A30: Całkowanie numeryczne: porównanie metody prostokątów i metody Monte Carlo

Paweł Rzońca

27 kwietnia 2016

Wstęp

Ćwiczenie polega na obliczeniu wartości całki 1 metodami (a) prostokątów i (b) Monte Carlo.

$$I = \int_0^1 dx \int_1^3 dy[y\cos(x+y^2)] \tag{1}$$

Poniżej zamieszczam krótkie obliczenia rzeczywistej wartości całki 1.
$I = \int_0^1 dx \int_1^3 dy[y\cos(x+y^2)] = |\sin(x+y^2) = t;\ 2y\cos(x+y^2)dy = dt| = \int_0^1 dx \int_{\sin(x+1)}^{\sin(x+9)} dt[1/2] = \int_0^1 dx[\sin(x+9) - \sin(x+1)]/2 = (1/2)[\cos(x+1) - \cos(x+9)]|_0^1 = (1/2)[\cos(2) - \cos(10) - \cos(1) + \cos(9)]$.

Metoda prostokątów w dwóch wymiarach polega na podziale obszaru całkowania (tutaj prostokąta) na N kwadratów o boku h. Dzielimy boki danego prostokąta na odpowiednio M_x i M_y przedziałów. Oczywiście $N = M_x M_y$.

$$I_H = h^2 \sum_{m_x/0}^{M_x-1} \sum_{m_y/0}^{M_y-1} f(x_0 + hm_x, y_0 + hm_y) \tag{2}$$

W metodzie Monte Carlo korzystamy z twierdzenia o wartości średniej i całkę szacujemy wzorem

$$I_N = \Omega \langle f \rangle = \frac{\Omega}{N} \sum_{i/0}^{N-1} f(\vec{x_i}) \tag{3}$$

Gdzie Ω jest objętością obszaru całkowania (tutaj polem prostokąta), a N liczbą losowań. W naszym przypadku

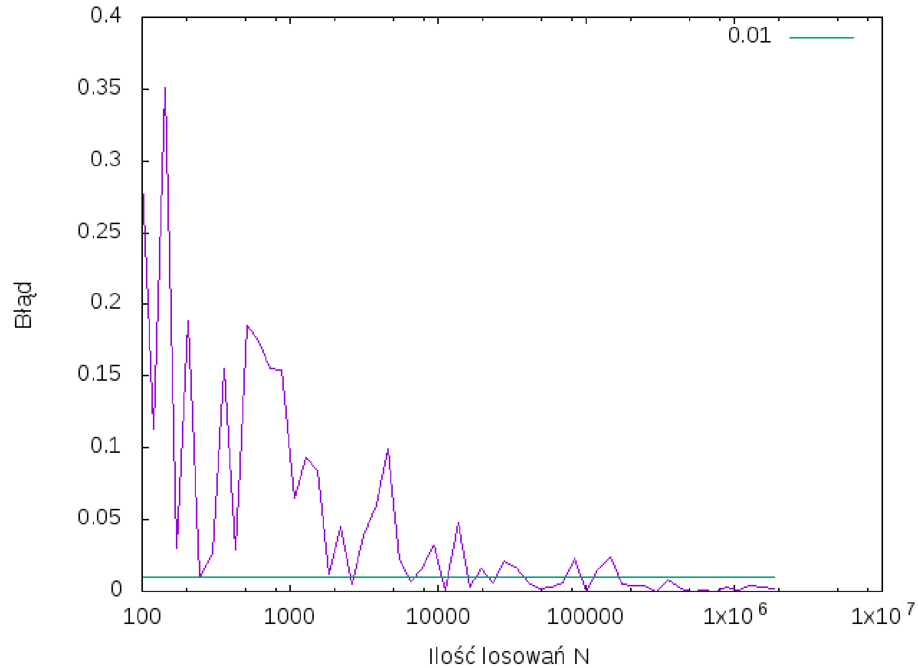
$$I_N = \frac{2}{N} \sum_{i/0}^{N-1} f(x_i,) \tag{4}$$

Wyniki

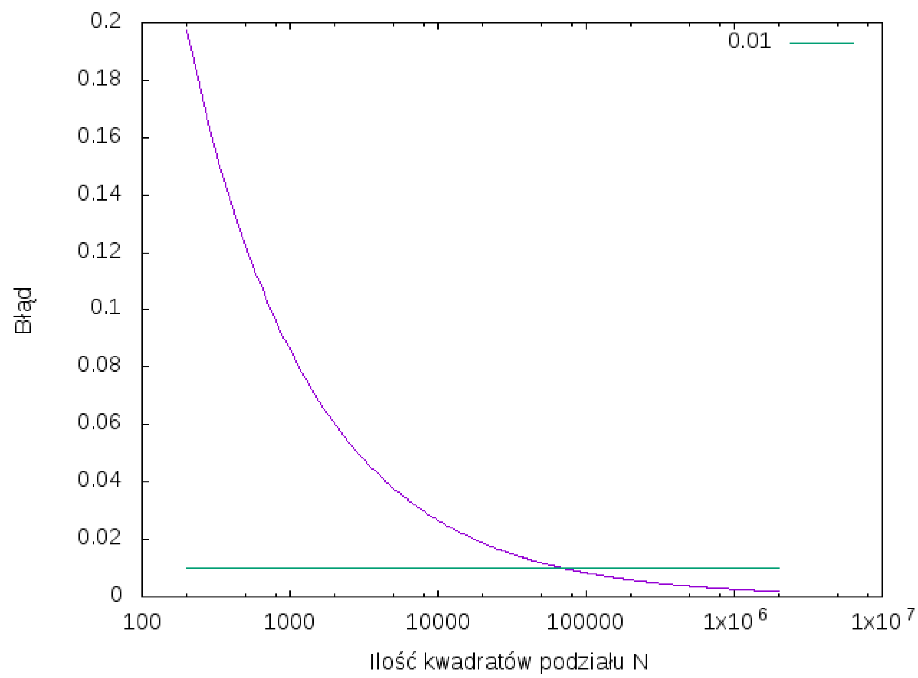
Sporządzono wykresy błędu

$$\epsilon = |I_{\text{num}} - I_{\text{dokładne}}|$$

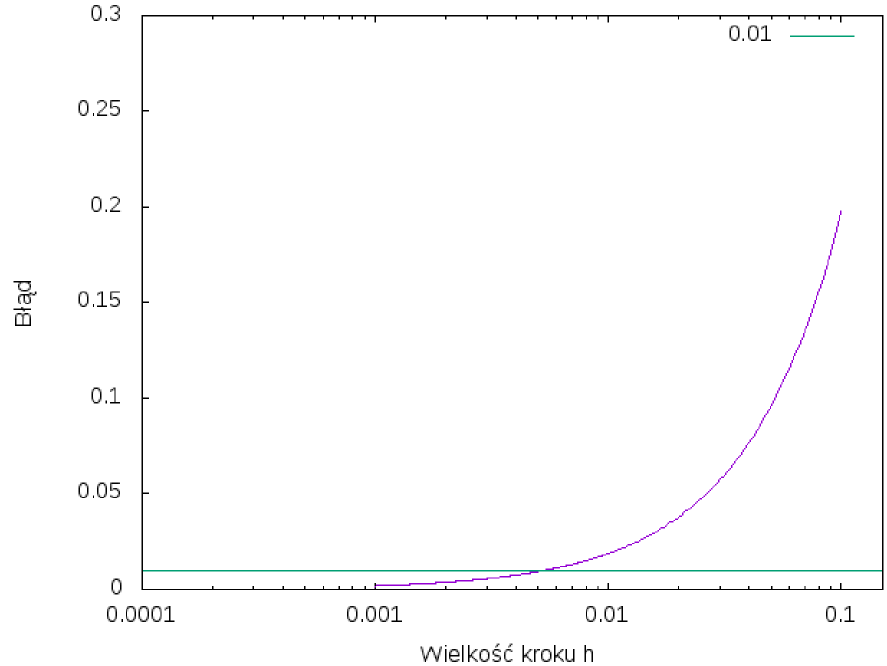
od liczby losowań dla metody Monte Carlo (rys. 1) oraz od ilości prostokątów podziału dla metody prostokątów (rys. 2). Dla metody prostokątów sporządzono również wykres błędu ϵ od wielkości podprzedziału h.



Rysunek 1: Zależność błędu ϵ od liczby losowań N w metodzie Monte Carlo. Linią poziomą zaznaczono błąd poniżej 0.01



Rysunek 2: Zależność błędu ϵ od ilości prostokątów N na jakie podzielono obszar całkowania w metodzie prostokątów. Linią poziomą zaznaczono błąd poniżej 0.01



Rysunek 3: Zależność błędu ϵ od długości podprzedziału h metodzie prostokątów. Linią poziomą zaznaczono błąd poniżej 0.01

Podsumowanie

Porównując wykresy 1 i 2 widzimy, iż metoda prostokątów szybciej (dla mniejszych N) daje wyniki obarczone małym błędem w przypadku całkowania po obszarze dwuwymiarowym. Dla dopuszczalnego błędu rzędu 0.01 w metodzie prostokątów wystarczy $N = 10^5$, natomiast dla metody Monte Carlo jest to wielkość niewystarczająca. Wynik ten jest zgodny z przewidywaniem, gdyż metoda całkowania Monte Carlo jest lepsza od metody prostokątów dopiero dla obszarów o wymiarze $d \geq 3$ [Źr. [1]]. Widzimy również, że dla metody prostokątów uzyskana krzywa błędu jest gładka i monotoniczna.

Literatura

[1] `http://www.ftj.agh.edu.pl/~adamowski/wyklady_mofit_1/r3.pdf`