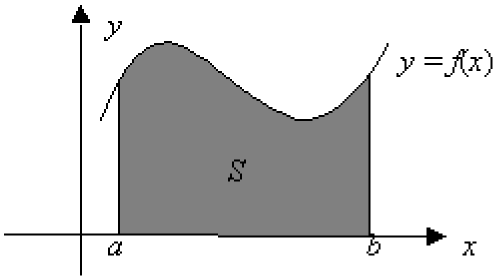
Área e a Integral Definida

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

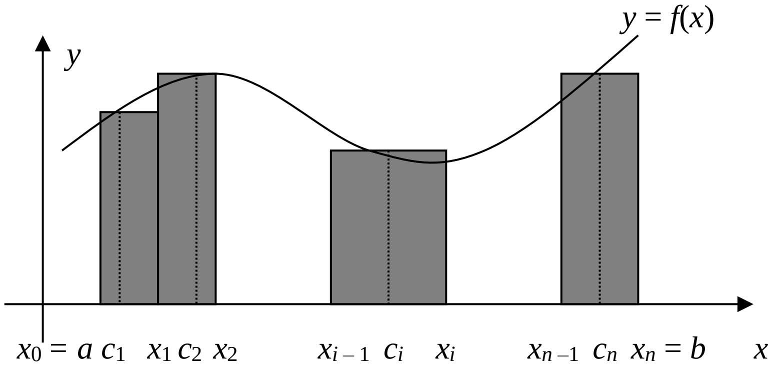
Consideremos agora o problema de definir a área de uma região plana S, delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa f, pelo eixo dos x e por duas retas $x = a$ e $x = b$.



Para isso, fazemos uma partição do intervalo $[a, b]$, isto é, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, escolhendo os pontos

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
Em cada um destes intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i.
Para cada i , $i = 1, \ldots., n$, construímos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$



A soma das áreas dos n retângulos, que representamos por S_n, é dada por:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Esta soma é chamada *soma de Riemann* da função $f(x)$.

Podemos observar que a medida que n cresce muito e cada Δx_i , $i = 1, ..., n$, torna-se muito pequeno, a soma das áreas retangulares aproxima-se do que intuitivamente entendemos como área de S.

Portanto, se $y = f(x)$ é uma função contínua, não-negativa em $[a,b]$, a área sob a curva $y = f(x)$, de a até b, é definida por

$$A = \lim_{máx\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

onde para cada $i = 1, ..., n$, c_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Integral Definida

A integral definida está associada ao limite da definição acima. Ela nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas.

Se f está definida em um intervalo fechado $[a,b]$ e o limite de uma soma de Riemann de f existe, dizemos que f é *integrável* em $[a,b]$ e denotamos o limite por

$$\lim_{máx\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

O limite é a *integral definida* de f de a até b. O número a é o *limite inferior* de integração e b é o *limite superior*.

É importante observar que integrais definidas e integrais indefinidas são coisas diferentes. Uma integral definida é um *número*, enquanto uma integral indefinida é uma *família de funções*.

Uma condição suficiente para que f seja integrável em $[a,b]$ é dada no teorema abaixo.

Teorema: Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

Quando a função f é contínua e não negativa em $[a,b]$, a definição da integral definida coincide com a definição da área (definição dada acima). Portanto, neste caso, a integral definida é a área da região limitada pelo gráfico de f, o eixo dos x de a até b, ou seja, $área = \int_a^b f(x)\,dx$. Se f for contínua, e admitir valores positivos e negativos em $[a,b]$, então a integral definida, não mais representa a área entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ e sim a diferença das áreas – a área acima de $[a,b]$ e abaixo da curva $y = f(x)$ menos a área abaixo de $[a,b]$ e acima da curva $y = f(x)$. Chamamos isso de *área líquida com sinal* entre o gráfico de $y = f(x)$ e o intervalo $[a,b]$.

Nos casos mais simples, as integrais definidas podem ser calculadas usando fórmulas de geometria plana para computar as áreas com sinal.

<u>EXEMPLO</u>: Esboce a região cuja área está representada pela integral definida e calcule a integral usando uma fórmula apropriada de geometria.

a) $\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx$

b) $\int_{-5}^5 x \, dx$

Propriedades da Integral Definida

Sempre que utilizamos um intervalo $[a,b]$, supomos $a < b$. Assim em nossa definição não levamos em conta os casos em que o limite inferior é maior que o limite superior. Será conveniente estender essa definição. Geometricamente, as duas definições particulares a seguir parecem razoáveis:

(a) Se f está definida em $x = a$, então

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

(b) Se f é integrável em $[a,b]$, então

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

Teorema: Se f e g são integráveis em $[a,b]$ e c é uma constante, então as seguintes propriedades são verdadeiras:

(a) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

(b) $\int_a^b [f(x) \pm g(g)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

A parte (b) do Teorema acima pode ser estendida para mais de duas funções, e ainda ser combinada com (a).

Teorema: Se f é integrável nos três intervalos determinados por a, b e c, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema: Se f e g são contínuas no intervalo $[a,b]$ e $0 \le f(x) \le g(x)$ para $a \le x \le b$, então as seguintes propriedades são verdadeiras:

(a) $0 \le \int_a^b f(x)\,dx$

(b) $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

Às vezes, é possível simplificar o cálculo de uma integral definida (em um intervalo simétrico em relação à origem) identificando o integrando como uma função par ou ímpar.

Teorema: Seja f integrável no intervalo fechado $[-a,a]$

(a) Se f é uma função par, então $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(b) Se f é uma função ímpar, então $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Teorema Fundamental do Cálculo

Este teorema relaciona a diferenciação e a integração como operações inversas e nos diz que os processos de limite (usados para definir a derivada e a integral definida) preservam esta relação de inversão.

Teorema: Se uma função f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer função tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x em $[a,b]$.

Temos agora uma maneira de calcular a integral definida desde que possamos encontrar uma antiderivada de f.

Ao aplicar este teorema, a notação

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

é bastante útil.

Finalmente, observamos que a constante de integração C pode ser retirada da antiderivada, já que

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)+C\right]_a^b = \left[F(b)+C\right] - \left[F(a)+C\right] = F(b) - F(a)$$

EXEMPLO: Calcule as seguintes integrais definidas:

a) $\int_{-1}^{2} 4x\left(1-x^2\right)dx$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x^6}\,dx$

c) $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 \theta d\theta$

d) $\int_{1/2}^{1} \frac{1}{2x} dx$

e) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$

f) $\int_{-1}^{1} |2x-1| dx$

A exigência da continuidade de f em $[a,b]$ no Teorema Fundamental do Cálculo é importante, pois se você aplicar este Teorema a integrandos descontínuos no intervalo de integração poderá obter resultados errôneos. Por exemplo, $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx - \left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^{1} = -[1-(-1)] = -2$

Sempre que você achar conveniente mudar a letra usada para a variável de integração em uma integral definida, isto pode ser feito sem alterar o valor da integral. Uma vez que a variável de integração em uma integral definida não desempenha nenhum papel, ela é usualmente chamada de *variável muda*.

Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$, definimos área total $= \int_a^b |f(x)|dx$ como a área total entre a curva $y= f(x)$ e o intervalo $[a,b]$. Nos subintervalos em que $f(x) \geq 0$ trocamos $|f(x)|$ por $f(x)$; e nos intervalos em que $f(x) \leq 0$, trocamos $|f(x)|$ por $-f(x)$. A soma das integrais assim obtidas é a área total.

EXEMPLO: Esboce a curva $y = e^x - 1$ no intervalo $[-1,1]$ e encontre a área total entre a curva e o intervalo dado do eixo x.

Integrais Definidas por Substituição

EXEMPLOS:

a) $\int_0^{\pi/4} tg^2 x \sec^2 x dx$

1º Método:

2º Método:

b) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$

c) $\int_{\ln 2}^{\ln\left(2/\sqrt{3}\right)} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$