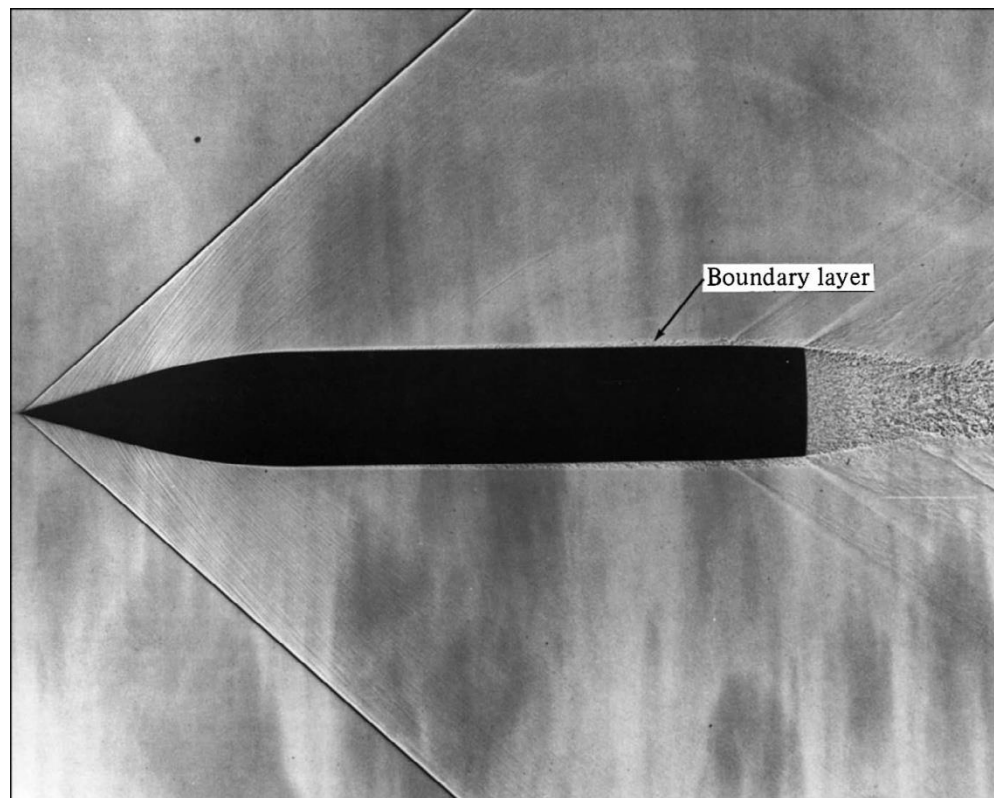
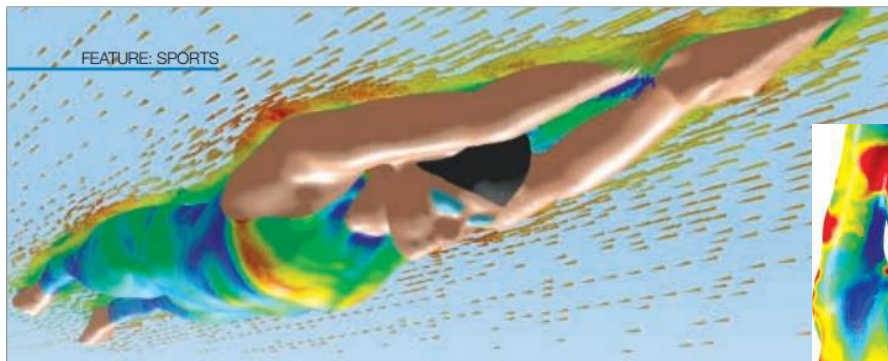
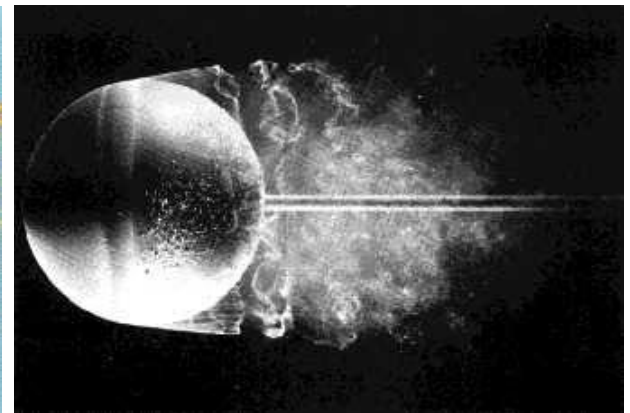
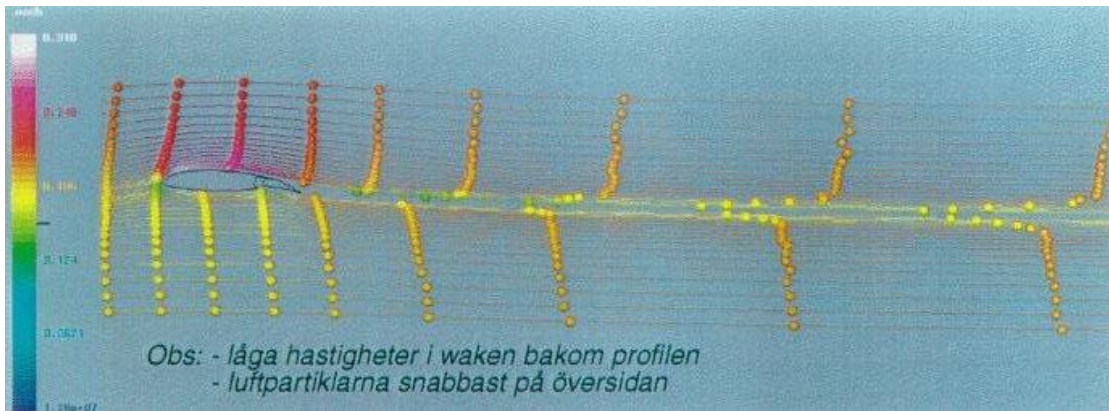


# 第八章： 边界层理论



# 边界层与阻力



## Simulating Swimwear for Increased Speed

Speedo's new full-body swimsuit takes advantage of simulation technology in pursuit of gold medals and world records.



# 1. 边界层的概念

## ◆大雷诺数的流动

### ●低速飞机

$$L = 30m, U_0 = 100m/s, \nu = 1.5 \times 10^{-5}m^2/s$$

$$Re = \frac{100 \times 30}{1.5 \times 10^{-5}} = 2 \times 10^8$$

### ●高速船舶

$$U_0 = 50kn \approx 25m/s$$

$$Re = \frac{25 \times 30}{1.14 \times 10^{-6}} \approx 6.6 \times 10^8$$

$$Re = \frac{F_J}{F_\tau} \propto \frac{\rho L^2 U^2}{\mu U L} = \frac{\rho L U}{\mu}$$



●  $Re \gg 1$  流动意味着粘性力相对于惯性力很小，忽略粘性？



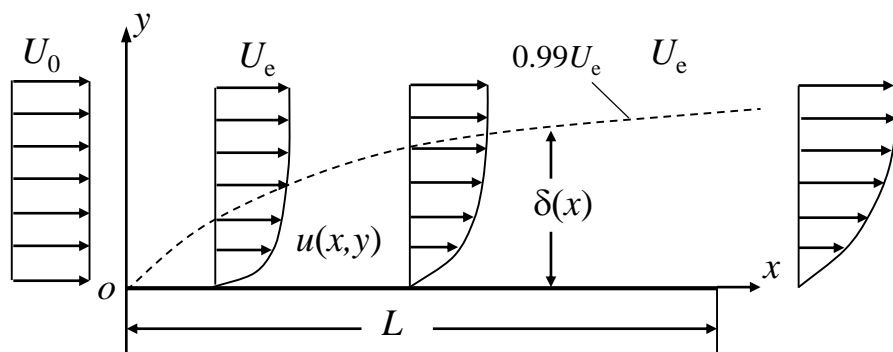
# 普朗特边界层理论的引出

- ◆理想流体力学，采用理想势流理论在早期较成功地解决了与粘性关系不大的一系列流动问题（**升力、波动**等），但对**阻力、扩散**等涉及到粘性的问题则与实际相差甚远，如达朗贝尔佯谬（**1752年**）。
- ◆**1854年**，导出粘性流体运动的Navier-Stokes方程。在**高Re数下**，流体运动的惯性力远远大于粘性力。对大雷诺数下物体绕流粘性效应是否可以忽略，是当时棘手的问题。
- ◆**1904年普朗特**（L. Prandtl，德国力学家，1875-1953）通过大量实验发现：虽然整体流动的Re数很大，但在**靠近物面的薄层流体内**，流场的特征与理想流动相差甚远，沿着法向存在很大的速度梯度，粘性力无法忽略。
- ◆这一**物面近区粘性力起重要作用的薄层称为边界层**。

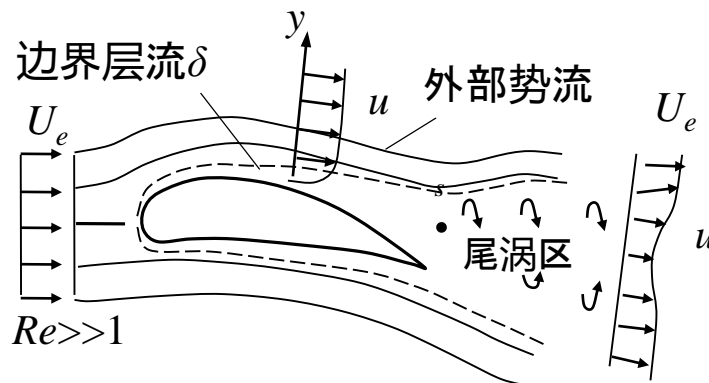
# 大Re数绕流流场的特征

## ◆边界层定义：

速度梯度很大的薄层，粘性在该薄层内起作用。



平壁面绕流的边界层



大Re数绕流流场划分

全流场分成二个流动区域（Prandtl边界层模型）：

外区 ( $y > \delta$ )：几何尺度  $x \sim L$ ,  $y \sim L$ ；流动尺度  $u \sim U_0$ ,  $v \sim U_0$ 。可略去粘性的作用，用无粘流理论分析。

内区 ( $y < \delta$ )：几何尺度  $x \sim L$ ,  $y \sim \delta$ 。速度梯度大，边界层内粘性力与惯性力同量级，流体质点作有旋运动。考虑粘性。

# 附件 Ludwig Prandtl 介绍

Ludwig Prandtl, 1875年2月4日出生于德国弗赖津(Freising)。其父亲是一位在Freising附近农业大学的测量学与工程教授。从小受父亲的影响,他对物理学、机械和仪器特别感兴趣。



1894年入Munich大学深造,1900年获博士学位,博士论文方向是弯曲变形下的不稳定弹性平衡问题研究。毕业后负责为一家新工厂设计吸尘器设备时,通过实验解决了管道流动中一些基本的流体力学问题,他所设计的吸尘器仅需要原设计功率的 $1/3$ ,从此对流体力学感兴趣。

# Ludwig Prandtl介绍

1901年Prandtl担任汉诺威 (Hanover) 科技大学数学工程系的力学教授，在这里他提出边界层理论 (Boundary layer theory) 并开始研究通过喷管的超音速流动问题。1904年Prandtl在德国海德堡第三次国际数学年会上发表了著名的关于边界层概念的论文，这一理论为流体力学中物面**摩擦阻力、热传导、流动分离**的计算奠定了基础，是现代流体力学的里程碑论文，从此Prandtl成为流体力学界的知名学者。

此后他出任德国著名的哥廷根 (Göttingen) 大学应用力学系主任、教授，在这里他建造了1904-1930年期间世界上最大的空气动力学研究中心。在1905-1908年期间，Prandtl进行了大量的喷管中超音速流动问题研究，发展了斜激波 (oblique shock wave) 和膨胀波 (expansion wave) 理论。

# Ludwig Prandtl介绍

在1910年-1920年期间，其主要精力转到低速翼型和机翼绕流问题，提出著名的有限展长机翼的升力线理论（lifting line theory）和升力面理论；从1920年以后，Prandtl 再次研究高速流动问题（high speed flows），提出著名的Prandtl-Glauert压缩性修正准则（compressibility correction rule）。1930年以后，Prandtl被认为是国际著名的流体力学大师，1953年在哥廷根病故。

Prandtl毕生在流体力学和空气动力学中的贡献是瞩目的，被认为是现代流体力学之父（the father of modern fluid mechanics），他对**流体力学的贡献是可获Nobel奖的**。在第二次世界大战期间（1939年9月1日-1945年9月2日），Prandtl一直在哥廷根工作，Nazi德国空军为Prandtl实验室提供了新的实验设备和财政资助。



# Ludwig Prandtl 介绍

普朗特重视观察和分析力学现象，养成了非凡的直观洞察能力，善于抓住物理本质，概括出数学方程。他曾说：“**我只是在相信自己对物理本质已经有深入了解以后，才想到数学方程。方程的用处是说出量的大小，这是直观得不到的，同时它也证明结论是否正确。**”

普朗特指导过81名博士生，著名学者Blasius、Von Karman是其学生之一。

**科学无国界，科学家有国籍**



普朗特, L.  
(1875年—1953年)



卡门, T. von  
(1881年—1963年)



钱学森  
(1911年—2009年)



1945年4-5月间

# 边界层厚度

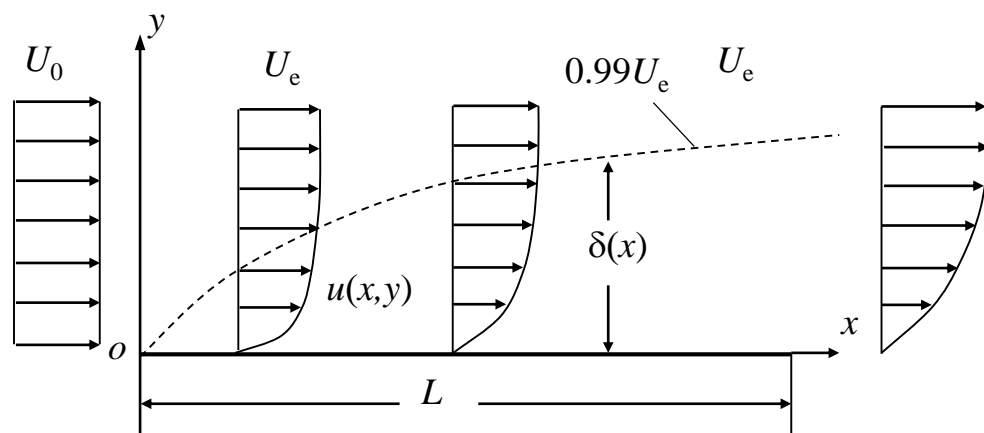
◆ 名义厚度定义： $u=0.99U_e$ 处的 $y$ 值 $\delta(x)$

● 边界层内惯性力与粘性力之比属同量级：

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \sim \frac{U_0^2/L}{\nu \cdot U_0/\delta^2} = \frac{U_0 L}{\nu} \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 = \text{Re}_L \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \sim 1$$

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad \frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\delta \sim \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \quad \text{Re}_x = \frac{U_0 x}{\nu}$$



平壁面绕流的边界层

● Re大时边界层很薄，约为毫米的量级。

# 边界层排挤厚度

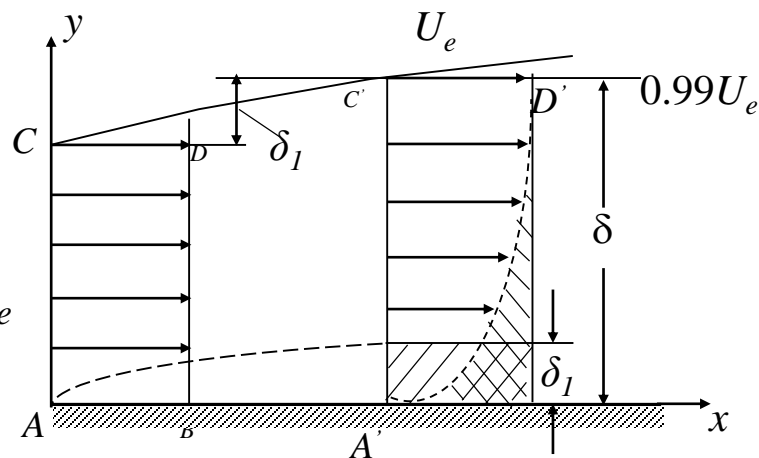
## ◆排挤厚度 Displacement Thickness

### ●定义

$$\delta_1 = \int_0^{\infty(\delta)} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$

$$\int_0^{\delta} \rho u dy = \int_0^{\delta - \delta_1} \rho U_e dy = \int_0^{\delta} \rho U_e dy - \rho \delta_1 U_e$$

$$\longrightarrow \delta_1 U_e = \int_0^{\delta} (U_e - u) dy$$



边界层排挤厚度

## ◆物理意义：用于边界层精确计算时修正物面

厚度为  $\delta$  的理想流体进入边界层时流量损失等于损失了厚度为  $\delta_1$  的理想流体的流量  $\delta_1 U_e$ 。它被排向主流，使主流的流线较势流流线外移  $\delta_1$ ，相当于势流中物体增加  $\delta_1(x)$  厚度。

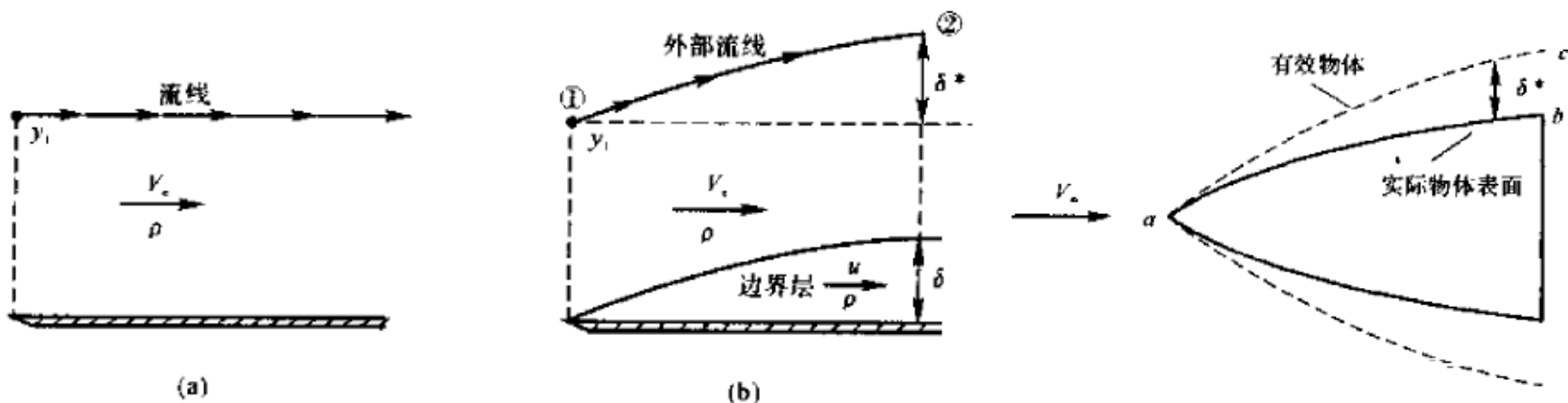
# 等效物体概念

## ◆ 边界层排挤厚度

● 位置①处，质量流量  $\int_0^{y_1} \rho U_e dy$

● 位置②处，质量流量  $\int_0^{y_1} \rho u dy + \rho U_e \delta_1$

●  $\int_0^{y_1} \rho U_e dy = \int_0^{y_1} \rho u dy + \rho U_e \delta_1 \longrightarrow \delta_1 = \int_0^{\infty(\delta)} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$



# 边界层动量损失

◆ 受粘性的阻滞作用，边界层内粘性流体通过的动量要小于理想流体通过边界层的动量，二者之差即为边界层内动量损失。

$$\rho U_e^2 \delta_{20} = \int_0^\delta \rho (U_e^2 - u^2) dy$$

$$\begin{aligned} \rho U_e^2 \delta_{20} &= \int_0^\delta \rho (U_e + u)(U_e - u) dy \\ &= \int_0^\delta \rho U_e (U_e - u) dy + \int_0^\delta \rho u (U_e - u) dy \\ &= \rho U_e^2 \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy + \rho U_e^2 \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \end{aligned}$$

◆ 绝对动量损失厚度  $\delta_{20} = \delta_1 + \delta_2$



# 边界层动量损失厚度和动能损失厚度

## ◆ 动量损失厚度 Momentum Thickness

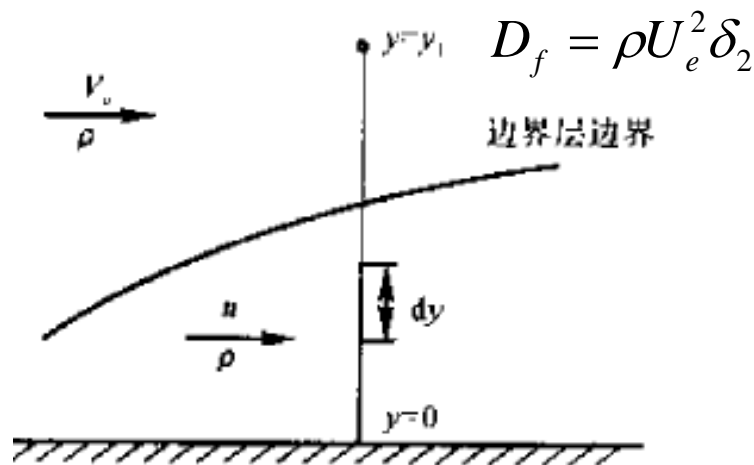
● 边界层内损失的动量相当于厚度为  $\delta_2$  的理想流体动量。

● 定义

$$\delta_2 = \int_0^{\infty(\delta)} \frac{u}{U_e} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$

● 边界层动量损失

$$\int_0^{y_1} \rho u (U_e - u) dy$$



## ◆ 动能损失厚度 Energy Thickness

● 边界层内损失的动能相当于厚度为  $\delta_3$  的理想流体动能。

$$\delta_3 = \int_0^{\infty(\delta)} \frac{u}{U_e} \left( 1 - \frac{u^2}{U_e^2} \right) dy$$

# 边界层几种厚度比较

◆几个厚度比较:  $\frac{u}{U_e} < 1 \implies \delta_2 < \delta_1 < \delta$

都是流向位置  $x$  的函数, 随  $x$  的增加而增厚。

◆对于可压缩流体, 上述各种厚度计算公式变为:

●排挤厚度 
$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_e U_e} \right) dy$$

●动量损失厚度 
$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e U_e} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$

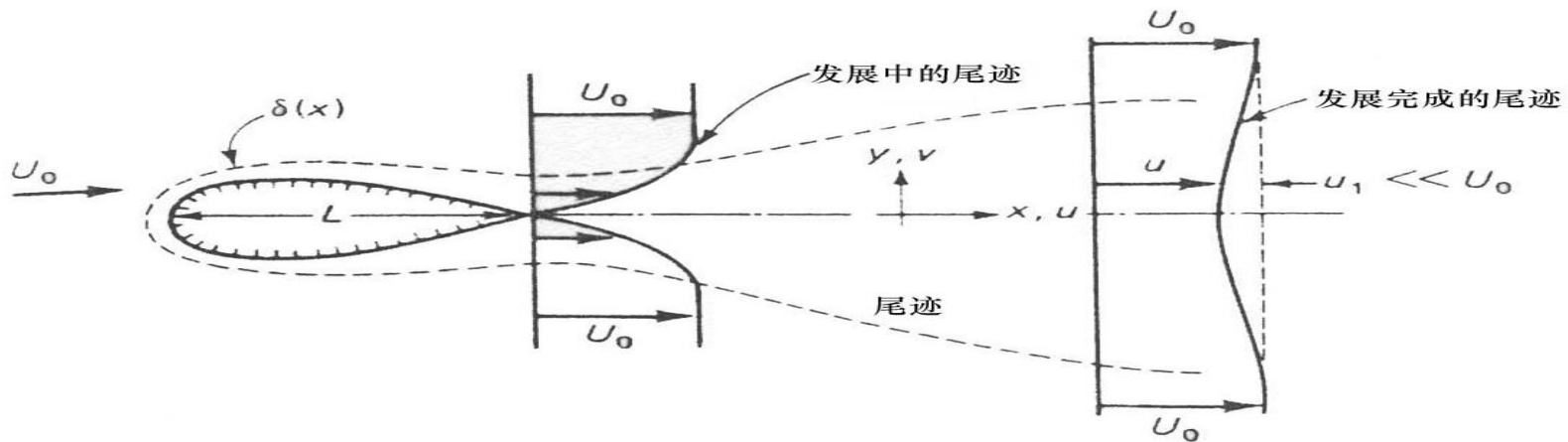
●动能损失厚度 
$$\delta_3 = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e U_e} \left( 1 - \frac{u^2}{U_e^2} \right) dy$$

◆适用于层流和湍流

## 2. 边界层微分方程

### ◆ 边界层流动

- 粘性流体流经任一物体的问题，归结为在相应的边界条件下解 N-S 方程的问题。由于 N-S 方程太复杂，对很多实际问题不能不作一些近似简化假设。
- 考察空气流过翼型的流场，流动分为三个区域：



1. 边界层：N-S方程化简为边界层方程
2. 尾迹区：N-S方程
3. 势流区：理想流Euler方程

## 课堂练习: NS 方程

写出二维、定常、不可压缩粘性流动的N-S方程（连续方程和运动方程），说明方程中各项的物理意义。并对其进行无量纲化，推导出雷诺数 $Re$ 的表达式。

# 平壁面上边界层方程

◆对于二维不可压缩流动，连续方程和N-S方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

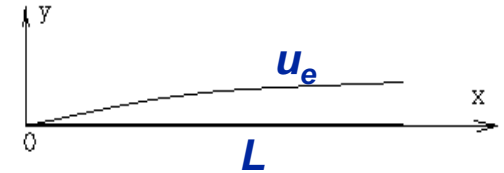
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

◆通过量级比较进行简化，可得到边界层近似方程。



# 边界层内量纲关系

◆选取长度尺度 $L$ ，速度尺度 $u_e$ ，时间尺度 $t=L/u_e$ ，边界层近似假定在边界层内满足下列关系：



① 法向尺度远小于纵向尺度，纵向导数远小于法向导数

$$\frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad \delta \ll L, \quad \frac{\partial}{\partial x} \propto \frac{1}{L}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \propto \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

② 法向速度远远小于纵向速度

$$u \propto \frac{L}{t} = u_e, \quad v \ll u, \quad v \propto \frac{\delta}{t} \propto \frac{\delta}{L/u_e} = \frac{\delta}{L} u_e, \quad \frac{v}{u_e} \propto \frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$$

③ 压强与外流速度的平方成正比

$$p \propto \rho u_e^2$$

# 边界层的量阶分析

◆ 将这些量级关系式代入到N-S方程中:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{u_e}{L} \frac{\delta \cdot u_e}{L} \frac{1}{\delta} = \frac{u_e}{L} \end{cases}$$

两项为同一量级

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{u_e^2}{L} \frac{u_e^2}{L} \frac{\delta}{L} \frac{u_e}{\delta} = \frac{u_e^2}{L} \frac{u_e^2}{L} v \left( \frac{u_e}{L^2} \frac{u_e}{\delta^2} \right) \end{cases}$$

右括号中第一项比第二项低2个量级可略。

边界层内粘性力与惯性力同量级不可忽略，故  $\nu$  的量级为：

$$\nu \frac{u_e}{\delta^2} = \frac{u_e^2}{L}, \quad \text{即: } \nu = \frac{u_e}{L} \delta^2$$

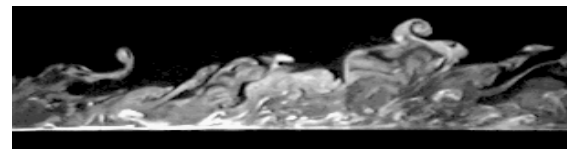
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{u_e^2}{L^2} \delta \frac{u_e^2}{L^2} \delta \frac{u_e^2}{L^2} \delta \frac{u_e^2}{\delta} v \left( \frac{u_e}{L^3} \delta \frac{u_e}{L\delta} \right) \end{cases}$$

# Prandtl 边界层方程 (1904)

◆ 在高  $Re$  数情况下  $\delta$  较小可以忽略，同时忽略质量力，得到 **Prandtl 边界层方程** 为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

◆ 边界条件： $\left\{ \begin{array}{l} y=0 \quad u=0 \quad v=0 \\ y=\infty \quad u=u_e \text{ (或 } U_\infty) \end{array} \right.$



## 法向压力梯度项

◆ 第三个方程  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

◆ 在高Re数情况下较薄的平板边界层内，压力沿法向不变。即  $p$  与  $y$  无关，仅是  $x$  和  $t$  的函数。

◆ 对于曲率不大的弯曲物面，上述边界层方程也近似成立。

# 边界层的基本特征

◆边界层很薄： $\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} \ll 1$      $\frac{v}{u_e} \propto \frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$

◆边界层内速度梯度很大，粘性不可忽略： $\frac{\partial u}{\partial y} \gg 1$

◆边界层内压力沿壁面法向不变，等于外部势流压力：

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \implies p = p_e$$

◆边界层内速度分布具有渐进性： $u|_{y=\delta} = 0.99U_e$  ,     $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0$

◆边界层有涡性

●边界层就是涡层，当流体绕过物面时，无滑移边界条件使物面成为具有一定强度的连续分布的涡源。

$$\Omega_z = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\tau_o}{\mu}$$



# 定常层流边界层问题解法

## ◆ 第一步，求位流解

略去边界层与尾迹，利用理想势流绕流问题的方法，求得物体表面的速度分布（需预先对表面作动量厚度修正）。求得的速度分布可视为边界层外边界上的切向速度分布。即在任一坐标  $x$  处： $y = \delta$  时  $u = u_e(x)$ 。

- 沿边界层外边界，伯努利方程成立：

$$p + \frac{1}{2} \rho u_e^2 = \text{常数}$$

$$\text{取微分 } \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -u_e \frac{\partial u_e}{\partial x}$$

- 因此，边界层内压强分布通过势流解得到，即  $dp/dx$  是一个已知函数。

# 定常层流边界层问题解法

## ◆ 第二步，求解边界层方程组

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

由于  $dp/dx$  是已知函数，所以这两个方程式中只有两个未知数

$$u(x, y), \quad v(x, y)$$

故问题是可解的。求解的边界条件是：

物面： $y=0, \quad u=0, \quad v=0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = -\frac{u_e}{\nu} \frac{\partial u_e}{\partial x}$

边界层外缘： $y=\delta, \quad u=u_e(x), \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0$

求解边界层方程组，可得到边界层内速度分布。

# 定常层流边界层问题解法

## ◆ 第三步，确定物体所受的摩擦阻力

- 假设已经解出了边界层内速度分布：

$$u = u(x, y)$$

- 则物体表面摩擦应力  $\tau_0(x)$  可自下式求出（层流）：

$$\tau_0(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

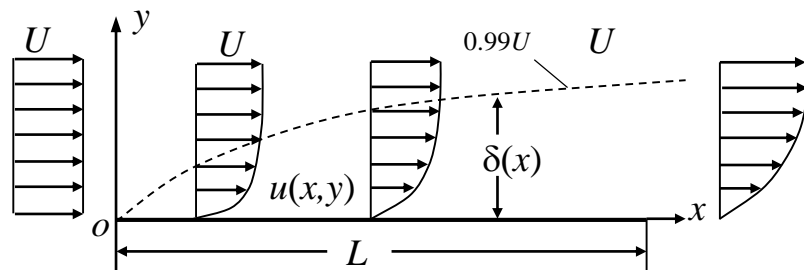
- 再通过积分求出物体所受的总的摩擦阻力。

### 3. 平板层流边界层

◆ 半无限长平板、不可压缩、定常、层流、不计重力、 $\frac{dp_e}{dx} = 0$

◆ 边界层方程（非线性）

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ y = 0, \quad u = v = 0 \\ y \rightarrow \infty, \quad u = U_\infty \end{cases}$$



◆ 1908年，Blasius利用边界层速度分布的相似性求解了平板层流边界层方程。

● 引入流函数  $\psi(x, y)$  以简化方程：

◆ 由于上述方程为非线性偏微分方程，直接求解困难。

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$$

# Blasius解

- ◆ 引入 $\psi$ 后，未知函数  $u, v$  就从两个减少为一个  $\psi$ 。
- ◆ 自变量本来是两个  $x, y$ ，引用一个无量纲量  $\eta = y/\delta$ 。
  - 流函数的量纲等于速度 $\times$ 长度。
  - Blasius假设速度用层外的 $U_\infty$ （即 $u_e$ ），长度用 $\delta$ 的量纲。
  - 根据量级比较，边界层厚度的量级为：

$$\delta \propto \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}} = \sqrt{\frac{x\nu}{U_\infty}}, \quad \eta = \frac{y}{\delta} = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad \frac{u}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta)$$

● 流函数表达为 
$$\psi \equiv \int u dy = U_\infty \sqrt{\frac{x\nu}{U_\infty}} F(\eta) = \sqrt{x\nu U_\infty} F(\eta)$$

式中  $F(\eta)$  是关于  $\eta$  的无量纲待定函数。 
$$F(\eta) \equiv \int_0^\eta f(\eta) d\eta$$



# Blasius解

◆ 将  $u$ 、 $v$  及其相关导数化为函数  $f$  关于  $\eta$  导数：

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x U_{\infty}} F'(\eta) \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} = U_{\infty} F'(\eta) = U_{\infty} f(\eta)$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} [\sqrt{\nu x U_{\infty}} F(\eta)] = -\left[ \sqrt{\nu x U_{\infty}} \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + F(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\nu x U_{\infty}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_{\infty}}{x}} (\eta F' - F) = \frac{U_{\infty}}{2} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} (\eta F' - F) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_{\infty} F''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = -U_{\infty} \frac{y}{2x} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} F''(\eta) = -U_{\infty} \frac{\eta}{2x} F''(\eta)$$

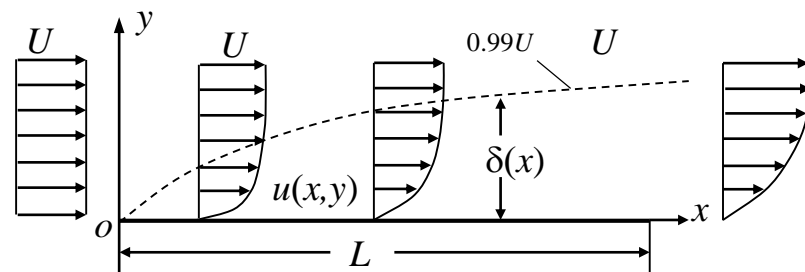
$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} F''(\eta) \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} F'''(\eta) \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} = \frac{U_{\infty}^2}{\nu x} F'''(\eta)$$

# Blasius 解法

◆ 代入边界层微分方程，化简后得三阶常微分方程

$$\left. \begin{aligned} 2F''' + FF'' &= 0 \\ \eta = 0, \quad F' &= 0, F = 0 \\ \eta \rightarrow \infty, F' &= 1 \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{u}{U_{\infty}} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta) = F'(\eta)$$

$$F(\eta) \equiv \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta$$

- 将  $F(\eta)$  在  $\eta=0$  的邻域内展开成幂级数；
- 由边界条件确定各系数。

# Blasius 解法

## ◆ Blasius 假设:

$$F(\eta) = A_0 + A_1\eta + \frac{A_2}{2!}\eta^2 + \frac{A_3}{3!}\eta^3 + \dots + \frac{A_n}{n!}\eta^n + \dots$$

其中,  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  为待定系数

## ◆ 用 $\eta=0$ 处边界条件, 可定: $A_0 = A_1 = 0$

## ◆ 从而:

$$F(\eta) = \frac{A_2}{2!}\eta^2 + \frac{A_3}{3!}\eta^3 + \dots + \frac{A_n}{n!}\eta^n + \dots$$

$$F''(\eta) = A_2 + A_3\eta + \dots + \frac{A_n}{(n-2)!}\eta^{n-2} + \dots$$

$$F'''(\eta) = A_3 + A_4\eta + \frac{A_5}{2!}\eta^2 + \dots + \frac{A_n}{(n-3)!}\eta^{n-3} + \dots$$

# Blasius 解法

◆ 将以上诸式代入微分方程

$$2F''' + FF'' = 0$$

◆ 得： $2\left[A_3 + A_4\eta + \frac{A_5}{2!}\eta^2 + \dots\right] + \left[\frac{A_2}{2!}\eta^2 + \frac{A_3}{3!}\eta^3 + \dots\right] \cdot \left[A_2 + A_3\eta + \frac{A_4}{2!}\eta^2 + \frac{A_5}{3!} + \dots\right] = 0$

◆ 整理后得：

$$\begin{aligned} & 2A_3 + \eta[2A_4] + \frac{\eta^2}{2!}[A_2 + 2A_5] + \frac{\eta^3}{3!}[4A_2A_3 + 2A_6] + \frac{\eta^4}{4!}[6A_2A_4 + 4A_3 + 2A_7] + \\ & + \frac{\eta^5}{5!}[11A_2A_5 + 15A_3A_4 + 2A_8] + \dots = 0 \end{aligned}$$

◆ 对任何  $\eta$  值均须满足，故各系数必须分别等于零。

# Blasius 解法

◆所有不等于零之系数  $A$  均可以  $A_2$  来表示

$$A_3 = 0, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = -\frac{A_2^2}{2}$$

$$A_6 = 0, \quad A_7 = 0, \quad A_8 = -\frac{11}{2} A_2 A_5 = \frac{11}{4} A_2^3, \quad \dots\dots$$

◆令  $A_2 = a$  , 则代求函数

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{C_n a^{n+1}}{(3n+2)!} \eta^{3n+2} \quad \begin{array}{l} C_0 = 1, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 11 \\ C_3 = 375, \quad C_4 = 27897, \quad C_5 = 3,817,137, \quad \dots\dots \end{array}$$

◆利用边界条件  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta) = 1$

●布拉休斯用数值方法定得:  $a = 0.332$

●从而所求的解完全确定。

# Blasius 解析解

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

$$F(\eta)$$

$$F'(\eta) = \frac{u}{U}$$

$$F''(\eta)$$

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

$$F(\eta)$$

$$F'(\eta) = \frac{u}{U}$$

$$F''(\eta)$$

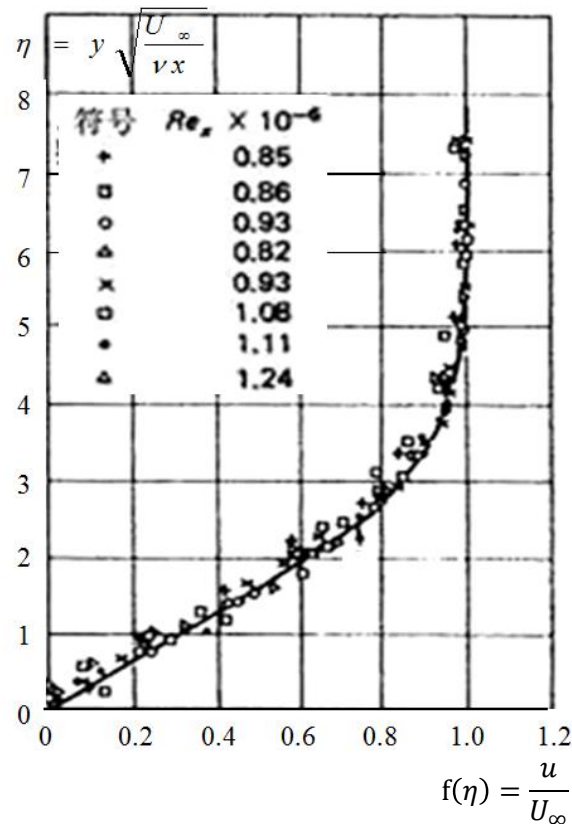
0.0	0	0	0.33206	4.8	3.08534	0.98779	0.02187
0.4	0.02656	0.13277	0.33147	5.0	3.28329	0.99155	0.01591
0.8	0.10611	0.26471	0.32739	5.2	3.48189	0.99425	0.01134
1.2	0.23895	0.39378	0.31659	5.6	3.88031	0.99748	0.00543
1.6	0.42023	0.51676	0.29667	6.0	4.27964	0.99898	0.00240
2.0	0.65003	0.62977	0.26675	6.4	4.67938	0.99961	0.00098
2.4	0.92230	0.72899	0.22809	6.8	5.07928	0.99987	0.00037
2.8	1.23099	0.81152	0.18401	7.2	5.47925	0.99996	0.00013
3.2	1.56911	0.87609	0.13913	7.6	5.87924	0.99999	0.00004
3.6	1.92954	0.92333	0.09809	8.0	6.27923	1.00000	0.00001
4.0	2.30576	0.95552	0.06424	8.4	6.67923	1.00000	0.00000
4.4	2.69238	0.97587	0.03897	8.8	7.07923	1.00000	0.00000

# Blasius 解法

◆由所确定的级数解确定了流函数，也就确定了速度分布，从而就确定了与此相关的其他量，如边界层厚度、剪应力、摩阻系数等

## ◆速度分布曲线

- 实验值与数值解符合很好。
- 速度分布是相似的（相似解）：
  - 各x位置处的速度型不同，  
但 $f(\eta)$ 表示的速度型是一样的。
- 边界层厚度  $\delta$ 
  - 当  $\eta = 5.0$  时， $u/U_\infty = 0.9916$



# 边界层的各种厚度 (thickness)

◆ 边界层厚度  $\frac{u}{U_\infty} = 0.9916, \eta = \frac{y}{\delta} = 5.0$

由:  $\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}},$  得:  $\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = 5 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$

◆ 边界层位移厚度

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_0^\delta (1 - F') d\eta = 1.7208 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

◆ 边界层动量损失厚度

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_0^\delta F'(1 - F') d\eta = 0.664 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\delta \approx 3\delta_1 \approx 8\delta_2$$



# 壁面摩擦阻力

◆ 壁面切应力  $\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu U_\infty F''(\eta) \Big|_{\eta=0} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = 0.332 \rho U_\infty^2 \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}}$

◆ 壁面当地摩擦系数  $C_f = \frac{\tau_0}{0.5 \rho U_\infty^2} = 0.664 \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}}$

◆ 平板的总摩擦阻力与阻力系数

$$D_F = \int_0^L \tau_0 dx = 0.664 \rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu L}{U}}$$

$$C_F = \frac{D_F}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L} = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_L}}$$

$$(100 < \text{Re}_L < 5 \times 10^5)$$

郭永怀二阶近似解:

$$C_F = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_L}} + \frac{4.12}{\text{Re}_L}$$

$$(1 < \text{Re}_L < 5 \times 10^5)$$



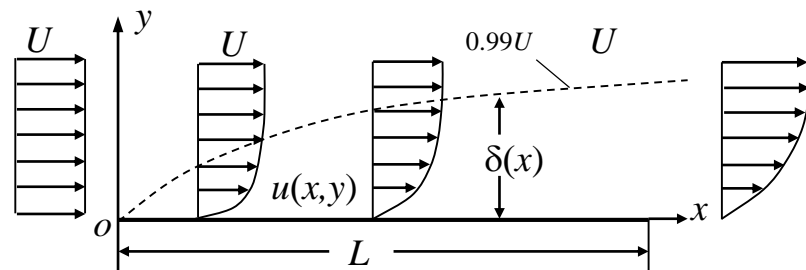
郭永怀 (1909—1968)

1968年12月5日，郭永怀带着一份事关第二代导弹成功与否的绝密资料踏上前往北京汇报的航班，为了不耽误第二天的工作，郭永怀执意乘坐夜航。可是谁也没有想到，飞机在距离北京机场上空500米的高度时突然失去平衡，即将坠毁的一瞬间，郭永怀与警卫员将装有绝密资料的公文包紧紧夹在胸口中间，最终两人被烧成一体，而数据资料被保护的完好无损。在烈火吞噬飞机的那一刻，一名共产党员的担当意识驱使郭永怀在几秒钟做出了保护资料、以身许国的选择。



# 平板层流边界层准确解小结

◆半无限长平板、不可压缩、  
定常、层流、不计重力、 $\frac{dp_e}{dx} = 0$



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ y=0, \quad u=v &= 0 \\ y \rightarrow \infty, \quad u &= U \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta) \\ F(\eta) &\equiv \int_0^\eta f(\eta) d\eta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2F''' + FF'' &= 0 \\ \eta=0, \quad F' &= 0, F=0 \\ \eta \rightarrow \infty, \quad F' &= 1 \end{aligned} \right\}$$

边界层方程

边界层速度剖面相似性

三阶常微分方程

◆求解：布拉休斯解（幂级数展开法）或“打靶法（试凑法）”

# 4. 边界层动量积分方程式

(Von Karman, 1921)

## ◆ 动量积分关系式方法

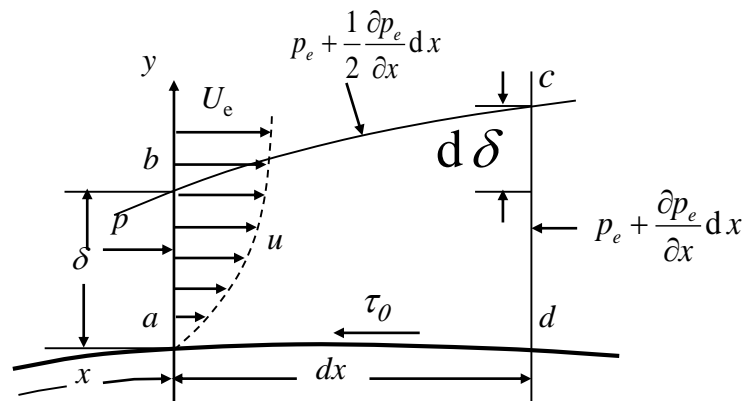
- 在边界层内任取一控制体，控制体长度为 $dx$ ，控制面为 $A_{ab}$ 、 $A_{bc}$ 、 $A_{cd}$ 、 $A_{da}$ 。

- 质量流量

$$\dot{m}_{ab} = \int_0^{\delta(x)} \rho u dy \quad \dot{m}_{cd} = \dot{m}_{ab} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) dx$$

- 由质量守恒定律， $A_{bc}$ 流入控制体的质量流量为：

$$\dot{m}_{bc} = \dot{m}_{cd} - \dot{m}_{ab} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) dx$$



# 动量积分关系推导

## ◆ 动量流量

- 由  $A_{ab}$  面流入控制体的动量流量为：

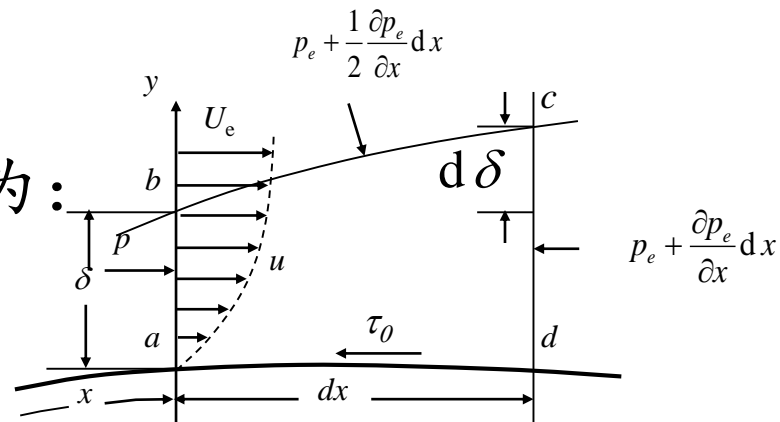
$$K_{ab} = \int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy$$

- 由  $A_{cd}$  面流出控制体的动量流量为：

$$K_{cd} = K_{ab} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy \right) dx$$

- 通过  $A_{bc}$  流入控制体的动量流量在  $x$  方向的分量为：

$$K_{bc} = u_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) dx$$



# 动量积分关系推导

## ◆ x方向作用力

- 在  $A_{ab}$  面上的作用力为：

$$F_{ab} = p\delta(x)$$

- 在  $A_{cd}$  面上的作用力为：

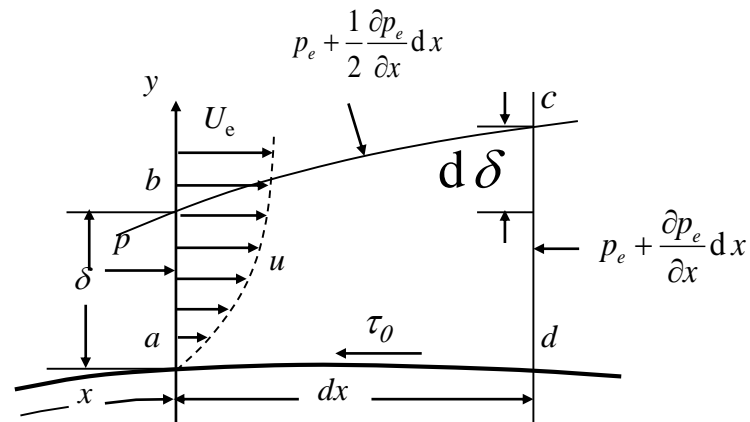
$$F_{cd} = -\left(p + \frac{dp}{dx}dx\right)(\delta + d\delta)$$

- 在  $A_{bc}$  面上的力为：

$$F_{bc} = \left(p + \frac{dp}{dx} \frac{dx}{2}\right)d\delta$$

- 在  $A_{ad}$  面上的切应力为：

$$F_{ad} = -\tau_0 dx$$





# 动量积分关系式

- 对控制体建立x方向的动量方程为：

$$\begin{aligned} p\delta - \left( p + \frac{dp}{dx} dx \right) (\delta + d\delta) + \left( p + \frac{dp}{dx} \frac{dx}{2} \right) d\delta - \tau_0 dx \\ = K_{ab} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy \right) dx - K_{ab} - u_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) dx \end{aligned}$$

- 整理后，得：

$$\frac{dp}{dx} \delta(x) + \tau_0 = u_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy \right)$$

- 由于上积分只是x的函数，右端可得：

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dx}$$

# 动量积分关系式

◆ 动量方程  $\frac{dp}{dx} \delta(x) + \tau_0 = u_e \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) - \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy \right) \dots\dots\dots (1)$

$u_e \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) = \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u u_e dy \right) - \frac{du_e}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho u dy \dots\dots\dots (2)$

$\frac{dp}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx}$

由伯努利方程

$\frac{dp}{dx} \delta(x) = -\rho u_e \frac{du_e}{dx} \int_0^{\delta(x)} dy = -\frac{du_e}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho u_e dy \dots\dots\dots (3)$

将(2)、(3)代回(1)式得：

$$\tau_0 = \underbrace{\frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u u_e dy \right) - \frac{du_e}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho u dy}_{\text{由(2)代入}} - \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy \right) + \underbrace{\frac{du_e}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho u_e dy}_{\text{由(3)代入}}$$



# 边界层动量积分方程

◆整理可得：
$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} \left( u_e^2 \int_0^{\delta(x)} \frac{u}{u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \right) + u_e \frac{du_e}{dx} \int_0^{\delta(x)} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy$$

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} (u_e^2 \delta_2) + u_e \delta_1 \frac{du_e}{dx}$$

◆边界层动量积分方程

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} + u_e (2\delta_2 + \delta_1) \frac{du_e}{dx}$$

- 一阶常微分方程，既适用于层流也适用于湍流边界层。该方程给出了壁面剪切应力与位移厚度和动量厚度之间的关系，含三个未知数 $\tau_0$ 、 $\delta_1$ 和 $\delta_2$ ，因此需寻找补充关系才能求解。

# 边界层动量积分方程

◆ 无量纲形式

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\delta_2}{dx} + (2 + H) \frac{\delta_2}{u_e} \frac{du_e}{dx}$$

$$C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho u_e^2} \quad \text{为当地摩擦系数, } H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \text{ 称为形状因子}$$

◆ 对平板边界层流动, 有  $\frac{dp}{dx} = 0, \frac{du_e}{dx} = 0, u_e = \text{const.}$

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_e^2 \frac{d\delta_2}{dx}$$

# 从边界层微分方程直接积分推导

## ◆ 二维定常不可压缩流体边界层方程（不计体积力）

$$\text{连续: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{动量: } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

## ◆ 用 $u_e$ 乘以连续方程，注意 $u_e = u_e(x)$ ：

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_e u) + \frac{\partial}{\partial y}(u_e v) = u \frac{\partial u_e}{\partial x}$$

## ◆ 并利用连续方程把动量方程改写：

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \tau = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y}$$

# 直接积分边界层微分方程推导

$$\tau = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y}$$

◆ 两式相减，得到：

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_e u - uu) + \frac{\partial}{\partial y} (u_e v - uv) + (u_e - u) \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

◆ 积分上式，有：

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (u_e u - uu) dy + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} (u_e v - uv) dy + \frac{\partial u_e}{\partial x} \int_0^\delta (u_e - u) dy = -\frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

$\searrow$   
 $(u_e v - uv)|_0^\delta = 0$

◆ 整理后，得到：

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_e^2 \delta_2) + u_e \delta_1 \frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho}$$

$$\delta_1 = \int_0^{\infty(\delta)} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$

$$\delta_2 = \int_0^{\infty(\delta)} \frac{u}{U_e} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$

◆ 这与Karman方程完全一样。

# 利用动量积分关系式解边界层问题

## ◆ 求解动量积分方程

- 边界层动量积分方程含三个未知数： $\delta_1$ 、 $\delta_2$  和  $\tau_0$ 。  
因此，必须寻求补充关系才能求解。
- 对于层流边界层而言由于三个未知量都取决于边界层的速度分布，因此只要给定速度分布，就可以求解。显然，该方法的精度取决于边界层内速度分布的合理性。

## ◆ 波尔豪森方法 (Pohlhausen)

- 对于层流边界层，通常假定速度分布为：

$$\frac{u}{u_e} = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4 + \dots$$

# 确定速度分布假定中的系数

## ◆ 确定系数的条件

$$y=0, \quad u=v=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\mu}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{u_e u_e'}{\nu}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$$

$$y=\infty, \quad u=u_e, \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0, \quad n=1,2,3,\dots$$

◆ 上述边界条件中除了壁面剪应力确定的条件  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\mu}$  适合于层流边界层之外，其余条件既适合于层流边界层也适合于湍流边界层。

# 平板层流边界层（波尔豪森方法）

◆ 假设速度型如下：

$$\frac{u}{u_e} = A_0 + A_1 \frac{y}{\delta} + A_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + A_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

◆ 式中待定系数由下述边界条件确定。四个系数只需四个条件。物面条件为：

$$y=0 \text{ 时, } u=0, \text{ 以及 } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ (平板时 } u_e = C)$$

◆ 边界层边界处的条件为：

$$y=\delta \text{ 时, } u=u_e, \text{ 以及 } \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

◆ 由这四个条件，定得四个系数为：

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 3/2, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -1/2$$

# 平板层流边界层

## ◆速度分布

$$\frac{u}{u_e} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$$

## ◆由牛顿粘性定律: $\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$

$$\tau_0 = \frac{3}{2} \mu \frac{u_e}{\delta}$$

## ◆求解积分关系式。对于平板边界层 $\frac{\partial u_e}{\partial x} = 0$ , 积分关系式为比较简单的形式:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} \quad \longrightarrow \quad \tau_0 dx = d(\rho u_e^2 \delta_2)$$



## 平板层流边界层

◆将速度分布  $\frac{u}{u_e} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$  代入动量厚度表达式可得：

$$\delta_2 = (39/280)\delta$$

◆将上述关系代入动量积分关系式可得：

$$\frac{13}{140} \delta \cdot d\delta = \frac{\mu}{\rho u_e} \cdot dx$$

◆边界条件为：x=0 时， $\delta=0$ ，积分上式，得平板边界层的厚度  $\delta$  沿板长的变化规律是：

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

◆这个结果与勃拉休斯数值解结果(常数为5.0)相差不大。

## 平板层流边界层

- ◆作用在宽度为  $b$ （垂直于纸面的尺寸）、长度为  $l$  的单面平板上的摩擦力为：

$$F = \int_0^l \tau_0 b \cdot dx$$

- ◆代入  $\tau_0 = \frac{3}{2} \mu \frac{u_e}{\delta}$  和  $\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$  积分

$$F = \frac{1.296}{\sqrt{\text{Re}_l}} \frac{\rho V_\infty^2}{2} S$$

- ◆单面平板的摩擦阻力系数为：

$$C_F = \frac{X_F}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cdot S} = \frac{1.296}{\sqrt{\text{Re}_l}}$$

- ◆上述结果与勃拉休斯数值解结果（常数为1.328）相差也不大

# 不同速度剖面假设对总阻力系数的影响

$\frac{u}{U} = f(\eta)$	$\frac{\delta}{x} \sqrt{\text{Re}_x}$	$\frac{\delta_2}{\delta}$	$\frac{\delta_1}{\delta}$	$C_\tau \sqrt{\text{Re}_x}$	$C_f \sqrt{\text{Re}_L}$	error
$\eta$	3.46	1/6	1/2	0.578	1.155	13%
$2\eta - \eta^2$	5.48	2/15	1/3	0.730	1.460	9.9%
$\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	4.64	39/280	3/8	0.646	1.292	2.6%
$2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	5.83	37/315	3/10	0.686	1.372	3.3%
$\sin(\frac{\pi}{2}\eta)$	4.79	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	0.654	1.310	1.4%
<b>Blasius</b> Analytical result	4.92	0.133	0.344	0.664	1.328	
<b>Nikuradse</b> Exp. result	5.64				1.315 1.319	1.0%

## 5. 沿二维曲面的层流边界层

### ◆ 曲面边界层问题

- 曲率半径  $R(x)$  足够大  $\delta \ll R, dR/dx \approx 1$
- $x$  平行于当地壁面切向方向,  $y$  取壁面法向, 建立方程组, 有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

- 边界层外缘处忽略  $y$  方向速度和粘性的影响, 有:

$$U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad \longrightarrow \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

# 具有相似解的解法

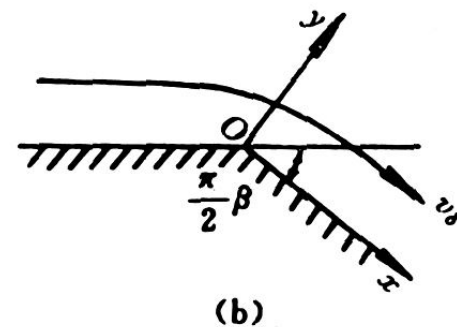
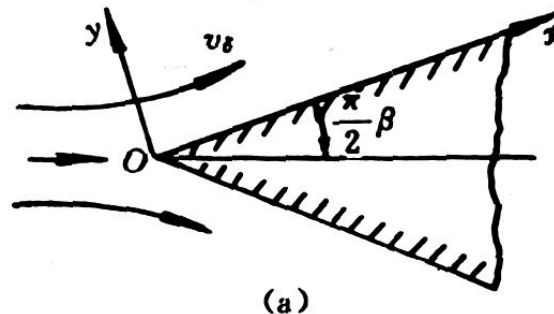
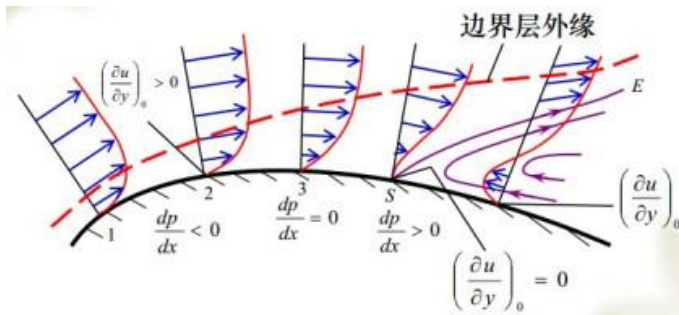
◆  $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0 \quad \longrightarrow \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

● 式中多了  $U_e \frac{dU_e}{dx}$  这项，不一定具有相似解

● 当主流速度可表示成  $x$  的幂函数时，边界层具有相似解

$$U_e(x) = U_0 x^m$$

$$\beta = \frac{2m}{m+1}$$



# 外部势流特征

◆ 主流速度  $U_e(x) = U_0 x^m$  外部势流的流动特点。

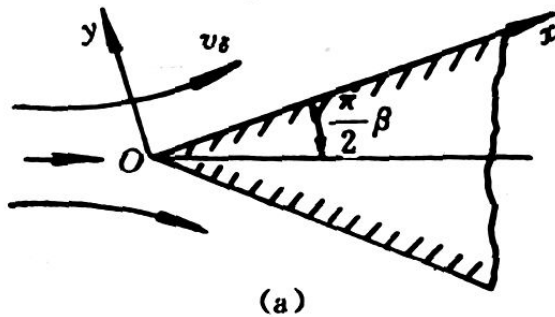
◆ 半顶角  $\frac{\pi}{2}\beta$  ,  $\beta = \frac{2m}{m+1}$

①  $0 \leq \beta \leq 2$  ( $0 \leq m \leq \infty$ ) : 绕半顶角  $\frac{\pi}{2}\beta$  的二维半无限楔形体的对称位势流动

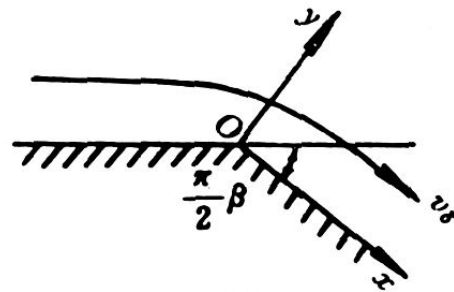
②  $\beta = 0$  ( $m = 0$ ) : 布拉修斯平板绕流

③  $\beta = 1$  ( $m = 1$ ) : 绕钝头柱体前驻点附近流动 (顶角180)

④  $-2 \leq \beta \leq 0$  ( $-1/2 \leq m \leq 0$ ) : 绕拐角为  $\frac{\pi}{2}\beta$  的外钝角的位势流



(a)



(b)

# 具有相似解的解法

$$U_e(x) = U_0 x^m \quad \beta = \frac{2m}{m+1}$$

◆ 假设  $\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{V_0}{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}}$  和  $\psi = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \nu V_0 x^{\frac{m+1}{2}} f(\eta)$

● 费克纳-斯肯 Falkner-Skan 方程

$$f''' + f'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

● 边界条件为

$$\frac{u}{U_\infty} = F\left(\frac{y}{\delta}\right) = F(\eta)$$

$$\eta = 0, \quad f' = 0, \quad f = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad f' = 1$$

$$\psi \equiv \int u dy = U_\infty \sqrt{\frac{x\nu}{U_\infty}} f(\eta) = \sqrt{x\nu U_\infty} f(\eta)$$

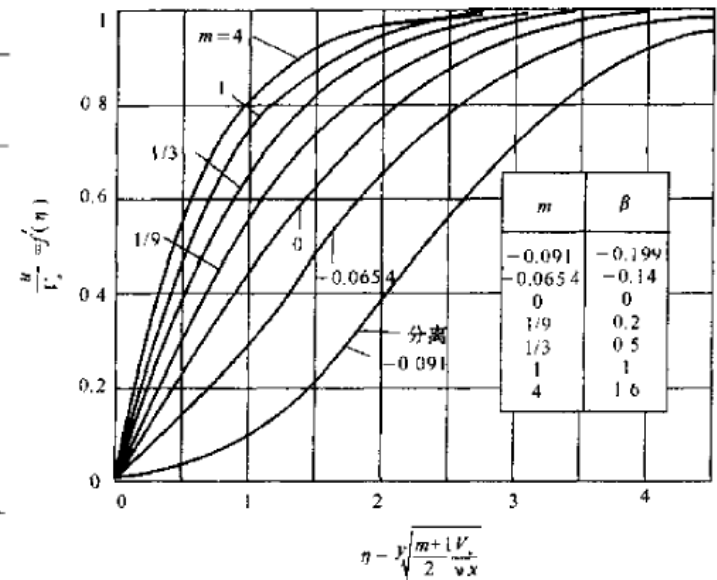
试凑法 shooting method 求解

# 相似解

## ◆ 试凑法 (shooting method) 的求解结果

表 15.2 速度分布函数  $f'(\eta)$  的值

$\beta \backslash \eta$	-0.1988	-0.10	0	0.1	0.5	1.0	2.0
0.0	0	0	0	0	0	0	0
0.5	0.024 8	0.171 8	0.234 2	0.280 3	0.401 5	0.494 6	0.609 6
1.0	0.099 1	0.362 8	0.460 6	0.527 4	0.681 1	0.777 8	0.871 7
2.0	0.380 2	0.731 4	0.816 7	0.863 7	0.942 1	0.973 2	0.991 4
3.0	0.727 8	0.941 3	0.969 1	0.980 8	0.995 2	0.998 5	0.999 7
4.0	0.939 9	0.994 4	0.997 8	0.998 8	0.999 9		
5.0	0.994 5	0.999 8	0.999 9				
6.0	0.999 8						



◆ 边界层相对厚度  $\eta_{f'=0.99}$  随系数  $\beta$  的增大而减小



# 边界层位移厚度和壁面摩擦应力

## ◆边界层位移厚度

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = A(\beta) \sqrt{\frac{2\nu}{(m+1)U_0}} x^{\frac{1-m}{2}}$$

$$A(\beta) = \int_0^\infty (1 - f') d\eta$$

表 15.3  $A(\beta)$  和  $f''(0)$  的值

$\beta$	$A(\beta)$	$f''(0)$
-0.198 8	2.359	0.000 0
-0.10	1.444	0.319 1
0.00	1.217	0.469 6
0.10	1.089	0.587 0
0.50	0.804	0.927 7
1.00	0.648	1.232 6
1.20	0.607	1.336 0
1.60	0.544	1.521 0
2.00	0.498	1.687 0

●边界层位移厚度随x变化： $m > 1$ ， $m < 1$

## ◆壁面摩擦应力

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \left( \frac{\partial (U_e f')}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U_0}{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}} = \left( \frac{\mu \rho (m+1)}{2} \right)^{\frac{1}{2}} U_0^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3m-1}{2}} f''(0)$$

●当 $\beta = -0.1988$  ( $m = -0.0904$ )时， $f''(0) = 0$ ，壁面摩擦应力为零，壁面处速度梯度为零，边界层将发生分离。

● $\beta < -0.1988$ ，边界层逆流

# 边界层微分方程的数值解法

◆ 大部分边界层问题不存在相似解 😞

◆ 基本思想

- 将边界层微分方程对时间和空间坐标离散，化成相应的差分方程，再采用相应的数值计算方法求解。

◆ 特点

- 😊 适用性强，不受外部流动条件的限制，对于层流边界层和湍流边界层都能用
- 😞 较大计算工作量，数值计算格式
- 相对于直接求解NS方程有所简化

# 数值解法

◆ 引入变量  $\eta$  和流函数  $\psi$

$$\eta = y \sqrt{\frac{V_e}{\nu x}} \quad \psi(x, y) = f(x, \eta) \sqrt{U_e x \nu}$$

◆ 动量方程

$$f''' + \frac{1+m}{2} f f'' + m(1-f'^2) = x \left( f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$m(x) = \frac{x}{U_e} \frac{dU_e}{dx}, \quad f', f'', f''' \text{ 表示 } f \text{ 对 } \eta \text{ 的 } n \text{ 偏导数}$$

◆ 边界条件  $f(x, 0) = f'(x, 0) = 0$  和  $f'(x, \infty) = 1$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_n \approx \left( \frac{1}{x_n - x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - x_{n-2}} \right) f_n - \frac{x_n - x_{n-2}}{(x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})} f_{n-1} + \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2})} f_{n-2}$$

$$\approx \frac{1}{2\Delta x} (3f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

## 6. 边界层的分离

◆边界层中的流体质点受惯性力、粘性力和压力的作用,其中:

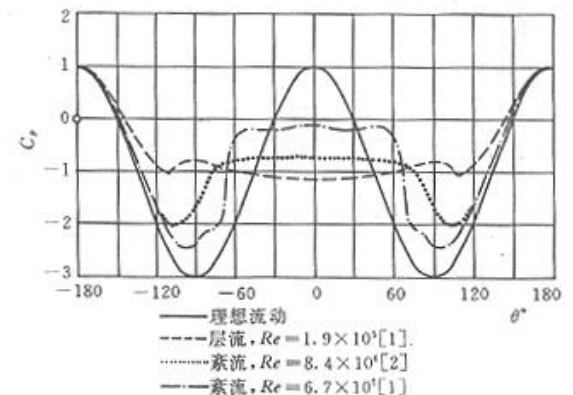
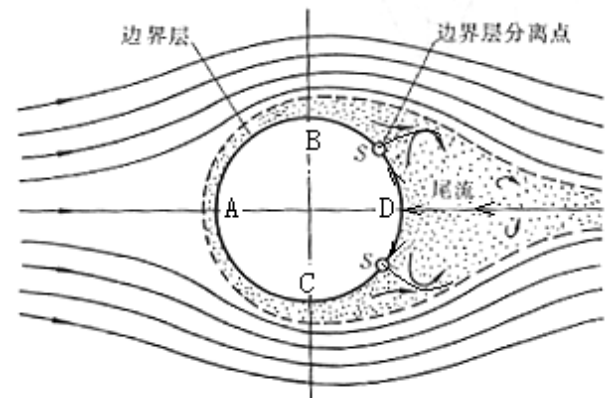
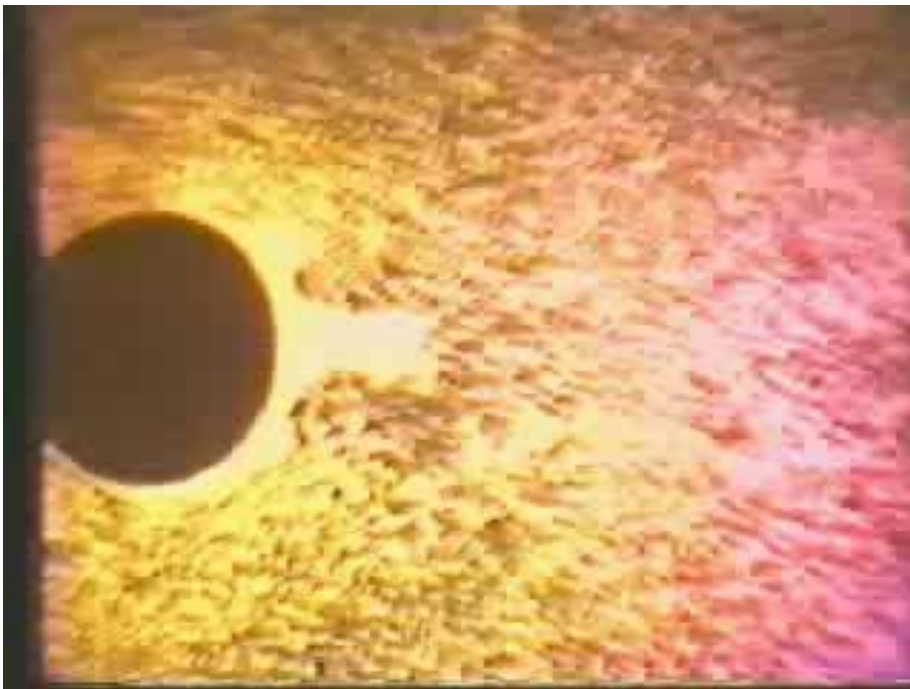
- 惯性力与粘性力的相对大小决定了粘性影响的相对区域大小,或边界层厚度的大小;
- 粘性力的作用始终是阻滞流体质点运动,使流体质点减速,失去动能;
- 压力的作用取决于绕流物体的形状和流道形状,顺压梯度有助于流体加速前进,而逆压梯度阻碍流体运动。



# 边界层的分离现象

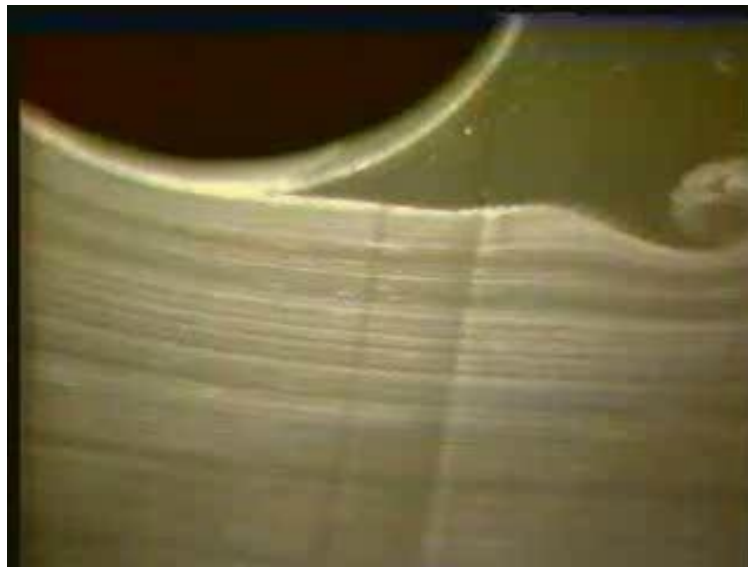
## ◆ 圆柱绕流边界层分离的原因

- 边界层内流体质点要克服粘性力做功而消耗机械能，在逆压区内流体不能无损失的减速到达D点，而是在某处使速度降为零，从而造成流动从壁面分离。



# 分离点

- ◆分离点下游区域受逆压梯度的作用而发生倒流。**分离点**定义为紧邻壁面顺流区与倒流区的分界点。
- ◆在分离点附近和分离区，**边界层假设不再成立**。
  - 边界层厚度大大增加

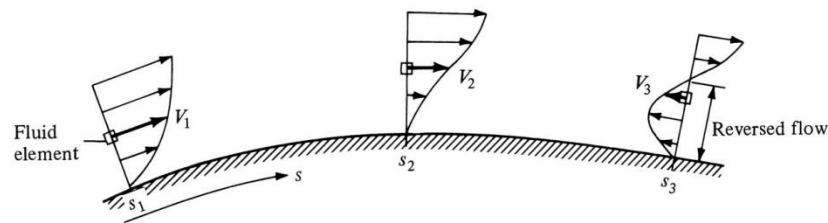
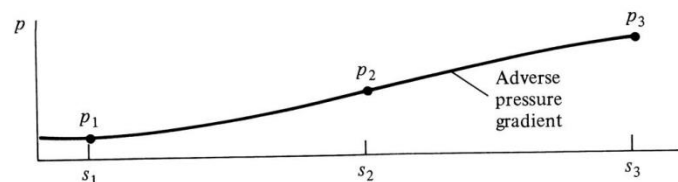
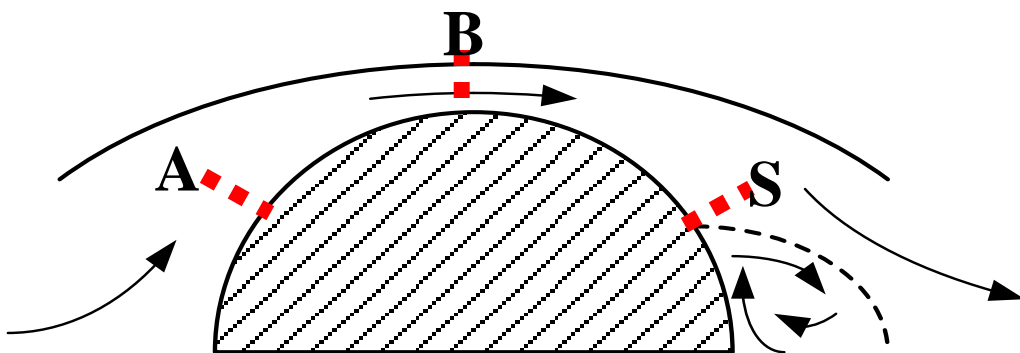




# 顺压梯度与逆压梯度

◆ **顺压梯度**：A到B，沿流向压力逐渐减小，如机翼上表面前段。

◆ **逆压梯度**：B到S，沿流向压力逐渐增加，如机翼上表面后段。



# 边界层分离的必要条件

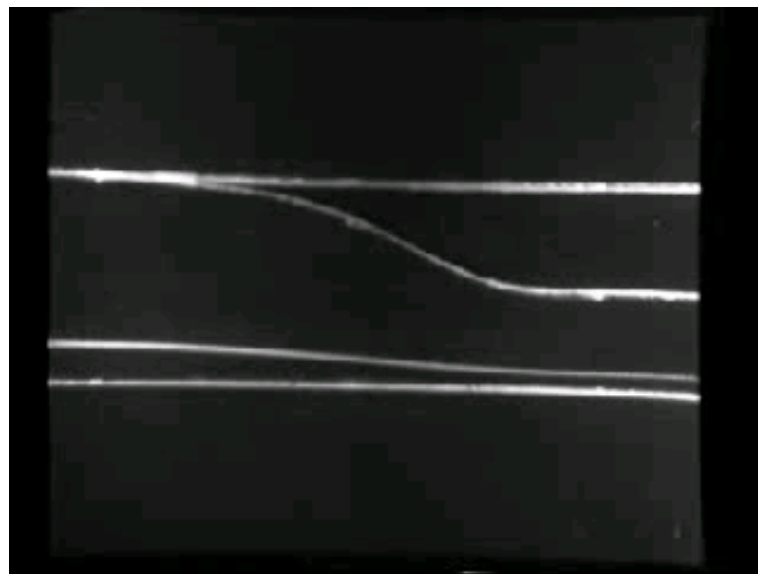
◆边界层分离的必要条件是：**存在逆压梯度和粘性剪切层。**

- 仅有粘性的阻滞作用而无逆压梯度，不会发生边界层的分离，因为无反推力使边界层流体进入到外流区。这说明，零压梯度和顺压梯度的流动不可能发生边界层分离。

逆压梯度时边界层变厚，分离



无压强梯度时边界层虽然变厚，但不分离

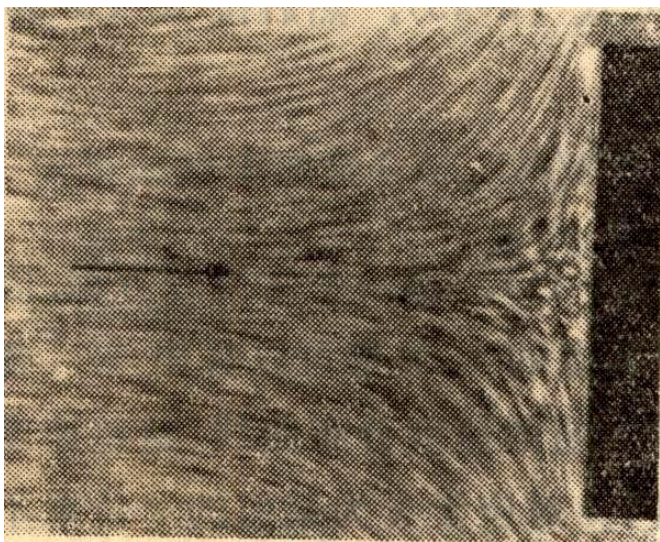


顺压梯度时边界层变薄，不分离

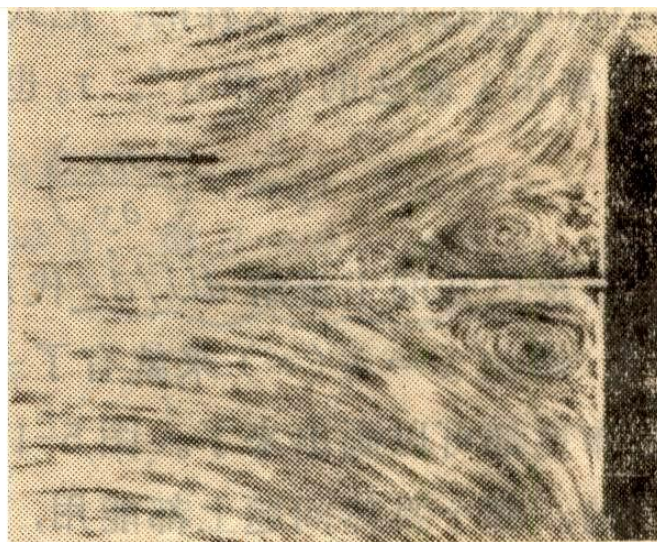


# 边界层分离的必要条件

- ◆ 只有逆压梯度而无粘性剪切作用，同样也不会发生分离现象，因为无阻滞作用，运动流体不可能消耗动能而滞止下来。
- ◆ 在粘性剪切力和逆压梯度的同时作用下才可能发生分离。



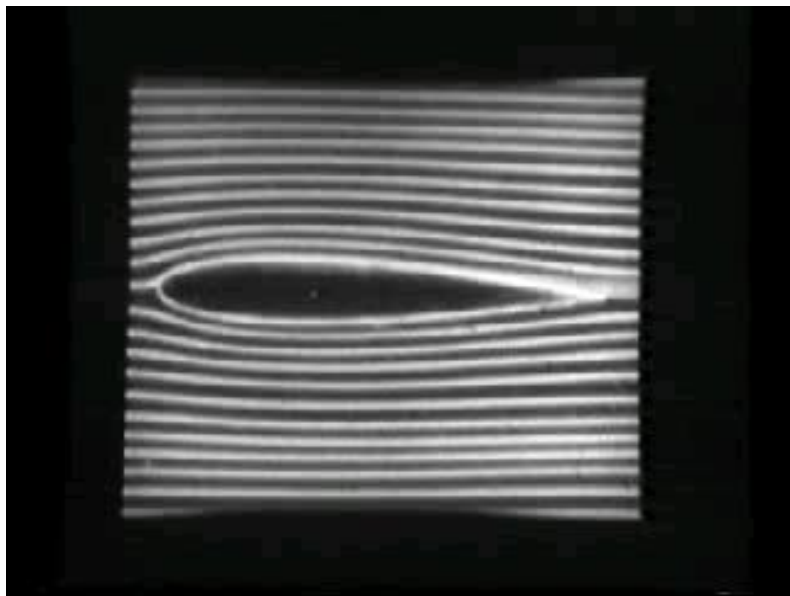
有逆压无剪切：不分离



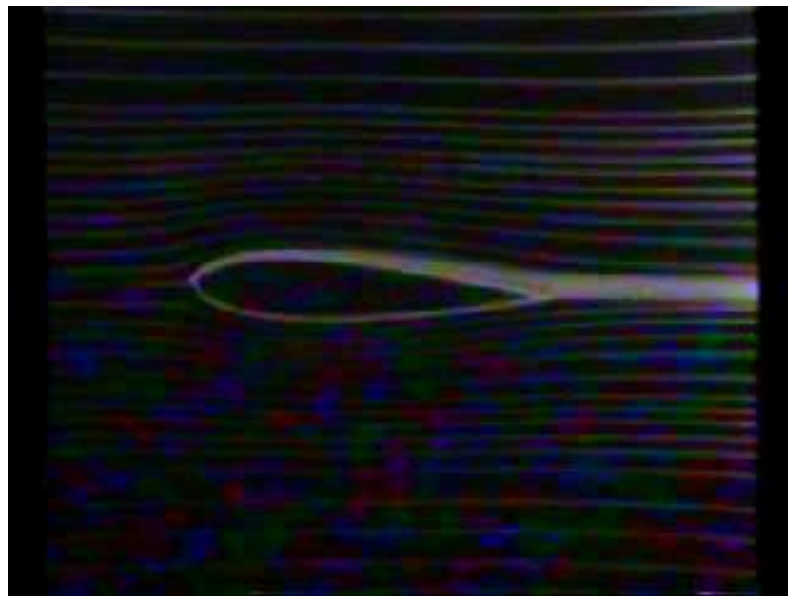
有逆压有剪切：可能分离

# 气流绕翼型的流动与边界层分离现象

一定迎角时上翼面最大速度点后的减速增压区将出现分离，一方面改变了绕流的形状使升力大为降低；另一方面造成了减速增压过程的机械能有损失，实验表明分离区的压强接近分离点的压强，从而造成了较大的压差阻力，同时还存在摩擦阻力。



翼型小攻角时不分离流谱



翼型大攻角时分离流谱

# 在不同压力梯度区边界层的速度分布

◆根据边界层方程，在壁面上

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{u_e}{\nu} \frac{\partial u_e}{\partial x}$$

◆压力梯度对边界层内流动的速度分布的影响

●顺压梯度  $\frac{\partial p}{\partial x} < 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0, \frac{\partial u_e}{\partial x} > 0$

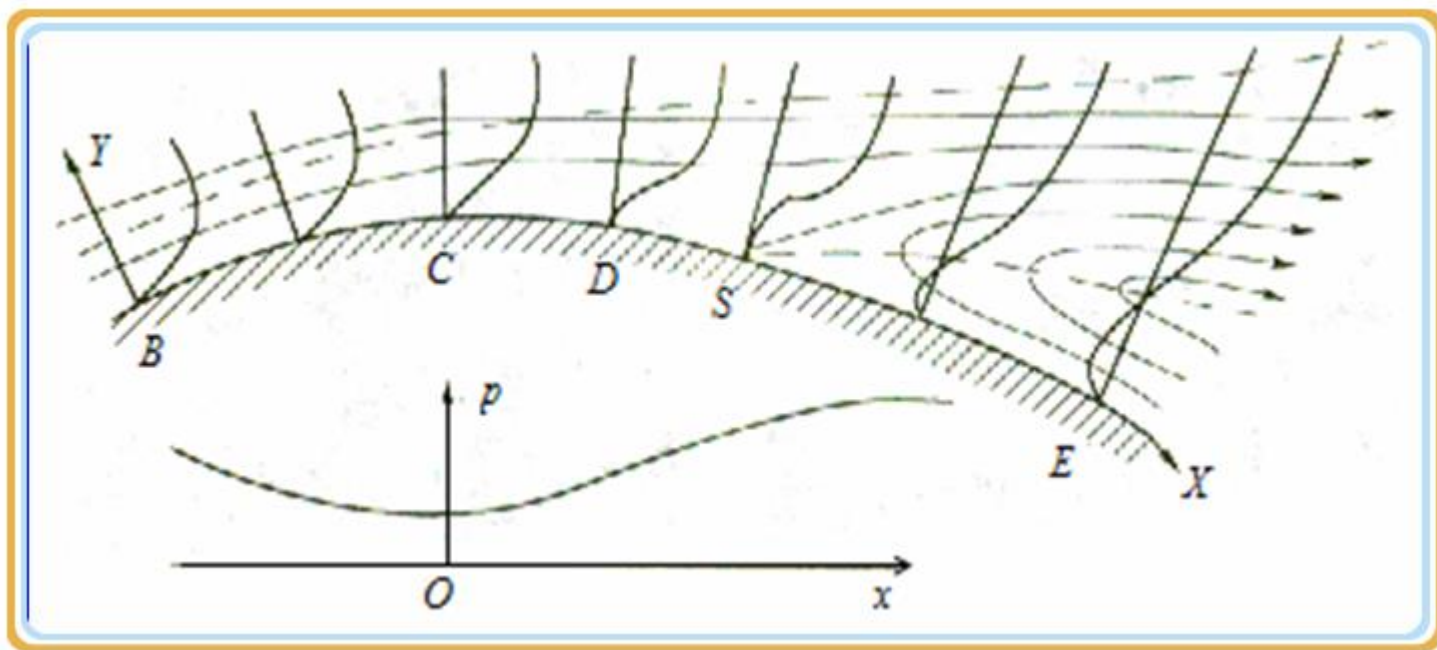
●逆压梯度  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0, \frac{\partial u_e}{\partial x} < 0$

●零压梯度  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial u_e}{\partial x} = 0$

# 边界层速度分布

◆ 随着压力梯度的变号，边界层速度分布的曲率将改变符号。

● 粘性流体绕过曲线壁面时，速度将经历从加速达到最大然后减速的过程，对应的压强也会从顺压变化为逆压，从而边界层内速度分布的曲率也将随之改变。





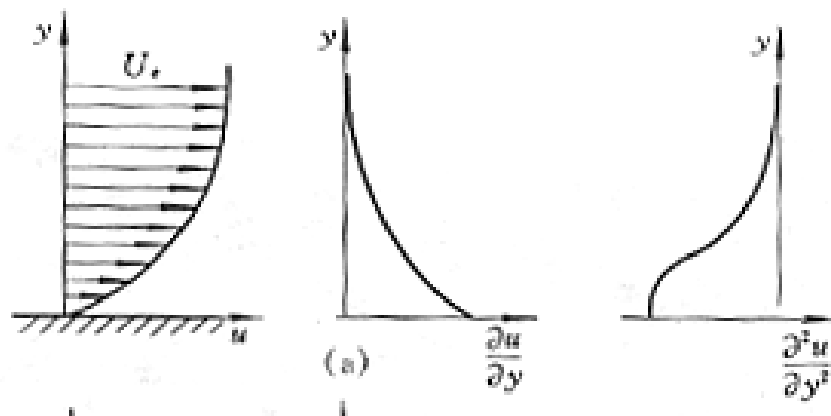
## 顺压梯度区特征

◆对于顺压梯度区，压力沿程减小，速度沿程增加。在壁面处， $u$ 关于 $y$ 是凸曲线：

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} > 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} < 0$$

◆在边界层的外边界上

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} \approx 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=\delta} = 0^- < 0$$



◆说明在顺压梯度区，边界层内的速度沿 $y$ 方向是单调增加的，分布曲线无拐点，是一条向外凸的光滑曲线，流动是稳定的。

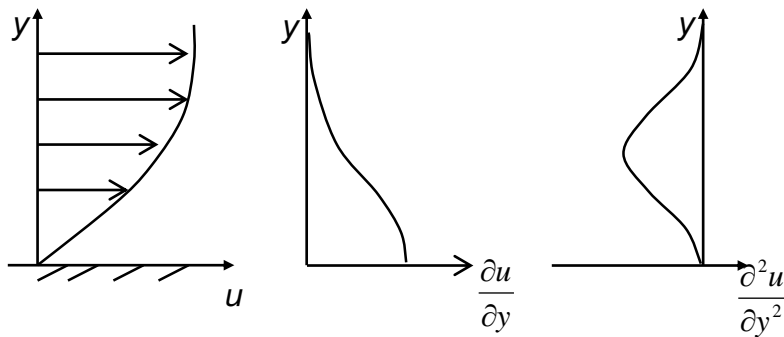
## 零压梯度区特征

- ◆ 随着速度沿程增加，压力沿程减小，在壁面某处速度达到最大，压强达最小，此后流动将逆压而行。在最小压强点有：

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

- ◆ 说明物面是速度分布的拐点，在边界层的外边界上仍然有：

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=\delta} < 0$$



- ◆ 与顺压区速度分布相比，速度分布开始变尖瘦。

# 逆压梯度区特征

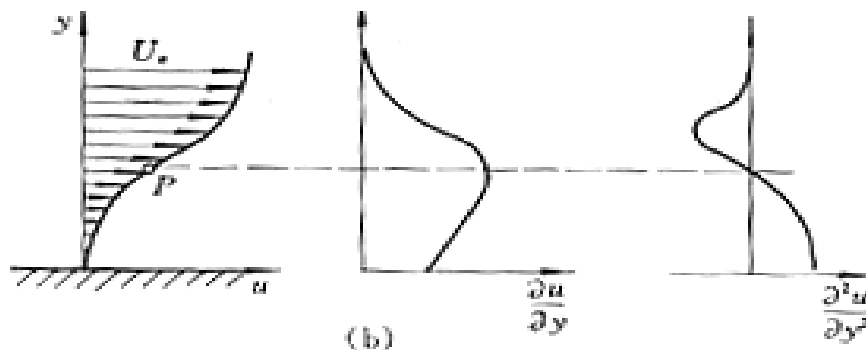
◆进入逆压梯度区，压力沿程增加，速度沿程减小。

●在壁面处有

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} > 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} > 0$$

●在边界层的外边界上有

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=\delta} < 0$$

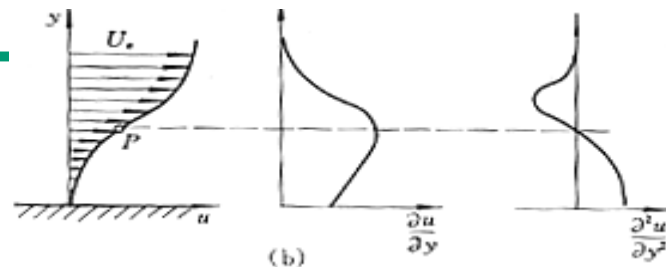


●在边界层内  $0 < y < \delta$ ，速度分布曲率从正变为负，在某点处必然有

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=y_0} = 0$$

●这一点是速度分布的拐点。拐点的出现改变了速度分布的形状，在拐点以上为外凸型，在拐点以下为外凹型，存在拐点的速度分布型是不稳定的。

# 分离点

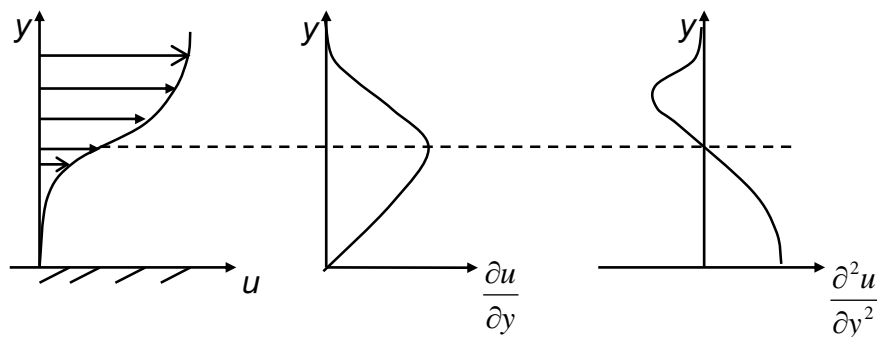


◆随着流体质点向下游流动从零压梯度点进入逆压区，拐点从物面上向外边界移动，物面近区的速度分布愈来愈瘦小（壁面速度梯度  $du/dy$  逐步降低）。

◆当拐点移动到空间某点时，物面处出现：

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} > 0$$

◆该点称为分离点，速度及其梯度分布曲线为：

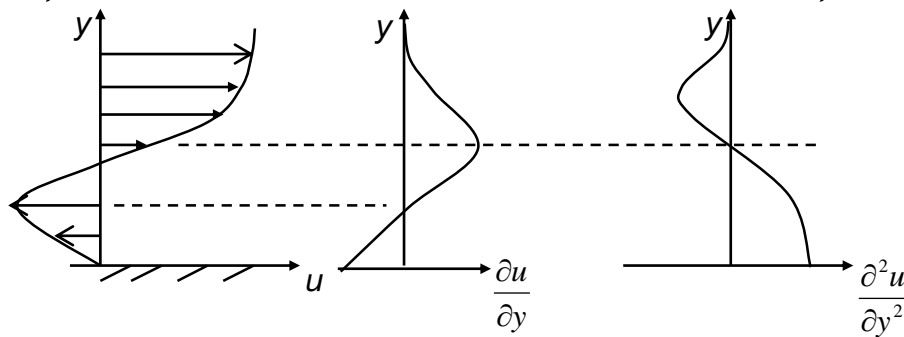




## 分离点下游区域

◆在分离点下游区，有： $\frac{dp}{dx} > 0$ ,  $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} > 0$ ,  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} < 0$

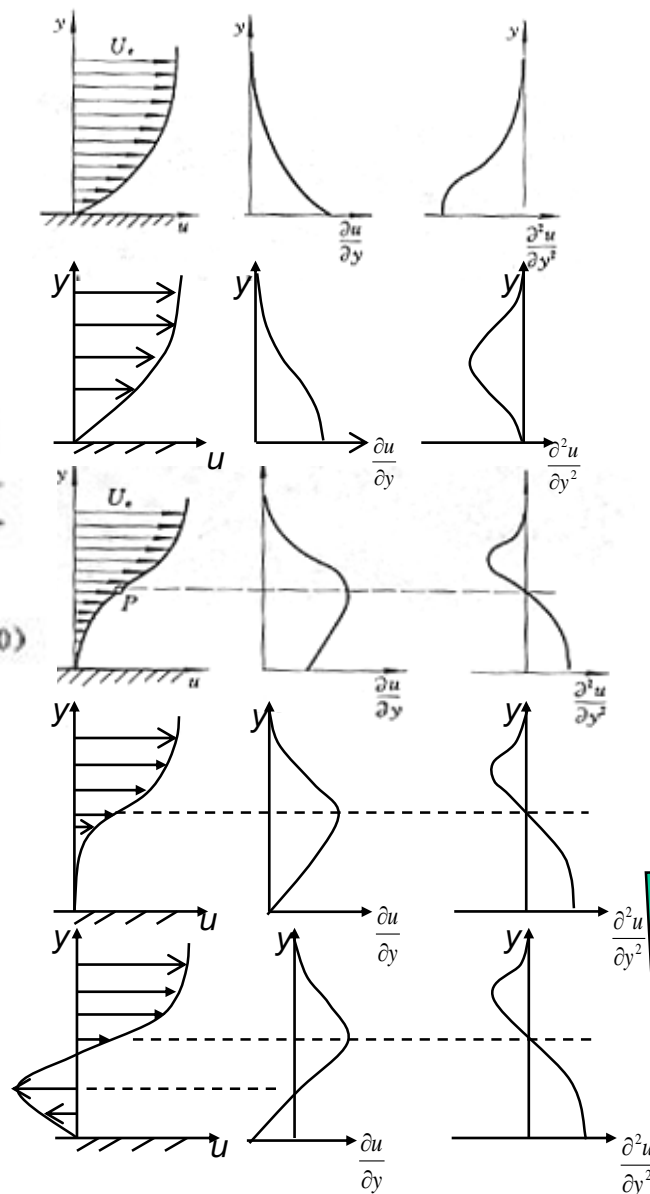
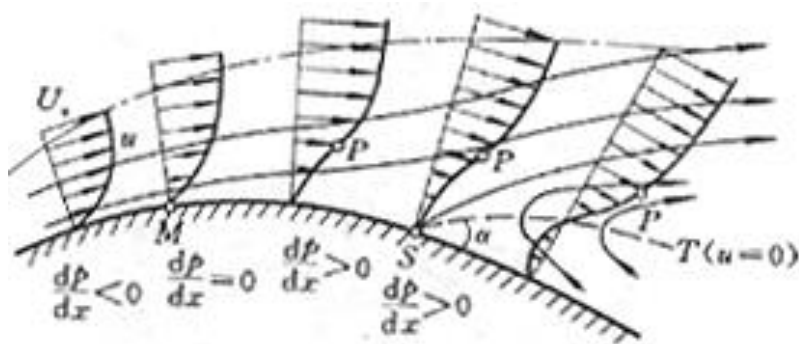
◆发生了回流，回流把主流推离壁面，**边界层假设失效**。



◆逆压梯度愈大，边界层分离愈靠前。边界层分离后，流动特征发生了变化。如：

- ① 从分离点不断脱离出旋涡，在分离点下游形成不稳定的旋涡区，从而使得主流区由原来无涡区变成有涡。
- ② 在分离点后出现低压区（或负压区），从而大大增加了绕流物体的阻力。

随压强梯度变化，速度及其梯度分布的变化趋势对比：



顺压，速度为饱满的外凸曲线

零压梯度，壁面为拐点，速度变尖瘦

逆压，拐点移向空间，速度更加尖瘦，尚未分离

逆压、壁面速度梯度为零，分离点

逆压、速度梯度为负，倒流

# 绕翼型的流动

◆边界层外可看作无粘流动

◆沿翼型表面压力变化

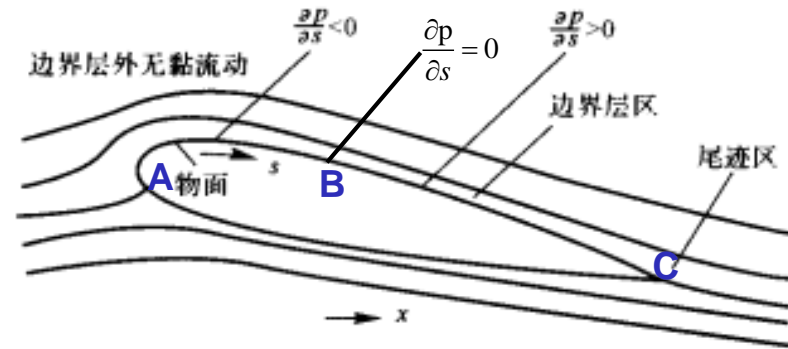
- 前缘驻点A处，压力最大

- 最小压力点B

- 顺压梯度**区A-B：沿上表面流动速度将增加，压力减小至最小压力点B。

- 逆压梯度**区B-C：边界层内流体受逆压梯度及粘性双重影响，速度迅速减小，边界层迅速增厚。

◆尾迹区：上下表面的边界层在后缘汇合形成尾迹流动。



# 绕翼型的分离流动

◆迎角增大，逆压梯度增大

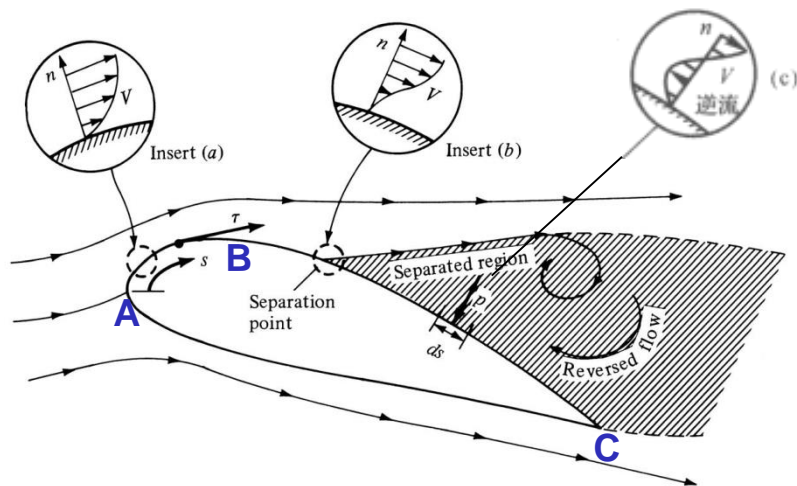
◆在最小压力点之前及附近

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{n=0} > 0$$

◆在最小压力点后，逆压阻滞作用使得  $\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{n=0}$  越来越小，并可能在某点处

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{n=0} = 0$$

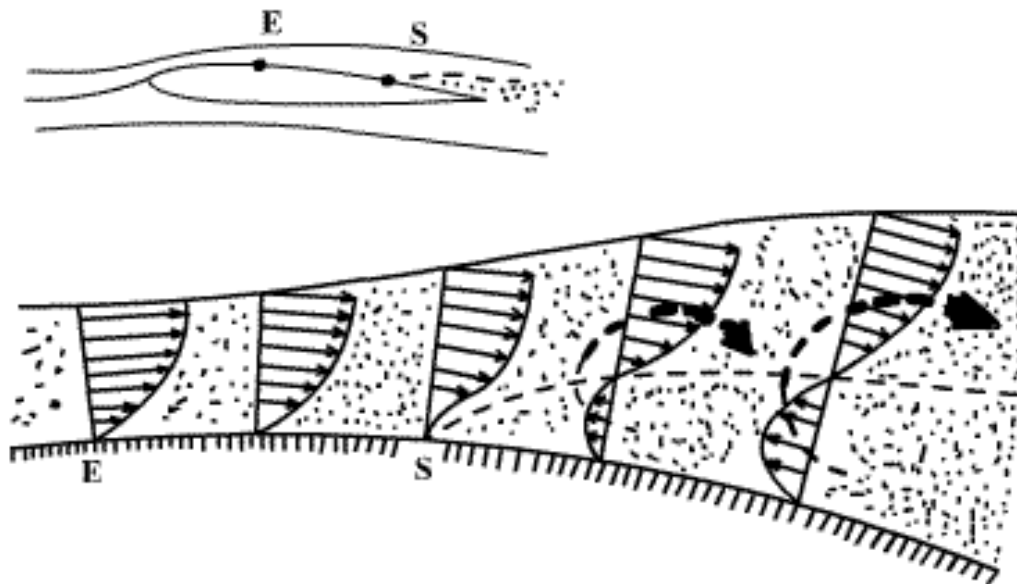
◆其后，贴近壁面的部分区域内的  $\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{n=0} < 0$ ，即出现倒流现象。



# 边界层分离

◆ **边界层（附面层）分离**：在逆压梯度作用下，附面层底层出现倒流，与上层顺流相互作用，形成漩涡脱离物体表面的现象。

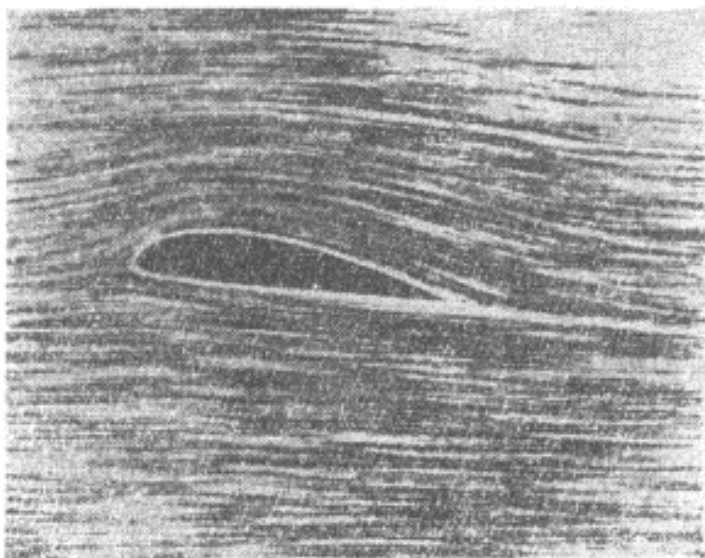
◆ **分离点S**： $\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{n=0} = 0$



# 翼型绕流

## ◆ 风洞中翼型绕流的烟迹线

无分离



(a)

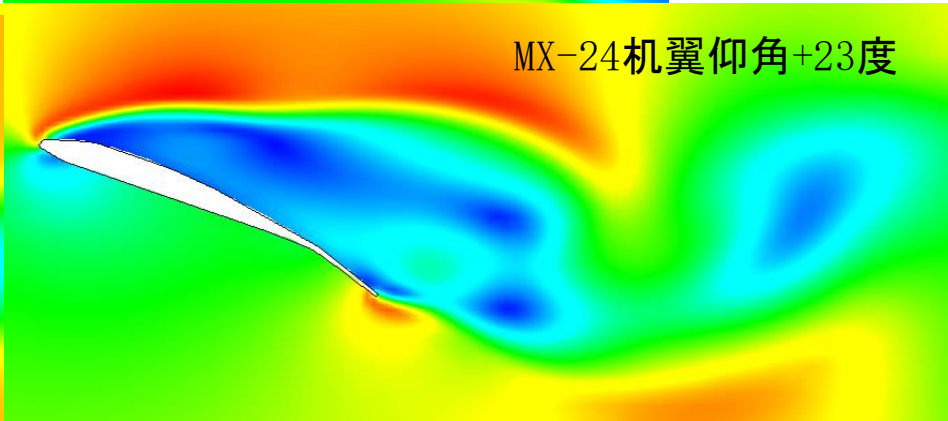
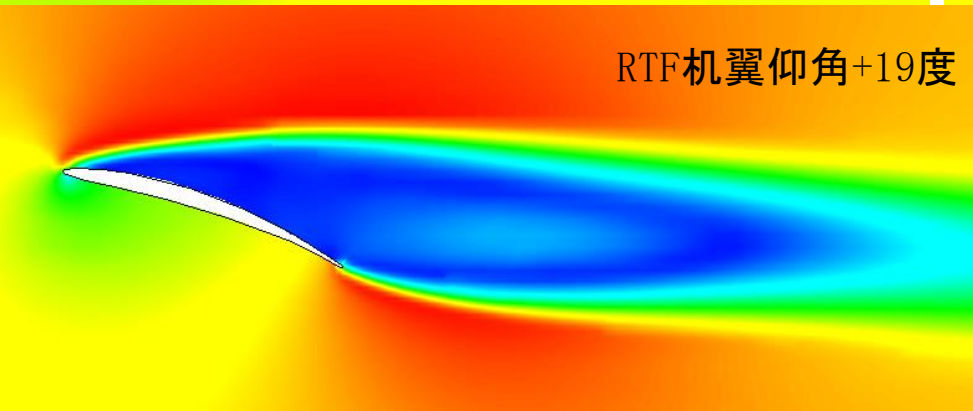
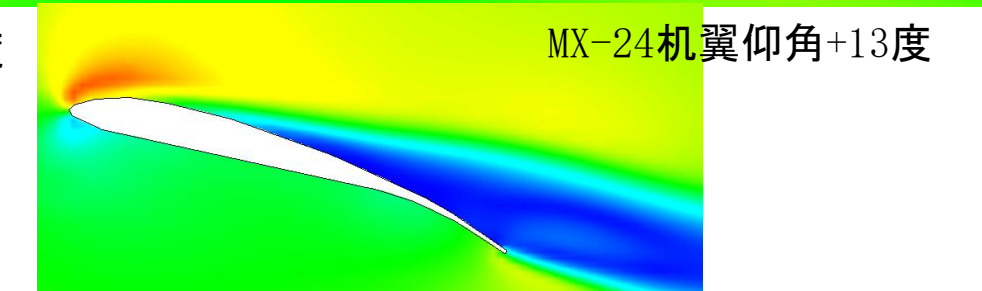
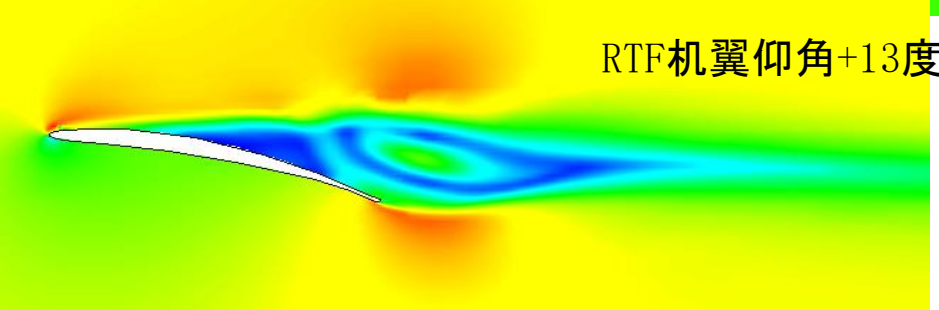
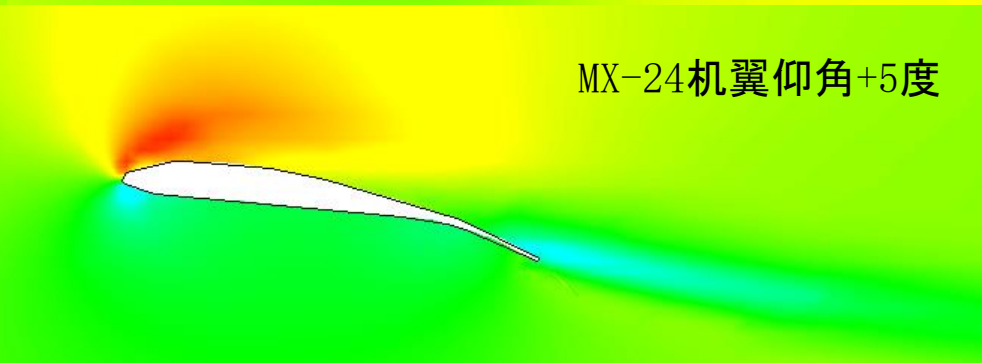
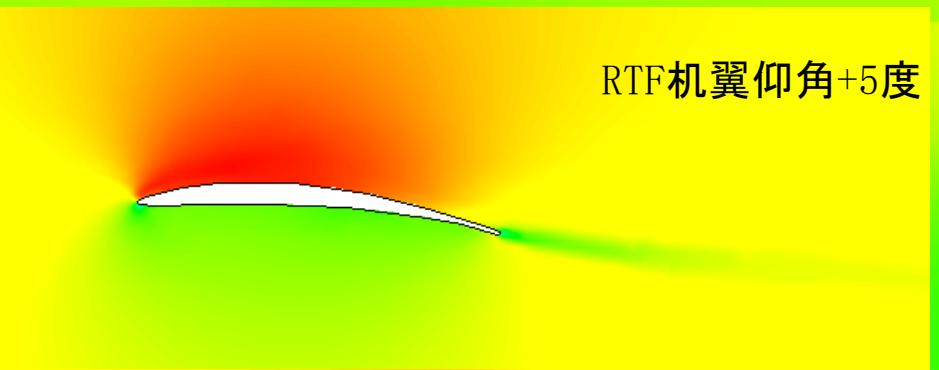
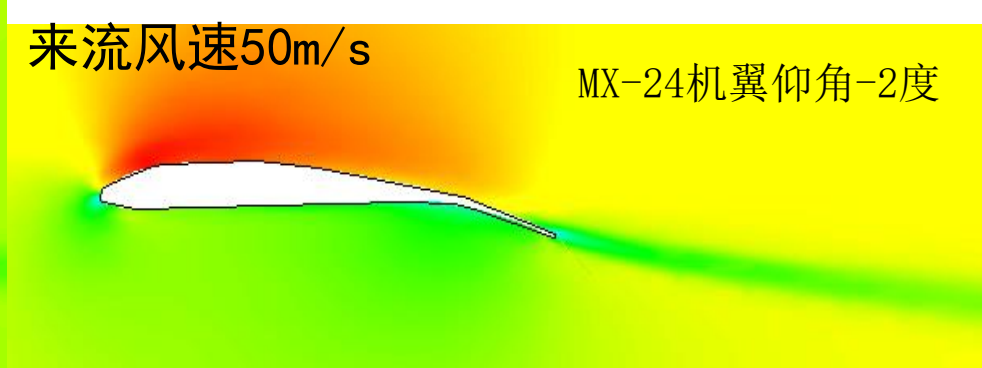
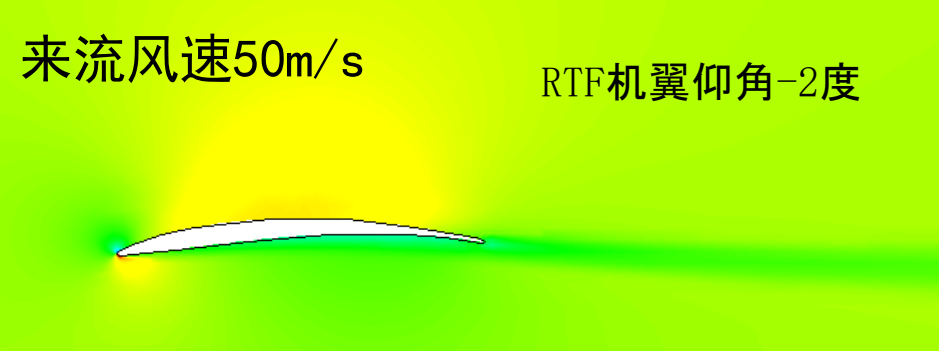
有分离



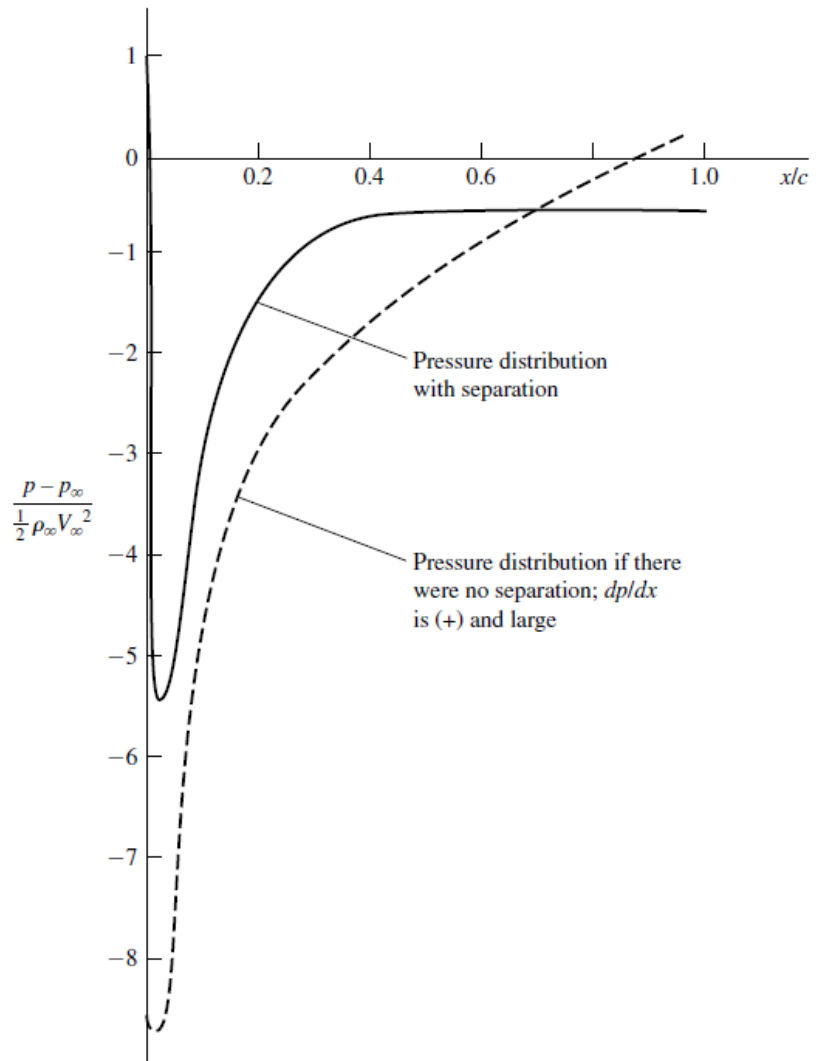
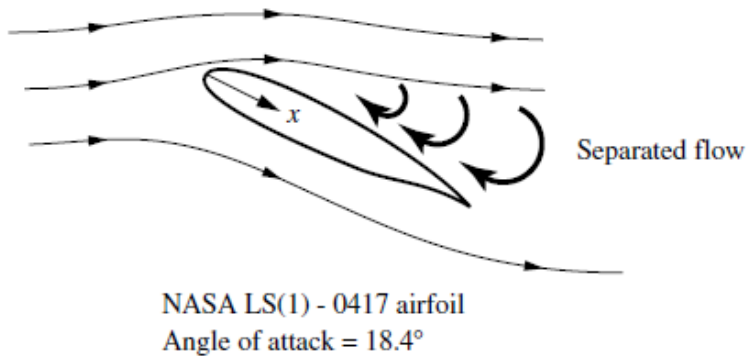
(b)

阻力，升力？





# 翼型表面压力分布

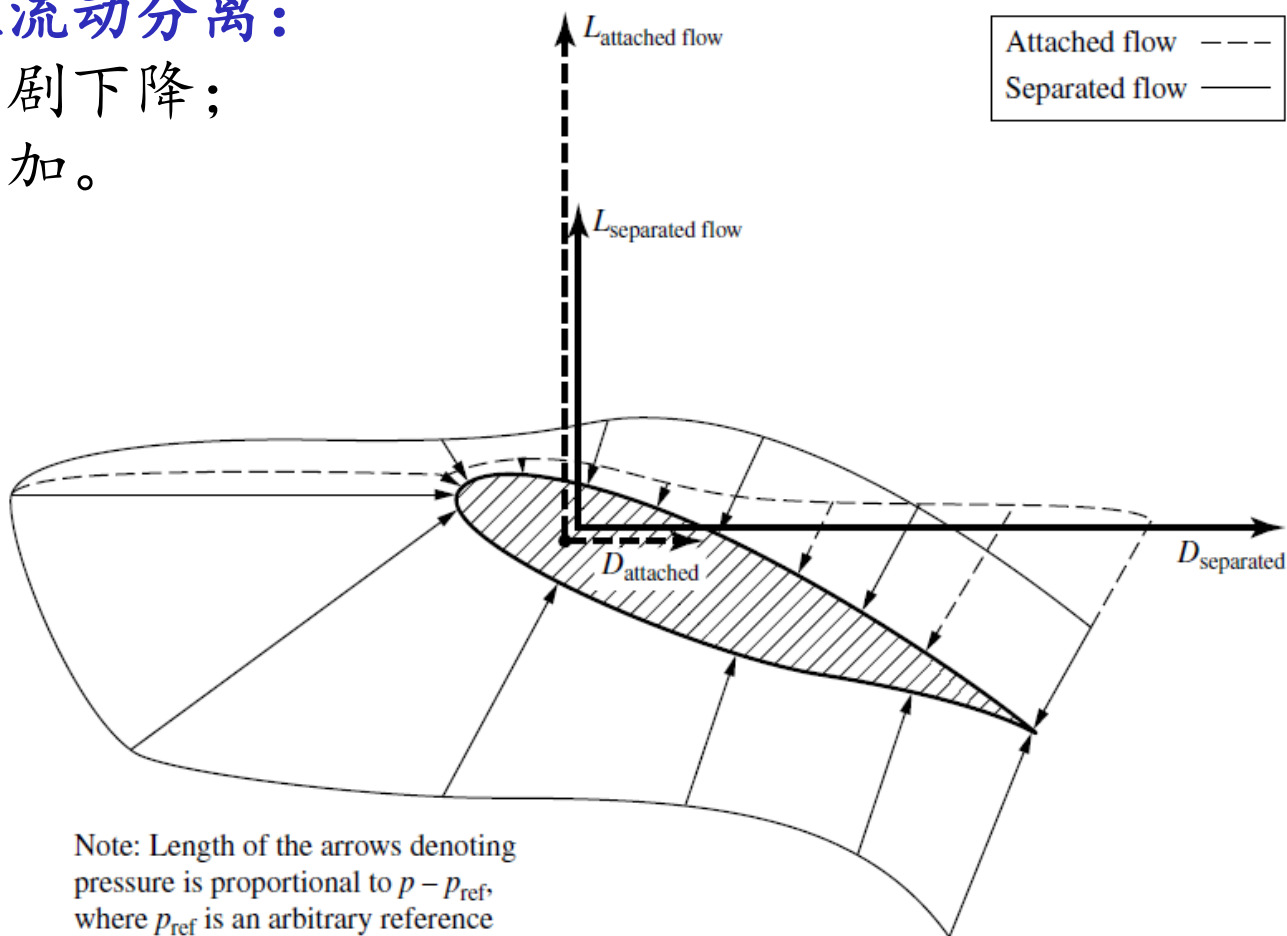




# 边界层分离对翼型气动力的影响

翼型发生流动分离：

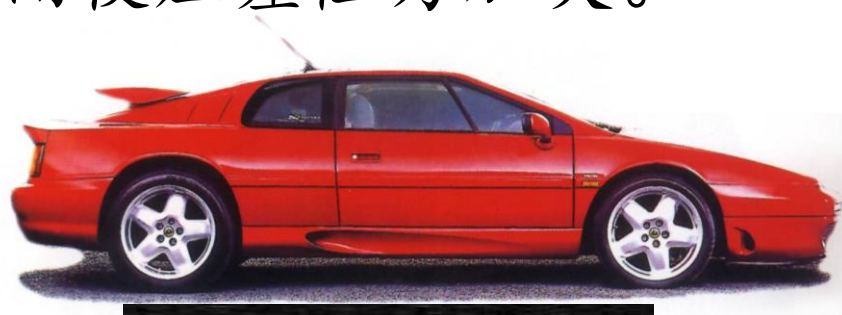
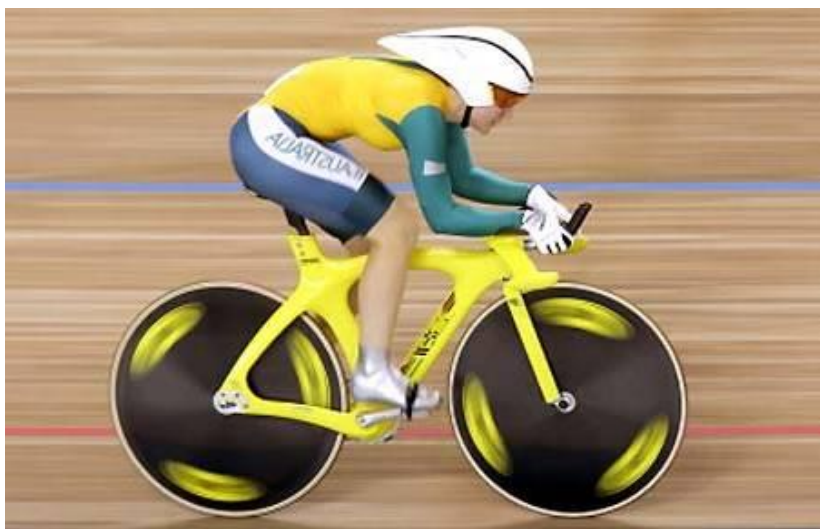
1. 升力急剧下降；
2. 阻力增加。



Note: Length of the arrows denoting pressure is proportional to  $p - p_{\text{ref}}$ , where  $p_{\text{ref}}$  is an arbitrary reference pressure slightly less than the minimum pressure on the airfoil

## 日常生活实例：边界层分离

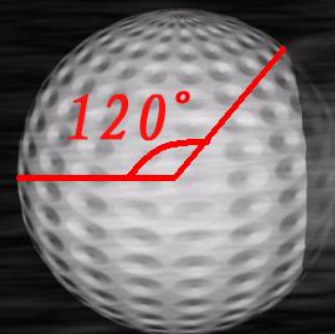
- ◆ 自行车运动员戴圆头尖尾帽子的原因在于减小逆压梯度，避免边界层过早分离，从而使下游压强不对称区域尽量减少，减小压差阻力。不能做成尖头原因是避免头部分离。
- ◆ 汽车的后部形状陡峭或变化剧烈时将不可避免使后部边界层产生分离，从而使压差阻力加大。



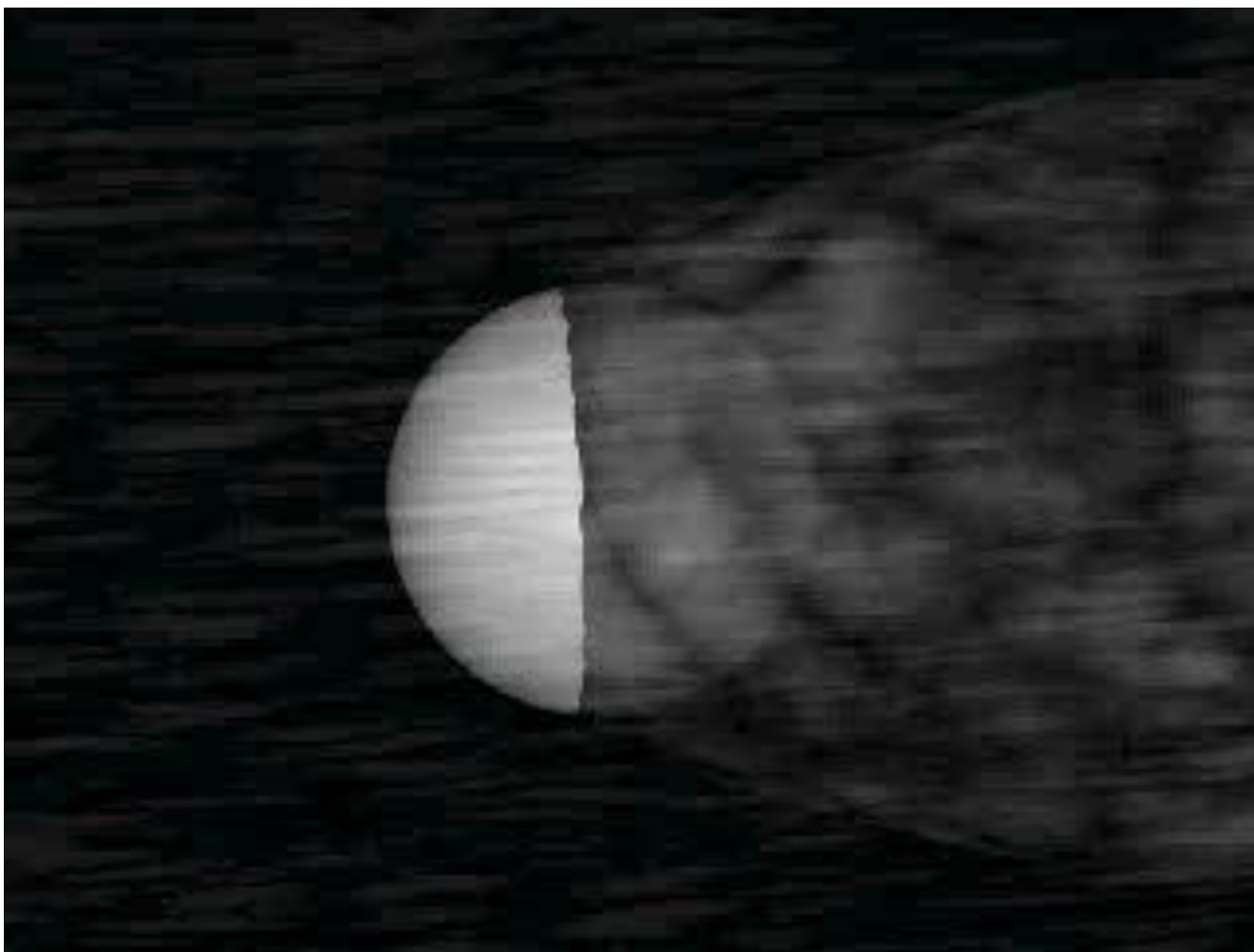
# 日常生活实例：边界层分离

## ◆ 湍流边界层和层流边界层

- 湍流边界层能够抵抗一定的逆压梯度而不分离（较大逆压下仍然会分离）
- 高尔夫球凹坑使层流边界层很快转捩成为湍流边界层，湍流的横向输运特性使其具有较饱满的速度型和抵抗逆压梯度的能力，因此具有较小的分离尾迹和流动阻力。



# 高尔夫球的边界层分离



# 作业

15.1 考虑在相距为  $h$  的两平行无限长板间的不可压缩、黏性气流。下面的平板静止不动、上面的平板以一个恒定速度  $V$  沿平板方向运动。假设在流动方向上没有压力梯度产生。

(1) 求两平板间速度变化的表达式；

(2) 如果  $T = \text{常数} = 320 \text{ K}$ ,  $V_e = 30 \text{ m/s}$ ,  $h = 0.01 \text{ m}$ , 计算上、下平板的切向力。

15.2 假设在题 15.1 中两平行板都是静止不动的, 但是沿平板方向有一定常压力梯度产生,  $dp/dx = \text{常数}$ 。

(1) 求两平板间速度变化的表达式；

(2) 求含  $dp/dx$  项的平板上的切向力表达式。

15.5 对于二维不可压缩流动中顺流放置的平板, 试用动量积分关系式方法求壁面摩擦应力和一侧平板的摩擦阻力(平板宽  $b$ , 长  $L$ ), 假设边界层内速度分布为  $0^\circ \sim 90^\circ$  的正弦分布。请将结果与布拉修斯解相比较。