

Komputerowa symulacja jednowymiarowego ruchu ciała z wykorzystaniem formalizmu Newtona.

Paweł Rzońca

8 grudnia 2015

Wstęp

Wahadłem matematycznym określamy punktową masę zawieszoną na nierozciągliwej nici w jednorodnym polu grawitacyjnym. Rozwiązując je przy założeniu więzu na $R = \text{const}$ (masa na sztywnym, nieważkim, cienkim pręcie), sytuacja sprowadza się do ruchu jednowymiarowego opisywanego równaniem

$$R\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

gdzie φ jest kątem pomiędzy kierunkiem pola grawitacyjnego a nicią.

Równanie to można rozwiązać analitycznie dla małych kątów, takich dla których zasadne jest przybliżenie

$$\sin \varphi \simeq \varphi,$$

a samo równanie przyjmuje postać

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\varphi = 0. \quad (2)$$

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$\varphi(t) = A \sin(\sqrt{gR}t + \alpha), \quad (3)$$

gdzie stałe A to amplituda drgań, a α faza początkowa. Obie stałe określone są przez warunki początkowe. W dalszej części wymieramy warunki początkowe $\varphi(0) = A$ oraz $\dot{\varphi} = 0$.

Równanie 1 możemy rozwiązać numerycznie. Zmieniamy je na układ równań pierwszego rzędu.

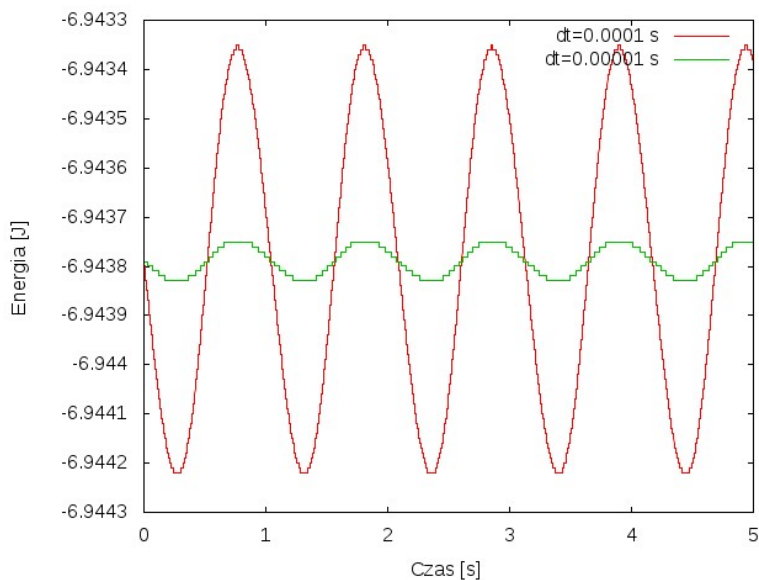
$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = -\frac{g}{R} \sin \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) = \omega(t). \end{cases}$$

Obliczenia numeryczne prowadzimy na siatce punktów czasowych odległych o mały ale skończony krok Δt . W równaniach różniczkowych zastępujemy małymi ale skończonymi przyrostami. Otrzymujemy wtedy układ równań

$$\begin{cases} \omega(t_{i+1}) = \omega(t_i) - \frac{g}{R} \sin \varphi(t_i) \Delta t \\ \varphi(t_{i+1}) = \varphi(t_i) + \omega(t_{i+1}) \Delta t \\ t_{i+1} = t_i + \Delta t. \end{cases}$$

Wyniki

W symulacji przyjęto długość nici $R = 1$ m oraz $g = 9,81$ m/s². W celu ustalenia odpowiedniego kroku czasowego przebadano wahania całkowitej energii układu w czasie dla różnych kroków czasowych. Wyboru dokonano tak, aby czas symulacji był względnie krótki, ale jednocześnie zmiany energii całkowitej były jak najmniejsze. Na wykresie 1 przedstawiono energię całkowitą układu w funkcji czasu dla dwóch różnych kroków czasowych. Widzimy, że im mniejszy krok czasowy tym dokładniejsze przybliżenie stałości energii. Do dalszych symulacji wybrano krok $\Delta t = 0,00001$ s.



Rysunek 1: Wahania całkowitej energii układu dla dwóch różnych kroków czasowych.

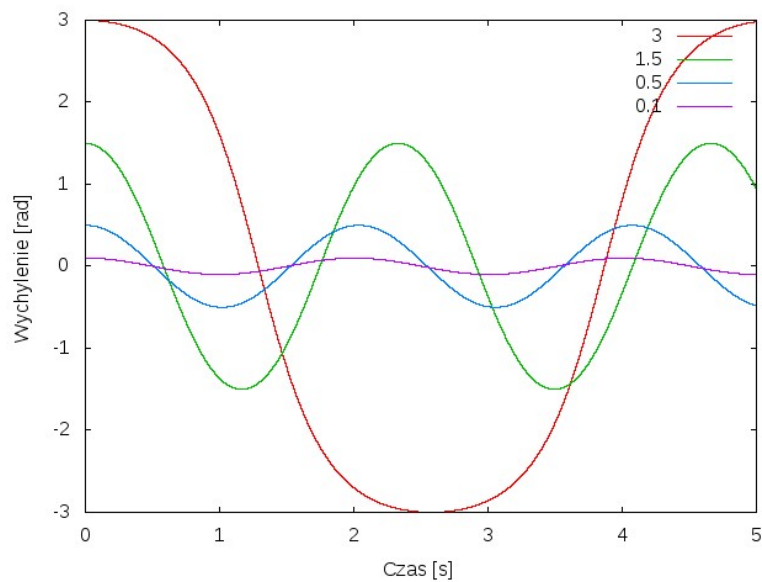
Na wykresie 2 zaprezentowano wyniki symulacji $\varphi = \varphi(t)$ dla różnych wychyleń początkowych. Można zauważyć, że dla małych amplitud krzywa przechodzi w kosinus, natomiast dla tychże dążących do π przechodzi w funkcję schodkową.

Na wykresach 3 zaprezentowano porównanie wyników symulacji z rozwiązaniem analitycznym o którym mowa we wstępie. Jak można się było spodziewać krzywe nie pokrywają się dla dużych amplitud, gdyż tam nie jest spełnione przybliżenie $\sin \varphi \simeq \varphi$. Natomiast dla amplitudy równej 0.1 mamy już całkowitą zgodność.

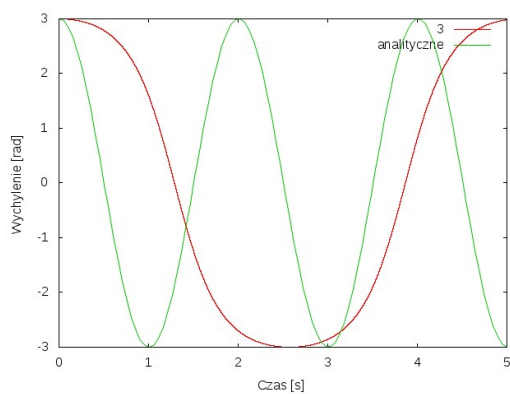
Następnie zbadano zależność okresu wahań od amplitudy. Wyniki przedstawiono na wykresie 4. Można zauważyć, że dla małych wychyleń (< 0.4) okres jest właściwie stały. Natomiast dla faz początkowych bliskich π szybko rośnie do nieskończoności. Sytuacja $\varphi(0) = \pi$ odpowiada postawieniu wahadła na sztorc, mamy więc sytuację równowagi chwiejnej co sprowadza się do braku drgań.

Podsumowanie

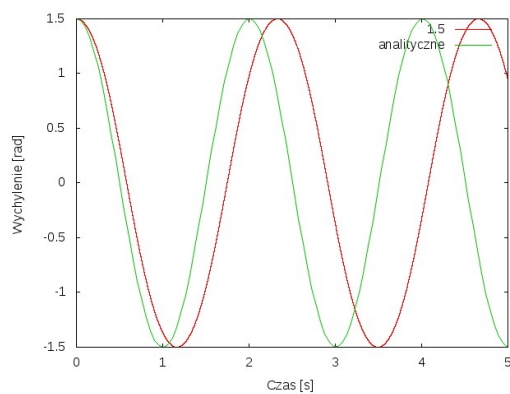
W rozważanym tu ruchu, mimo jego dużej prostoty, nie da się uzyskać ogólnego rozwiązania analitycznego, a jedynie przybliżenie dla małych kątów. Problem ten można jednak w dosyć prosty sposób rozwiązać numerycznie uzyskując dla małych kątów bardzo dobrą zgodność z drogą analityczną, natomiast dla pozostałych sensowne wyniki. Uzyskano również zależność okresu od amplitudy. Dla małych kątów można go przybliżyć funkcją stałą, natomiast dla dużych gwałtownie rośnie.



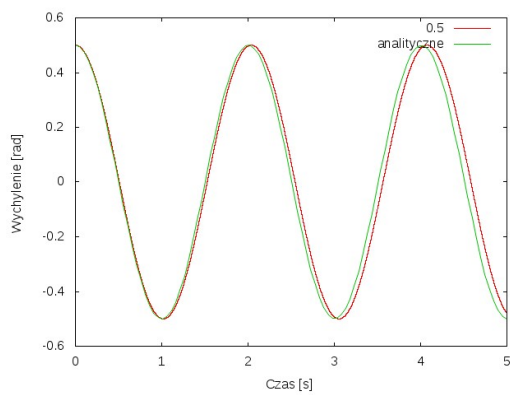
Rysunek 2: Wykresy uzyskanych numerycznie funkcji $\varphi(t)$ dla różnych wychyleń początkowych (podanych w radianach).



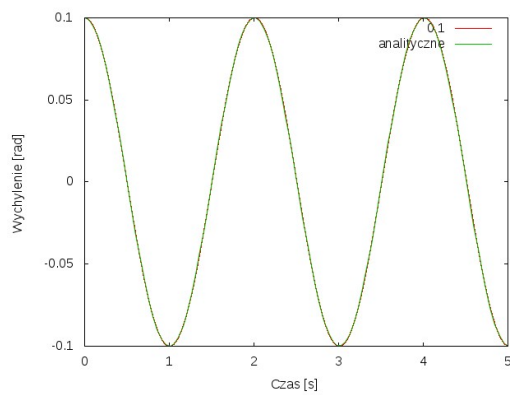
(a) $A=3$



(b) $A=1,5$

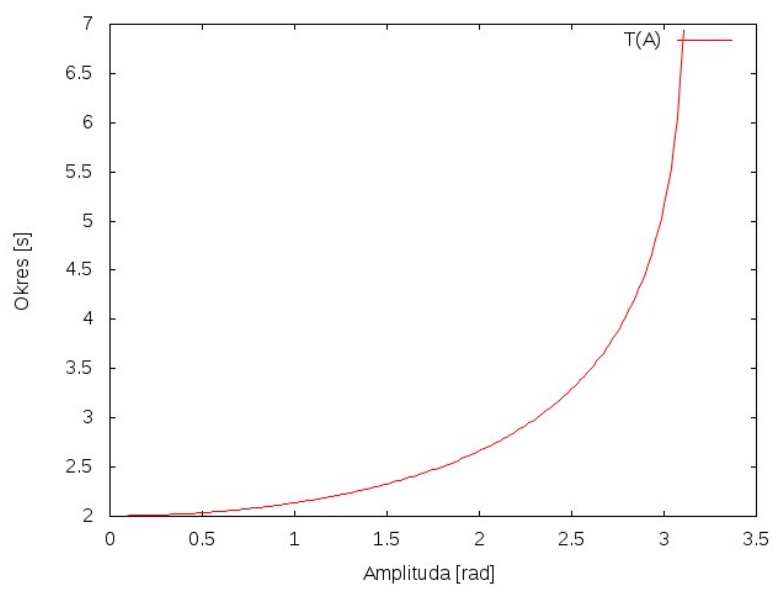


(c) $A=0,5$



(d) $A=0,1$

Rysunek 3: Porównanie rozwiązania uzyskanego numerycznie do przybliżenia analitycznego (3) przy różnych wychyleniach początkowych.



Rysunek 4: Zależność okresu wahania od wychylenia początkowego (amplitudy).