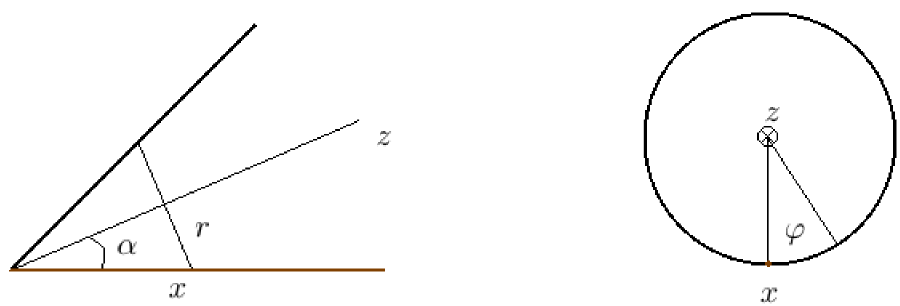
Symulacja komputerowa ruchu ciała w układzie z więzami.

Paweł Rzońca

14 grudnia 2015

Wstęp

Rozwiążemy problem poruszania się punktu materialnego po powierzchni stożka o kącie rozwarcia 2α (rys. 1) położonego na poziomej płaszczyźnie.



Rysunek 1: Ilustracja sytuacji

Funkcja Lagrange'a w takim przypadku, przy założeniu więzu $r = z\mathrm{tg}\alpha$, ma postać

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}^2\alpha z^2\omega^2 + \frac{1}{\cos^2\alpha}v^2\right) - gz\sin\alpha(1-\cos\varphi), \tag{1}$$

gdzie $\omega = \dot{\varphi}$ oraz $v = \dot{z}$. Wykonując odpowiednie óżniczkowania otrzymujemy następujące równania ruchu

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\frac{\sin\varphi}{z} - \frac{2\dot{z}\dot{\varphi}}{z} \tag{2}$$

$$\ddot{z} = \sin^2\alpha z\dot{\varphi}^2 - g\sin\alpha\cos^2\alpha(1-\cos\varphi). \tag{3}$$

Energię całkowitą układu definiujemy przez

$$E = \dot{\vec{q}}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{q}}} - \mathcal{L}, \tag{4}$$

gdzie $\dot{\vec{q}}$ jest prędkością uogólnioną. W tymże układzie

$$E = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}^2\alpha z^2\omega^2 + \frac{1}{\cos^2\alpha}v^2\right) + gz\sin\alpha(1-\cos\varphi). \tag{5}$$

Metodyka

Aby rozwiązać układ równań 2 i drugiego stopnia przerabiamy go na układ czterech równań pierwszego stopnia wprowadzając prędkości. Otrzymujemy:

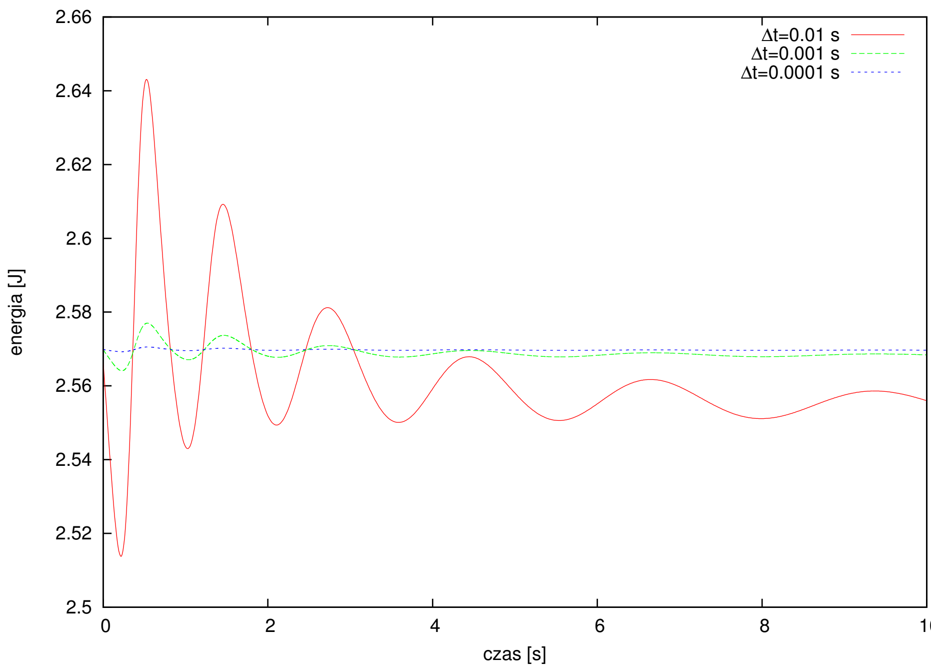
$$\dot{\varphi} = \omega$$
$$\dot{z} = v$$
$$\dot{\omega} = -\frac{g\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\frac{\sin\varphi}{z} - \frac{2v\omega}{z}$$
$$\dot{v} = \sin^2\alpha z\omega^2 - g\sin\alpha\cos^2\alpha(1-\cos\varphi)$$

W programie podajemy parametr α oraz warunki początkowe. W kolejnych chwilach czasu liczymy iteracyjnie:

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\frac{\sin\varphi_i}{z_i} + \frac{2v_i\omega_i}{z_i}\right)\Delta t$$
$$v_{i+1} = v_i + \left[\sin^2\alpha z_i\omega_i^2 - g\sin\alpha\cos^2\alpha(1-\cos\alpha)\right]\Delta t$$
$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \omega\Delta t$$
$$z_{i+1} = z_i + v\Delta t$$
$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

Wyniki

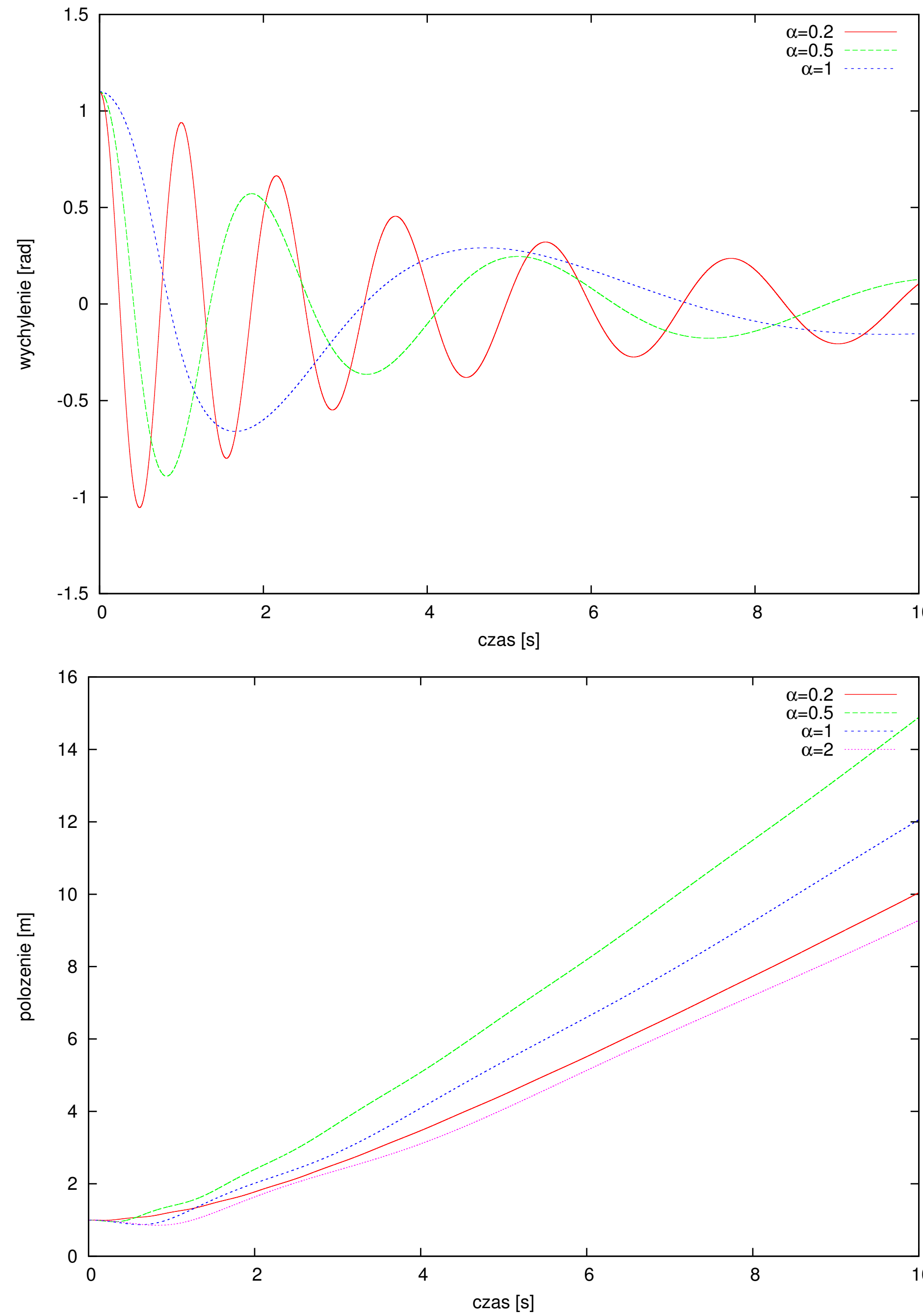
Dla ustalenia odpowiedniego kroku czasowego zbadano wykresy 2 energii całkowitej układu od czasu. Energia ta powinna być stała. Dla kroku czasowego $\Delta t = 0,0001$ s warunek ten jest dobrze spełniony i ten krok wybrano do symulacji.



Rysunek 2: Wykres energii całkowitej układu w funkcji czasu dla różnych Δt. Pozostałe parametry: $\alpha = 0,5$, $\varphi_0 = 1,1$, $\omega_0 = 0$ rad/s, $z_0 = 1$ m, $v_0 = 0$ m/s.

Sporządzono wykresy przedstawiające zależność φ oraz z od czasu dla różnych kątów rozwarcia stożka [3] oraz prędkości [4 i 5].

Można zauważyć, iż ze wzrostem kąta rozwarcia stośka 2α szybkość zmian współrzędnej φ maleje. Natomiast dla współrzędnej z obserwujemy, iż najstromsze nachylenie występuje dla α pośredniego. Można spodziewać się, że istnieje tutaj taki kąt, dla którego cząstka najszybciej oddala się od wierzchołka stożka. Wyznaczono, iż dla warunków początkowych $\varphi_0 = 1,1$, $\omega_0 = 0$ rad/s, $z_0 = 1$ m, $v_0 = 0$ m/s, kąt ten wyniso około 0.621. Jego wartość zmienia przy zmianie warunków początkowych.

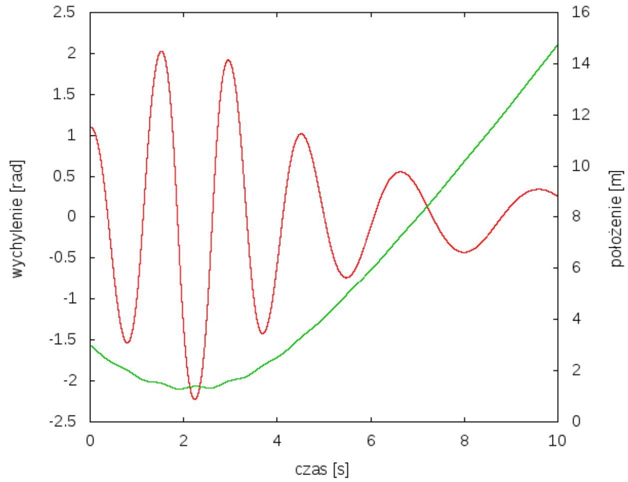


Rysunek 3: Zależność trajektorii dla różnych wartości parametru α. Pozostałe parametry: $\varphi_0 = 1,1$, $\omega_0 = 0$ rad/s, $z_0 = 1$ m, $v_0 = 0$ m/s.

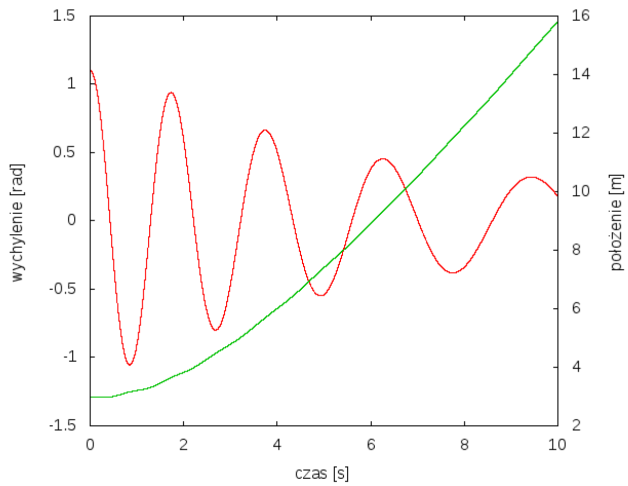
Patrząc na wykresy $z = z(t)$ dla niezerowych prędkości początkowych można zauważyć podobieństwo dla krótkich t pomiędzy wykresami 4a i 5c oraz 5a i 4c. W rozpatrywanych przpadkach przy odpowiednio długim czasie, ciało oddala się od czubka stożka, a oscylacje współrzędnej φ zmniejszają swoją amplitudę.

Podsumowanie

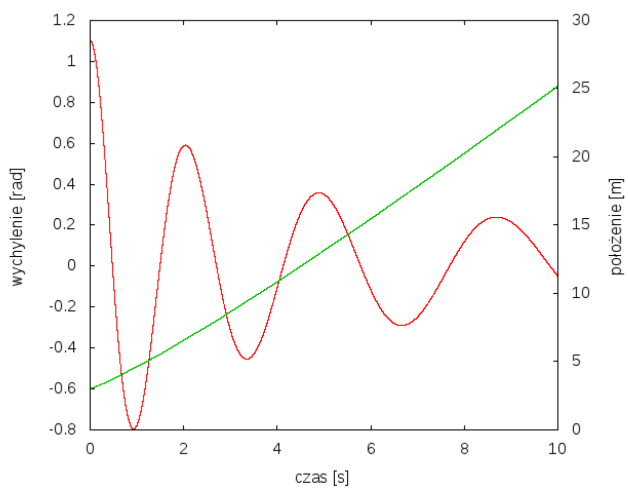
Numeryczne rozwiązanie tego problemu pozwala nam określić trajektorię po jakiej porusza się ciało. W początkowej fazie ruchu układ jest bardzo wrażliwy na warunki początkowe. Mimo to w każdym z symulowanych przypadków, po pewnym czasie ciało porusza się wsdłuż osi z z pewną, w przybliżeniu stałą prędkością, a wachania φ stają się mniejsze (ale nie znikają). Ponadto zaobserwowano, iż szybkość oddalania się od czubka stożka nie zależy w sposób monotoniczny od kąta rozwarcia.



(a) $v_0 = -1,5$ m/s

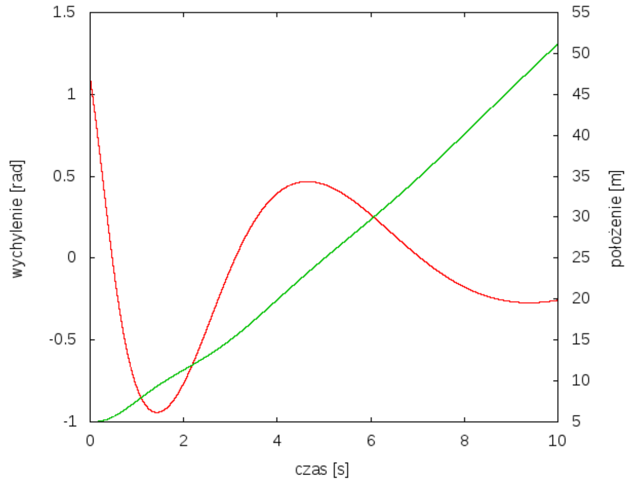


(b) $v_0 = 0$ m/s

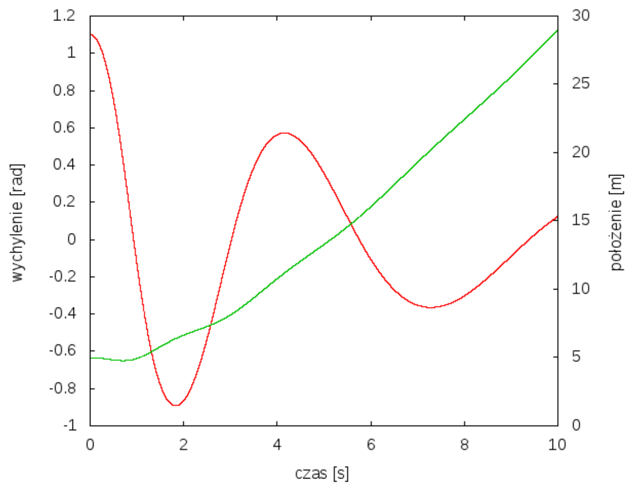


(c) $v_0 = 1,5$ m/s

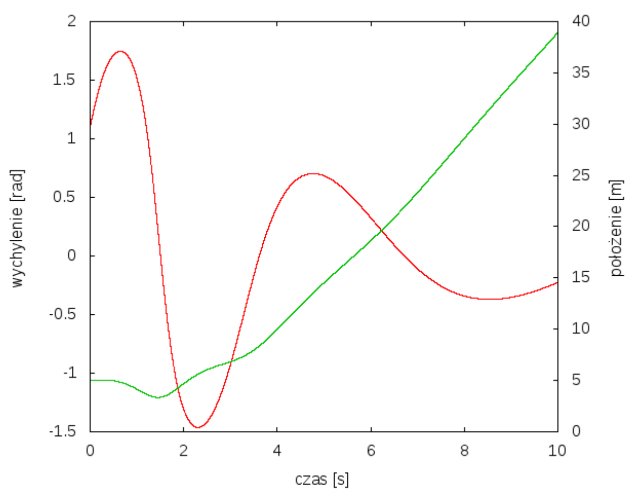
Rysunek 4: Zależność trajektorii dla różnych wartości parametru v_0. Położenie z przedstawione jest kolorem zielonym, natomiast wychylenie φ kolorem czerwonym. Pozostałe parametry: $\alpha = 0,2$, $\varphi_0 = 1,1$, $\omega_0 = 0$ rad/s, $z_0 = 3$ m.



(a) $\omega_0 = -2$ rad/s



(b) $\omega_0 = 0$ rad/s



(c) $\omega_0 = 2$ rad/s

Rysunek 5: Zależność trajektorii dla różnych wartości parametru ω_0. Położenie z przedstawione jest kolorem zielonym, natomiast wychylenie φ kolorem czerwonym. Pozostałe parametry: $\alpha = 0,5$, $\varphi_0 = 1,1$, $v = 0$ m/s, $z_0 = 5$ m.