Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Badanie krzywych chronometrycznych w kontekście hipotezy zegara

Autor: Paweł Rzońca
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademii Górniczo-Hutniczej
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Promotor: dr hab. Łukasz Bratek
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki

Plan prezentacji

- Czas własny, hipoteza zegara
- Fundamentalny rotator relatywistyczny
- Konstrukcja zegara
- Krzywa chronometryczna
- Otrzymane wyniki
- Podsumowanie

Czas własny, hipoteza zegara

- Przeniesienie czasu Newtonowskiego na grunt ogólnej teorii względności

$$T = \int \sqrt{\dot{x}_\mu \, \dot{x}^\mu} \, \mathrm{d}\tau$$

- Zegar – układ zawierający oscylacje
- Hipoteza zegara – istnieją zegary idealne mierzące czas własny
  - Sprawdzona dla $\alpha \sim 10^{19}\ m/s^2$
  - Analiza wymiarowa (dla elektronu)

$$m_e c^3/\hbar \sim 10^{29} m/s^2$$

Fundamentalny rotator relatywistyczny

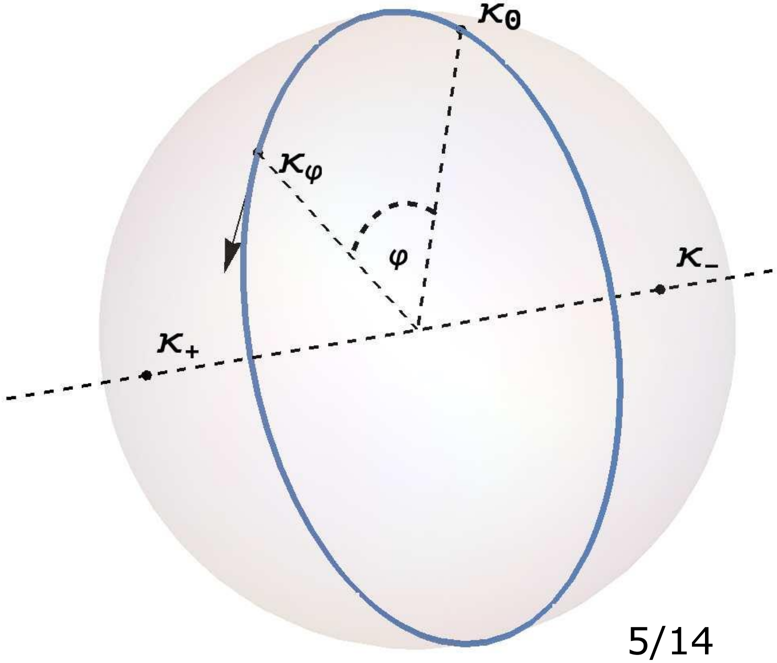
- Rotator relatywistyczny to układ opisany przez położenie x i kierunek k oraz dwa parametry m i ℓ.
- Układ jest fundamentalny, jeżeli jego niezmienniki Casimira są parametrami
- Niezmienniki grupy Poincarégo:

$$\boxed{\begin{aligned} &P_\mu P^\mu = m^2 \\ &W_\mu W^\mu = -\tfrac{1}{4} m^4 \ell^2 \\ &W_\mu = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^\sigma \end{aligned}}$$

A. Staruszkiewicz, "Fundamental relativistic rotator," Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl., vol. 1, pp. 109–112, 2008.

Konstrukcja zegara

- Rozważamy czysty obrót eliptyczny
- Z wektorów P i W tworzymy kierunki zerowe k_+ i k_-
- Ruch wskazówki k badamy na sferze i porównujemy z k_0
- $\varphi = i \operatorname{Ln}\left(\frac{\kappa-\kappa_+}{\kappa-\kappa_-} \cdot \frac{\kappa_0-\kappa_-}{\kappa_0-\kappa_+}\right)$



Konstrukcja ogólnego Lagrangianu dla zegara – metoda Diraca

- Zakładamy odpowiednie więzy
- Konstruujemy Hamiltonian
- Używamy transformacji Legendre'a (TL)

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_1 &= k_\mu k^\mu = 0 \\ \psi_2 &= k_\mu \Pi^\mu = 0 \\ \psi_3 &= P_\mu P^\mu - m^2 = 0 \\ \psi_4 &= W_\mu W^\mu + \tfrac{1}{4} m^4 \ell^2 = 0 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{H = \sum u_i \psi_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L = x_\mu P^\mu + k_\mu \Pi^\mu - H}$$

$$u_i = u_i(\tau)$$

Model Singularny

- Gdy TL ma maksymalny rząd:
  - $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu \neq 0$
  - Zasada Hamiltona nie determinuje ruchu
  - Faza zegara jest arbitralna
- Gdy TL ma niższy rząd:
  - $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = 0$
  - Ruch zegara jest ustalony przez strukturę stożkową czasoprzestrzeni
  - Klasyczny odpowiednik zjawiska Zitterbewegung

Model Singularny

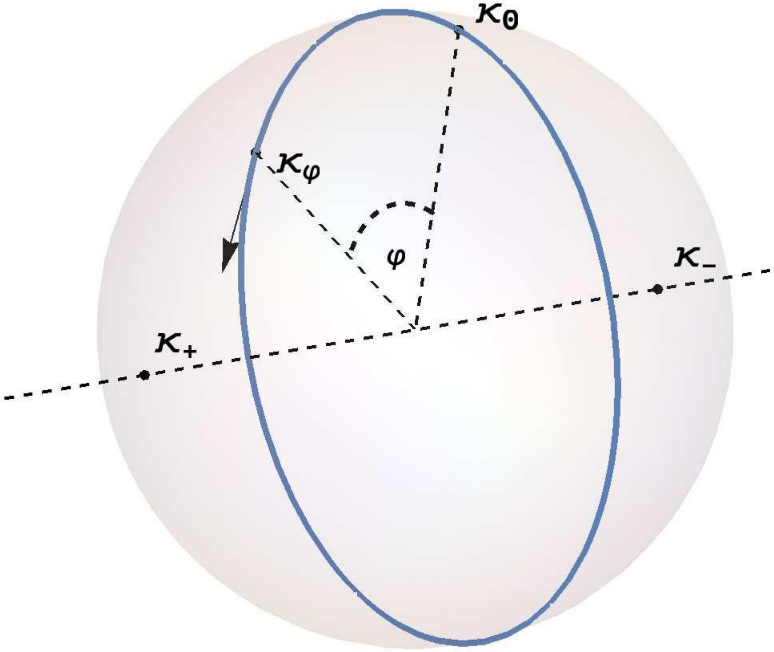
$$L = \frac{m\kappa}{2} \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{k_\mu \dot{x}^\mu} + \frac{m}{4\kappa}\left(\ell^2 \frac{\dot{k}_\mu \dot{k}^\mu}{k_\mu \dot{x}^\mu} + k_\mu \dot{x}^\mu\right) + \lambda k_\mu k^\mu$$

- Gdy TL ma niższy rząd:
  - $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = 0$
  - Ruch zegara jest ustalony przez strukturę stożkową czasoprzestrzeni
  - Klasyczny odpowiednik zjawiska Zitterbewegung

Krzywa chronometryczna

- Fazę definiujemy względem reperu lokalnie nierotującego $\{e, e_1, e_2, e_3\}$

$$\cos\varphi = (k^{\mu}(e_1)_{\mu})/(k^{\nu}(e)_{\nu})$$



Krzywa chronometryczna

- Fazę definiujemy względem reperu lokalnie nierotującego

$$\cos\varphi = (k^{\mu}(e_1)_{\mu})/(k^{\nu}(e)_{\nu})$$

- Konstruujemy krzywą na podstawie więzów uzyskanych z Lagrangianu zegara

$$(\dot{k}^{\mu}\dot{k}_{\mu})/(k^{\nu}\dot{x}_{\nu})^2 = -1$$

$$\dot{x} = ae + bk$$

- Dodatkowo: $A \perp e_3$

Wyniki

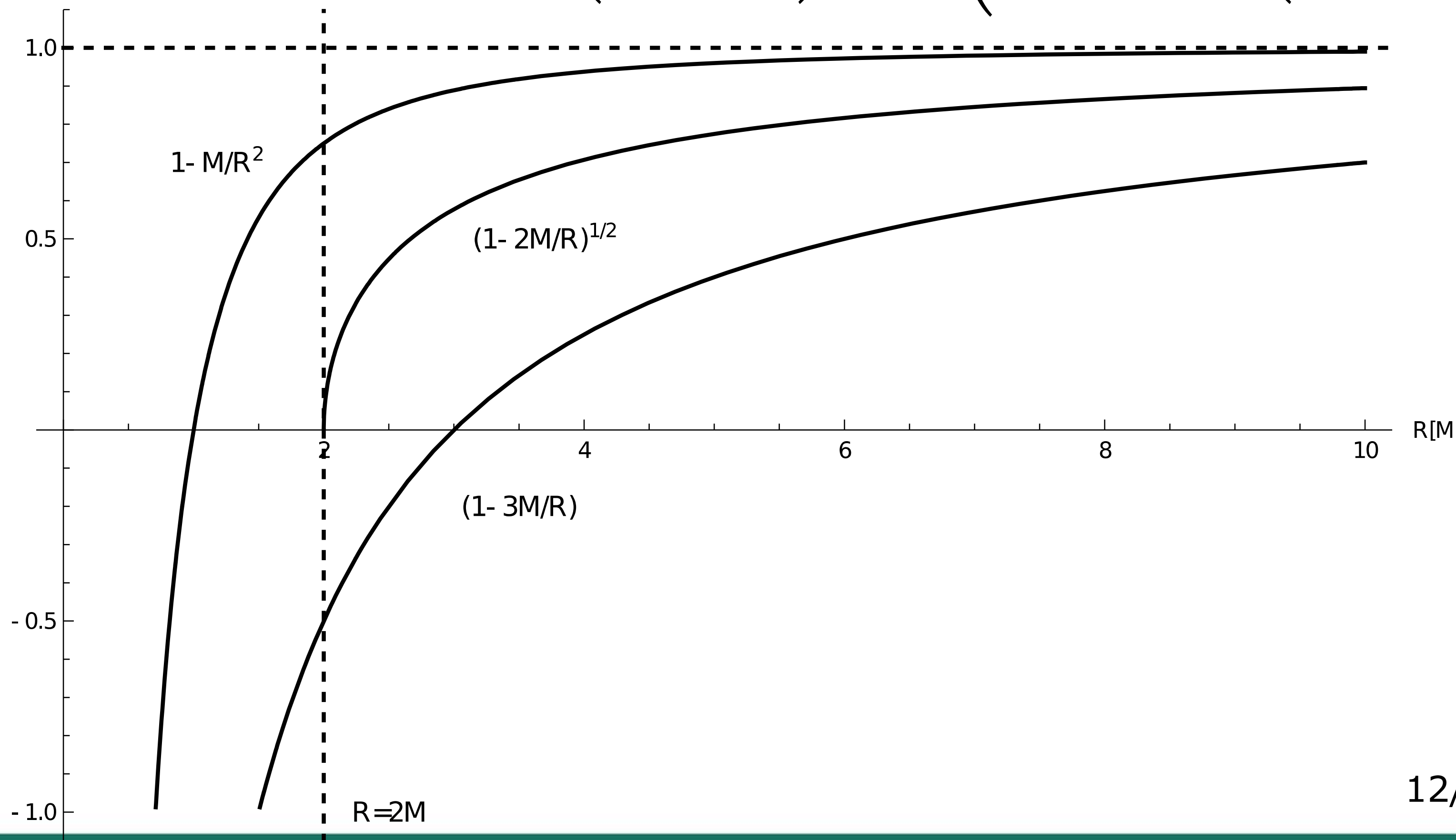
$$\dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + \alpha\sin(\varphi - \chi)$$

$$\alpha = \sqrt{-AA}, \qquad \cos\chi = \frac{Ae_1}{\alpha}$$

- Bez przyspieszeń: $\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s \qquad (\varphi(0) = 0)$
- Ruch hiperboliczny: $\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s + C_1\sin\left(\frac{2}{\ell}s\right) + O(\alpha^2)$
- Ruch po okręgu: $\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s + C_2\sin\left(\frac{2}{\ell}s - \omega\gamma^2 s\right) + O(\alpha^2)$
- $\alpha_c = 2/\lambda_e \approx 8{,}244 \cdot 10^9\ \mathrm{cm}^{-1}$
- $\alpha_{maks} \approx 10^2\ \mathrm{cm}^{-1}$

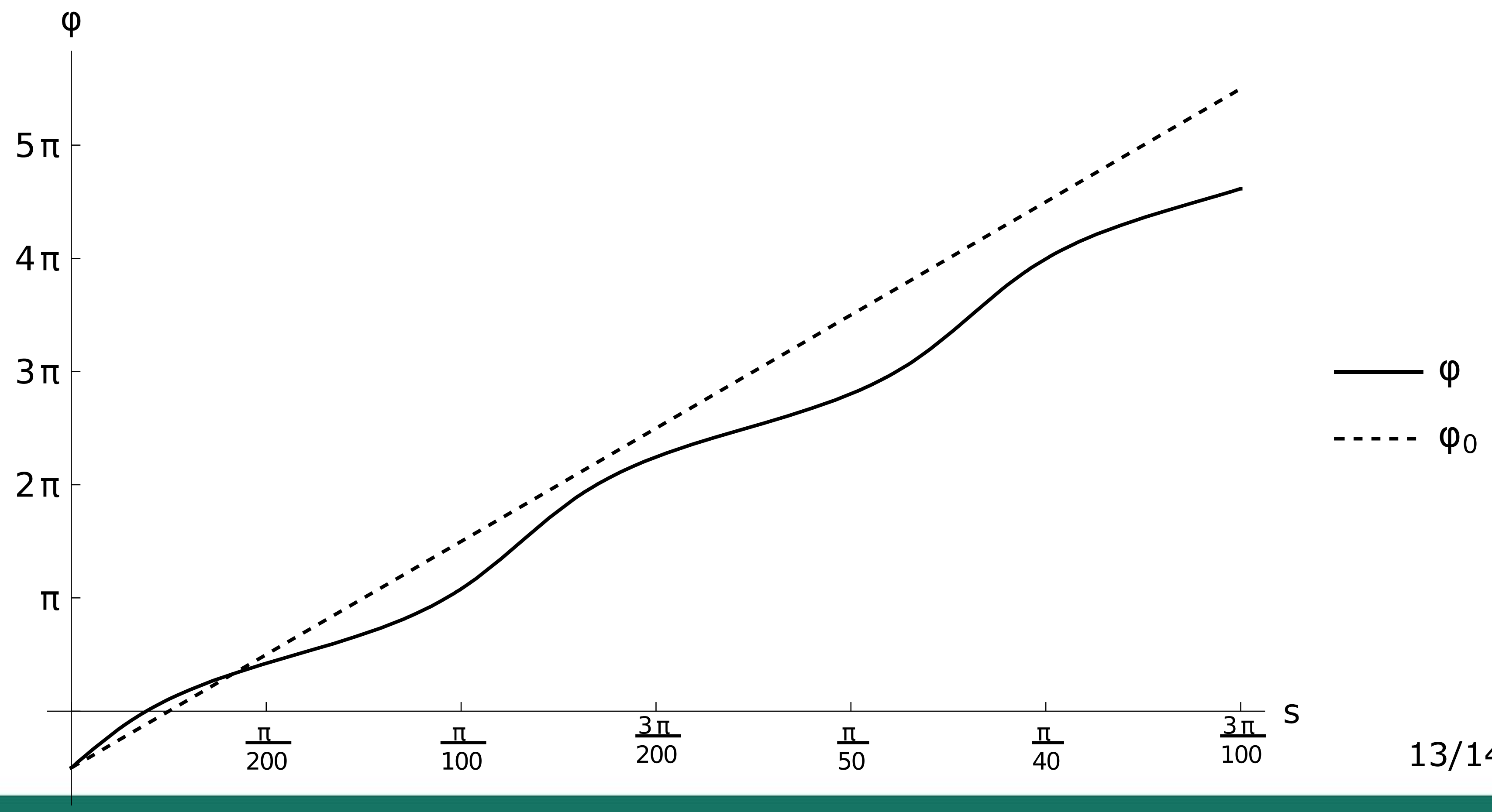
Wyniki – ruch po okręgu w polu grawitacyjnym

$$\dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + \gamma^2 \left|R\omega^2 - \frac{M}{R^2}\right| \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\varphi - \omega\gamma^2 s\left(1 - \frac{3M}{R}\right)\right)$$



Charakter zaburzenia

- $\alpha = 100, \;\; \ell = 0{,}01, \;\; \dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + \alpha\sin(\varphi - \pi)$



Podsumowanie

- Fundamentalny rotator jest ustalony przez strukturę przestrzeni
- Hipoteza zegara może nie być spełniona na poziomie klasycznym
- Bardziej szczegółowe badanie wymaga rozwiązania równań ruchu zegara

Dziękuję bardzo za uwagę