Cálculo Diferencial
Aula 1

Nesta aula pretendemos:

- Apresentar a professora, a Atividade Acadêmica e o Plano de Ensino.

- Colocar alguns avisos importantes.

- Iniciar o estudo de Funções: definição, domínio, imagem e valor no ponto.

- Disponibilizar os Exercícios Propostos não avaliativos.

Olá, Patricia Picolo Gil Noga

Selecione a Atividade Acadêmica

Cálculo Diferencial

Selecione a Turma

GR10006-00531

Dia semana	Horário		Início e Fim da Atividade	
Segunda-Feira	19:30	22:23	26/02/2024	06/07/2024

Prédio	Bloco	Sala	Campus	Ambiente Virtual
C	C05	109	Unisinos São Leopoldo - Sede	Moodle

Semanas dos encontros presenciais

Caracteristica da Atividade Acadêmica

Todos os encontros são presenciais (obrigatórios).

Avisos importantes:

• Plano de Ensino no Moodle

• Acompanhar as aulas com material: lápis, caderno, calculadora...

• Avaliações

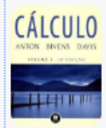
• Horas Práticas: Exercícios propostos não avaliativos ao final de cada aula teórica.

Exercícios avaliativos online nas aulas que antecedem às Provas.

• Monitoria

Bibliografia

97. Cálculo - 10. ed. / 2014 - (Livro)



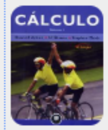
ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. 2 v. ISBN 9788582602256 (v.1).

Número de chamada: **517 A634c 10. ed. 2014 (UNISINOS) (UNISINOS)**

Título uniforme ou original: ***Calculus early transcendentals***

Exemplares | Marc | Reserva | Book Express | Edição

98. Cálculo - 8. ed. / 2007 - (Livro)



ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo.** 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 2 v. ISBN 9788560031634 (v.1).

Número de chamada: **517 A634c 8. ed. 2007 (UNISINOS) (UNISINOS) (UNISINOS) (UNISINOS) (UNISINOS) (UNISINOS)**

Título uniforme ou original: ***Calculus***

Exemplares | Marc | Reserva | Book Express | Edição

99. Cálculo : um novo horizonte - 6. ed. / 2000 - (Livro)

ANTON, Howard. **Cálculo:** um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. 2 v. ISBN 8573076542 (v.1).

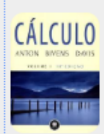
Número de chamada: **517 A634c 6. ed. 2000 (UNISINOS) (UNISINOS)**

Título uniforme ou original: ***Calculus, a new horizon***

Exemplares | Marc | Reserva | Book Express

100. Cálculo. Volume 1 [recurso eletrônico] - 10. ed. / 2014 - (Livro eletrônico)

on-line



ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo** / Volume 1. 10. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2014. 1 recurso online. ISBN 9788582602263.

Título Uniforme/Original : ***Calculus early transcendentals***

| Marc

Acesso direto ao catálogo online:
http://www.biblioteca.asav.org.br/biblioteca_s/acesso_login.php?cod_acervo_acessibilidade=5379801&acesso=aHR0cHM6Ly9iaWJsaW90ZWNhYS5ncnVwb2EuY29tLmJyL2x0aS9sYXVuY2gucGhwP2NvbnN1bWVya2V5PTIwMjIwODAxLVVOSVNJTk9TJmJvb2tpZD05Nzg4NTgyNjAyMjYz&label=acesso%20restrito

Conteúdos trabalhados

Na atividade de Cálculo Diferencial podemos considerar, de forma geral, a seguinte distribuição dos conteúdos:

1) Estudo de Funções;
2) Estudo de Limites;
3) Estudo da Derivada;
4) Aplicações das derivadas.

Iniciando o semestre...
Introdução ao estudo de Funções
Conjuntos Numéricos

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é representado por: $\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \dots\}$

Um subconjunto importante de $\mathbb{N}$ é o conjunto $\mathbb{N}^*$, do qual extraímos o zero: $\mathbb{N}^* = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$

Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros é representado por $\mathbb{Z} = \{\dots, \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$

Destacamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{N}$, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

Obs: A letra $\mathbb{Z}$ é a inicial da palavra *Zahl*, que significa número em alemão.

Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Ao acrescentarmos as frações não aparentes positivas e negativas ao conjunto $\mathbb{Z}$, obtemos o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$. Assim, por exemplo, são números racionais:

$$-2, \quad -\frac{3}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1, \quad \frac{5}{3}, \quad 2$$

Observamos que todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Assim, podemos escrever, $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$.

Observe que a restrição $b \neq 0$ é necessária, pois $\frac{a}{b}$ só tem significado se $b \neq 0$. A designação racional surgiu porque $\frac{a}{b}$ pode ser vista como uma razão entre os inteiros a e b. A letra $\mathbb{Q}$, que representa o conjunto dos números racionais é a primeira letra da palavra *quociente*.

Se $b = 1$, temos $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a \in \mathbb{Z}$, o que implica que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$. Assim, podemos perceber que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Conjunto dos números irracionais

Este é o conjunto dos números que não possuem representação na forma $\frac{a}{b}$, são os decimais infinitos e não-periódicos. Alguns exemplos são os números:

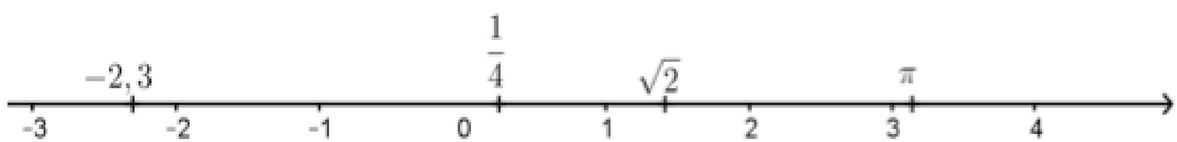
$$\sqrt{2} = 1,4142135\ldots \qquad e = 2,71828183\ldots \qquad \pi = 3,1415926535\ldots$$

Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais obtemos o conjunto dos números reais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \{x \mid x \text{ é } racional \text{ } ou \text{ } x \text{ é } irracional\}$$

Este conjunto pode ser representado graficamente por meio de um segmento de reta orientado. A seguir, alguns números reais para exemplificar.



Intervalos

Denominamos intervalo a qualquer subconjunto dos números reais. Assim, dados dois números reais a e b, com $a < b$, temos:

a) *intervalo aberto*

Representação algébrica:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou (a, b) ou $]a, b[$

A bolinha "aberta" (○) indica que os extremos a e b não pertencem ao intervalo. Esse intervalo contém todos os números reais compreendidos entre a e b, excluindo os extremos.

b) *intervalo fechado*

Representação algébrica:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ou $[a, b]$

A bolinha "fechada" (•) indica que os extremos a e b pertencem ao intervalo. Esse intervalo contém todos os números reais compreendidos entre a e b, incluindo os extremos.

c) intervalo semi-aberto à direita

Representação algébrica:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ou $[a, b)$ ou $[a, b[$

d) intervalo semi-aberto à esquerda

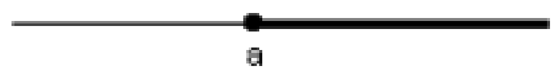
Representação algébrica:

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ou $(a, b]$ ou $]a, b]$

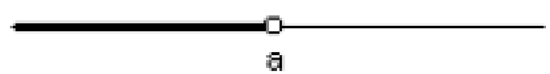
Podemos ter ainda intervalos com as seguintes características:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $(a, +\infty)$

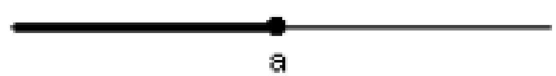
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ ou $[a, +\infty)$



$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ou $(-\infty, a)$



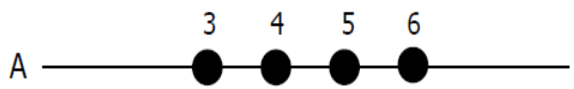
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ ou $(-\infty, a]$



Atenção!

• Note que os conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 6 \}$ e $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 6 \}$ são DIFERENTES.

Veja na reta real:



O conjunto A é finito, pois tem somente 4 elementos, ou seja, $A = \{ 3 , 4 , 5 , 6 \}$. Em contrapartida, não podemos determinar o número de elementos do conjunto B, pois este último possui infinitos elementos.

• **Fique atento para as diferentes notações de conjunto:** $\{ 3 , 10 \} \neq [3 , 10]$

O conjunto $\{ 3 , 10 \}$ possui 2 elementos e o intervalo $[3 , 10]$ possui infinitos elementos.

No final da aula, teremos alguns exercícios para praticar a representação de intervalos na reta real.

Funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática. É muito comum expressar fenômenos físicos, biológicos, químicos, sociais, entre outros, por meio de funções, daí a importância de seu estudo. A ideia de função está presente quando relacionamos duas grandezas variáveis, uma delas chamada dependente e a outra chamada independente.

Exemplos de funções...

Imagine o abastecimento de um automóvel em um posto de gasolina. O valor a ser pago pelo abastecimento depende da quantidade de litros de combustível abastecidos. Dessa forma, podemos afirmar que o valor a ser pago é a variável dependente e a quantidade de litros de combustível é a variável independente. A tabela a seguir mostra a relação entre essas duas variáveis no caso hipotético de um litro de combustível custar R$ 5,90.

combustível (*litros*)	valor a pagar (*R$*)
1	5,90
2	11,80
10	59,00
20	118,00
25	147,50
⋮	
L	5,90 x L

Exemplo: Numa esteira ergométrica, um atleta treina com uma velocidade constante para uma maratona. Seu treinador observa, a cada 10 minutos, o espaço percorrido e anota em uma tabela seu desempenho. Observe:

Instante (minutos)	Distância (m)
10	1 500
20	3 000
30	4 500
40	6 000
50	7 500
60	9 000

A cada instante (x), em minutos, corresponde a uma única distância (y), em metros. Dizemos então que a distância percorrida pelo atleta encontra-se em função do instante de tempo gasto em seu treinamento. Como a cada 10 minutos são percorridos 1500 metros; a cada minuto, 150 metros são percorridos, assim a fórmula que relaciona espaço e tempo pode ser descrita por **$y = 150x$**.

Definição: Considere dois conjuntos, o conjunto A com elementos x e o conjunto B com elementos y. Diz-se que temos uma função de A em B ($f: A \to B$) quando existe uma relação entre os elementos desses dois conjuntos tais que para cada elemento de A há um, e apenas um, correspondente em B.

Seja $f: A \to B$, $f(x) = y$, uma função. Nesse esquema, A é o **domínio** da função, ou seja, o conjunto que contém todos os elementos $\boldsymbol{x}$ para os quais a função é definida; B é o **contradomínio** da função, ou seja, o conjunto que contém os elementos $\boldsymbol{y}$ que podem estar relacionados aos elementos $\boldsymbol{x}$; e $f(x) = y$ é a lei da função, ou seja, a regra que associa os elementos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

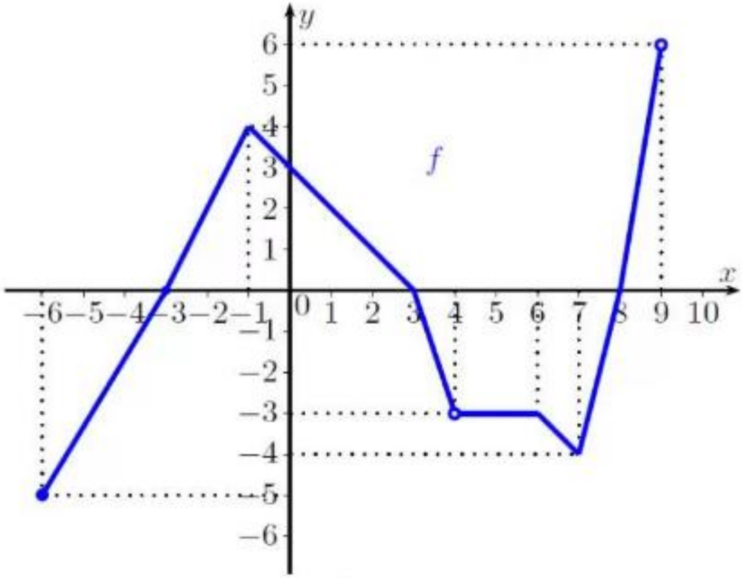
* **OBS:** Assim, temos que o **Domínio** é sempre um intervalo do eixo “X” (ou da variável independente) e a **Imagem** é um subconjunto do **Contradomínio**, ou seja, um intervalo do eixo “Y” (ou da variável dependente)

Domínio e imagem de uma função

Domínio (D) de uma função é o (maior) conjunto de valores que a variável independente pode assumir, enquanto a imagem (Im) é o conjunto de valores que a variável dependente assume, considerando a regra que associa as duas variáveis. Geralmente não é possível listar todos esses valores de modo explícito, o que torna necessário o uso da representação por conjunto ou intervalos numéricos. Normalmente, o domínio de uma função é determinado diretamente pela lei da função.

<u>Exemplo</u>:

Dada a função f a seguir, determine o domínio e a imagem:



$Dom(f) = [-6, 4) \cup (4, 9)$

$Im(f) = [-5, 6)$

Quando temos apenas a lei da função, a determinação do domínio acontece a partir das restrições:

- Variável no Denominador: O denominador deve ser diferente de zero.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$x \neq 0 \Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} \text{ ou } (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

- A função envolve radical de índice par: O radicando deve ser positivo (≥ 0).

b) $f(x) = \sqrt{x}$

$$x \geq 0 \Rightarrow Dom(f) = [0, \infty)$$

- Logaritmo: O logaritmando deve ser estritamente positivo (no caso do logaritmo real).

c) $f(x) = ln(x)$

$$x > 0 \Rightarrow Dom(f) = (0, \infty)$$

Vamos resolver juntos os exemplos:

- Exemplos

Exemplo: Qual o domínio das funções representadas pelas leis abaixo?

a) $f(x) = x^2$

Como a função não apresenta quaisquer das restrições, temos que

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

b) $f(x) = \frac{1}{x-8}$

Como a função apresenta variável no denominador, temos que

$$x - 8 \neq 0 \Rightarrow x \neq 8$$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{8\}$ ou $(-\infty, 8) \cup (8, \infty)$

c) $f(x) = \frac{2x+8}{4x^2-16}$

Como a função apresenta variável no denominador, temos que

$$4x^2 - 16 \neq 0$$
$$4x^2 \neq 16$$
$$x^2 \neq 4$$
$$\Rightarrow x \neq \pm\sqrt{4} \Rightarrow x \neq \pm 2$$
$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Como a função apresenta raiz de índice par, temos que

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$
$$Dom(f) = [1, \infty)$$

e) $f(x) = log(-3x + 2)$

Como a função apresenta logaritmo, temos que

$$-3x + 2 > 0 \Rightarrow -3x > -2 \Rightarrow$$
$$3x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$
$$Dom(f) = (-\infty, \frac{2}{3})$$

Valor numérico da função

Valor numérico de uma função é o valor que a variável dependente ("y") assume quando é atribuído algum valor à variável independente ("x"). Este valor pode ser determinado a partir da lei da função, ou de seu gráfico, como nos exemplos a seguir.

Exemplos:

1) Se $f(x) = x^2 - 4x$, determine o que se pede abaixo:

a) $f(2) =$

b) $f(4) =$

c) $f(10) =$

d) $D(f) =$

2) Dada a função $f(x)$ representada pelo gráfico abaixo, determine o que se pede:

a) $f(4) =$

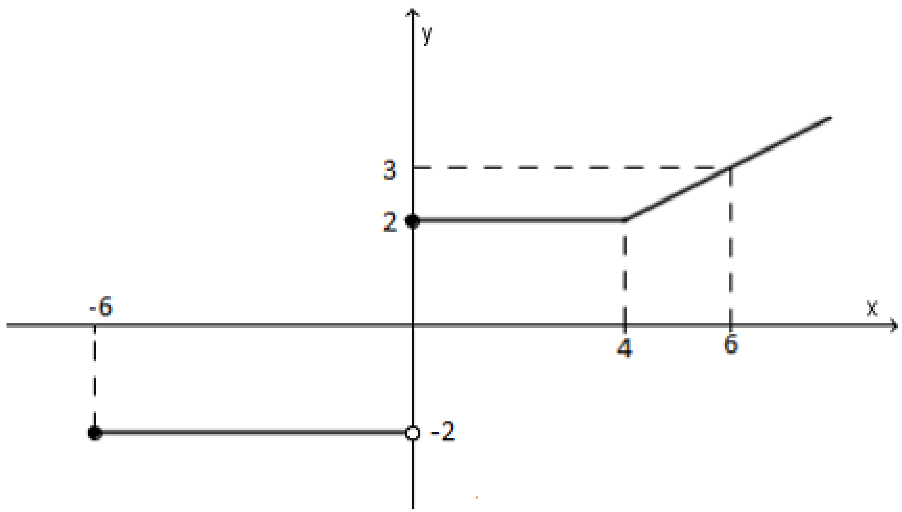
b) $f(0) =$

c) $f(-3) =$

d) $f(1) =$

e) $D(f) =$

f) $Im(f) =$



Resultados:

1) Se $f(x) = x^2 - 4x$, determine o que se pede abaixo:

a) $f(2) = 2^2 - 4.2 = 4 - 8 = -4$

b) $f(4) = 4^2 - 4.4 = 16 - 16 = 0$

c) $f(10) = 10^2 - 4.10 = 100 - 40 = 60$

d) $D(f) = \mathbb{R}$

2) Dada a função $f(x)$ representada pelo gráfico abaixo, determine o que se pede:

a) $f(4) = 2$

b) $f(0) = 2$

c) $f(-3) = -2$

d) $f(1) = 1$

e) $D(f) = [-6, +\infty)$

f) $Im(f) = \{-2\} \cup [2, +\infty)$