

B.2 Środek ciężkość i moment bezwładności sześcianu.

Paweł Rzońca

12 maja 2016

Wstęp

Ćwiczenie polega na wyznaczeniu środka ciężkości oraz momentu bezwładności sześcianu względem osi przechodzącej przez jego środek i równoległej do jednego z boków. Rozważamy sześcian jednorodny o gęstości $\rho(\vec{r}) = 1$. Do wyznaczenia odpowiednich całek, użyto metody Monte Carlo.

W metodzie Monte Carlo korzystamy z twierdzenia o wartości średniej i całkę szacujemy wzorem

$$I_N = \Omega \langle f \rangle = \frac{\Omega}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\vec{x}_i) \quad (1)$$

Gdzie Ω jest objętością obszaru całkowania, a N liczbą losowań.

Środek ciężkości wynika w oczywisty sposób z symetrii figury. Przyjmując układ współrzędnych zaczepiony w połowie głównej przekątnej sześcianu, środek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem ciężkości rozważanej bryły, tj.

$$r_{cm} = (0, 0, 0). \quad (2)$$

Moment bezwładności jednorodnego sześcianu względem dowolnej osi przechodzącej przez jego środek, co można łatwo udowodnić analitycznie, wynosi

$$I = 1/6. \quad (3)$$

Wyniki

(a)

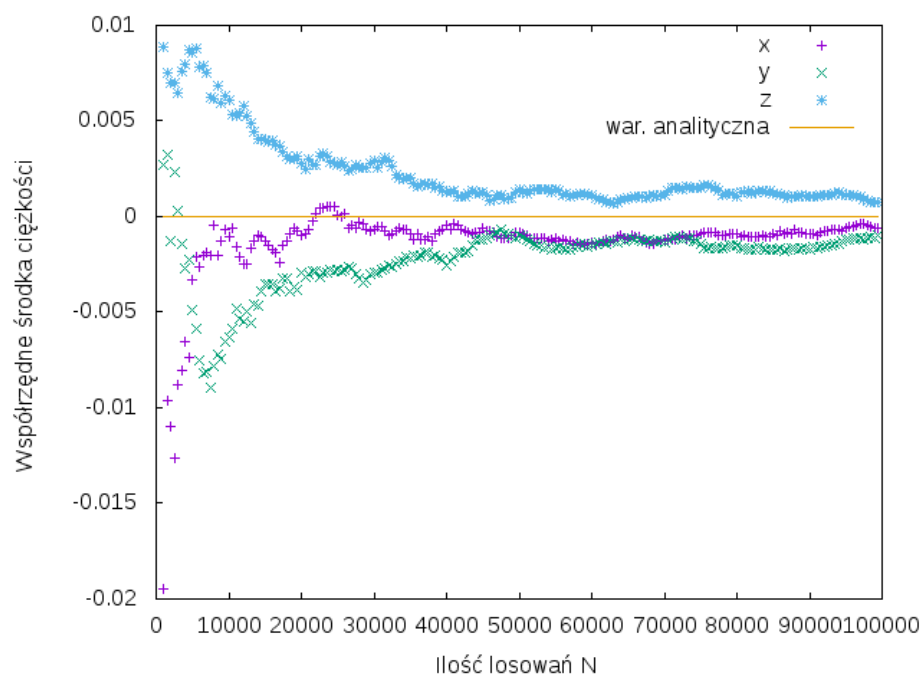
Obliczono środek ciężkości oraz moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek zadanego sześcianu przyjmując środek układu współrzędnych jako środek przekątnej sześcianu. Otrzymane wyniki w metodzie Monte Carlo oraz wyniki analityczne przedstawiono na wykresach 1 i 2. Moment bezwładności dla każdej osi przechodzącej przez środek sześcianu wynosi 1/6. Na wykresie przedstawiono wyniki dla trzech prostych wybranych przypadkowo.

(b)

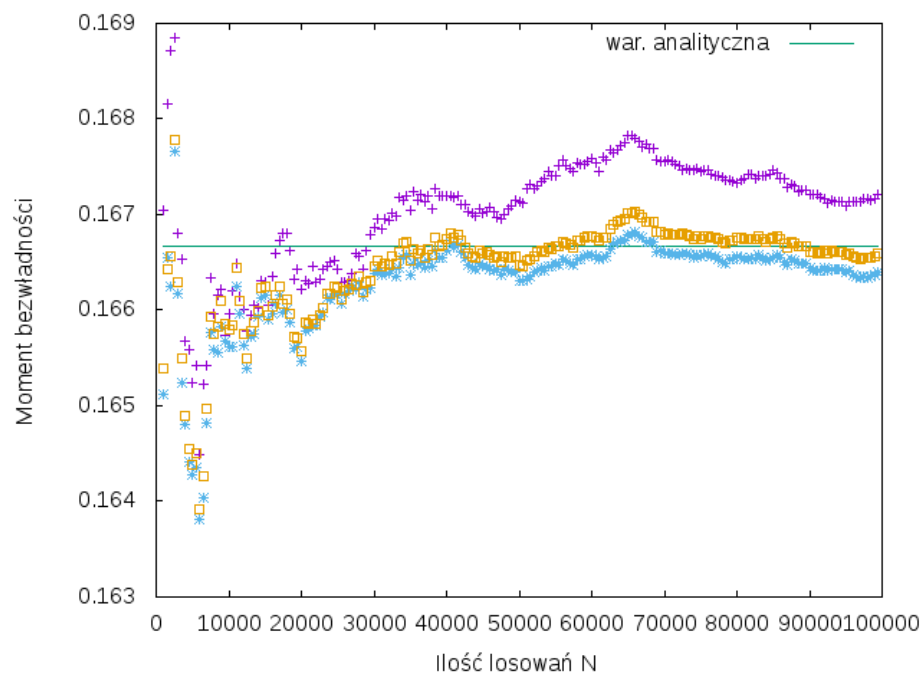
Narysowano wykres błędu $\epsilon = |I_{num} - I_{analityczne}|$ w funkcji N (Rys. 3, zaznaczono linię dla błędu równego 0.001).

(c)

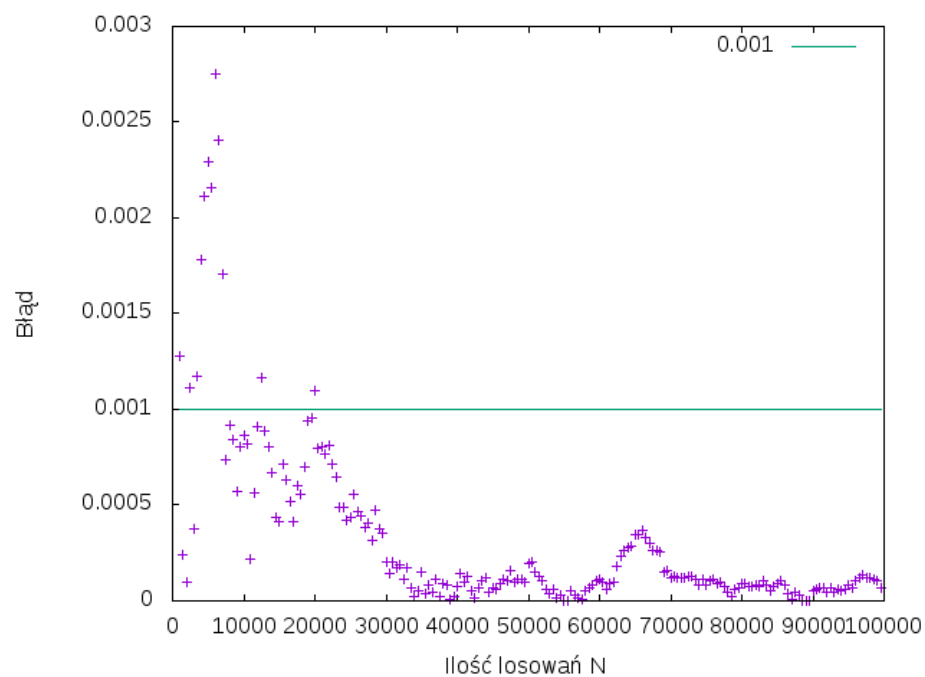
Moment bezwładności obliczono $M = 10000$ razy i dla każdego przypadku wyznaczono błąd ϵ . Uśredniony błąd przedstawiono na wykresie 4.



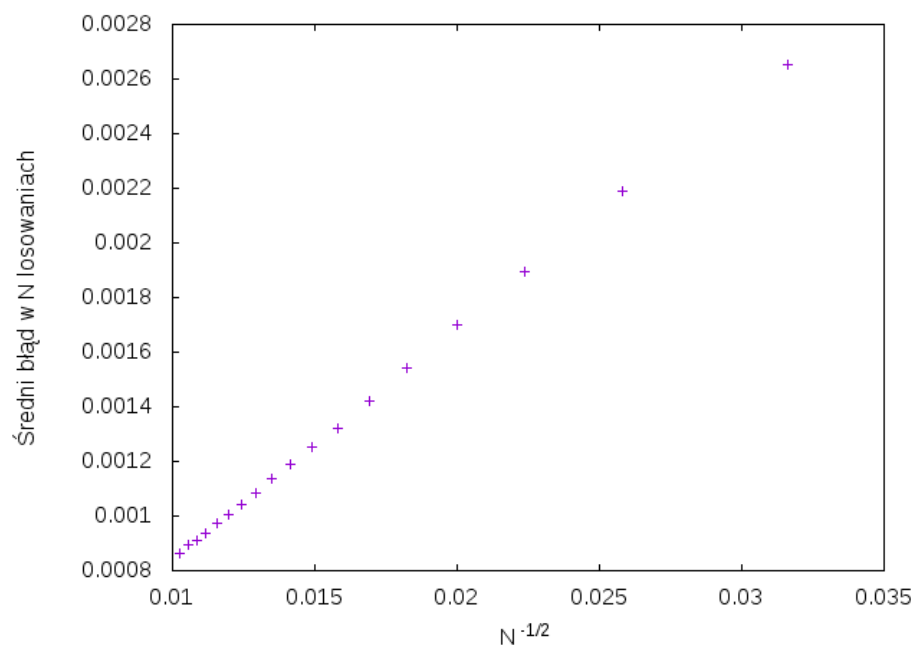
Rysunek 1: Obliczone współrzędne środka ciężkości w zależności od liczby losowań N .



Rysunek 2: Obliczony moment bezwładności w zależności od liczby losowań N dla trzech osi przechodzących przez środek sześcianu.



Rysunek 3: Wykres błędu momentu bezwładności obliczonego metodą Monte Carlo.



Rysunek 4: Średni błąd uzyskany przy 10 tysiącach powtórzeń obliczania momentu bezwładności metodą Monte Carlo.

Podsumowanie

Obliczone współrzędne środka ciężkości oraz moment bezwładności obliczone w ćwiczeniu metodą Monte Carlo już stosunkowo dla małych N są bardzo bliskie wynikom analitycznym. Moment bezwładności obliczono dla kilku osi przechodzących przez środek sześciangu wybranych w sposób przypadkowy. Sprawdzono, że średni błąd otrzymany w metodzie Monte Carlo jest proporcjonalny do $N^{-1/2}$.

Literatura

[1] http://www.ftj.agh.edu.pl/~adamowski/wyklady_mofit_1/r3.pdf