , 但是翼型感受到的是相对较小的有效迎角 α_{eff} , 即 $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ 。考虑无扭转的椭圆机翼, α_{eff} 和 α_i 沿展向皆为常数, 因此 $C_L = c_L$ 。假设做出有限翼的 C_L 关于 α_{eff} 变化的曲线, 如图 5.20 所示。因为采用的是 α_{eff} , 所以升力线斜率和无限展长的机翼升力线斜率 a_0 相等。但是, 实际上并不能看见有效迎角, 看到的只是飞机的几何迎角, 即弦线和相对来流之间的夹角。图 5.20 中第二幅图描述了有限翼展机翼升力系数 C_L 关于几何迎角 α 变化的函数关系。由于 $\alpha > \alpha_{eff}$, 第二条曲线比较平缓; 设它的升力线斜率为 a 。图 5.20 清楚地显示出 $a < a_0$, 即有限翼展机翼的升力线斜率降低了。对于零升力情况而言, 由于没有下洗的影响, 即 $\alpha_i = C_{D,i} = 0$, 所以当 $C_L = 0$ 时, $\alpha = \alpha_{eff}$ 。结果, 有限展长的机翼与无限展长的机翼具有相同的零升迎角, 如图 5.20 所示。

由图 5.20 的上图得到 a_0 和 a 的关系, 关系式如下:



$$\frac{dC_L}{d(\alpha - \alpha_i)} = a_0$$

对其进行积分,得

$$C_L = a_0(\alpha - \alpha_i) + \text{const} \quad (5.67)$$

把式(5.41)代入式(5.67),可得

$$C_L = a_0 \left(\alpha - \frac{C_L}{\pi AR} \right) + \text{const} \quad (5.68)$$

对式(5.68)进行微分,得

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a = \frac{a_0}{1 + a_0/(\pi AR)} \quad (5.69)$$

式(5.69)给出了椭圆机翼的 a_0 和 a 的关系式。对一般机翼,式(5.69)可以做如下简单的修正,即

$$a = \frac{a_0}{1 + [a_0/(\pi AR)](1 + \tau)} \quad (5.70)$$

在式(5.70)中, τ 是傅里叶系数 A_n 的函数。 τ 的值在 19 世纪 20 年代早期由格劳特第一次计算出来,见参考文献[3]。 τ 的变化范围一般是在 $0.05 \sim 0.25$ 。

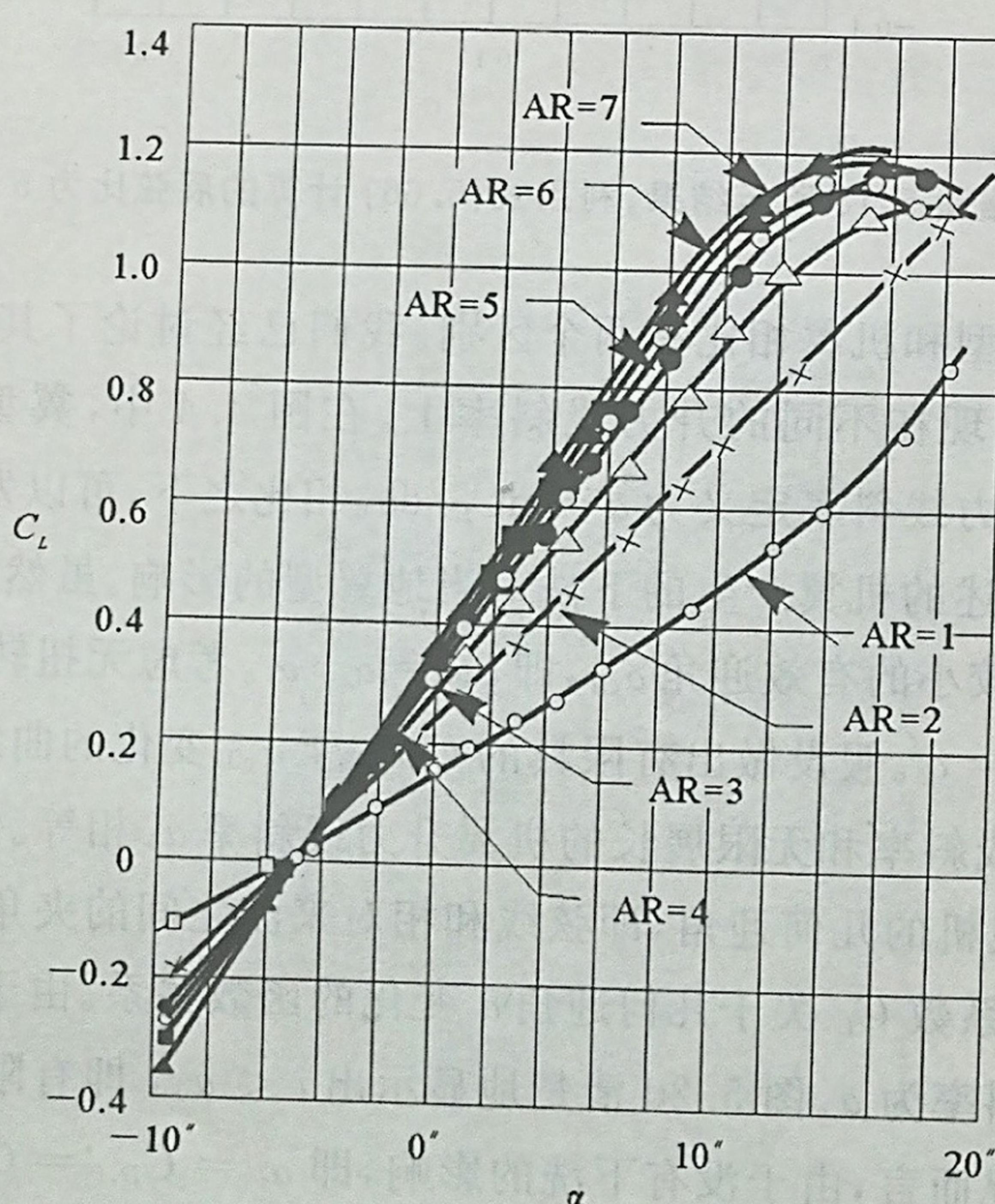


图 5.21 不同展弦比矩形翼升力曲线实验结果

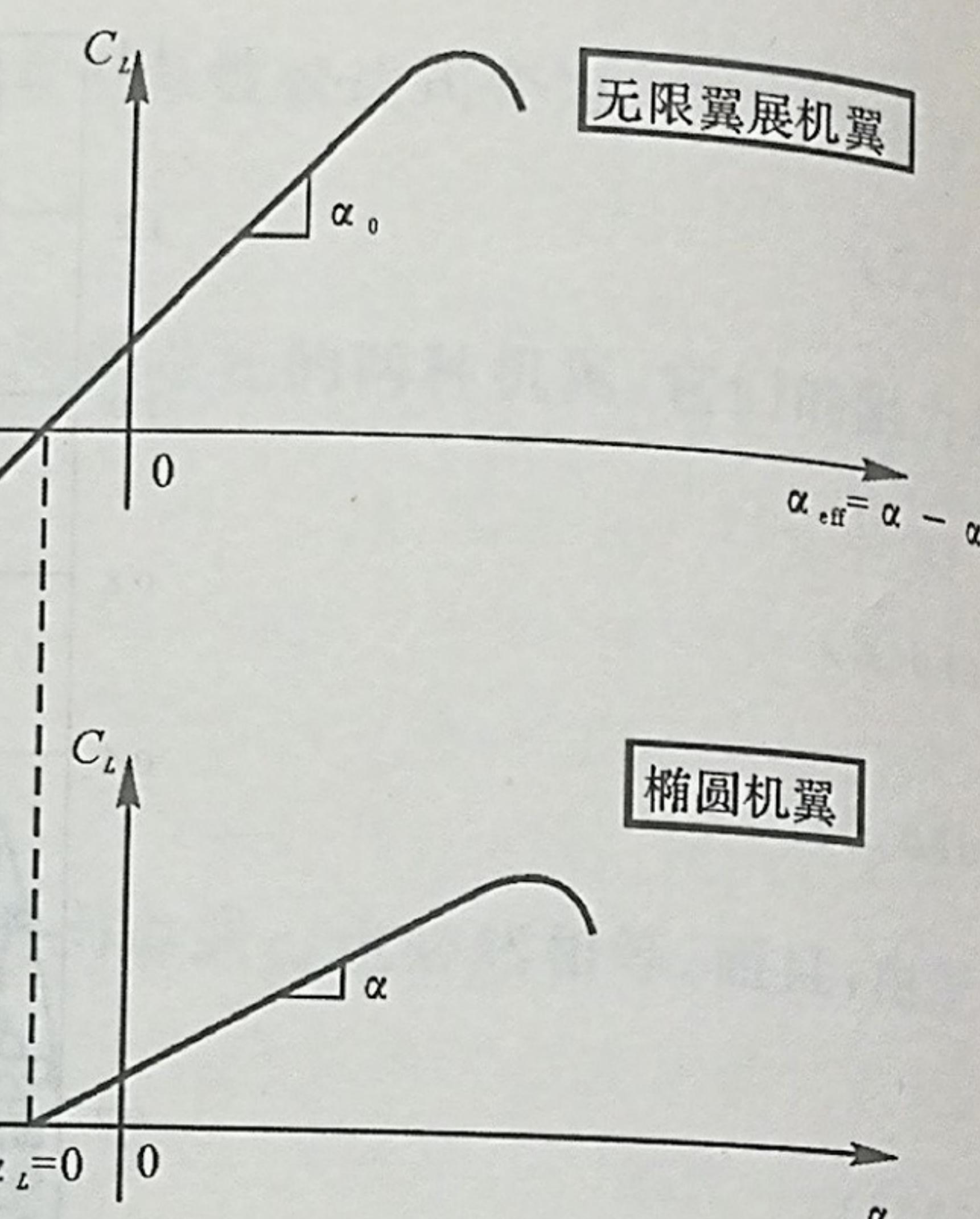


图 5.20 有限翼展机翼与无限翼展机翼升力线的对比示意图

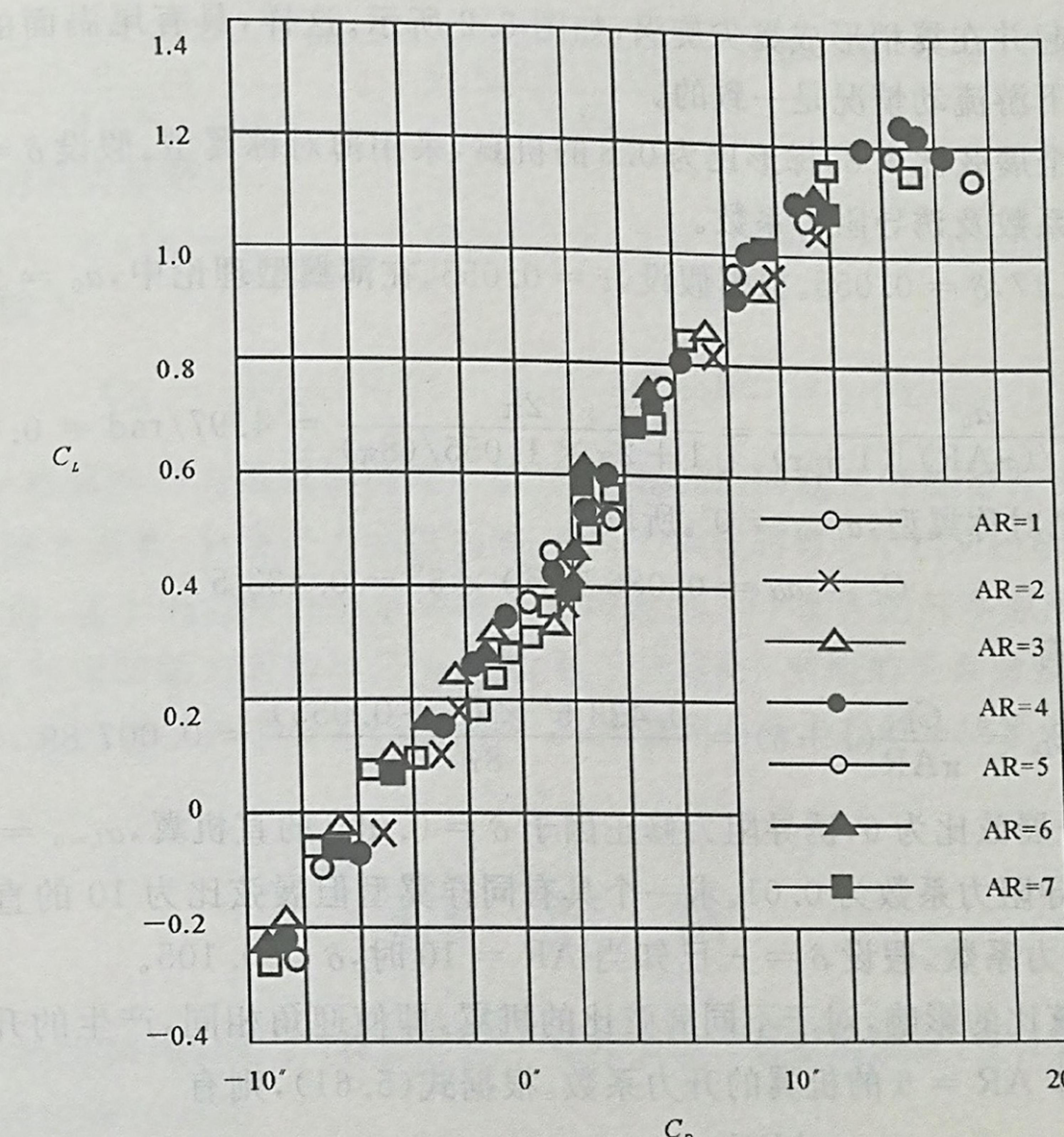


图 5.22 采用普朗特理论计算的展弦比为 5 的升力曲线

式(5.69)和式(5.70)中最重要的变量是 AR。对小展弦比机翼来说, a_0 和 a 之间有一定区别,但是当 $AR \rightarrow \infty$ 时, $a \rightarrow a_0$ 。图 5.21 明显地显示出展弦比对升力曲线的影响,图中数据来自普朗特 1915 年所用的直机翼经典数据。注意到 $dC_L/d\alpha$ 随展弦比 AR 的降低而减小。普朗特用前面得到的公式计算图 5.21 中展弦比为 5 的机翼的数据,把这些数据刻画在图 5.22 中,得到了基本的曲线。

4. 升力线模型的物理意义

考虑升力线理论的基本模型,仔细观察图 5.13。无穷多个强度趋于无穷小的马蹄涡耦合产生了沿机翼展向的升力线以及向下游延伸的尾涡面,该尾涡面在升力线处诱导出下洗流。这个模型有着实际的物理意义。为了看得更清楚,我们回到图 5.4。注意三维流流过有限翼展机翼时,从上、下表面流向机翼后缘的流线的方向并不相同,即机翼后缘处的切向速度不连续。从第 4 章我们得知,切向速度的不连续性是由面涡引起的。实际上,这种不连续的情形并不存在。实际的情况是由于流体的黏性,在后缘下游会产生一个很薄却有很大速度梯度的区域,即一个有很大剪切流的薄区域。在无黏流模型中,代之以一个尾涡面从机翼的后缘流向下游。这个涡



面在后缘下游卷起并在翼梢形成翼尖旋涡,如图5.2所示。这样,具有尾涡面的升力线模型和实际中有限翼的下游流动情况是一致的。

例5.1 一个展弦比为8,梯形比为0.8的机翼,采用薄对称翼型。假设 $\delta = \tau$,计算迎角为5°时机翼的升力系数及诱导阻力系数。

解 查图5.17, $\delta = 0.055$ 。根据假设, $\tau = 0.055$ 。在薄翼型理论中, $a_0 = 2\pi$ 及式(5.70),得

$$a = \frac{a_0}{1 + [a_0/(\pi AR)](1 + \tau)} = \frac{2\pi}{1 + 2\pi \times 1.055/(8\pi)} = 4.97/\text{rad} = 0.0867/(\circ)$$

由于采用的是对称翼型, $\alpha_{L=0} = 0^\circ$ 。所以

$$C_L = a\alpha = 0.0867/(\circ) \times 5^\circ = 0.4335$$

根据式(5.61),则有

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}(1 + \delta) = \frac{0.4335^2 \times (1 + 0.055)}{8\pi} = 0.00789$$

例5.2 一个展弦比为6,诱导阻力修正因子 $\delta = 0.055$ 的直机翼, $\alpha_{L=0} = -2^\circ$ 。当迎角为3.4°时,机翼的诱导阻力系数为0.01。求一个具有同样翼型但展弦比为10的直机翼在同样迎角情况下的诱导阻力系数。假设 $\delta = \tau$ 。已知当 $AR = 10$ 时, $\delta = 0.105$ 。

解 由于展弦比的影响,对于不同展弦比的机翼,即使迎角相同,产生的升力系数也是不同的。首先我们计算 $AR = 6$ 的机翼的升力系数。根据式(5.61),则有

$$C_L = \frac{\pi AR C_{D_i}}{1 + \delta} = \frac{\pi \times 6 \times 0.01}{1 + 0.055} = 0.1787$$

所以

$$C_L = 0.423$$

机翼的升力线斜率为

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{0.423}{3.4^\circ - (-2^\circ)} = 0.078/(\circ) = 4.485/\text{rad}$$

根据式(5.70),机翼的升力线斜率为

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi AR}(1 + \tau)}$$

$$4.485 = \frac{a_0}{1 + \frac{1.055a_0}{\pi \times 6}} = \frac{a_0}{1 + 0.056a_0}$$

所以

$$a_0 = 5.989/\text{rad}$$

由于两种机翼具有相同的翼型,所以 a_0 也是相等的,第二个机翼的升力线斜率为

$$a = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi AR}(1 + \tau)} = \frac{5.989}{1 + \frac{5.989 \times 1.105}{\pi \times 10}} = 4.95/\text{rad} = 0.086/(\circ)$$

第二个机翼的升力系数为

$$C_L = a(\alpha - \alpha_{L=0}) = 0.086/(\circ) \times [3.4^\circ - (-2^\circ)] = 0.464$$

诱导阻力系数为

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}(1 + \delta) = \frac{0.464^2 \times 1.105}{\pi \times 10} = 0.0076$$

注意:当两个机翼的升力系数相同而不是迎角相同时,问题变得更加直观了。由式(5.61)将直接得到诱导阻力系数。只要升力系数相同,从一个机翼到另一个机翼的阻力系数只要乘一个因子就可以求得,这个例题的目的是增强读者对式(5.65)蕴含的基本原理的理解。这样就能得到如图5.19所示的阻力系数与升力系数(而不是迎角)对应的关系曲线。但是,正像我们上面讨论的那样,在当前已知迎角相同的情况下,展弦比对升力线斜率的影响必须明确地加以讨论。

5.5 小结

回忆图5.1所示的内容简介,我们已经一步步学完了有限翼理论。在开始进一步的研究之前,请先消化上面所学的内容。

以下是本章的重要结论:

(1) 机翼翼尖旋涡引起了下洗流动,进而降低了当地翼型的有效迎角,即

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$$

由下洗流作用产生的阻力称为诱导阻力,记为 D_i 。

(2) 面涡和线涡在模拟机翼空气动力学性质时很有用。线涡微元在空间一点处产生的诱导速度微元可以根据毕奥-沙瓦定理计算,即

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{|dl \times r|}{|r|^3}$$

在经典升力线理论中,机翼用一个环量沿展向变化的升力线代替,环量值为 $\Gamma(y)$ 。尾涡由升力线向下游延伸,并在升力线处诱导了下洗。环量分布由下面的基本方程给出,即

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}(y_0) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_0 - y}$$

(3) 经典升力线理论的结果:

1) 椭圆形机翼,下洗速度是一个常数,则有

$$w = -\frac{\Gamma}{2b}$$



$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}$$

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{\pi AR}}$$

2) 一般的机翼,则有

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR}(1 + \delta) = \frac{C_L^2}{\pi eAR}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + [\alpha_0 / (\pi AR)](1 + \tau)}$$

习题

5.1 在图 5.23 中,设海平面自由来流速度为 100 m/s,作用在附着涡 AB 上的力等于 10 000 N,经过 0.2 s,形成的旋涡如图 5.23 所示,现在使用毕奥-沙瓦定理,证明:图中点 E 处的下洗诱导速度等于 0.22 m/s。

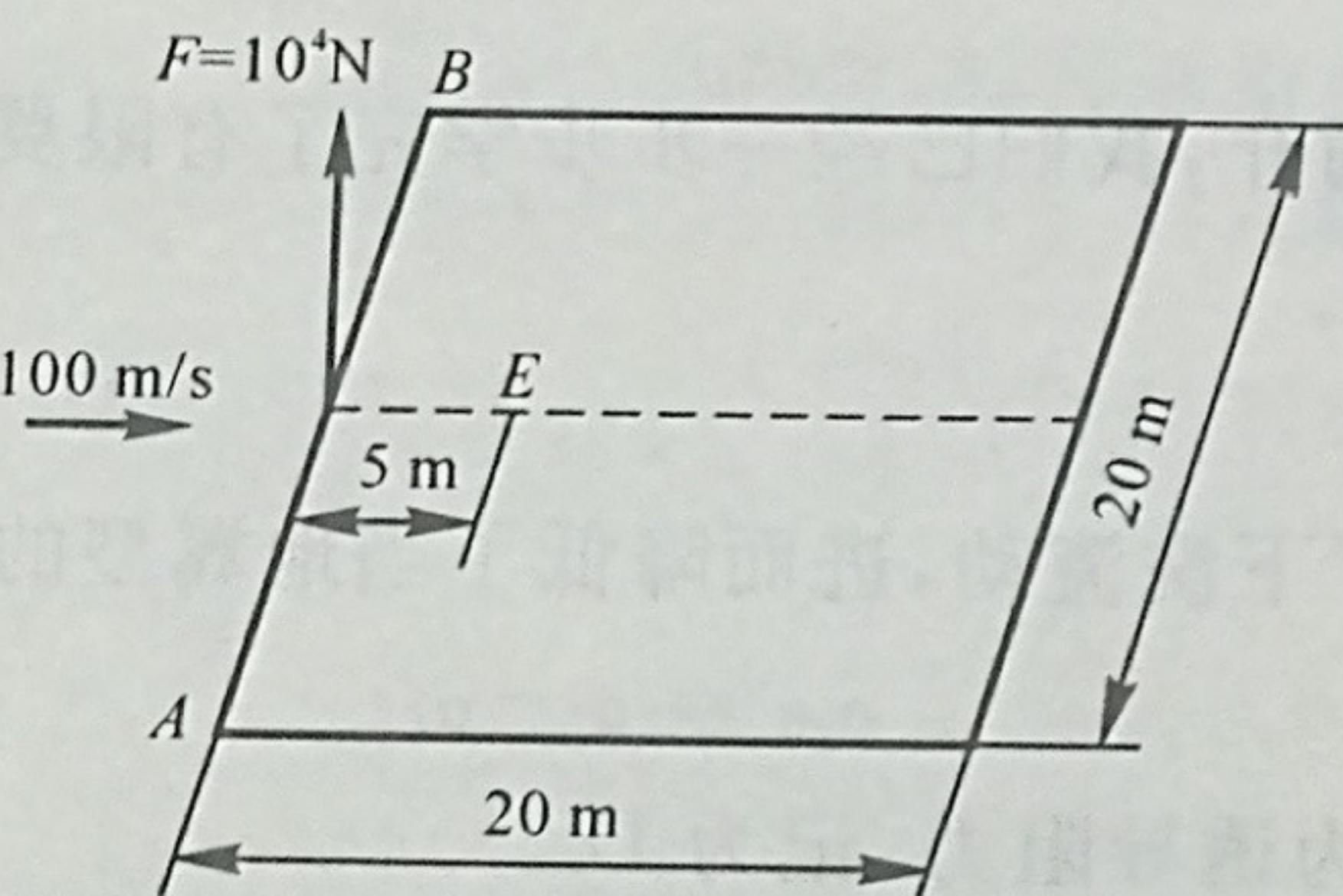


图 5.23 习题 5.1 的图

5.2 已知环量为常数 Γ ,展长为 b ,证明:由一条起动涡丝在其升力线上产生的诱导阻力表达式为

$$D = \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{b}{l} \right)^2} - 1 \right]$$

式中, l 为起动涡丝与升力线之间的距离。如果计算有限展长机翼,起动涡丝在其升力线上产生的诱导阻力是被忽略的,为什么?

5.3 俯视图为椭圆形的机翼,以 45 m/s 的速度飞过海平面,它的翼载 $W/S = 1000 \text{ N/m}^2$,该机翼没有扭转,从翼梢到翼根处的截面形状相同。截面上的升力线斜率为 5.7,机翼展长为 10 m,展弦比为 5。分别证明截面上的升力系数是 0.806,阻力系数是 0.041,有效

攻角、下洗角、绝对攻角沿展长方向是常量,分别为 $2.94^\circ, 8.1^\circ, 11.04^\circ$,证明:克服诱导阻力所需要做的功率为 46 000 W。

5.4 某飞机的机翼面积为 15.7935 m^2 ,翼展长度为 9.7536 m 。它的最大总重量为 1111.32 kg 。机翼使用的是 NACA65—415 翼型,它的升力线斜率为 $0.1033/^\circ$, $\alpha_{L=0} = -3^\circ$ 。假设 $\tau = 0.12$ 。如果飞机在标准海平面上平飞,飞机重量为最大总重量,巡航速度为 53.64333 m/s ,计算机翼的几何攻角。

5.5 飞机和飞行状态由题 5.4 给出。全机翼展有效系数 e 一般小于单个机翼的有效系数。设 $e = 0.64$,计算题 5.4 中飞机的诱导阻力。

参考文献

- [1] McCormick B W. Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1979.
- [2] Prandtl L. Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics[D]. NACA Reprint, 1921:116.
- [3] Glauert H. The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory[M]. London: Cambridge University Press, 1926.