Modelowanie trajektorii cząstek naładowanych w polu magnetycznym.

Paweł Rzońca

22 grudnia 2015

Wstęp

Rozważmy ruch elektronu w obecności pola magnetycznego. Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{e}{2}\vec{r}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{B}). \tag{1}$$

W cylindrycznym układzie współrzędnych z osią z skierowaną równolegle do pola uzyskujemy następującą funkcję Hamiltona

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_z^2 + p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{eB}{2m}p_\varphi + \frac{e^2B^2}{8m}r^2\ . \tag{2}$$

Z równań Hamiltona otrzymujemy następujące równania opisujące ruch elektronu:

$\dot{z} = \frac{p_z}{m}, \qquad \dot{p_z} = 0,$

$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} - \frac{eB}{2m}, \qquad \dot{p_\varphi} = 0,$

$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{p_r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{e^2B^2r}{4m}.$

Energia całkowita układu jest równa funkcji Hamiltona

$$E = \mathcal{H}. \tag{3}$$

Metodyka

Ruch w kierunku równoległym do pola (z) separuje się od ruchu w kierunku prostopadłym do pola i jest ruchem jednostajnym. Rozwiązania numeryczne znajdziemy dla ruchu poprzecznego. Równania rozwiązujemy iteracyjnie:

$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \left(\frac{p_{\varphi,i}}{mr_i^2} - \frac{eB}{2m}\right)\Delta t,$

$r_{i+1} = r_i + \frac{p_{r,i}}{m}\Delta t,$

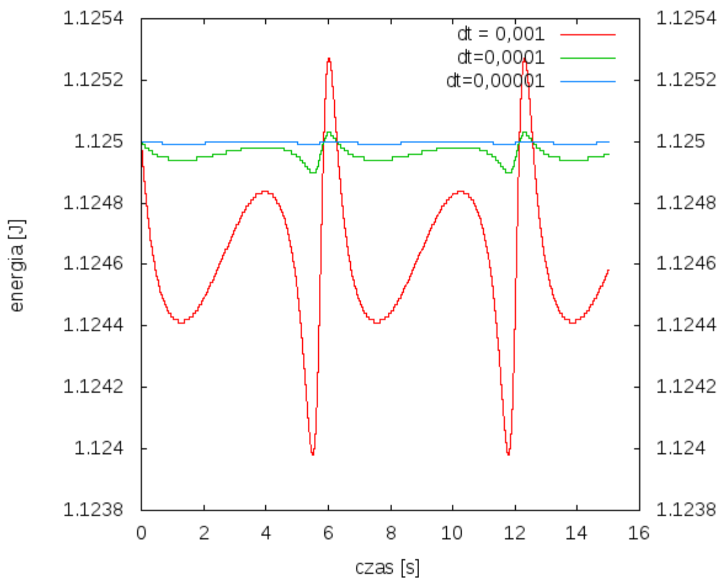
$p_{\varphi,i+1} = const,$

$p_{r,i+1} = p_{r,i} + \left(\frac{p_{\varphi,i}^2}{mr_i^3} - \frac{e^2r_iB^2}{4m}\right)\Delta t.$

Dla uproszczenia rachunków numerycznych wszystkie parametry układu, tj $m,\ e$ i B kładziemy równe jeden. Pęd sprzężony ze wzpółrzędną φ jest stały i jego również kładziemy równy jeden.

Wyniki

W ćwiczeniu przyjęto następujące dane wejściowe:
$m = 1$ kg,
$B = 1$ T,
$e = 1$ C,
$p_{\varphi,0} = 1$ kg·m^2/s,
$p_{z,0} = 1$ kg·m/s.
Rozpoczęto od wyboru kroku czasowego Δt. W tym celu zbadano wahania energii w czasie. Porównanie dla kilku wartości kroku czasowego przedstawiono na wykresie 1. Do dalszej analizy wybrano krok $\Delta t = 0,0001$ s, gdyż dla takiego kroku energia była w dobrym przybliżeniu stałą.

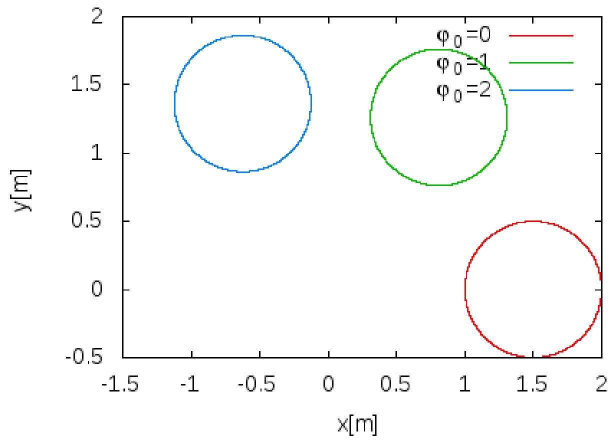


Rysunek 1: Zależność energii od czasy dla różnych kroków czasowych. Dane wejściowe: $r_0 = 1$ m, $p_{r,0} = 1$ kg·m/s, $\varphi_0 = 1$

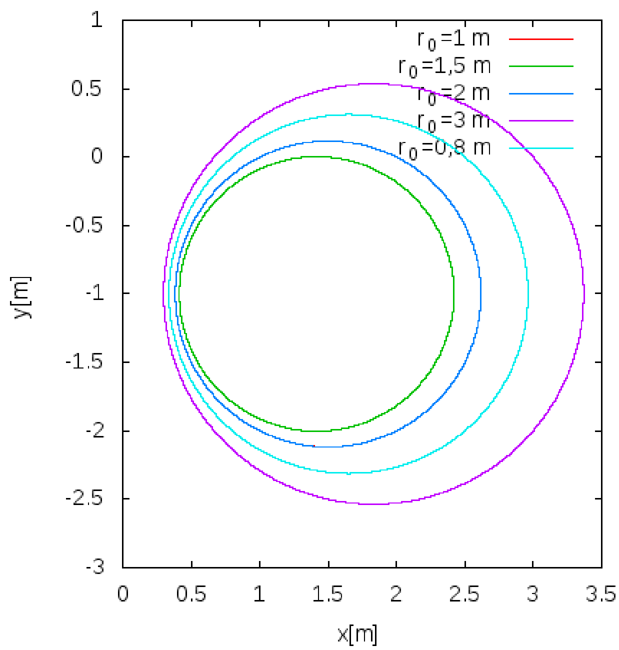
Następnie wyznaczamy trajektorię dla różnych wartości początkowych φ_0, r_0 oraz $p_{r,0}$. Trajektorie ilustrujemy we współrzędnych kartezjańskich, na wykresach 2, 3 oraz 4.

Podsumowanie

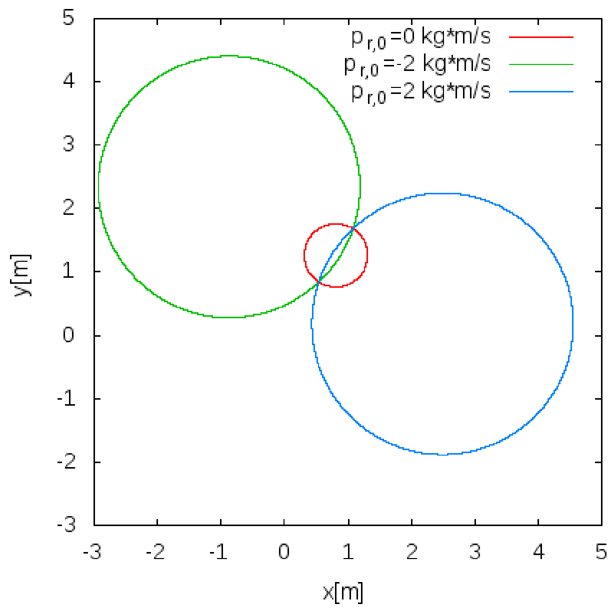
W każdym przypadku trajektoria (przy pominięciu ruchu wzdłuż osi z) pozostaje okręgiem. Zmiana φ_0 nie zmienia kształtu toru ruchu, a powoduje przesunięcie trajektorii o dany kąt, względem $\varphi_0 = 0$. Zmienna φ nie występuje w rozważanych równaniach, prócz równania z którego je wyznaczamy, co powoduje niezależność kształtu trajektorii od jej początkowej wartości. Natomiast dla różnych r_0 otrzymujemy różne okręgi, bez prostej zależności (np. dla wartości $r_0 = 1$ m i $r_0 = 2$ m trajektorie pokrywają się). W przypadku $p_{r,0}$ okręgi po których porusza się ciało zwiększają średnicę wzraz ze wzrostem $p_{r,0}$.

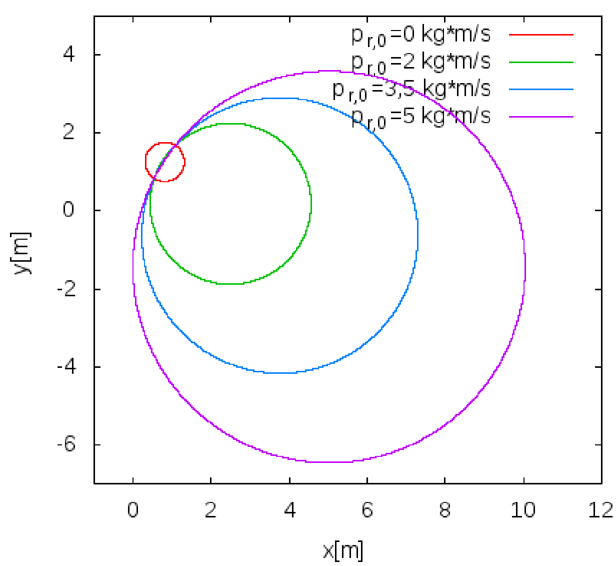


Rysunek 2: Porównanie otrzymanych trajektorii dla różnych wartości początkowych φ_0. Pozostałe dane wejściowe: $r_0 = 1$ m, $p_{r,0} = 0$ kg·m/s.



Rysunek 3: Porównanie otrzymanych trajektorii dla różnych wartości początkowych r_0. Pozostałe dane wejściowe: $\varphi_0 = 0$, $p_{r,0} = 1$ kg·m/s.





Rysunek 4: Porównanie otrzymanych trajektorii dla różnych wartości początkowych $p_{r,0}$. Pozostałe dane wejściowe: $r_0 = 1$ m, $\varphi = 1$. Trajektorii dla $r_0 = 1$ m nie widać na wykresie, gdyż pokrywa się ona z trajektorią dla $r_0 = 2$ m.