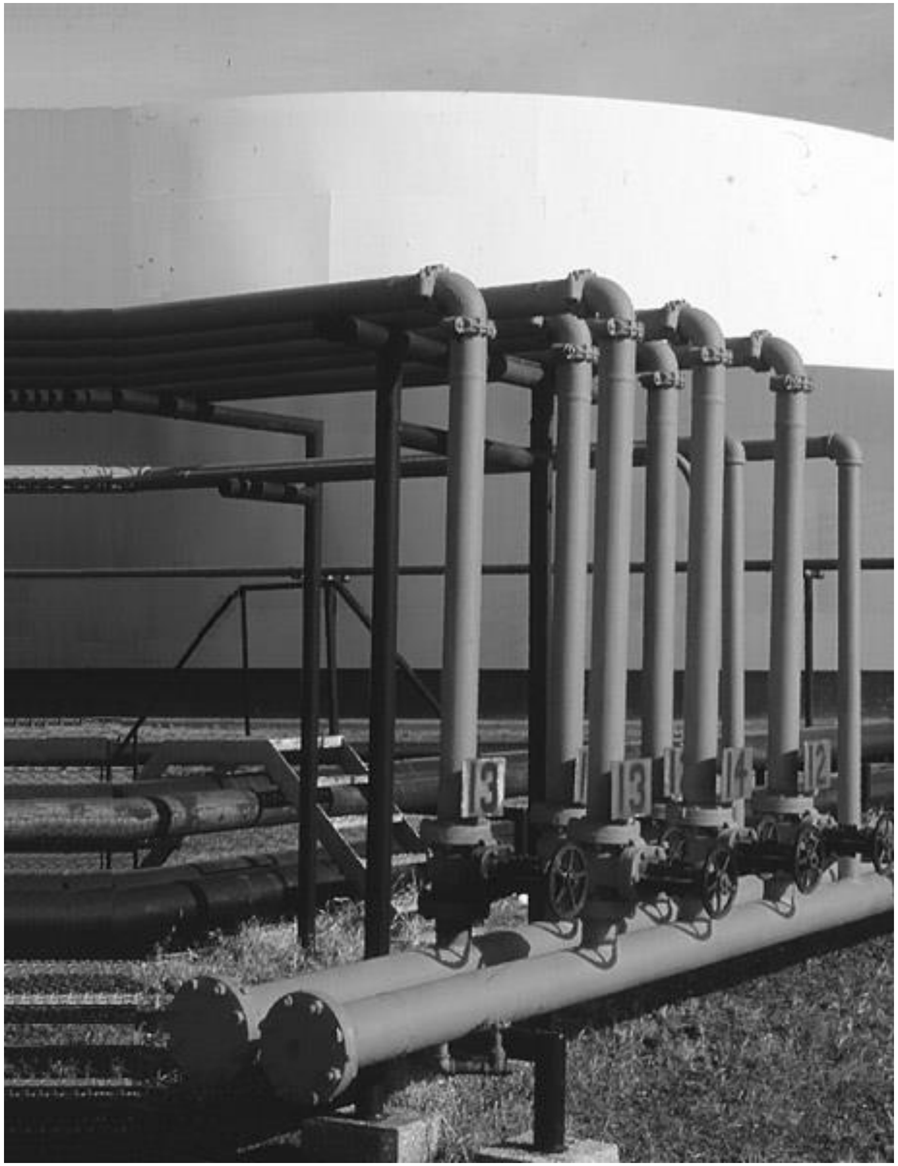
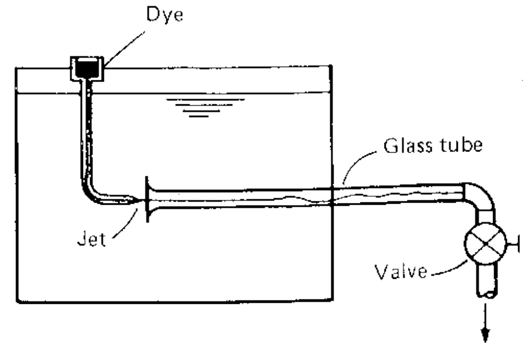
第七章：
粘性流体基础



雷诺实验

◆雷诺实验(Osborne Reynolds，1883)



$$\mathrm{Re}=\frac{\rho U d}{\mu}$$

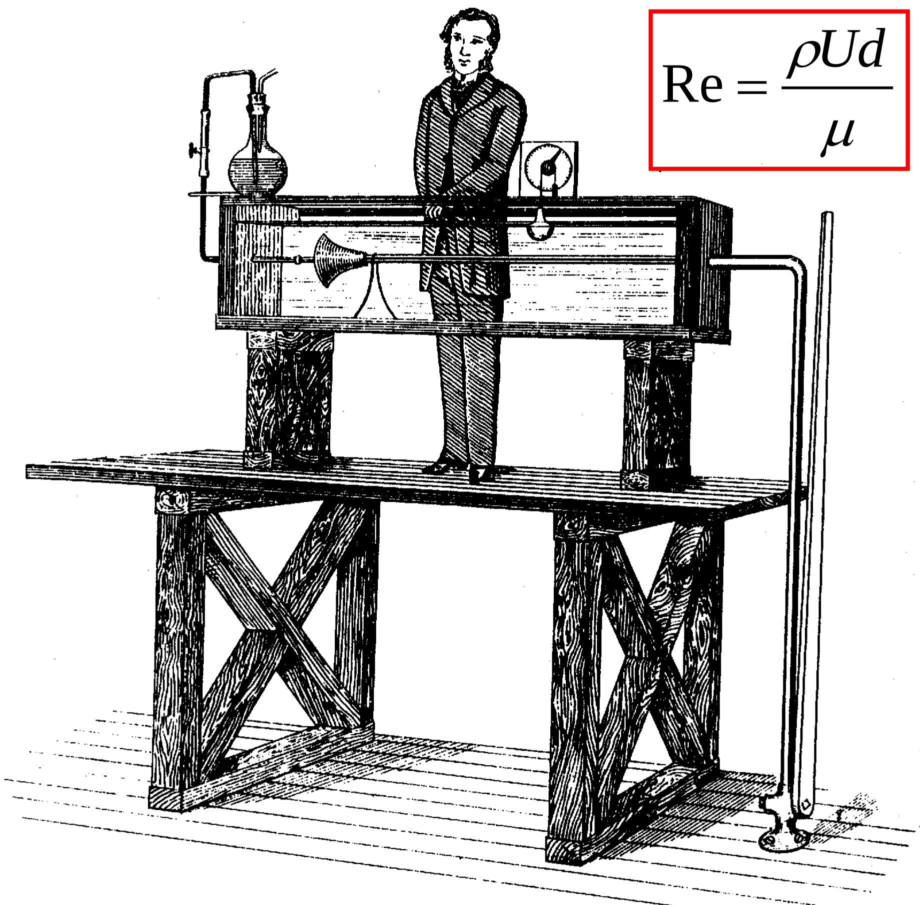
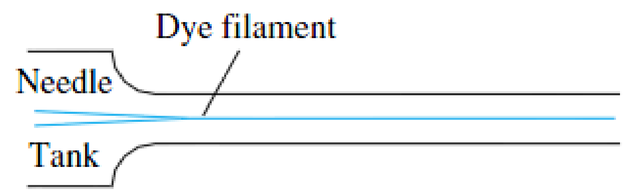


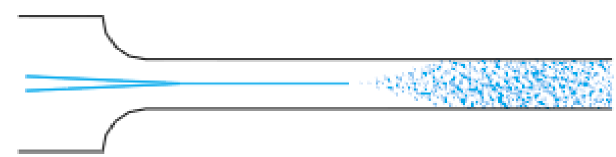
Fig. 9.1. Sketch of Reynolds's dye experiment, taken from his 1883 paper



(*a*)

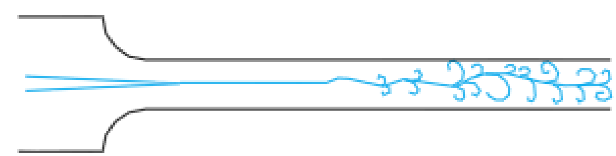
层流

临界雷诺数:Re_{crit}=2300



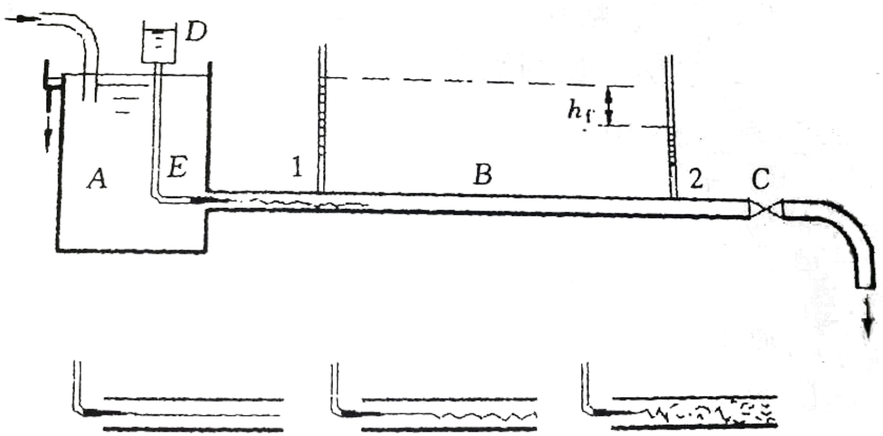
(*b*)

湍流



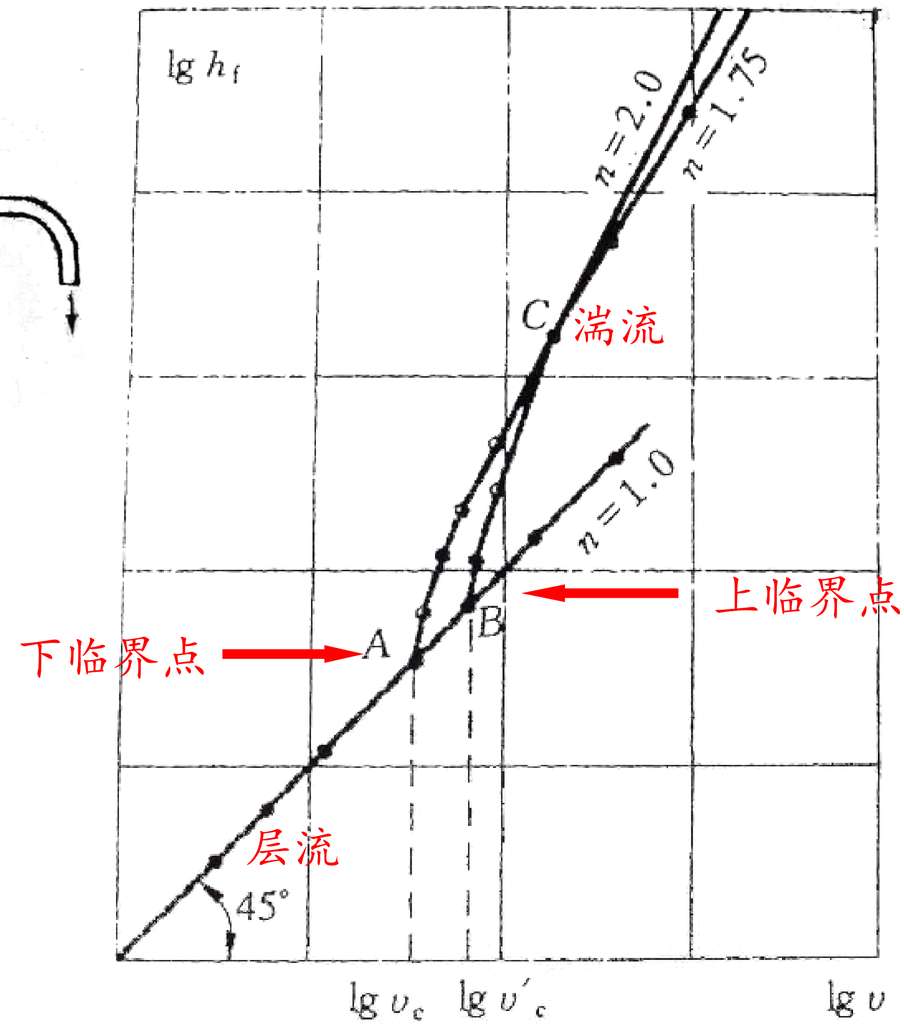
(*c*)

雷诺实验中的压力损失



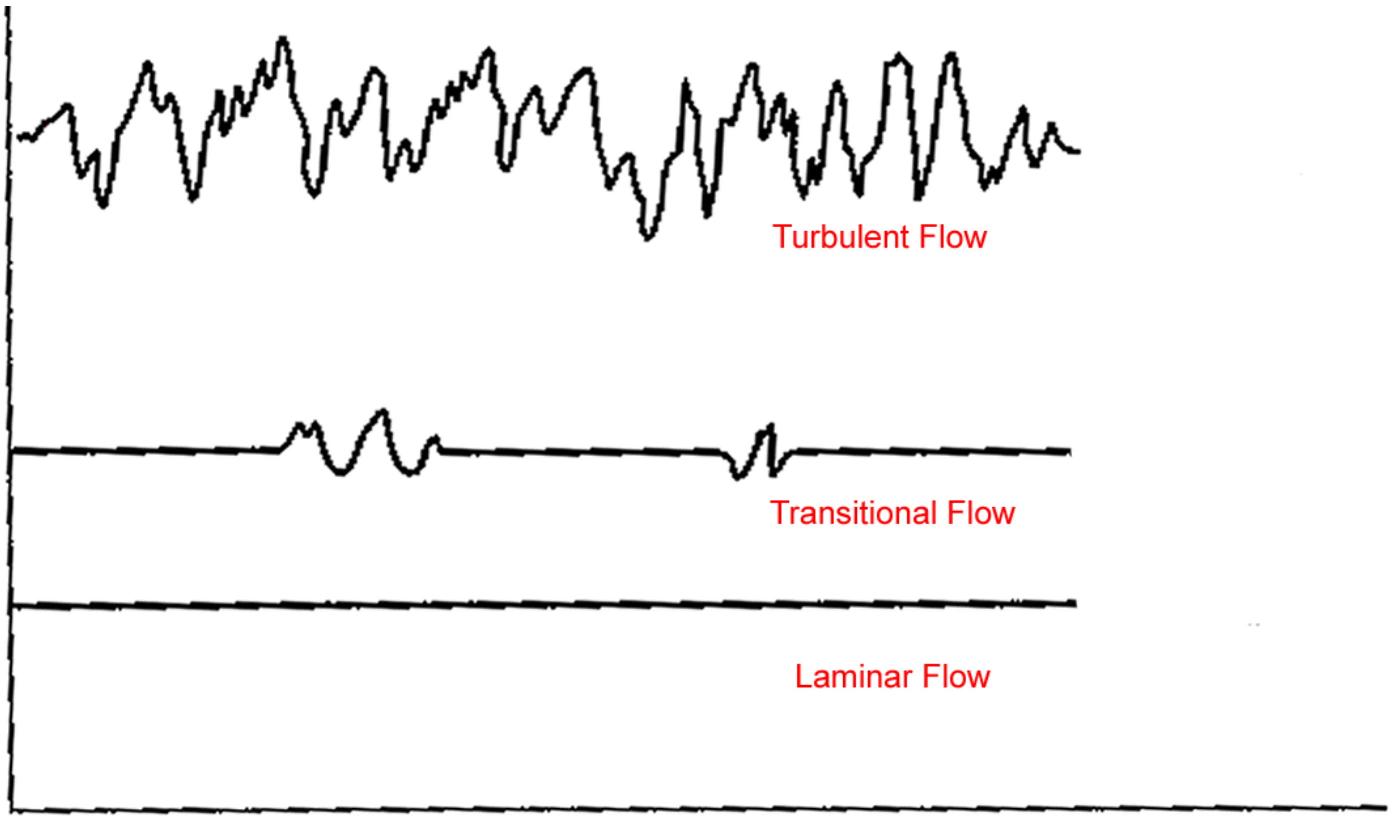
$$h_f \propto v^n$$

上临界点：层流转变为湍流
下临界点：湍流转变为层流



层流、湍流和转捩

◆雷诺数定义：惯性力和粘性力之比。 $\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho U d}{\mu}}$



风速计测量的不同雷诺数下管内流动速度

1. 流体的粘性

◆静止状态下，流体不能承受剪切力；但在**运动状态下**，**流体可以承受剪切力**。

- 对于不同种流体所承受剪切力大小是不同的。

◆**流体的粘性** (viscosity)

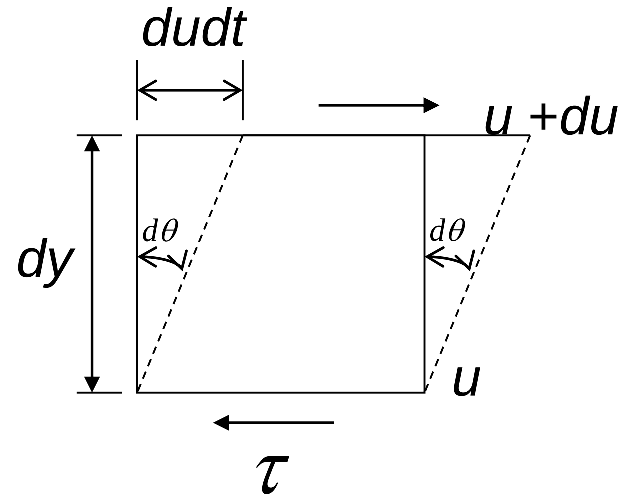
- 指流体在运动状态下抵抗剪切变形能力。
- 流体微团间发生相对滑移时产生切向阻力的性质。

◆粘性的作用

- 流体微团间及流体与固壁间，出现**剪切应力**，即粘性力；
- 流体必须**克服粘性力做功**，造成有用机械能的损失；
- 使得流体粘附于所接触的表面；
- 大雷诺数下，还将导致流体沿固壁形成**边界层**，出现**层流**、**湍流**流动，**层流到湍流的转捩**和**流动分离**。

牛顿内摩擦定律

◆对于流体如水、空气作直线层流运动的情况，实验表明：



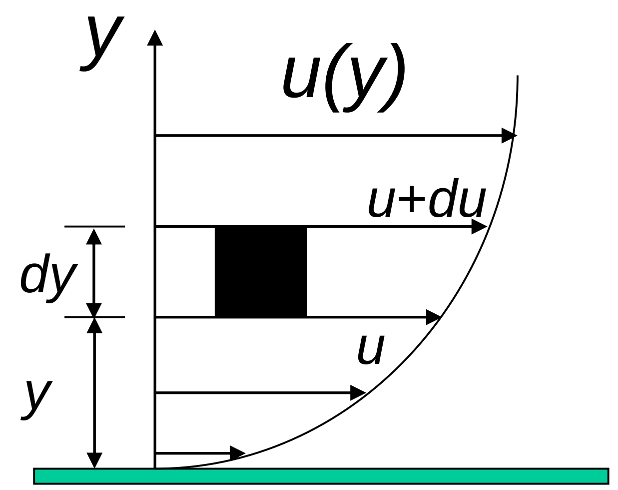
●剪切应力：$\tau \propto \dfrac{d\theta}{dt}$

其中，角变形速率 $\dfrac{d\theta}{dt} \approx \dfrac{dudt/dy}{dt} = \dfrac{du}{dy}$

速度梯度du/dy物理上表示流体质点剪切变形速度

◆**牛顿内摩擦定律：**

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$



●切应力与速度梯度呈线性关系

◆**应力：** 作用在截面单位面积上的力

◆**切应力：** 单位面积的摩擦力为切应力

粘性系数

◆动力(dynamic)粘性系数

- μ =f(T, Ᵽ), dim μ =$ML^{-1}T^{-1}$， 单位Pa·s (kg/m/s)
  - ➢不随压力变化，具有随温度变化的性质
- 对于空气

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + C}{T + C}\left(\frac{T}{273}\right)^{1.5}$$

萨兰特公式
Sutherland's law

其中：μ_0 -----0°C时的动力粘度；C=110

- 对于水

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + 0.0337\,T + 0.000221\,T^2}$$

◆运动(kinematic)粘性系数

- ν =μ/ρ， dim ν =L^2T^{-1}， 单位 m^2/s

粘性系数

Fluid	Air			Water		
T(° C)	20	200	500	0	20	70
ρ (kg/m^3)	1.188	0.736	0.450	999.8	998.2	977.8
μ (kg/ms)	1.818 x10^{-5}	2.585 x10^{-5}	3.580 x10^{-5}	1.792 x10^{-3}	1.002 x10^{-3}	0.404 x10^{-3}
ν (m^2/s)	1.531 x10^{-5}	3.512 x10^{-5}	7.956 x10^{-5}	1.792 x10^{-6}	1.004 x10^{-6}	0.413 x10^{-6}

◆空气：T↑→ μ↑ (混乱运动↑而吸引力很小)

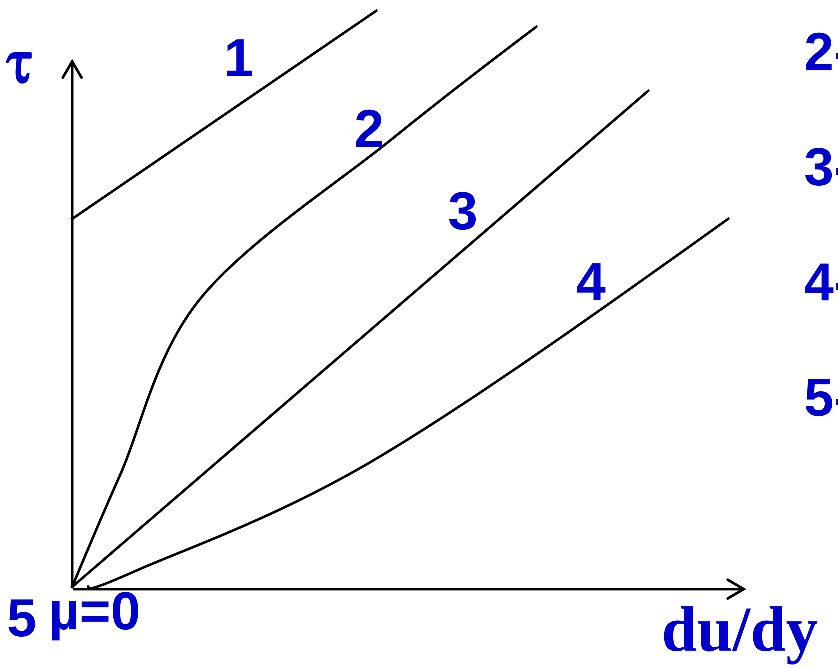
◆水：　T↑→ μ↓ (分子间的吸引力↓)

- 粘度一般不随压力变化；
- 对于气体温度升高则粘度变大；
- 对于液体温度升高则粘度变小
  - ➢如润滑油冬季粘稠，夏季粘度小

粘性系数

◆流体切应力与速度梯度的一般关系为

$$\tau = A + B\left(\frac{du}{dy}\right)^n$$



1-- $\tau = \tau_0 + \mu du/dy$

Binghan流体，泥浆、血浆、牙膏等

2-- $\tau = \mu(du/dy)$^0.5

伪塑性流体，尼龙、橡胶、油漆等

3-- $\tau = \mu du/dy$

牛顿流体，水、空气、汽油、酒精等

4-- $\tau = \mu(du/dy)$^2

胀塑性流体，生面团、浓淀粉糊等

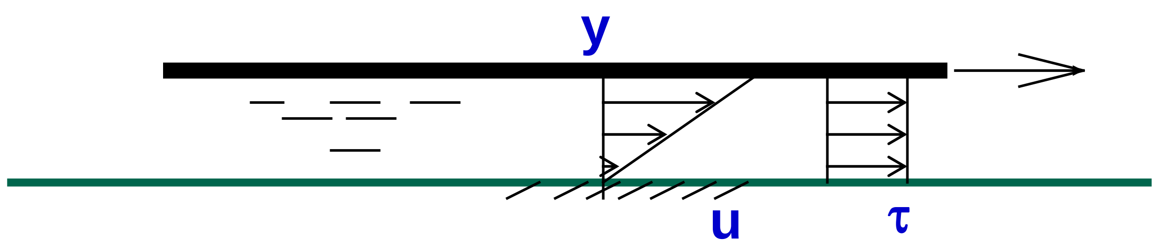
5-- $\mu = 0$

理想流体，无粘流体。

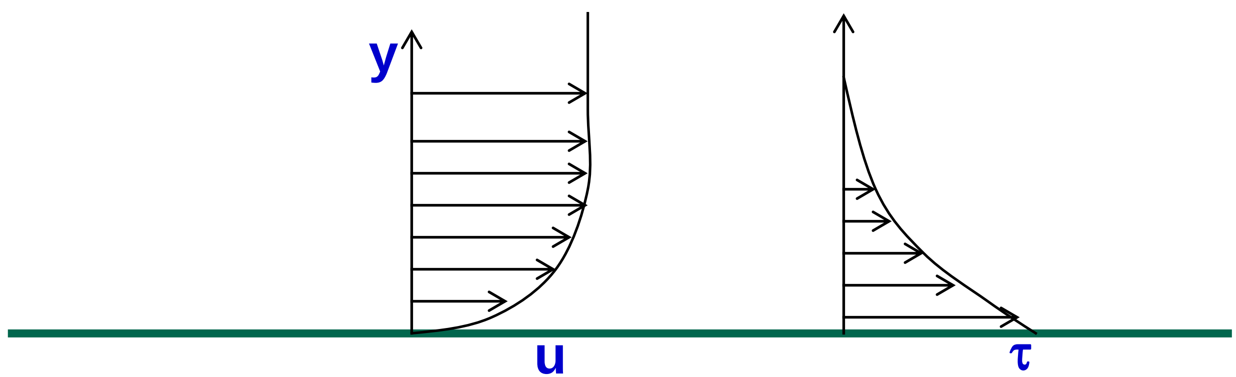
牛顿流体的切应力

◆τ表示单位面积上的内摩擦力 $\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$

●流层之间的内摩擦力与接触面上的压力无关。



●一般流层速度分布不是直线，如图所示。



2. 粘性流体运动特点

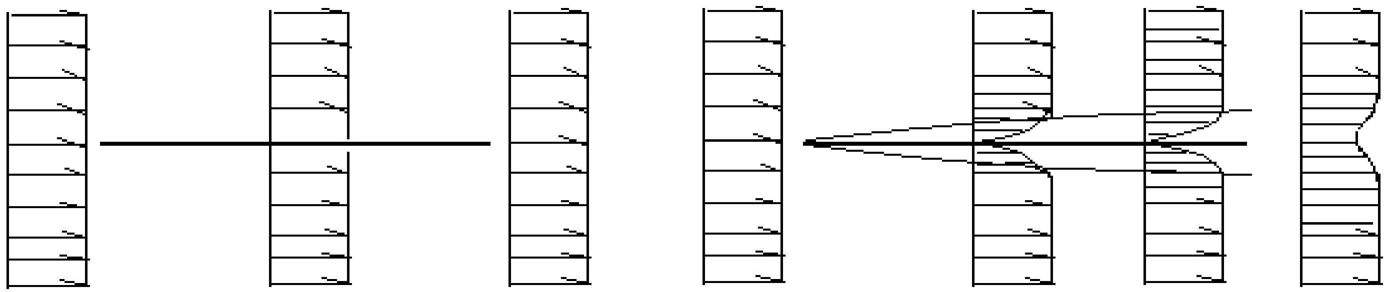
◆**理想流体** (Ideal or inviscid fluid)： $\mu = 0$

- 自然界中流体都是有粘性的，粘性对流体运动的影响是普遍存在的。
- 对具体问题，粘性所起的作用并不一定相同。特别是对小粘性流体(空气和水)，对于某些问题做忽略粘性作用的简化，可得到满意的结果。

◆**粘性流体** (viscous or real fluid)： $\mu \neq 0$

◆**粘性流动与无粘流动的差别，如下举例**

绕过平板(无厚)的均直流动



理想流体平板绕流　　　　粘性流体平板绕流

◆理想流体

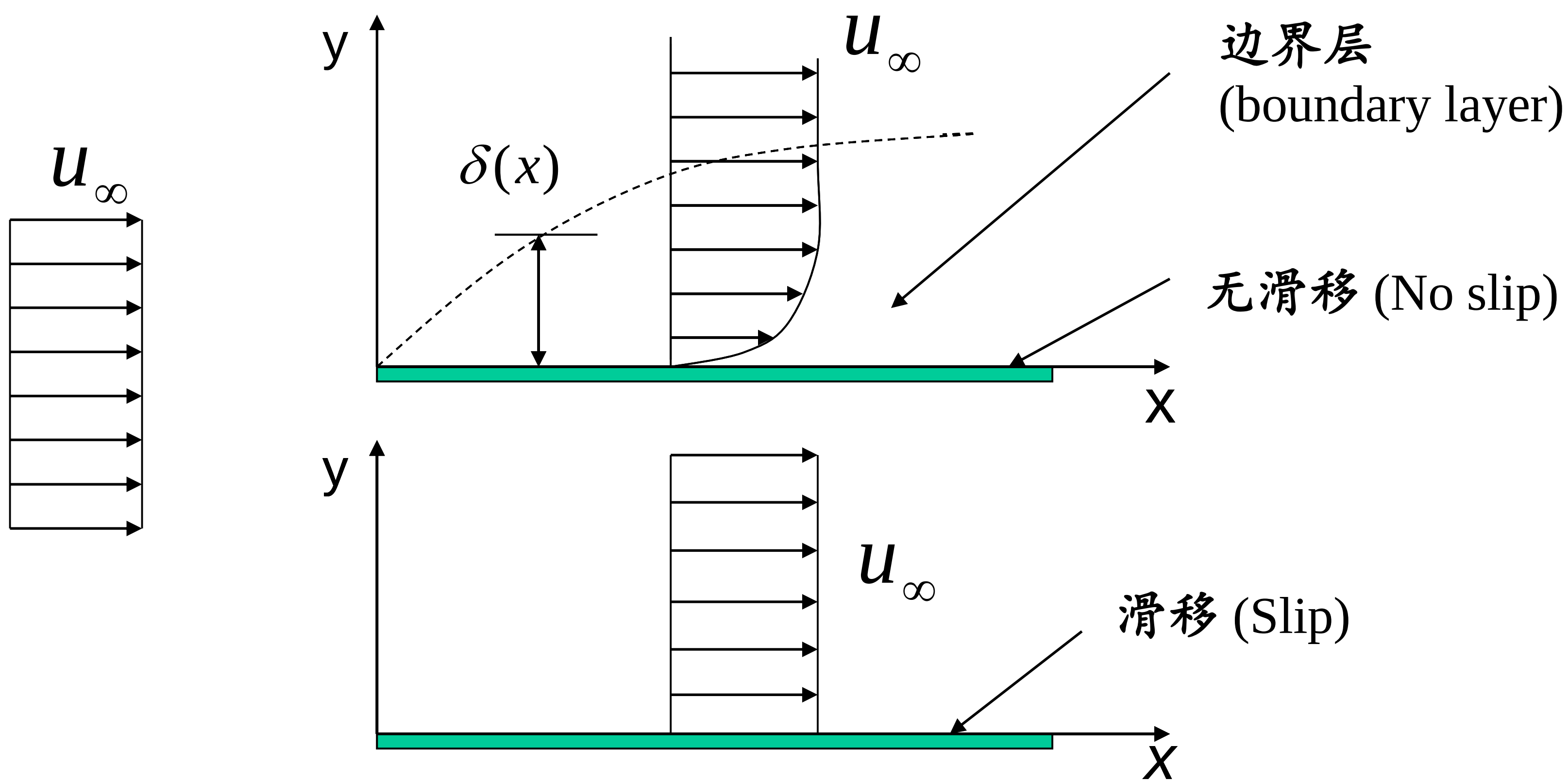
- 平板对流动不产生任何影响。
  在平板表面，允许流体质点滑过平板，但不允许穿透平板。
- 平板对流动无阻滞作用，平板阻力为零。

◆粘性流体

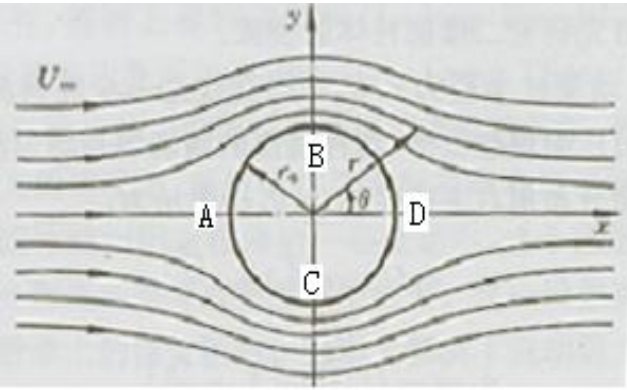
- 边界面上流体质点粘附在平板上,满足**不穿透条件**和**无滑移条件**。
- 平板近区存在着速度梯度很大的流动，流层之间的粘性切应力不能忽略，对流动起控制作用。阻力 $D_f = 2\int_0^L \tau_0 dx$

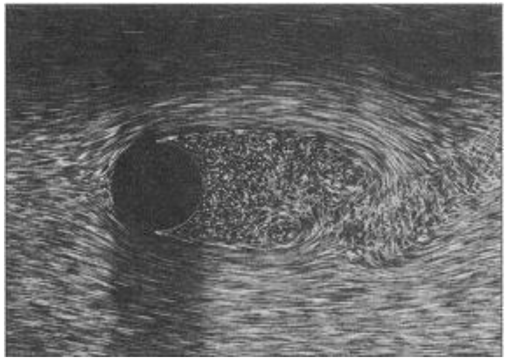
边界层区

- ◆理想流体 (Ideal or inviscid fluid)： $\mu = 0$
- ◆粘性流体 (viscous or real fluid)： $\mu \neq 0$



圆柱绕流





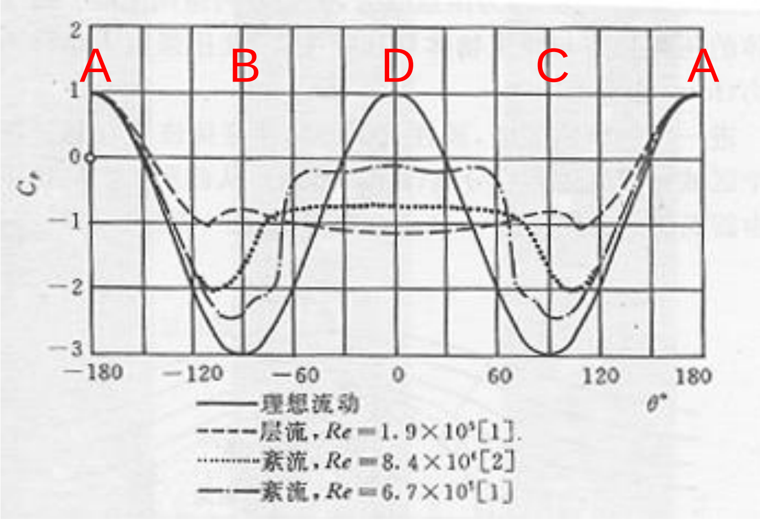
◆理想流体

- 前驻点A，后驻点D，最大速度点B、C。
- 中心流线在前驻点分叉，后驻点汇合。
- A-B区和A-C区：顺压梯度区。
- B-D区和C-D区：逆压梯度区。
- **达朗贝尔佯谬**：在流体质点绕过圆柱的过程中，只有动能、压能的相互转换，而无机械能的损失。在圆柱面上压强分布对称，无阻力存在。
- **阻力**

$$D = \oint_{2\pi R} (\tau_0 \cos\alpha - p_s \sin\alpha) ds$$

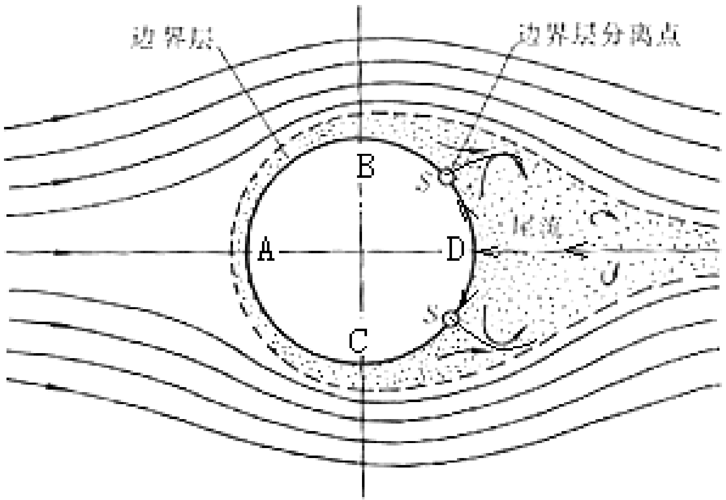
圆柱绕流

压力分布 $C_p = \dfrac{p - p_\infty}{q_\infty}$



◆粘性流体

- 物面附近产生边界层。
- A-B点流程：消耗部分动能克服摩擦力阻力做功。
- B-D点流程，流经一段距离将全部动能消耗殆尽，在壁面某点速度变为零(S点)，出现边界层分离。
- 在分离点之间的空腔内流体质点发生倒流，由下游高压区流向低压区，在圆柱后面形成了旋涡区。
- 旋涡涡区的出现，使得圆柱壁面压强前后不对称（如前驻点的压强要明显大于后驻点的压强），出现了阻力D。



飞行器的阻力

◆流体粘性引起的总阻力 $D_v = D_p + D_f$

- 压差阻力pressure drag $D_p = \oiint p_s \sin\alpha ds$
- 摩擦阻力skin friction drag $D_f = \oiint \tau \cos\alpha ds$
- D_v通常称为翼型阻力profile drag (2D),
  或寄生阻力parasite drag (3D)

◆对于飞行器来说，还有诱导阻力D_i和波阻力D_w

$$D = D_p + D_f + D_i + D_w$$

- 阻力的准确估计，对于飞行器设计是十分重要的。
- 风洞实验、数值计算、工程经验结合。

粘性对流体作用的小结

① 粘性摩擦切应力与物面的粘附条件（无滑移条件）是粘性流体运动有别与理想流体运动的主要标志。

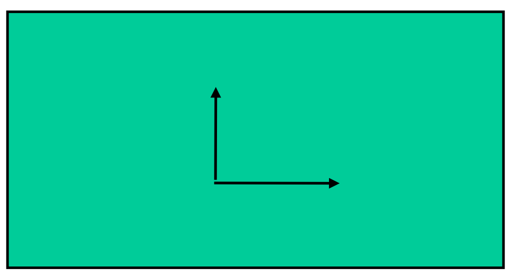
② 粘性的存在是产生阻力的主要原因。

③ 粘性对于研究阻力、边界层及其分离、旋涡的扩散等问题起主导作用，不能忽略。

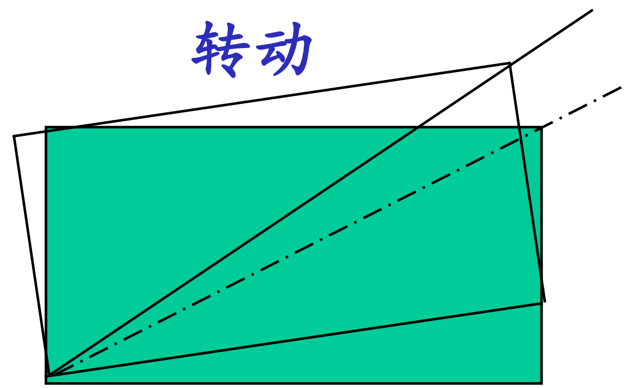
3. 流体微团的运动形式

◆流体微团在运动过程中，将发生刚体运动（平动和转动）与变形运动（线变形和角变形运动）。

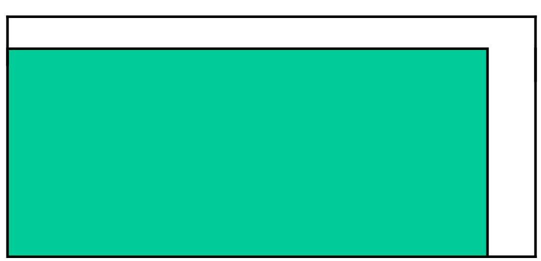
平动



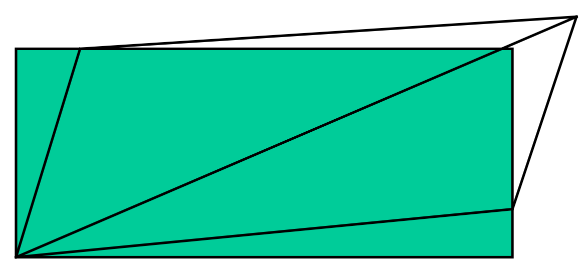
转动



线变形



角变形

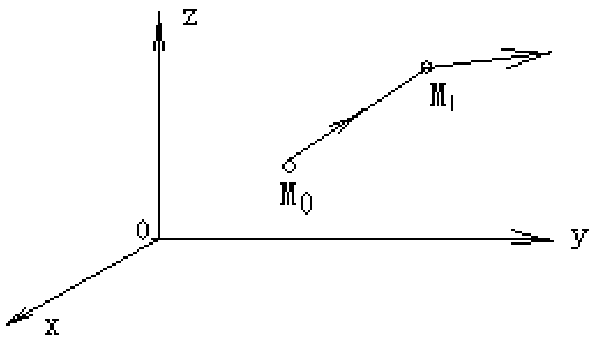


速度分解

◆亥姆霍兹速度分解定理

- 德国物理学家 Helmholtz（1821-1894）
- 1858年提出流场速度的分解定理，区分流体微团的运动形式。

◆相距微量的任意两点速度



$$M_0(x,y,z)\ \text{速度}\quad \begin{matrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{matrix}$$

$$M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t)\ \text{速度}\quad \begin{matrix} u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t) \\ v(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t) \\ w(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t) \end{matrix}$$

速度导数张量

- 以x方向速度为例，按泰勒级数展开分解

$$
\begin{aligned}
&u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t) \\
&= u(x,y,z,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z
\end{aligned}
$$

- 速度导数张量**D**

$$
\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad d_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3
$$

- $\mathbf{V}(M_1) = \mathbf{V}(M_0) + \mathbf{D}\delta\mathbf{r}$

Helmholtz速度分解定理

◆将速度导数张量分解为一对称张量**S**与一反对称张量**A**之和

$$d_{ij}=\varepsilon_{ij}+\omega_{ij} \qquad \mathbf{D}=\mathbf{S}+\mathbf{A}$$

变形率张量（应变张量）

◆对称张量

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

◆反对称张量

$$\omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

速度分解 $\vec{u}(M_1)=\vec{u}(M_0)+\vec{\omega}\times\Delta\vec{r}+[\varepsilon]\bullet\Delta\vec{r}$

◆流体微团平动速度：

$$u_x(x,y,z,t),u_y(x,y,z,t),u_z(x,y,z,t)$$

◆流体微团线变形速度：

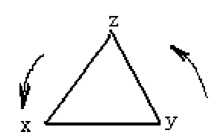
$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y},\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

◆流体微团角变形速度（剪切变形速度）：

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right),\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right),\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

◆流体微团旋转角速度：

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right),\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right),\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$



4. 本构方程

◆牛顿流体的本构方程

- 广义牛顿内摩擦定理，引入Stokes假设

$$[\tau]=2\mu[\varepsilon]-\left(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}\right)[I]$$

- $p=-\dfrac{\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}}{3}$ 为流体的压强

◆用指标法标记

$$\tau_{ij}=\begin{cases}\mu\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}+\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) & \mathrm{i}\neq\mathrm{j}\\ -\mathrm{p}+2\mu\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}-\dfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u} & \mathrm{i}=\mathrm{j}\end{cases}$$

不可压缩流动的本构关系

◆对于不可压缩流体，有 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ -\mathrm{p} + 2\mu\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} & \mathrm{i} = \mathrm{j} \end{cases}$$

◆粘性切应力

$$\tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \quad \tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \quad \tau_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

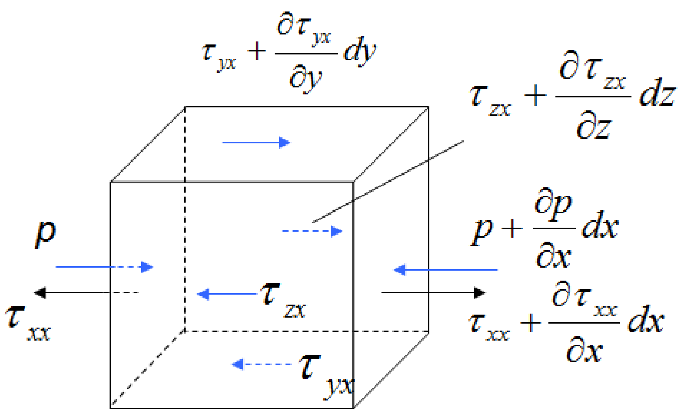
◆法向应力

$$\tau_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} = -p + 2\mu\varepsilon_{xx} \quad \tau_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} = -p + 2\mu\varepsilon_{yy} \quad \tau_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} = -p + 2\mu\varepsilon_{zz}$$

5. 粘性流体的运动方程

◆流体运动的基本方程

利用牛顿第二定理推导以应力形式表示的流体运动微分方程。



以x方向为例 $\sum F_x = m\frac{du_x}{dt}$

$$\rho F_x dxdydz+(\tau_{xx}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}dx)dzdy-\tau_{xx}dzdy+(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy)dzdx-\tau_{yx}dzdx$$

$$+(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz)dydx-\tau_{zx}dyx=\rho dxdzdy\frac{du_x}{dt}$$

应力形式表示的流体运动微分方程

◆整理后，得到
$$\rho\frac{du_x}{dt}=\rho F_x+\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)$$
$$\rho\frac{du_y}{dt}=\rho F_y+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)$$
$$\rho\frac{du_z}{dt}=\rho F_z+\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)$$

◆矢量形式 $\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{F}+\nabla\cdot[\tau]$ 张量形式 $\rho\frac{du_i}{dt}=\rho F_i+\frac{\partial\tau_{ji}}{\partial x_j}$

- 以应力表示的流体运动方程，具有**普遍意义**：
  - ➢适用理想流体/粘性流体，层流/湍流，牛顿流体/非牛顿流体。
- 这是一组**不封闭**的方程，在质量力已知的情况下，方程中**多了6个应力分量**，要想得到封闭形式，必须引入本构系，如粘性流体的广义牛顿内摩擦定律。

引入本构关系

◆以x方向的方程为例，给出推导。

$$F_x+\frac{1}{\rho}(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z})=\frac{du_x}{dt}$$

◆引入广义牛顿内摩擦定理，即

$$\tau_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}\qquad \tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\qquad \tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)$$

◆代入得到

$$\rho\frac{du_x}{dt}=\rho F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right]$$

Navier-Stokes方程

◆描述粘性流体运动的N-S方程组，适应于可压缩和不可压缩流体。

$$\rho\frac{du_x}{dt}=\rho F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right]$$

$$\rho\frac{du_y}{dt}=\rho F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\right]$$

$$\rho\frac{du_z}{dt}=\rho F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}\right)$$

◆以张量形式给出

$$\rho\frac{du_i}{dt}=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

常粘度条件下的N—S方程

◆常粘度条件

$$\rho\frac{du_i}{dt}=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$\Big\Downarrow\ \mu=const$$

$$\rho\frac{du_i}{dt}=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2}$$

◆矢量形式 $\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{F}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}+\frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})$

不可压缩流体的N-S方程

◆不可压缩流体$\nabla\cdot\mathbf{V}=0$，且粘性系数近似看作常数。

$$\frac{du_i}{dt}=F_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

◆矢量形式

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{V}$$

非定常项
定常流动为0
静止流场为0

对流项
静止流场为0
蠕变流时≈ 0

单位质量流体
的体积力

单位质量流体
的压力差

扩散项（粘性力项）
对静止或理想流体为0
高速非边界层问题≈0

葛罗米柯-兰姆型运动方程

$$\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)=(\nabla\cdot\mathbf{V})\mathbf{V}+\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})$$

◆为研究流体的有旋性，Lamb等将速度随体导数加以分解，把涡量分离出来，形成如下的兰姆型方程。

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{V}+\frac{\nu}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})$$

◆不可压缩流体，有

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{V}$$

◆两边取旋度后，可得涡量输运方程 $\frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt}=(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\nu\nabla^2\mathbf{\Omega}$

粘性流体运动的基本特征

◆涡量输运方程(不可压)

$$\frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega}$$

◆运动的有旋性 $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$

◆旋涡的扩散性

- 使涡量趋于均匀即漩涡强的地方向弱的地方扩散涡量，类似温度。

◆能量的耗散性

- 质量力和表面力所作的功只有一部分变成动能，而另一部分则被粘性应力耗损变成了热能。

6. 粘性流体的能量方程

- ◆热力学第一定律
  - ●单位时间内作用于系统上所有力对系统所做的功与单位时间内输入系统的热量之和等于系统总能量的变化率。

$$\frac{dE}{dt} = Q + W$$

- ◆能量方程是热力学第一定理在运动流体中的表现形式。

能量方程推导

◆控制体，单位时间内总能量的变化率应等于单位时间作用于系统上所有作用力的功与外界传给系统的热量之和。

●单位质量流体所具有的总能量（内能+动能）为

$$e+\frac{V^2}{2}$$

e表示单位质量流体所具有的内能。

●单位时间内，微元流体系统总能量的变化率为

$$\frac{dE}{dt}=\rho\frac{d}{dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)dxdydz$$

外力做功

◆作用系统上的力包括：通过控制面作用于系统上的**表面力**和系统上的**质量力**。

◆质量力做功的功率：

$$W_1 = (F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z)\rho dxdydz = \rho \mathbf{F}\cdot\mathbf{V} dxdydz$$

◆x方向表面力的功率：

$$W_{2x} = \left(\tau_{xx}u_x + \frac{\partial(\tau_{xx}u_x)}{\partial x}dx - \tau_{xx}u_x\right)dydz$$
$$+\left(\tau_{yx}u_x + \frac{\partial(\tau_{yx}u_x)}{\partial y}dy - \tau_{yx}u_x\right)dxdz$$
$$+\left(\tau_{zx}u_x + \frac{\partial(\tau_{zx}u_x)}{\partial z}dz - \tau_{zx}u_x\right)dxdy$$

$$W_{2x} = \left(\frac{\partial(\tau_{xx}u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx}u_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zx}u_x)}{\partial z}\right)dxdydz$$

外力做功

◆同理可得y, z方向表面力的功率：

$$W_{2y}=\left(\frac{\partial(\tau_{xy}u_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{yy}u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{zy}u_y)}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$W_{2z}=\left(\frac{\partial(\tau_{xz}u_z)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{yz}u_z)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{zz}u_z)}{\partial z}\right)dxdydz$$

◆总功率： $W_2=W_{2x}+W_{2y}+W_{2z}$

$$\begin{aligned}W_2=&\left(\frac{\partial(\tau_{xx}u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{yx}u_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{zx}u_x)}{\partial z}\right)dxdydz\\&+\left(\frac{\partial(\tau_{xy}u_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{yy}u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{zy}u_y)}{\partial z}\right)dxdydz\\&+\left(\frac{\partial(\tau_{xz}u_z)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{yz}u_z)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{zz}u_z)}{\partial z}\right)dxdydz\end{aligned}$$

$$W_2=\nabla\cdot([\tau]\cdot\mathbf{V})\mathrm{dxdydz}$$

热量传递

◆单位时间内，外界传给系统的总热量Q包括热辐射和热传导。

- 辐射换热功率 $Q_r = \rho q dxdydz$

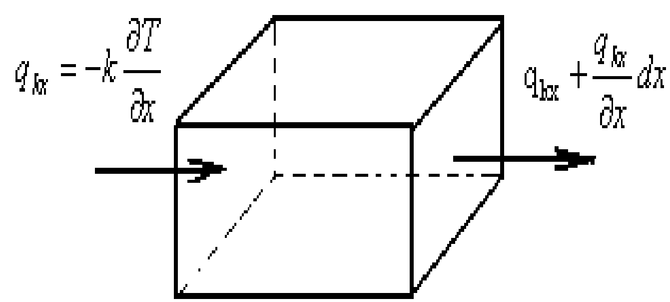
  q表示单位时间因热辐射传给单位质量流体的热量

- 热传导通过控制面传给系统的热量。对于x方向，单位时间通过控制面传入系统的热量为

$$Q_{kx} = \left[q_{kx} - \left(q_{kx} + \frac{\partial q_{kx}}{\partial x} dx \right) \right] dydz$$

$$= -\frac{\partial q_{kx}}{\partial x} dxdydz = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x} \right) dxdydz$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x} \right) dxdydz$$



热量传递

◆同理可得，y和z方向的热传导量。

$$Q_{ky}=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdydz \qquad Q_{kz}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dxdydz$$

◆单位时间内，总的热传导量为

$$\begin{aligned}Q_k &= Q_{kx}+Q_{ky}+Q_{kz}\\ &=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]dxdydz\\ &=\nabla\cdot(\mathrm{k}\nabla\mathrm{T})\mathrm{dxdydz}\end{aligned}$$

能量方程

◆将以上各式代入 $$\frac{dE}{dt}=Q+W$$

◆得到能量方程的微分形式

$$\rho\frac{d}{dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}+\nabla\cdot(\left[\tau\right]\cdot\mathbf{V})+\rho q+\nabla\cdot(\mathrm{k}\nabla\mathrm{T})$$

◆写成张量形式

$$\rho\frac{d}{dt}\left(e+\frac{u_iu_i}{2}\right)=\rho F_iu_i+\frac{\partial(\tau_{ij}u_j)}{\partial x_i}+\rho q+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)$$

动能方程

◆由运动方程 $\rho \frac{du_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$

- 两边分别乘以分速度u_i后相加 $\rho u_i \frac{du_i}{dt} = \rho F_i u_i + u_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$

微分法则

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{u_i u_i}{2}\right) = \rho F_i u_i + \frac{\partial(\tau_{ji} u_i)}{\partial x_j} - \tau_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

哑标

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{u_i u_i}{2}\right) = \rho F_i u_i + \frac{\partial(\tau_{ji} u_i)}{\partial x_j} - \tau_{ji} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- 得动能方程

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{u_i u_i}{2}\right) = \rho F_i u_i + \frac{\partial(\tau_{ji} u_i)}{\partial x_j} - \tau_{ji} \varepsilon_{ji} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

通过应力进行的机械能输运

耗散项

- 动能变化率等于体积力做功、通过粘性力和压力与相邻微团的机械能交换，膨胀功及粘性力对机械能的耗散

内能方程

◆把动能方程代入能量方程，得到另一种形式的能量方程（内能方程）：

$$\rho\frac{de}{dt}=\tau_{ij}\varepsilon_{ij}+\rho q+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)$$

◆物理意义：单位时间内，单位体积流体内能的变化率等于流体变形时表面力作功与外部传入热量之和。

- 表面力作功包括**压力作功**和**剪切力作功**
  - 压力作功：表示流体变形时法向力作膨胀功
  - 剪切力作功：表示流体运动是克服摩擦力作功
    - 这部分是由于流体粘性引起的，将流体部分机械能不可逆转化为热能而消耗掉。

内能方程

◆利用广义牛顿内摩擦定理，可得

$$\tau_{ij}\varepsilon_{ij} = -p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 = -p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Phi$$

●耗散系数 $\Phi = 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2$

◆代入内能方程得

$$\rho\frac{de}{dt} = -p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Phi + \rho q + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)$$

$$\rho\frac{de}{dt} = -p\nabla\cdot\mathbf{V} + \Phi + \rho q + \nabla\cdot\left(k\nabla T\right)$$

●单位体积流体内能的变化率等于法向力作功、外加热量以及由于粘性而消耗的机械能之和。

焓方程

- **内能方程** $\rho\frac{de}{dt} = -p\nabla\cdot\mathbf{V} + \Phi + \rho q + \nabla\cdot(k\nabla T)$
- 焓与内能的关系：$h = e + \frac{p}{\rho}$ 内能+压能

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e + \frac{p}{\rho}\right) = \frac{de}{dt} + p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$$

- 由连续性方程 $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0$ 得到

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\left[\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) - \mathbf{V}\cdot\nabla\rho\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

- 代入内能方程，得**焓方程**

$$\rho\frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \Phi + \rho q + \nabla\cdot(k\nabla T)$$

温度形式的内能方程

◆按照定义 $dh = C_p dT$， $\mathrm{de} = \mathrm{C_v dT}$

◆代入内能方程和焓方程，得

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = -p\nabla\cdot\mathbf{V} + \Phi + \rho q + \nabla\cdot(k\nabla T)$$

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \Phi + \rho q + \nabla\cdot(k\nabla T)$$

◆对不可压缩流体，有 $\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$ $\quad \dfrac{dp}{dt} = 0 \quad C_p = C_v$

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \Phi + \rho q + k\Delta T \Longrightarrow \rho C_v \frac{dT}{dt} = \Phi + \rho q + k\Delta T$$

熵方程

◆对完全气体，熵增与内能变化满足下列关系式

$$T\frac{ds}{dt}=\frac{de}{dt}+p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

◆由连续方程，有

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

◆代入内能方程 $\rho\frac{de}{dt}=-p\nabla\cdot\mathbf{V}+\Phi+\rho q+\nabla\cdot(k\nabla T)$

$$\rho T\frac{ds}{dt}=\Phi+\rho q+\nabla\cdot(k\nabla T)$$

7. 粘性流体运动方程组的封闭性

◆粘性流体方程组引入的独立物理量

- 有：密度ρ、速度**V**、质量力**F**、粘性系数μ、热传导系数k、压强p、内能e、温度T和热辐射量q，共13个标量。
- 已知：质量力、粘性系数、热传导系数、热辐射量。
- **未知量7个**：3个速度分量，密度、压强、温度和内能。

◆导出的方程只有**5个**

- 其中1个连续方程、3个运动方程和1个能量方程。
- 求解必须给出补充关系，封闭方程。

◆需要补充**2个**方程

状态方程

◆状态方程

- 表征流体热力学状态的物理量称为热状态参数。
- 热状态物理量p、T、ρ，这些参数之间的数学关系叫做状态方程。
- 对于完全气体，有

$$f(p,T,\rho)=0 \qquad \frac{\mathrm{p}}{\rho}=RT$$

- 内能和焓的表达式为

$$e=C_vT \qquad \mathrm{h}=\mathrm{C_p}T \qquad \mathrm{C_v}=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$$

可压缩流体的封闭方程组

◆连续方程 $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0$$

◆动量方程 $$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{F}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot[\tau]$$

$$[\tau]=2\mu[\varepsilon]-\left(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{V}\right)[I]$$

变形率张量 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

◆能量方程 $$\rho\frac{de}{dt}=-p\nabla\cdot\mathbf{V}+\Phi+\rho q+\nabla\cdot(k\nabla T)$$

耗散系数 $\Phi=2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2$

◆状态方程 $$\frac{\mathrm{p}}{\rho}=RT \qquad \mathrm{e}=\mathrm{C_v}T$$

不可压缩粘性流体方程组

◆连续方程： $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$

◆运动方程： $\dfrac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{V}$

◆能量方程： $\rho C_v \dfrac{dT}{dt} = \Phi + \rho q + k\Delta T$

耗散系数 $\Phi = 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ $\xrightarrow{\text{应变率平方}}$ $\begin{cases}\text{层流:主要是壁面附近}\\ \text{湍流：大的旋涡之间}\end{cases}$

定解条件

- ◆定解条件包括：初始条件和边界条件。
- ◆初始条件
  - ●初始时刻流场物理量的函数值(速度、压强、温度、密度)。
- ◆边界条件
  - ●固壁面条件(满足不穿透和不滑移条件)。

$$u_n = 0 \qquad \mathrm{u}_\tau = 0$$

  - ●进出口边界条件(给定进口断面速度、压强、温度分布)。
  - ●不同流体分界面条件(在分界面上速度、压强、温度是连续的)。

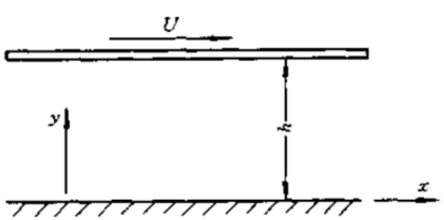
8. 纳维-斯托克斯方程的几种解析解

◆NS方程是一个二阶、非线性的偏微分方程，加之边界条件难以用数学方程表达，

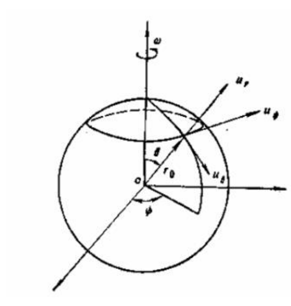
◆很难得到其解析解，目前多采用数值方法求解。

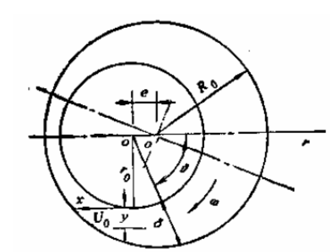
◆某些简单的流动问题可以得到解析解，如圆管、平行平板间、平行圆盘间、同心圆环空中的层流流动等。

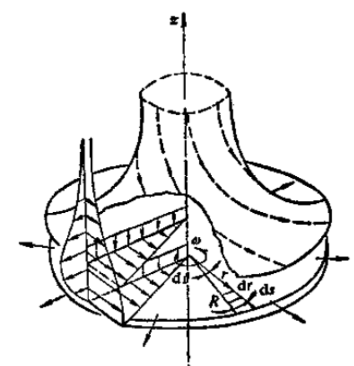
◆方程组建立150多年以来，已经得到约 80 个解析解。



平行平板流动



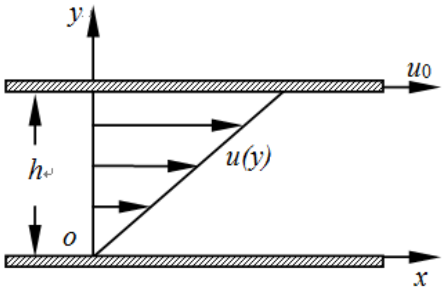




平行平板间的纯剪切流

◆纯剪切流 Pure shear flow

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\mathbf{V}$$



- 两平行平板间充满牛顿流体。
- 上板以速度u_0做水平方向的匀速运动，下板不动。
- x方向无压力梯度。
- x方向假设无限长，不用考虑边界效应。流动定常。

$$\cancel{X}-\cancel{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}+\upsilon\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}\right)=\cancel{\frac{du_x}{dt}}$$

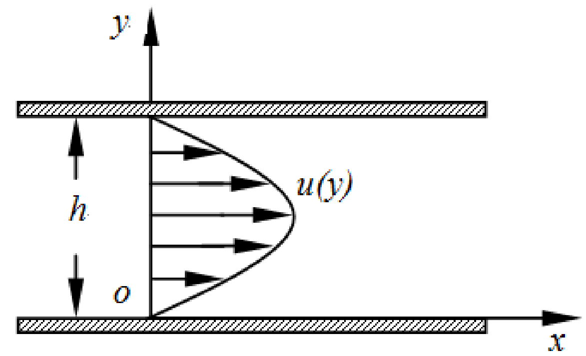
$$\frac{d^2u}{dy^2}=0$$

积分得 $u=c_1y+c_2$

由边界条件y = 0时u =0；y =h 时u =u_0, 可求得积分常数为 $c_1=\frac{u_0}{h},c_2=0$

$$u=\frac{u_0}{h}y$$

平行平板间的泊肃叶流



◆泊肃叶流（Poiseuille flow）

- 两平行平板间充满牛顿流体。
- 上下板均不动。
- 流体在x方向受压力梯度dp/dx 的作用。

$$\cancel{X}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}\right)=\cancel{\frac{du_x}{dt}}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$ 积分得 $$u=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2+c_1\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y+c_2$$

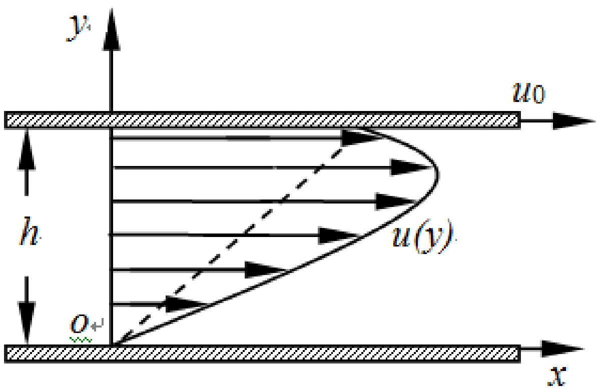
由边界条件$y=0$时$u=0$；$y=h$时$u=0$，可求得积分常数为 $c_1=-\frac{h}{2}, c_2=0$

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2-hy)$$

平行平板间的库特流

◆库特流（Couette flow）

- 两平行平板间充满牛顿流体。
- 上板以速度u_0做x方向的匀速运动。
- 下板不动。x方向的压力梯度dp/dx。



$$\cancel{X}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}\right)=\cancel{\frac{du_x}{dt}}$$

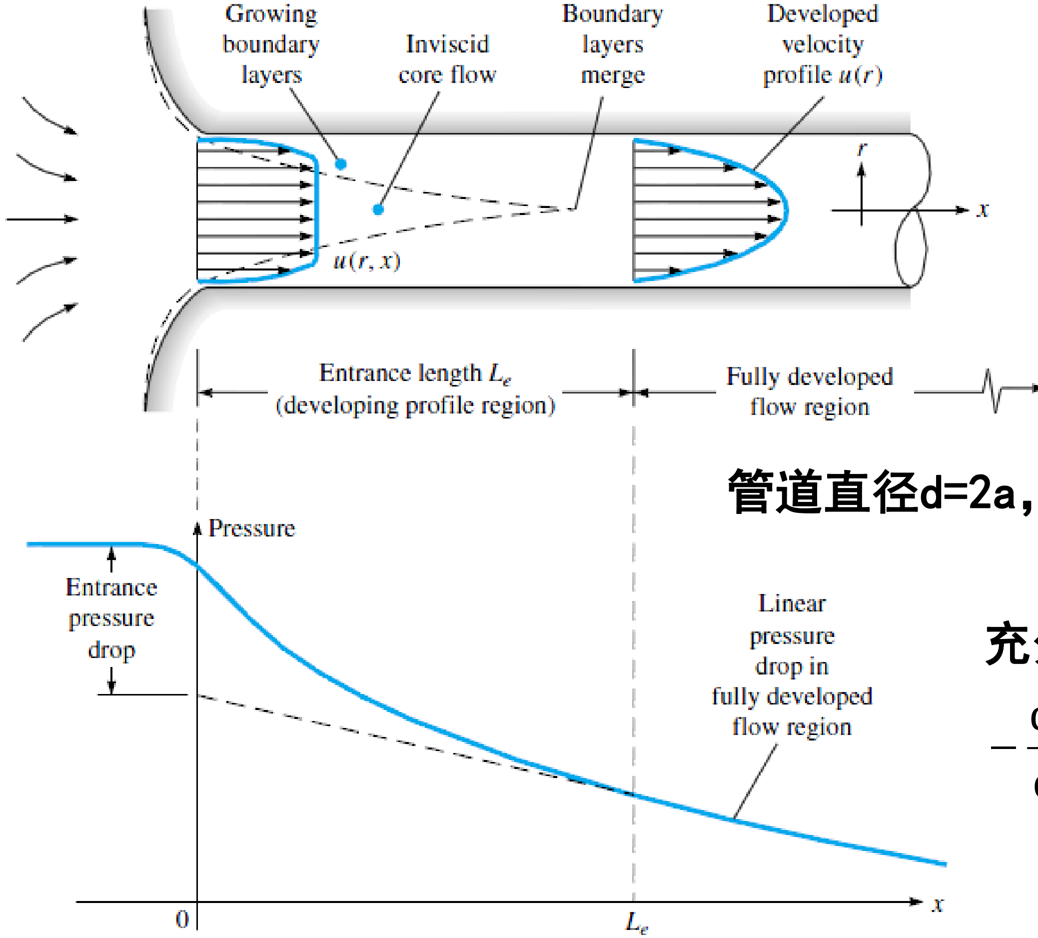
$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} \qquad u=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2+c_1\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y+c_2$$

由边界条件$y=0$时$u=0$；$y=h$时$u=u_0$，可求得积分常数为 $c_1=\frac{u_0}{h}\Big/\frac{dp}{dx}-\frac{h}{2}, c_2=0$

$$u=\frac{u_0}{h}y+\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2-hy)$$

管道中的层流

◆充分发展的管道流动——泊肃叶流动



管道直径d=2a，长度为l

充分发展区

$$-\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\Delta p}{l}$$

圆管内的定常层流运动

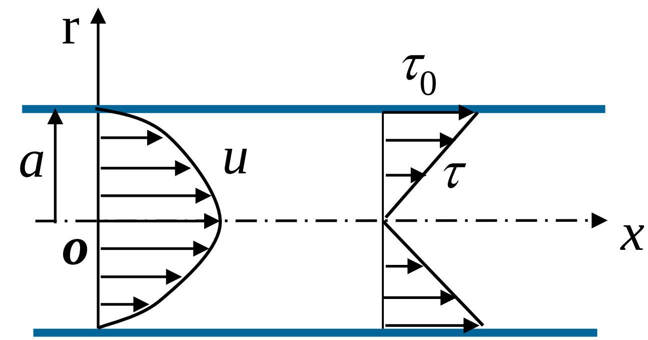
f=0, 圆管水平放置，截面上压力均布。

（1）轴对称流，柱坐标系（r,θ,x）中 $v_x=u(r)$ $v_r=0$ $v_\theta=0$

（2）直线运动，不计质量力，压力只是 x 的函数 $p=p(x)$

NS方程（柱坐标系（r,θ,z）中）：

$$\left.\begin{aligned}
&\cancel{\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2}{r}=f_r}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\cancel{\nabla^2 v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{v_r}{r^2}}\right)\\
&\cancel{\frac{Dv_\theta}{Dt}-\frac{v_r v_\theta}{r}=f_\theta}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta}+\nu\left(\cancel{\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2}}\right)\\
&\cancel{\frac{Dv_x}{Dt}}=\cancel{f_x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 v_x
\end{aligned}\right\}$$



压力梯度：$\dfrac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}$

其中 $$\frac{D}{Dt}=\cancel{\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}+v_x\frac{\partial}{\partial x}}\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}}+\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}$$

圆管内的定常层流的速度分布

NS方程简化为

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} \xrightarrow{\text{对}\,r\,\text{积分}} u=\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r^2+c_1\ln r+c_2$$

边界条件：$r=0$ 处 u 有限值，得 $c_1=0$；$u\big|_{r=a}=0$ $c_2=-\frac{a^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}$

速度分布为 $$u=-\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left(a^2-r^2\right)$$

若 l 长度管道内压力降 $\Delta p=p_1-p_2>0$ 则 $-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\Delta p}{l}$ $u_{\max}=\frac{\Delta p}{4\mu l}a^2$

速度 $u=\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}\left(a^2-r^2\right)$ or $\boxed{u=u_{\max}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)}$（抛物面）

流量与平均流速

最大速度： $$u_{\max}=\frac{\Delta p}{4\mu l}a^2$$

体积流量： $$Q=\int_0^a u\cdot 2\pi r dr=\frac{\pi a^2}{2}u_{\max}=\frac{\pi a^4}{8\mu l}\Delta p$$

—（哈根-泊肃叶Hagen-Poiseuille定律，1939）。

圆管内的流量 Q 与压力降 Δp、半径 a^4 成正比，

而与粘性系数 μ 及管长 l 成反比。

平均速度： $$u_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}u_{max}=\frac{\Delta p}{8\mu l}a^2$$

当Re<2300,流动为层流时成立

Re>2300可能变成湍流，完全不同

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{\Delta p}{l}=-\frac{8\mu}{a^2}u_m$$

管流阻力

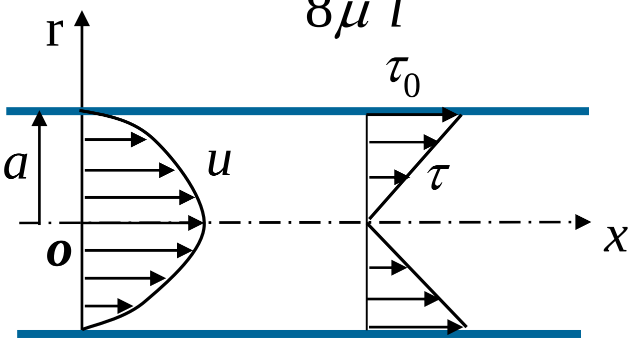
$$u=\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}\left(a^2-r^2\right)$$

$$u_{\mathrm{m}}=\frac{\Delta p}{8\mu\, l}a^2$$

◆剪应力分布 $\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{\Delta p}{2l}r$

◆管壁上剪应力 $\tau_w=-\frac{\Delta p}{2l}a$

$$\frac{\Delta p}{l}=-2a\tau_w$$



◆摩擦系数---管壁与流体之间的剪应力与动压的比值

$$\gamma=\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_m^2}=\frac{-\mu\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}}{\frac{1}{2}\rho u_m^2}=\frac{-\frac{1}{2}a\left(\frac{\Delta p}{l}\right)}{\frac{1}{2}\rho\left(-\frac{a^2}{8\mu}\frac{\Delta p}{l}\right)u_m}=\frac{8\mu}{\rho u_m a}=\frac{16}{\mathrm{Re}}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{u_m d}{\nu}$$

管流阻力系数

◆阻力 $F=\tau_w\cdot 2\pi a l=\pi a^2\Delta p$

◆压力变化（或沿程损失） $\frac{dp}{dx}=-\frac{\Delta p}{l}=-\frac{8\mu}{a^2}u_m$（层流）

- 流体从某截面开始流经l长度时克服摩擦阻力，损失压力

$$\Delta p=\rho h_f=\lambda\frac{l}{2a}\frac{1}{2}\rho u_m^2$$

◆沿程阻力系数

- 单位长度内，管道内流体流动所受到的摩擦阻力与单位长度内动压力头之比。

$$\lambda=\frac{\Delta p}{\frac{l}{2a}\frac{1}{2}\rho u_m^2}=\frac{\tau_w}{\frac{1}{8}\rho u_m^2}=\frac{4F}{\frac{1}{2}\rho u_m^2\cdot 2a\pi l}$$

◆圆管层流 $\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}}$ $\left(\mathrm{Re}=\frac{u_m d}{\nu}<2300\right)$ $\Delta p=32\mu\frac{l}{d^2}u_m$

作业

1. 一个固定相距0.5mm的平行平板，需对其作用切向力才能维持0.25m/s的速度，此切向力对应的切应力为2Pa，求出这两平板之间流体的动力学粘度。

2. 一作用在XoY屏幕上2x2cm^{2}的正方形上的力 $\mathbf{F}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+9\mathbf{k}$，单位为kN。将它分解为法向力和切向力，求正应力和切应力。对于 $\mathbf{F}=-4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-9\mathbf{k}$，重复上述计算。

3. 液体沿倾角为a的斜板流下。若液层的厚度为h，证明单位宽度的斜板上，液体的质量流量为 $q_m=\dfrac{\rho g h^3 \sin a}{3\nu}$ 。

4. 从不可压缩流体的动量方程出发，推导涡量输运方程。

$$\frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt}=(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\nu\nabla^2\mathbf{\Omega}$$

作业

14.10　内、外圆筒的直径分别为 $D=1\ 000$ mm 和 $D_1=1\ 002$ mm，轴向长度 $b=1$ m。内、外筒同心，在其间隙里充满 60℃ 的润滑油。使圆筒旋转，由于与间隙宽度相比，筒的半径相当大，故可设速度分布为线性关系，设油的有关物理参数为：密度 $\rho=842\ \mathrm{kg/m^3}$，黏度 $\mu=4.17\times10^{-3}$ Pa·s，比热容 $c=2.02\times10^3$ J/(kg·K)。

(1) 让内筒匀速旋转，且使筒壁线速度为 1 m/s，求所需的转矩 M，轴功率 L，1 s 内产生的热量及油温上升 1℃ 所需时间 t。设内、外筒壁绝热；

(2) 当内筒壁线速度为 8 m/s 时，又将怎样？

14.11　对习题 14.9 的速度场，已知温度场为

$$\frac{T-T_w}{T_e-T_w}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)+\frac{prE_c}{8}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$

式中，pr 为普朗特常数（$pr=\frac{\mu c_p}{k}$，k 为热传导系数）；

$$E_c=\frac{U_c^2}{c_p(T_e-T_w)}$$

式中 T_e，T_w 分别为上板和下板的壁温。

(1) 求出动能式(14.72)等号右端各项，从而求出 $\mathrm{D}(\frac{1}{2}u_iu_i)/\mathrm{D}t$；　$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}u_iu_i\right)=u_iF_{x_i}+2\nu\frac{\partial(s_{ij}u_i)}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(pu_i)}{\partial x_i}-2\nu s_{ij}s_{ij}$

(2) 求出熵式(14.76)等号右端各项，从而求出 $\mathrm{D}s/\mathrm{D}t$。讨论在黏性流动中熵沿流线不变的原因；　$T\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t}=Q-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{\Phi}{\rho}$

(3) 求出热焓式(14.82)等号右端各项，从而求出 $\mathrm{D}T/\mathrm{D}t$；　$c_p\frac{DT}{Dt}=Q+\frac{k}{\rho}\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}\right)+\frac{\Phi}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}$

(4) 求出总焓式(14.85)等号右端各项，从而求出 $\mathrm{D}(\frac{1}{2}u_iu_i+h)/\mathrm{D}t$。　$\frac{D}{Dt}\left(h+\frac{1}{2}u_iu_i\right)=Q+u_iF_{x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(m_{ji}u_i)}{\partial x_j}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}$

14.11题 补充信息

14.9 有两平行平板，下板固定，上板以速度 U_e 移动（见图 14.21），沿流向无压差，流体完全由上板因黏性而拖动，设为定常不可压缩层流流动，忽略彻体力，其速度场可表示为

$$u = \frac{U_e}{2}\left(\frac{y}{h}+1\right),\quad v = 0$$

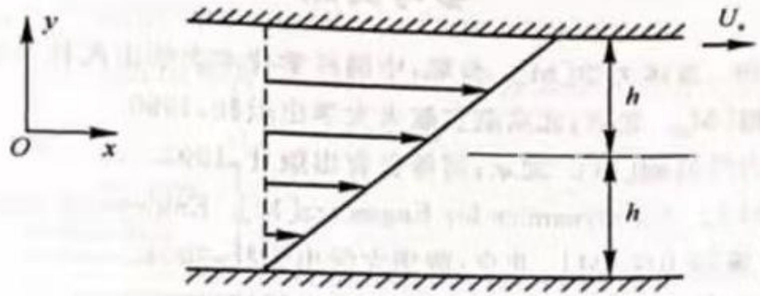


图 14.21　习题 14.9 的图

(1) 求黏性应力分布；

(2) 求单位容积的流体所受的表面力在 x 方向的分量；

(3) 检验 x 方向动量方程，是否得到满足；

(4) 求压力沿 y 向的分布。