

AGH

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Praca inżynierska

Paweł Rzońca

kierunek studiów: **Fizyka Techniczna**

Uogólniona transformata Wignera-Weyla

Opiekun: **dr hab. inż. Bartłomiej Spisak**

Kraków, styczeń 2017

Oświadczam, świadomy odpowiedzialności karnej za poświadczanie nieprawdy, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie i nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

.....
(czytelny podpis)

Merytoryczna ocena pracy przez opiekuna

Merytoryczna ocena pracy przez recenzenta

*Pragnę serdecznie podziękować mojemu promotorowi
doktorowi Bartłomiejowi Spisakowi
za inspirację, poświęcony czas, okazaną pomoc oraz
cenne wskazówki w trakcie pisania pracy.
Podziękowania składam również mojej żonie za wyrozumiałość,
cierpliwość oraz okazane wsparcie w dążeniu do celu .*

Spis treści

1 Wstęp	7
2 Nieklasyczne funkcje rozkładu w przestrzeni fazowej	8
2.1 Funkcja Wignera i jej wybrane własności	10
2.2 Bi-funkcja Wignera	16
3 Uogólniona transformata Weyla operatora gęstości	18
3.1 Transformata Weyla	18
3.1.1 Macierz gęstości	18
3.1.2 Transformata Weyla macierzy gęstości	19
3.2 γ -funkcja Wignera i jej wybrane własności	20
3.3 σ -funkcja Wignera i jej wybrane własności	22
4 Zastosowania, wyniki i dyskusja	26
4.1 Parametryzowane funkcje Wignera dla oscylatora harmonicznego	26
4.2 Miary nieklasyczności stanów	27
4.3 Dyskusja wyników	33
5 Podsumowanie	34
6 Dodatek matematyczny	35
6.1 Wyrowadzenie funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego	35
6.2 Wyrowadzenie Bi-funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego	36
6.3 Wyrowadzenie γ -funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego	37
6.4 Wyrowadzenie σ -funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego	38

1 Wstęp

Funkcja Wignera została wprowadzona przez E. P. Wignera w 1932 roku w pracy [1] zatytułowanej „*On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*” i dała ona początek sformułowaniu mechaniki kwantowej w przestrzeni fazowej. Podejście to jest równoważne i niezależne od teorii kwantów w ujęciu przestrzeni Hilberta [2], czy metody całek po trajektoriach [3].

Sformułowanie przestrzenno-fazowe teorii kwantowej oparte na funkcji Wignera upodabnia opis ilościowy układów fizycznych i zjawisk w nich zachodzących do metod wypracowanych na potrzeby mechaniki statystycznej w sformułowaniu Liouville'a [4]. W ramach tego podejścia operatory działające w przestrzeni Hilberta zostają zastąpione przez odpowiednie funkcje rzeczywiste, które reprezentują zmienne dynamiczne w przestrzeni fazowej. Wyznaczanie ich wartości sprowadza się do obliczania wartości oczekiwanych, podobnie zresztą jak w mechanice statystycznej z tym, że rolę funkcji rozkładu odgrywa funkcja Wignera. Niestety, funkcja Wignera może przyjmować wartości ujemne w pewnych obszarach przestrzeni fazowej i z tego powodu nie można myśleć o niej jak o klasycznym rozkładzie prawdopodobieństwa. Niewątpliwą zaletą funkcji Wignera jest to, że jest ona funkcją rzeczywistą przez co jest wygodnym narzędziem badawczym w rachunkach analitycznych lub numerycznych przez co znajduje coraz to większe uznanie wśród fizyków i jest stosowana w różnych dzia³ach fizyki współczesnej, a w szczególności w fizyce fazy skondensowanej przy opisie zjawisk transportowych [5, 6, 7].

Głównym celem niniejszej pracy jest uogólnienie pojęcia funkcji Wignera oraz przebadanie wybranych własności nowo skonstruowanej funkcji. W pracy przedstawione zostaną dwa takie uogólnienia. Polegają one na wprowadzeniu rzeczywistych parametrów do transformaty Weyla [8]. Jedno z nich umożliwia unifikację trzech różnych nieklasycznych funkcji rozkładu. Natomiast drugie ma na celu manipulację korelacjami położeniowo-pędowymi. Dodatkowo zostanie zaprezentowana transformata Weyla dla iloczynu dwóch różnych stanów czystych. Otrzymany wynik został zastosowany do analizy kwantowego oscylatora harmonicznego i na jego podstawie przedstawiono główne różnice dla wprowadzonych uogólnień.

2 Nieklasyczne funkcje rozkładu w przestrzeni fazowej

Choć podmiotem rozważań będą nieklasyczne funkcje rozkładu, to najpierw zostanie wprowadzona funkcja rozkładu na gruncie klasycznej mechaniki statystycznej. Ma to na celu zobrazowanie zależności i podobieństw pomiędzy opisem w teorii klasycznej, a opisem w teorii kwantowej, gdyż jak się powszechnie uważa, teoria klasyczna jest przypadkiem granicznym teorii kwantowej.

Klasyczne funkcje rozkładu

Jednym ze sposobów scharakteryzowania układu mechanicznego jest podanie funkcji Hamiltona $H(q, p)$, gdyż zawiera ona pełną informację o rozważanym układzie [4, 9]. Jeśli N oznacza ilość cząstek w układzie, to każdej z cząstek układu można przypisać współrzędne uogólnione q_i oraz sprzężone z nimi pędy uogólnione p_i , gdzie $i = 1, \dots, N$. Ruch takiego układu mechanicznego jest określony przez równania kanoniczne Hamiltona

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i}. \end{cases} \quad (1)$$

Dla prostoty będą rozważane układy jednowymiarowe. Uogólnienie na przypadek o większej ilości stopni swobody jest natychmiastowe. Zbiór tak wprowadzonych współrzędnych pozwala skonstruować przestrzeń stanów klasycznych rozpatrywanego układu [9].

Definicja 2.1. Przestrzenią fazową μ (molekularną) układu mechanicznego nazywamy parzysto-wymiarową przestrzeń symplektyczną, której elementami są punkty fazowe o współrzędnych (q, p) , które reprezentują stany klasyczne układu. Współrzędne q nazywamy współrzędnymi uogólnionymi, a współrzędne p nazywamy pędami uogólnionymi.

Układ składający się z N cząstek jest reprezentowany przez N punktów w przestrzeni μ . W przypadku, gdy mamy do czynienia z dużą ilością cząstek N , gdzie N jest rzędu stałej Avogadra, rozwiązywanie układu równań (1) jest praktycznie nieosiągalne. W związku z tym wygodnie jest odwoać się do metod przybliżonych i zastosować opis statystyczny oparty na pojęciu funkcji rozkładu.

Definicja 2.2. Niech $d\mu = dqdp$. Funkcję $f = f(q, p, t)$ klasy $C^0[\mu]$ dla której wyrażenie

$$f(q, p, t)d\mu = dN \quad (2)$$

jest równe liczbie cząstek przebywających w chwili t w elemencie objętości $d\mu$ przestrzeni fazowej nazywamy funkcją rozkładu.

Dla dużych N uprawnione jest następujące przybliżenie [9]

$$\sum f(q, p, t)dqdp = \int dqdp f(q, p) = N(t), \quad (3)$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich centrach elementów $dqdp$, natomiast całkowanie rozciąga się po całej przestrzeni fazowej.

Jeżeli $A(q, p)$ jest wielkością mierzalną w układzie, to wtedy średnia wartość wielkości mierzalnej jest wyrażona wzorem [9]

$$\langle A \rangle = \int dq dp A(q, p) f(q, p), \quad (4)$$

gdzie całkowanie rozciąga się po całej przestrzeni fazowej.

Nieklasyczne funkcje rozkładu

W mechanice kwantowej, z powodu zasady nieokreśloności, cząstka nie może mieć jednocześnie dobrze określonego położenia q oraz pędu p . Z tego powodu stan cząstki nie może być reprezentowany przez punkt w przestrzeni fazowej μ i tym samym uniemożliwia nam to skonstruowanie klasycznej funkcji rozkładu. Z drugiej strony ta trudność nie występuje w ujęciu hilbertowskim mechaniki kwantowej, gdyż stan cząstki jest opisywany za pomocą abstrakcyjnego wektora stanu w obrazie Schrödingera $|\psi(t)\rangle$ w przestrzeni Hilberta, aściślej za pomocą jego współrzędnej w odpowiednio wybranej bazie. Najczęściej utworzonej z wektorów własnych operatora położenia.

Definicja 2.3. Jeśli $|x\rangle$ oznacza wektor własny operatora położenia \hat{x} , który spełnia równanie własne własne w postaci

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad (5)$$

to rzut stanu $|\psi(t)\rangle$ na stan własny operatora położenia, $|x\rangle$, reprezentowany przez iloczyn skalarny $\langle x|\psi(t)\rangle$ jest nazywany funkcją falową cząstki w reprezentacji położeniowej i oznaczany jest symbolem $\psi(x, t)$, przy czym zachodzi warunek unormowania w postaci

$$\int_{\mathbb{R}} dx |\psi(x, t)|^2 = 1. \quad (6)$$

Uwaga, w dalszej części pracy będą rozpatrywane wyłącznie unormowane funkcje falowe. Zgodnie ze szkołą kopenhaską mechaniki kwantowej, tak zadana funkcja falowa ma następującą interpretację fizyczną, wielkość

$$|\psi(x, t)|^2 \equiv P(x, t) \quad (7)$$

jest gęstością prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie x w chwili t [2]. Stąd wynika, że stan cząstki nie jest reprezentowany przez pojedynczy punkt przestrzeni konfiguracyjnej, a przez odpowiedni rozkład prawdopodobieństwa $P(x, t)$. Ponadto ujęcie hilbertowskie mechaniki kwantowej postuluje, że mierzonej wielkości fizycznej (obserwabli) jest przyporządkowany odpowiedni liniowy operator hermitowski \hat{A} , taki, że wartość

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (8)$$

jest interpretowana jako wartość oczekiwana mierzonej wielkości fizycznej w stanie kwantowym $|\psi\rangle$. W tym miejscu należy zauważyć analogię tej procedury do odpowiedniej procedury obliczania wartości oczekiwanej w mechanice statystycznej (4).

Na zakończenie tej części należy jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że zmiana reprezentacji z położeniowej na pędową umożliwia wprowadzenie rozkładu gęstości prawdopodobieństwa w przestrzeni pędowej, tzn. $P(p, t)$. Jednocześnie oznacza to, że nie ma możliwości

w ramach omawianego ujęcia skonstruowania klasycznej funkcji rozkładu, która zależała by zarówno od zmiennych położeniowych jak i pędowych, tzn. $f(x, p, t)$. Właśnie próba ominięcia tej trudności doprowadziła Wignera w 1932 roku do stworzenia podwalin pod mechanikę kwantową w przestrzeni fazowej i skonstruowania pierwszej nieklasycznej funkcji rozkładu, która obecnie jest nazywana **funkcją Wignera**. Inne przykłady nieklasycznych funkcji rozkładu można znaleźć w artykułach przeglądowych [10, 11] lub książkach dotyczących sformułowania mechaniki kwantowej w przestrzeni fazowej [12, 13, 2].

2.1 Funkcja Wignera i jej wybrane własności

Z uwagi na różne sposoby definiowania funkcji Wignera w literaturze, przyjmujemy za podręcznikiem [2] następujące jej określenie.

Definicja 2.4. Funkcją Wignera nazywamy transformatę Fouriera z biliniowej kombinacji funkcji falowej i funkcji do niej sprzężonej

$$f(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) \exp\left[-\frac{ipX}{\hbar}\right], \quad (9)$$

przy czym funkcja Wignera spełnia warunek

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp f(x, p, t) = 1. \quad (10)$$

Poniżej zostaną przedstawione i udowodnione podstawowe własności funkcji Wignera. Co prawda, większość z tych dowodów została już uprzednio przedstawiona w kilku pracach [8, 10, 11, 13]. Mimo to zostały one tutaj przytoczone z uwagi na wprowadzoną w rozdziale 3 uogólnioną transformatę Weyla dla operatora gęstości za pomocą której zostaną zdefiniowane nowe nieklasyczne funkcje rozkładu i poprzez analogie sprawdzone ich własności. Funkcja Wignera jest jedną z wielu nieklasycznych funkcji rozkładu pozwalających na obliczanie wartości oczekiwanych przy użyciu pojęć znanych z klasycznej mechaniki statystycznej. Jednakże jest wyjątkowa pod tym względem, że ma proste własności [13].

1. Funkcja Wignera jest funkcją rzeczywistą.

Dowód. Z przytoczonej definicji funkcji Wignera wynika, że jej sprzężenie zespolone ma postać

$$\{f(x, p, t)\}^* = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi^*\left(x + \frac{X}{2}, t\right) e^{\frac{ipX}{\hbar}}. \quad (11)$$

Dokonanie zmiany zmiennych w tym wyrażeniu, zgodnie ze wzorem

$$X = -\eta, \quad (12)$$

prowadzi do równości

$$\{f(x, p, t)\}^* = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} d\eta \psi^*\left(x - \frac{\eta}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{\eta}{2}, t\right) e^{-\frac{ip\eta}{\hbar}} = f(x, p, t), \quad (13)$$

z której wynika, że część urojona funkcji Wignera jest równa zeru, tzn.

$$\operatorname{Im}\{f(x, p, t)\} = 0. \quad (14)$$

Na tej podstawie można wnioskować, że funkcja Wignera $f(x, p, t)$ jest funkcją rzeczywistą. \square

2. Funkcja Wignera jest funkcją unormowaną. Wynika ona z unormowania funkcji falowej.

Dowód. Podstawienie wyrażenia definiującego funkcję Wignera (9) do warunku unormowania (10) i odpowiednia zmiana kolejności całkowania prowadzi do następującego wyrażenia

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} dx dp f(x, p, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} dx dp \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) e^{-\frac{ipX}{\hbar}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp e^{-\frac{ipX}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (15)$$

W ostatnim czynniku występującym po lewej stronie tego wyrażenia można rozpoznać reprezentację całkową δ -Diraca [14], tzn.

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk e^{ikx} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp \exp\left[\frac{ixp}{\hbar}\right]. \quad (16)$$

Skorzystanie z własności skalowania dla delty Diraca

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x). \quad (17)$$

oraz twierdzenia filtracyjnego

$$\int_{\mathbb{R}} dx g(x) \delta(x - x_0) = g(x_0), \quad (18)$$

pozwala przekształcić wyrażenie (15) do postaci

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} dx dp f(x, p, t) &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) \frac{1}{\hbar} \delta\left(\frac{X}{\hbar}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) \delta(X) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \psi(x, t) = 1. \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z warunku unormowania funkcji falowej (6). \square

3. Funkcja Wignera jest funkcją ograniczoną.

Dowód. Ograniczoność funkcji można wykazać w oparciu o nierówność Cauchy'ego-Schwarza, która dla dowolnych funkcji całkowalnych w kwadracie $f(x)$ oraz $g(x)$ przyjmuje postać [14]

$$\left| \int dx f(x)g(x) \right|^2 \leq \int dx |f(x)|^2 \int dx' |g(x')|^2. \quad (19)$$

Obliczając kwadrat modułu funkcji Wignera, a następnie szacując jego wartość w oparciu o nierówność (19).

$$\begin{aligned} |f(x, p, t)|^2 &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \left| \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) \exp\left[-\frac{ipX}{\hbar}\right] \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} dX \left| \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \right|^2 \int_{\mathbb{R}} dX' \left| \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) \exp\left[-\frac{ipX}{\hbar}\right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} dX \left| \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \right|^2 \int_{\mathbb{R}} dX' \left| \psi\left(x + \frac{X'}{2}, t\right) \right|^2. \end{aligned}$$

Dalej, dokonanie zmiany zmiennych w powyższym wyrażeniu zgodnie ze wzorami

$$\begin{aligned} \eta &= x - \frac{X}{2} \implies dX = -2d\eta \\ \xi &= x + \frac{X'}{2} \implies dX' = 2d\xi. \end{aligned}$$

prowadzi do nierówności

$$|f(x, p, t)|^2 \leq \frac{2^2}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\eta |\psi^*(\eta, t)|^2 \int_{\mathbb{R}} d\xi |\psi(\xi, t)|^2.$$

Z kolei uwzględnienie warunku unormowania funkcji falowej (6) prowadzi do następującego oszacowania funkcji Wignera

$$|f(x, p, t)|^2 \leq \frac{1}{(\pi\hbar)^2}. \quad (20)$$

A stąd wynika, że funkcja Wignera przyjmuje wartości skończone, które leżą w przedziale określonym poniższą nierównością

$$|f(x, p, t)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}. \quad (21)$$

□

4. Rozkłady brzegowe funkcji Wignera odpowiadają rozkładom gęstości prawdopodobieństwa w reprezentacji położeniowej oraz pędowej. Są one określone odpowiednio poniższymi wzorami

$$\int_{\mathbb{R}} dp f(x, p, t) = |\psi(x, t)|^2, \quad (22)$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx f(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} |\psi(p, t)|^2. \quad (23)$$

Własność ta jest o tyle ważna, że pokazuje, iż rozkłady brzegowe funkcji Wignera są takie same jak rozkłady brzegowe klasycznej funkcji rozkładu.

Dowód. Postać rozkładów brzegowych wynikających z całkowania funkcji Wignera po odpowiednich zmiennych zostanie wykazana niezależnie.

W celu uzyskania własności określonej wzorem (22) należy zauważać, że całka po zmiennej pędowej z funkcji Wignera może zostać przekształcona w następujący sposób

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} dp f(x, p, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} dp dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) \exp\left[-\frac{ipX}{\hbar}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp \exp\left[-\frac{ipX}{\hbar}\right].\end{aligned}$$

Uwzględnienie w powyższym wyrażeniu własności delty Diraca, określonych wzorami (18) oraz (17), pozwala je przekształcić ostatecznie do postaci

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} dp f(x, p, t) &= \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) \frac{1}{\hbar} \delta\left(\frac{X}{\hbar}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) \delta(X) \\ &= \psi^*(x, t) \psi(x, t) = |\psi(x, t)|^2,\end{aligned}$$

z której wynika dowodzona własność.

Przed przystąpieniem do wykazania własności określonej wzorem (23) zostanie wprowadzona para transformat Fouriera. Dzięki temu przekształceniu unitarnemu będzie można dokonać zmiany reprezentacji funkcji falowej z położeniowej na pędową i *vice versa*, według wzorów

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp \psi(p) \exp\left[\frac{i}{\hbar}xp\right], \quad (24)$$

$$\psi(p) = \int_{\mathbb{R}} dx \psi(x) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}px\right]. \quad (25)$$

Całkowanie po zmiennej położeniowej funkcji Wignera wyrażonej, zgodnie z definicją (9), za pomocą funkcji falowej prowadzi do następującego wyrażenia

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} dx f(x, p, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} dx dX \psi^*\left(x - \frac{X}{2}, t\right) \psi\left(x + \frac{X}{2}, t\right) e^{-\frac{ip}{\hbar}X} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^2} dx dX \int_{\mathbb{R}} dp' \psi^*(p', t) e^{-\frac{ip'}{\hbar}(x - \frac{1}{2}X)} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} dp'' \psi(p'', t) e^{\frac{ip''}{\hbar}(x + \frac{1}{2}X)} e^{-\frac{ip}{\hbar}X}.\end{aligned}$$

Zmiana kolejności całkowania w powyższym wyrażeniu, a następnie zastosowanie reprezentacji całkowej delty Diraca (16) jak i jej własności (17) oraz (18) prowadzi,

po wykonaniu odpowiednich przekształceń, do końcowego wyniku

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} dx f(x, p, t) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\frac{ip}{\hbar}X} \int_{\mathbb{R}} dp' \psi^*(p', t) e^{\frac{ip'}{2\hbar}X} \\
&\times \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dp'' \psi(p'', t) e^{\frac{ip''}{2\hbar}X} \int_{\mathbb{R}} dx \exp \left[\frac{ix}{\hbar} (p'' - p') \right]}_{2\pi\hbar\delta(p'' - p')} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\frac{ip}{\hbar}X} \int_{\mathbb{R}} dp' \psi^*(p', t) e^{\frac{ip'}{2\hbar}X} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} dp'' \psi(p'', t) e^{\frac{ip''}{2\hbar}X} \delta(p'' - p') \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\frac{ip}{\hbar}X} \int_{\mathbb{R}} dp' \psi^*(p', t) \psi(p', t) e^{\frac{ip'}{\hbar}X} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} dp' \psi^*(p', t) \psi(p', t) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dX e^{\frac{i}{\hbar}X(p' - p)}}_{2\pi\hbar\delta(p' - p)} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int_{\mathbb{R}} dp' \psi^*(p', t) \psi(p', t) \delta(p' - p) \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)} |\psi(p, t)|^2.
\end{aligned}$$

□

Funkcja Wignera jest więc unormowaną funkcją rzeczywistą określona na przestrzeni fazowej oraz posiada dobrze zdefiniowane rozkłady brzegowe. Tym samym, mogłaby być dobrym kandydatem na funkcję rozkładu prawdopodobieństwa, jednakże nie zawsze przyjmuje wartości dodatnie, tzn. są takie obszary jej określoności w przestrzeni fazowej, gdzie przyjmuje wartości ujemne. To sprawia, że nie można jej w pełni traktować jako funkcji rozkładu lecz jako jej namiastkę i stąd bierze się określenie: **nieklasyczna funkcja rozkładu**.

5. Niech $f_\psi(x, p, t)$ oznacza funkcję Wignera odpowiadającą funkcji falowej $\psi(x, t)$, a $f_\varphi(x, p, t)$ oznacza funkcję Wignera odpowiadającą funkcji falowej $\varphi(x, t)$. Między wprowadzonymi funkcjami Wignera, a odpowiadającymi im funkcjami falowymi zachodzi następująca równość

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp f_\psi(x, p, t) f_\varphi(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \varphi(x, t) \right|^2. \quad (26)$$

Dowód. Po skorzystaniu z definicji funkcji Wignera, lewą stronę równania (26) można rozpisać w następujący sposób

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dp f_\psi(x, p, t) f_\varphi(x, p, t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} dx dp \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} du \psi^* \left(x - \frac{u}{2}, t \right) \psi \left(x + \frac{u}{2}, t \right) e^{-\frac{i}{\hbar}up} \right] \\
&\times \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dv \varphi^* \left(x - \frac{v}{2}, t \right) \varphi \left(x + \frac{v}{2}, t \right) e^{-\frac{i}{\hbar}vp} \right].
\end{aligned}$$

Następnie zmieniając kolejność całkowania

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} du \psi^* \left(x - \frac{u}{2}, t \right) \psi \left(x + \frac{u}{2}, t \right) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} dv \varphi^* \left(x - \frac{v}{2}, t \right) \varphi \left(x + \frac{v}{2}, t \right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dp e^{-\frac{i}{\hbar} vp - \frac{i}{\hbar} up}}_{2\pi\hbar\delta(u+v)} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} dx du \psi^* \left(x - \frac{u}{2}, t \right) \psi \left(x + \frac{u}{2}, t \right) \varphi^* \left(x + \frac{u}{2}, t \right) \varphi \left(x - \frac{u}{2}, t \right).
\end{aligned}$$

i dokonując zmiany zmiennych według wzorów

$$\eta = x - \frac{u}{2}, \quad \xi = x + \frac{u}{2},$$

z których wynika, że

$$x = \frac{\eta + \xi}{2}, \quad u = \xi - \eta,$$

przy czym jakobian tego przekształcenia wynosi

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

uzyskuje się wyrażenie w postaci

$$L = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} d\eta d\xi \psi^*(\eta, t) \psi(\xi, t) \varphi^*(\xi, t) \varphi(\eta, t).$$

Odpowiednie uporządkowanie całek prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} d\eta d\xi \psi^*(\eta, t) \varphi(\eta, t) \psi(\xi, t) \varphi^*(\xi, t) \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} d\eta \psi^*(\eta, t) \varphi(\eta, t) \left[\int_{\mathbb{R}} d\xi \psi^*(\xi, t) \varphi(\xi, t) \right]^* \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_{\mathbb{R}} d\eta \psi^*(\eta, t) \varphi(\eta, t) \right|^2 = P.
\end{aligned}$$

Należy zauważyć, że lewa strona równości (26) jest nieujemna, tj.

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp f_\psi(x, p, t) f_\varphi(x, p, t) \geq 0. \quad (27)$$

Co więcej osiąga ona zero dla stanów ortogonalnych. Równość (26) oznacza również, iż funkcja Wignera jest całkowalna z kwadratem. Istotnie, jeśli położyć $\psi(x, t) = \varphi(x, t)$, to prawa strona jest równa $(2\pi\hbar)^{-1}$, czyli

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp f_\psi(x, p, t)^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} < \infty. \quad (28)$$

□

2.2 Bi-funkcja Wignera

W tym podrozdziale zostanie zaprezentowana transformacja Wignera dla dwóch różnych stanów czystych. Uogólnienie to zostało pierwotnie wprowadzone przez Moyala w pracy [15].

Definicja 2.5. Niech $\psi(x, t)$ oraz $\varphi(x, t)$ są unormowanymi funkcjami falowymi. Bi-funkcją Wignera nazywamy transformatę Fouriera z iloczynu tych funkcji określona wzorem

$$F(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi^* \left(x - \frac{1}{2}X, t \right) \varphi \left(x + \frac{1}{2}X, t \right) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} pX \right]. \quad (29)$$

W szczególności, z podanej definicji wynika, że jeżeli spełniony jest warunek $\psi(x, t) = \varphi(x, t)$, to funkcja Wignera może być uważana za szczególny przypadek Bi-funkcji Wignera.

Poniżej zostaną przedstawione, bez dowodów, wybrane własności Bi-transformacji Wignera. Powodem rezygnacji z przedstawienia tych dowodów na rzecz odpowiednich komentarzy jest ich podobieństwo do odpowiednich dowodów dotyczących funkcji Wignera omawianej w poprzednim podrozdziale.

1. W ogólnym przypadku, funkcja $F(x, p, t)$ określona przez Bi-funkcję Wignera jest zespolona. Natomiast, jeżeli spełnia ona warunek

$$F^*(x, p, t) = F(x, p, t), \quad (30)$$

to jest rzeczywista.

Spełnienie tego warunku pociąga za sobą obliczenie sprzężenia zespolonego funkcji $F(x, p, t)$, które jest równe

$$\begin{aligned} F^*(x, p, t) &= \left\{ \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi^* \left(x - \frac{1}{2}X, t \right) \varphi \left(x + \frac{1}{2}X, t \right) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} pX \right] \right\}^* \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi \left(x - \frac{1}{2}X, t \right) \varphi^* \left(x + \frac{1}{2}X, t \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} pX \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \varphi^* \left(x - \frac{1}{2}X, t \right) \psi \left(x + \frac{1}{2}X, t \right) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} pX \right]. \end{aligned}$$

Z ostatniej równości wynika, iż sprzężenie Bi-funkcji Wignera jest Bi-funkcją Wignera wziętą dla funkcji falowych w odwrotnej kolejności w stosunku do definicji (2.5). Wobec tego warunek (30) jest spełniony, gdy można zmienić miejscami funkcje falowe $\psi(x, t)$ i φ bez zmiany postaci $F(x, p, t)$, co zachodzi między innymi dla szczególnego przypadku $\psi(x, t) = \varphi(x, t)$.

2. Jeżeli stany są ortogonalne, to funkcji $F(x, p, t)$ nie da się unormować oraz

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp F(x, p, t) = 0. \quad (31)$$

Komentarz. Wykonanie całkowania po zmiennych pędowych prowadzi do równości

$$\int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \varphi(x, t) = 0.$$

Ostatnia całka jest równa zero tylko w przypadku ortogonalnych funkcji falowych. Oznacza to, że dla takich funkcji falowych $F(x, p, t)$ nie daje się unormować. Można tutaj zauważać pewną analogię zachowania funkcji rozkładu do samej funkcji falowej. Mianowicie, dla ortonormalnego zbioru funkcji falowych $\{\psi_i\}$, zbiór utworzony poprzez transformację zadającą Bi-funkcję Wignera jest samo-ortonormalny [15],

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp F_{ij}(x, p, t) = \delta_{ij}. \quad (32)$$

3. Amplituda funkcji zespolonej $F(x, p, t)$ jest ograniczona nierównością

$$|F(x, p, t)| \leq \frac{1}{\pi \hbar}. \quad (33)$$

Komentarz. Ograniczenie amplitudy Bi-funkcji Wignera jest takie, jak ograniczenie samej funkcji Wignera (21).

4. Rozkłady brzegowe funkcji zespolonej $F(x, p, t)$ są określone wzorami

$$\int_{\mathbb{R}} dp F(x, p, t) = \psi^*(x, t) \varphi(x, t), \quad (34)$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx F(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \psi^*(p, t) \varphi(p, t). \quad (35)$$

Komentarz. Rozkłady brzegowe można otrzymać postępując analogicznie jak w dowodzie własności (4) dla funkcji Wignera.

5. Funkcja zespolona $F(x, p, t)$ jest całkowalna z kwadratem, tzn.

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp |F(x, p, t)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx |\psi(x, t)|^2 \int_{\mathbb{R}} dx' |\varphi(x', t)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}. \quad (36)$$

Komentarz. Tę własność można udowodnić, postępując analogicznie jak w dowodzie własności (5) dla funkcji Wignera. W rezultacie uzyskuje się iloczyn całek z kwadratów modułów funkcji falowych. Ponieważ funkcje falowe są unormowane zgodnie ze wzorem (6), więc wartość każdej z powyższych całek jest równa jedności.

3 Uogólniona transformata Weyla operatora gęstości

W tym rozdziale zostaną przedstawione i omówione dwie różne modyfikacje transformaty Weyla. Każda z nich jest spowodowana odpowiednio dobraną parametryzacją oryginalnej transformaty Weyla.

3.1 Transformata Weyla

3.1.1 Macierz gęstości

Rozważane dotychczas stany były opisane funkcją falową, zawierającą pełną informację o układzie. Takie stany noszą nazwę **stanów czystych**.

W celu uwzględnienia stanów, o których brakuje pełnej informacji, wprowadza się konsepcję **stanów mieszanych**. Przykładem układu znajdującego się w stanie mieszonym, jest układ, który znajduje się w jednym z dwóch stanów: stanie $|\psi_1\rangle$ z prawdopodobieństwem p_1 lub w stanie $|\psi_2\rangle$ z prawdopodobieństwem p_2 , przy czym między prawdopodobieństwami zachodzi warunek $p_1 + p_2 = 1$. Odpowiednik klasyczny takiego stanu mieszanego może być opisany za pomocą klasycznej funkcji rozkładu będącej średnią ważoną funkcji rozkładu dla stanów 1 i 2 z wagami odpowiednio p_1 i p_2 . Dla wygodnego opisu stanów mieszanych wprowadza się operator gęstości [2, 16].

Definicja 3.1. Operatorem gęstości nazywamy operator $\hat{\rho}$ taki, że

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)|, \quad (37)$$

przy czym $\sum_i p_i = 1$. Wartość oczekiwana operatora \hat{A} dana jest wzorem

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} (\hat{A} \hat{\rho}). \quad (38)$$

Macierz gęstości to operator gęstości zapisany w odpowiedniej reprezentacji.

W reprezentacji położeniowej macierz gęstości ma postać

$$\rho(x', x, t) \equiv \langle x', t | \hat{\rho} | x, t \rangle = \sum_i \rho_i \langle x' | \psi_i(t) \rangle \langle \psi_i(t) | x \rangle \sum_i \rho_i \psi_i(x', t) \psi^*(x, t). \quad (39)$$

Elementy diagonalne macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej

$$\rho(x, x, t) = \sum_i \rho_i \psi_i(x, t) \psi_i^*(x, t) = \sum_i \rho_i |\psi_i(x, t)|^2 \quad (40)$$

dostarczają informacji o rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w chwili t w położeniu x w poszczególnych stanach. Są to informacje **klasyczne** [17]. Analogicznie można zapisać macierz gęstości w reprezentacji pędowej.

Relacja pomiędzy wspomnianymi reprezentacjami jest dana przez podwójną transformatę Fouriera, co można łatwo sprawdzić korzystając ze wzorów (25) i (24) oraz z zupełności baz położeniowej oraz pędowej.

$$\rho(p', p, t) = \int_{\mathbb{R}^2} dx' dx \rho(x', x, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p' x' - px) \right], \quad (41)$$

$$\rho(x', x, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2} dp' dp \rho(p', p, t) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (p' x' - px) \right]. \quad (42)$$

Za pomocą wzorów (41) i (42) można obliczyć elementy diagonalne macierzy gęstości

$$\rho(p, p, t) = \int_{\mathbb{R}^2} dx' dx \rho(x', x, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(x' - x) \right], \quad (43)$$

$$\rho(x, x, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2} dp' dp \rho(p', p, t) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (p' - p)x \right]. \quad (44)$$

Całkowanie zbiera informacje z elementów pozadiagonalnych macierzy gęstości w reprezentacji pędowej i wtłacza je do elementów diagonalnych macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej i *vice versa*. Oznacza to, że elementy pozadiagonalne macierzy gęstości tychże reprezentacji zawierają informacje o korelacjach.

3.1.2 Transformata Weyla macierzy gęstości

Definicja 3.2. Transformatą Weyla nazywamy odwzorowanie w postaci [8]

$$A(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \left\langle x - \frac{X}{2} \middle| \hat{A} \middle| x + \frac{X}{2} \right\rangle \exp \left[-\frac{i}{\hbar} pX \right], \quad (45)$$

które każdemu liniowemu operatorowi hermitowskiemu \hat{A} przypisuje funkcję $A(x, p)$.

Jeżeli $A(x, p)$ oraz $B(x, p)$ są transformatami Weyla operatorów \hat{A} i \hat{B} , to zachodzi równość [8]

$$\text{Tr}[\hat{A}\hat{B}] = \int_{\mathbb{R}^2} dx dp A(x, p)B(x, p). \quad (46)$$

Z powyższej równości wynika, że

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) = \int_{\mathbb{R}^2} dx dp A(x, p)\tilde{\rho}(x, p), \quad (47)$$

gdzie $\tilde{\rho}(x, p)$ jest transformatą Weyla operatora gęstości.

Funkcję Wignera można zdefiniować jako transformatę Weyla macierzy gęstości [8]. Wobec tego można obliczać wartość oczekiwana operatora \hat{A} w sposób zbliżony do mechaniki statystycznej zastępując klasyczną funkcję rozkładu, funkcją Wignera

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} dx dp A(x, p)f(x, p). \quad (48)$$

Z uwagi na to, że w większości rozpatrywanych tutaj przypadków będzie wprowadzana uogólniona transformata Weyla dla operatora gęstości, to przedmiotem analizy będzie odpowiednik funkcji Wignera oraz jego wybrane własności. W dalszej części pracy rozpatrywane będą wyłącznie stany czyste,

$$\hat{\rho} = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|. \quad (49)$$

3.2 γ -funkcja Wignera i jej wybrane własności

W pracy [18] wprowadzono transformatę Weyla zależną od rzeczywistego parametru γ .

Definicja 3.3. Uogólnioną transformatę Weyla z parametrem $\gamma \in \mathbb{R}$ definiuje się w następujący sposób

$$f_\gamma(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{1}{2}(1-\gamma)X, t\right) \psi\left(x + \frac{1}{2}(1+\gamma)X, t\right) \exp\left[-\frac{ipX}{\hbar}\right]. \quad (50)$$

Dla $\gamma = 0$ transformata (50) przechodzi w zwykłą funkcję Wignera (9).

Poniżej zostanie pokazanych kilka podstawowych własności transformaty (50) wybranych przez analogie do wcześniej wykazanych własności funkcji Wignera.

1. Uogólniona transformata Weyla $f_\gamma(x, p, t)$ jest w ogólności zespolona.

Komentarz.

$$\begin{aligned} \{f_\gamma(x, p, t)\}^* &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi\left(x - \frac{1}{2}(1-\gamma)X, t\right) \psi^*\left(x + \frac{1}{2}(1+\gamma)X, t\right) e^{\frac{ipX}{\hbar}} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi\left(x + \frac{1}{2}(1-\gamma)X, t\right) \psi^*\left(x - \frac{1}{2}(1+\gamma)X, t\right) e^{-\frac{ipX}{\hbar}}. \end{aligned}$$

Transformata jest rzeczywista jeśli zachodzi równość

$$\{f_\gamma(x, p, t)\}^* = f_\gamma(x, p, t). \quad (51)$$

Ponieważ w ogólności, dla $\gamma \neq 0$, równość (51) nie zachodzi, to transformata (50) nie jest rzeczywista.

2. Funkcja $f_\gamma(x, p, t)$ jest unormowana.

Komentarz. Własność wynika z warunku unormowania funkcji falowej, a jej dowód przebiega analogicznie jak dla własności (2) funkcji Wignera, dlatego zostanie tutaj pominięty.

3. Amplituda funkcji $f_\gamma(x, p, t)$ jest ograniczona dla $\gamma \neq \pm 1$.

Komentarz. Własność można udowodnić postępując analogicznie jak dla własności (3) funkcji Wignera. Skorzystanie z nierówności Cauchy'ego-Schwarza oraz odpowiednich zmian zmiennych prowadzi do nierówności

$$\begin{aligned} |f(x, p, t)|^2 &\leq \frac{2^2}{(2\pi\hbar)^2 |(1-\gamma)(1+\gamma)|} \int_{\mathbb{R}} d\eta |\psi^*(\eta, t)|^2 \int_{\mathbb{R}} d\xi |\psi(\xi, t)|^2 \\ |f(x, p, t)|^2 &\leq \frac{1}{(\pi\hbar)^2} \frac{1}{|1-\gamma^2|} \end{aligned} \quad (52)$$

Wartość ograniczenia zależy *explicit*ie od kwadratu parametru gamma.

4. Rozkłady brzegowe transformaty (50) odpowiadają odpowiednim rozkładom gęstości prawdopodobieństwa zgodnie ze wzorami

$$\int_{\mathbb{R}} dp f_\gamma(x, p, t) = |\psi(x, t)|^2, \quad (53)$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx f_\gamma(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} |\psi(p, t)|^2. \quad (54)$$

Komentarz. Dowód przebiega analogicznie jak dla (4) własności funkcji Wignera. Oznacza to, że wprowadzając parametr γ nie zostają zmienione rozkłady brzegowe w stosunku do funkcji Wignera. A zatem zachowane są rozkłady prawdopodobieństwa w przestrzeniach: położeniowej i pędowej.

5. Iloczyn uogólnionych transformat Weyla z parametrem γ (50) dla różnych stanów.

Jeżeli przez $f_\gamma^\psi(x, p, t)$ oznaczymy transformatę odpowiadającą funkcji falowej $\psi(x, t)$ oraz $f_\gamma^\varphi(x, p, t)$ transformatę odpowiadającą funkcji falowej $\varphi(x, t)$, to zachodzi poniższa równość

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp f_\gamma^\psi(x, p, t) f_\gamma^\varphi(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \varphi(x, t) \right|^2. \quad (55)$$

Komentarz. Oznacza to, iż uogólnienie zachowuje własność (5) funkcji Wignera. Zatem lewa strona równości (55) jest zawsze nieujemna

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp f_\psi(x, p, t) f_\varphi(x, p, t) \geq 0 \quad (56)$$

oraz osiąga zero dla stanów ortogonalnych.

Dowód. Korzystając z definicji (50) można zapisać lewą stronę równości (55) w następujący sposób

$$\begin{aligned} L &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dp f_\gamma^\psi(x, p, t) f_\gamma^\varphi(x, p, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dp \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} du \psi^* \left(x - \frac{1}{2}(1-\gamma)u, t \right) \psi \left(x + \frac{1}{2}(1+\gamma)u, t \right) e^{-\frac{i}{\hbar}up} \right] \\ &\times \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dv \varphi^* \left(x - \frac{1}{2}(1-\gamma)v, t \right) \varphi \left(x + \frac{1}{2}(1+\gamma)v, t \right) e^{-\frac{i}{\hbar}vp} \right]. \end{aligned}$$

Następnie zmieniając kolejność całkowania

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} du \psi^* \left(x - \frac{1}{2}(1-\gamma)u, t \right) \psi \left(x + \frac{1}{2}(1+\gamma)u, t \right) \\ &\times \int_{\mathbb{R}} dv \varphi^* \left(x - \frac{1}{2}(1-\gamma)v, t \right) \varphi \left(x + \frac{1}{2}(1+\gamma)v, t \right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dp e^{-\frac{i}{\hbar}vp - \frac{i}{\hbar}up}}_{2\pi\hbar\delta(u+v)} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} dx du \psi^* \left(x - \frac{1}{2}(1-\gamma)u, t \right) \psi \left(x + \frac{1}{2}(1+\gamma)u, t \right) \\ &\times \varphi^* \left(x + \frac{1}{2}(1+\gamma)u, t \right) \varphi \left(x - \frac{1}{2}(1-\gamma)u, t \right). \end{aligned}$$

Następnie dokonując zmiany zmiennych zgodnie ze wzorami

$$\eta = x - \frac{1}{2}(1-\gamma)u, \quad \xi = x + \frac{1}{2}(1+\gamma)u,$$

z których wynika, że

$$x = \frac{\eta + \xi}{2} - \gamma(\xi - \eta), \quad u = \xi - \eta.$$

Jakobian tegoż przekształcenia ma postać

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \gamma & \frac{1}{2} + \gamma \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

wobec czego

$$L = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} d\eta d\xi \psi^*(\eta, t) \psi(\xi, t) \varphi^*(\xi, t) \varphi(\eta, t).$$

Odpowiednie uporządkowanie całek prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} d\eta \psi^*(\eta, t) \varphi(\eta, t) \psi(\xi, t) \varphi^*(\xi, t) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} d\eta \psi^*(\eta, t) \varphi(\eta, t) \left[\int_{\mathbb{R}} d\xi \psi^*(\xi, t) \varphi(\xi, t) \right]^* \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_{\mathbb{R}} d\eta \psi^*(\eta, t) \varphi(\eta, t) \right|^2 = P. \end{aligned}$$

□

3.3 σ -funkcja Wignera i jej wybrane własności

Definicja 3.4. Uogólnioną transformatę Weyla z parametrem σ nazywamy transformatę zgodną ze wzorem

$$f_\sigma(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}X, t\right) \psi\left(x + \frac{\sigma}{2}X, t\right) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}pX\right]. \quad (57)$$

Przyjęto, że parametr σ jest rzeczywisty i nieujemny. Dla $\sigma = 1$ transformata (57) przechodzi w funkcję Wignera.

Motywacją do wprowadzenia takiej parametryzacji jest chęć wyeliminowania korelacji. Jak pokazano wcześniej, elementy pozadiagonalne macierzy gęstości odpowiadają za korelacje. Przechodząc z parametrem σ do zera elementy pozadiagonalne pod całką (57) są eliminowane. W efekcie położenie i pęd powinny stać się zmiennymi niezależnymi. Przejście graniczne $\sigma \rightarrow 0$ prowadzi do równości

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(x, p, t) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}X, t\right) \psi\left(x + \frac{\sigma}{2}X, t\right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \lim_{\sigma \rightarrow 0} \psi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}X, t\right) \psi\left(x + \frac{\sigma}{2}X, t\right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \\ &= \psi^*(x, t) \psi(x, t) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\frac{i}{\hbar}pX} = |\psi(x, t)|^2 \delta(p). \end{aligned}$$

Zatem zachodzi równość

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(x, p, t) = |\psi(x, t)|^2 \delta(p). \quad (58)$$

Otrzymany rozkład (58) składa się z rozkładu zmiennej położeniowej przemnożonego przez deltę Diraca. Oznacza to, że zmienne, tj. położenie i pęd są niezależne. Niezależnie od funkcji falowej, rozkład ten jest zawsze dodatni.

Prosta zmiana zmiennych w wyrażeniu (57) daje

$$f_\sigma(x, p, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{\hbar\sigma}{2}X, t\right) \psi\left(x + \frac{\hbar\sigma}{2}X, t\right) \exp\left[-ipX\right]. \quad (59)$$

We wzorze (59) stała \hbar znajduje się wyłącznie obok parametru σ . Zatem przejście graniczne $\sigma \rightarrow 0$ odpowiada przejściu granicznemu $\hbar \rightarrow 0$.

Poniżej przedstawiono własności transformaty (57) analogiczne do badanych dla funkcji Wignera.

1. Transformata $f_\sigma(x, p, t)$ jest rzeczywista.

Dowód. Poniżej przedstawione postępowanie jest analogiczne do dowodu własności (1) funkcji Wignera.

$$\begin{aligned} \{f_\sigma((x, p, t))\}^* &= \left\{ \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}X, t\right) \psi\left(x + \frac{\sigma}{2}X, t\right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \right\}^* \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi\left(x - \frac{\sigma}{2}X, t\right) \psi^*\left(x + \frac{\sigma}{2}X, t\right) e^{\frac{i}{\hbar}pX} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} d\eta \psi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}\eta, t\right) \psi\left(x + \frac{\sigma}{2}\eta, t\right) e^{-\frac{i}{\hbar}p\eta} \\ &= f_\sigma(x, p, t). \end{aligned}$$

Zatem spełniony jest warunek

$$\{f_\sigma((x, p, t))\}^* = f_\sigma(x, p, t). \quad (60)$$

□

2. Transformata $f_\sigma(x, p, t)$ jest unormowana.

Komentarz. Własność wynika z warunku unormowania funkcji falowej, a jej dowód przebiega analogicznie jak dla własności (2) funkcji Wignera, dlatego zostanie tutaj pominięty.

3. Transformata $f_\sigma(x, p, t)$ jest ograniczona dla $\sigma \neq 0$.

Komentarz. Własność można udowodnić postępując analogicznie jak dla własności (3) funkcji Wignera. Skorzystanie z nierówności Cauchy'ego-Schwarza oraz odpowiedniej zmiany zmiennych prowadzi do nierówności

$$|f(x, p, t)| \leq \frac{1}{\pi\hbar\sigma}. \quad (61)$$

Wartość ograniczenia zależy *explicitie* od parametru σ . Dla $\sigma \rightarrow 0$ funkcja przestaje być ograniczona co pozostaje konsystentne ze wzorem (58), według którego funkcja przechodzi w deltę Diraca mnożoną przez rozkład prawdopodobieństwa.

4. Rozkłady brzegowe transformaty (57) odpowiadają odpowiednim rozkładom gęstości prawdopodobieństwa zgodnie ze wzorami

$$\int_{\mathbb{R}} dp f_{\sigma}(x, p, t) = |\psi(x, t)|^2, \quad (62)$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx f_{\sigma}(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar\sigma} \left| \psi\left(\frac{p}{\sigma}, t\right) \right|^2. \quad (63)$$

Komentarz. Warto zauważyć, że rozkład brzegowy dla zmiennej pędowej jest przeskalowany względem argumentu p oraz wartości przez czynnik $1/\sigma$.

Dowód własności przebiega analogicznie do własności (4) funkcji Wignera. Zamiast dowodu przedstawiono poniżej uzasadnienie. Dokonanie zmiany zmiennych w całce (57) tak, aby przeskalać zmienną pędową o czynnik $1/\sigma$ daje równość

$$\begin{aligned} f_{\sigma}(x, p, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}X, t\right) \psi\left(x + \frac{\sigma}{2}X, t\right) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}pX\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\sigma} \int_{\mathbb{R}} dX \psi^*\left(x - \frac{1}{2}X, t\right) \psi\left(x + \frac{1}{2}X, t\right) \exp\left[-\frac{i}{\hbar\sigma}pX\right] \\ &= \frac{1}{\sigma} f(x, p/\sigma, t) \\ f_{\sigma}(x, p, t) &= \frac{1}{\sigma} f(x, p/\sigma, t) \end{aligned} \quad (64)$$

Związek ten pomiędzy uogólnioną transformatą (57), a zwykłą funkcją Wignera (64) tłumaczy, w pewnym sensie, skalowanie rozkładu brzegowego.

5. Iloczyn uogólnionych transformat Weyla z parametrem σ (57) dla różnych stanów.

Jeśli przez $f_{\sigma}^{\psi}(x, p, t)$ oznaczymy transformatę odpowiadającą funkcji falowej $\psi(x, t)$ oraz $f_{\sigma}^{\varphi}(x, p, t)$ transformatę odpowiadającą funkcji falowej $\varphi(x, t)$, to zachodzi poniższa równość

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp f_{\sigma}^{\psi}(x, p, t) f_{\sigma}^{\varphi}(x, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar\sigma} \left| \int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \varphi(x, t) \right|^2. \quad (65)$$

Dowód. Korzystając z definicji (57) można zapisać lewą stronę równania (65) następująco

$$\begin{aligned} L &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dp f_{\sigma}^{\psi}(x, p, t) f_{\sigma}^{\varphi}(x, p, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dp \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} du \psi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}u, t\right) \psi\left(x + \frac{\sigma}{2}u, t\right) e^{-\frac{i}{\hbar}up} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dv \varphi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}v, t\right) \varphi\left(x + \frac{\sigma}{2}v, t\right) e^{-\frac{i}{\hbar}vp} \right]. \end{aligned}$$

Zmieniając kolejność całkowania

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} du \psi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}u, t\right) \psi\left(x + \frac{\sigma}{2}u, t\right) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} dv \varphi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}v, t\right) \varphi\left(x + \frac{\sigma}{2}v, t\right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dp e^{-\frac{i}{\hbar}vp - \frac{i}{\hbar}up}}_{2\pi\hbar\delta(u+v)} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} dx du \psi^*\left(x - \frac{\sigma}{2}u, t\right) \psi\left(x + \frac{\sigma}{2}u, t\right) \varphi^*\left(x + \frac{\sigma}{2}u, t\right) \varphi\left(x - \frac{\sigma}{2}u, t\right). \end{aligned}$$

Następnie dokonując zmiany zmiennych

$$\eta = x - \frac{\sigma}{2}u, \quad \xi = x + \frac{\sigma}{2}u,$$

wobec czego

$$x = \frac{\eta + \xi}{2}, \quad u = \frac{1}{\sigma}(\xi - \eta).$$

Jakobian tegoż przekształcenia ma postać

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma}.$$

$$L = \frac{1}{2\pi\hbar|\sigma|} \int_{\mathbb{R}^2} d\eta d\xi \psi^*(\eta, t) \psi(\xi, t) \varphi^*(\xi, t) \varphi(\eta, t).$$

Odpowiednie uporządkowanie całek prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2\pi\hbar\sigma} \int_{\mathbb{R}} d\eta \psi^*(\eta, t) \varphi(\eta, t) \psi(\xi, t) \varphi^*(\xi, t) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\sigma} \int_{\mathbb{R}} d\eta \psi^*(\eta, t) \varphi(\eta, t) \left[\int_{\mathbb{R}} d\xi \psi^*(\xi, t) \varphi(\xi, t) \right]^* \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\sigma} \left| \int_{\mathbb{R}} d\eta \psi^*(\eta, t) \varphi(\eta, t) \right|^2 = P. \end{aligned}$$

Równość (65) oznacza, iż lewa jej strona jest zawsze nieujemna, tj.

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp f_\sigma^\psi(x, p, t) f_\sigma^\varphi(x, p, t) \geq 0. \quad (66)$$

□

4 Zastosowania, wyniki i dyskusja

4.1 Parametryzowane funkcje Wignera dla oscylatora harmonicznego

Jednym ze sztandarowych przykładów pojawiających się w wielu pracach dotyczących sformułowania mechaniki kwantowej w przestrzeni fazowej jest kwantowy oscylator harmoniczny [8, 19, 11, 20]. Unormowana funkcja falowa odpowiadająca n -temu stanowi własnemu oscylatora harmonicznego ma postać [2]

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \frac{1}{\sqrt{x_0}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} \right), \quad (67)$$

gdzie $x_0^2 = \hbar/(m\omega)$ jest długością oscylatorową, $H_n(x/x_0)$ jest n -tym wielomianem Hermite'a.

W dalszej części zostaną przedstawione funkcje Wignera oraz wprowadzone w poprzednich podrozdziałach uogólnienia funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego.

Funkcja Wignera dla oscylatora harmonicznego

Funkcja Wignera odpowiadająca n -temu stanowi wzbudzonemu oscylatora harmonicznego ma postać

$$f_n(x, p, t) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\hbar} p\right)^2} L_n \left[2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_0}{\hbar} p \right)^2 \right], \quad (68)$$

gdzie $L_n^\alpha(x)$ to stwarzyszony wielomian Laguerra, przy czym dla $\alpha = 0$ zachodzi utożsamienie: $L_n^0(x) \equiv L_n(x)$, gdzie $L_n(x)$ to wielomian Laguerra.

Bi-funkcja Wignera dla oscylatora harmonicznego

Bi-funkcja Wignera dla stanów n oraz m jest wyrażona wzorem

$$F_{nm}(x, p, t) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} \sqrt{\frac{n!}{m!}} 2^{n-m} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\hbar} p\right)^2} L_n^{m-n} \left[2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_0}{\hbar} p \right)^2 \right]. \quad (69)$$

Postać tej funkcji (69) jest bardzo zbliżona do postaci zwykłej funkcji Wignera (68). Różnica polega na zmianie wielomianu Laguerra na odpowiedni stwarzyszony wielomian Laguerra oraz innej stałej normalizacji.

γ -funkcja Wignera dla oscylatora harmonicznego

Postać uogólnionej transformaty Weyla z parametrem γ dla dwóch pierwszych stanów oscylatora harmonicznego, po wprowadzeniu oznaczeń $z = (i/\hbar)p + \gamma x/x_0^2$ oraz $\beta = \sqrt{1 + \gamma^2}$ ma postać

$$f_\gamma^n(x, p, t) = \frac{1}{\pi \hbar \beta} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{zx_0}{\beta}\right)^2} I_\gamma^n(x, p, t), \quad (70)$$

gdzie całka $I_\gamma^n(x, p, t)$ jest wyrażona wzorem

$$\begin{aligned} I_\gamma^n(x, p, t) &= \int_{\mathbb{R}} d\eta e^{-\eta^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{zx_0}{\beta^2}(1-\gamma) - \frac{1}{\beta}(1-\gamma)\eta \right) \\ &\times H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{zx_0}{\beta^2}(1+\gamma) + \frac{1}{\beta}(1+\gamma)\eta \right). \end{aligned} \quad (71)$$

Dla stanów $n = 0, 1$ funkcja f_γ ma postać

$$f_\gamma^{n=0}(x, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar\beta} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{zx_0}{\beta}\right)^2}, \quad (72)$$

$$f_\gamma^{n=1}(x, p, t) = \frac{2}{\pi\hbar\beta} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{zx_0}{\beta}\right)^2} \left[\left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - 2\gamma x \frac{z}{\beta^2} - \frac{1-\gamma^2}{\beta^2} \left(\frac{z^2 x_0^2}{\beta^2} + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (73)$$

σ -funkcja Wignera dla oscylatora harmonicznego

Dla n -tego stanu oscylatora harmonicznego σ -funkcja Wignera ma postać

$$f_\sigma^n(x, p, t) = \frac{(-1)^n}{\pi\sigma\hbar} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\sigma\hbar}p\right)^2} L_n \left[2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_0}{\sigma\hbar}p \right)^2 \right]. \quad (74)$$

Powyższy wzór można łatwo otrzymać ze zwykłej funkcji Wignera za pomocą równości (64).

4.2 Miary nieklasyczności stanów

W tym podrozdziale zostanie wyznaczony parametr nieklasyczności dla wybranych stanów kwantowych oscylatora harmonicznego opisanych funkcją Wignera oraz wprowadzonych jej uogólnień.

Dla zbadania rzeczywistych nieklasycznych funkcji rozkładu $f(x, p, t)$ użyto parametru nieklasyczności:

$$\delta = \int_{\mathbb{R}^2} dx dp \{ |f(x, p, t)| - f(x, p, t) \} \quad (75)$$

zaproponowanego przez A. Kenfacka i K. Życzkowskiego [21]. Idea wprowadzenia tego parametru opiera się na spostrzeżeniu, iż wskaźnikiem nieklasyczności są obszary w których funkcja Wignera przyjmuje wartości ujemne. Takie obszary nie występują w klasycznych funkcjach rozkładu, gdyż oznaczałyby istnienie ujemnych gęstości prawdopodobieństwa. W związku z tym są one interpretowane jako przejawy **nieklasyczności** w opisie za pomocą nieklasycznych funkcji rozkładu. Z przyjętej definicji wynika, że parametr nieklasyczności jest zawsze nieujemny. Gdy funkcja rozkładu jest klasyczna, to jest dodatnio określona i parametr nieklasyczności jest równy zero. Wraz ze wzrostem obszarów ujemnych funkcji rozkładu, rośnie parametr nieklasyczności. Dla zilustrowania powyższego stwierdzenia można powołać się na twierdzenie Hudsona [22], z którego wynika, że jedynie funkcje Wignera odpowiadające stanom gaussowskim są dodatnio określone.

Parametr nieklasyczności wprowadzony przez Kenfacka i Życzkowskiego można uogólnić na przypadek funkcji zespolonych w następujący sposób

$$\delta = \delta^R + i\delta^I, \quad (76)$$

gdzie część rzeczywista δ^R oraz część urojona δ^I są określone w następujący sposób:

$$\delta^R = \int_{\mathbb{R}^2} dx dp \left\{ |f^R(x, p, t)| - f^R(x, p, t) \right\}, \quad (77)$$

$$\delta^I = \int_{\mathbb{R}^2} dx dp \left\{ |f^I(x, p, t)| - f^I(x, p, t) \right\}, \quad (78)$$

przy czym $f^R(x, p, t)$ oraz $f^I(x, p, t)$ są odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną nieklasycznej funkcji rozkładu $f(x, p, t)$.

Parametr nieklasyczności δ dla Bi-funkcji Wignera

W związku z własnością (2) dla Bi-funkcji Wignera można wnioskować, że dla stanów ortonormalnych jakimi są pierwsze dwa stany własne oscylatora harmonicznego, odpowiadające im normalizacje Bi-funkcji Wignera wynoszą

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dp F_{01} = \int_{\mathbb{R}^2} dx dp F_{10} = 0. \quad (79)$$

Na tej podstawie należy wnioskować, że parametr nieklasyczności δ zdefiniowany jako (76) nie jest miarodajny. Istotnie, gdy $F_{nm}(x, p, t)$ nie jest normowalna, to parametr δ wyznaczamy z dokładnością do nieznanej stałej multiplikatywnej.

Parametr nieklasyczności δ dla σ -funkcji Wignera

Z wprowadzonej definicji parametru nieklasyczności oraz własności (1) dla σ -funkcji Wigner (por. wzór (64)) wynika, że

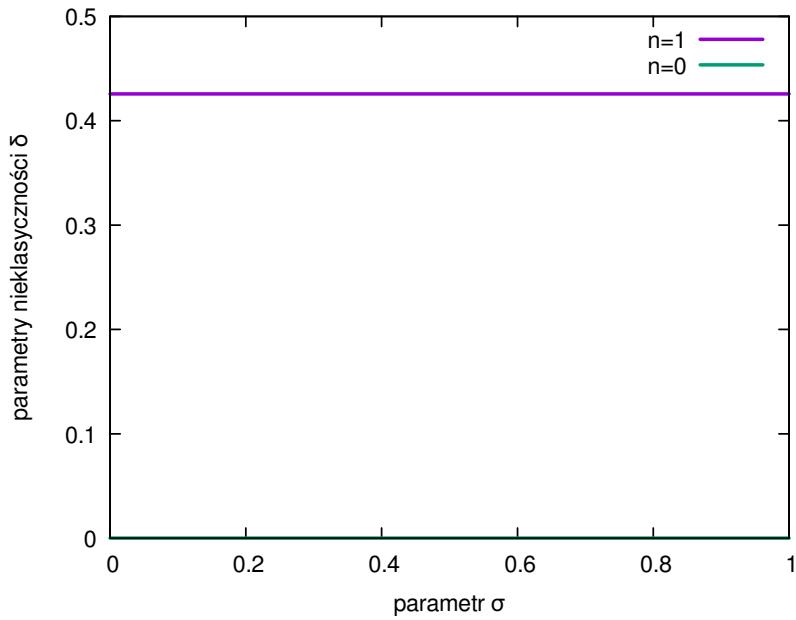
$$\delta + 1 = \int_{\mathbb{R}^2} dx dp |f_\sigma(x, p, t)| = \int_{\mathbb{R}^2} dx dp \left| \frac{1}{\sigma} f(x, p/\sigma, t) \right|.$$

Zmiana zmiennych $p/\sigma = p'$ w powyższym wyrażeniu prowadzi do

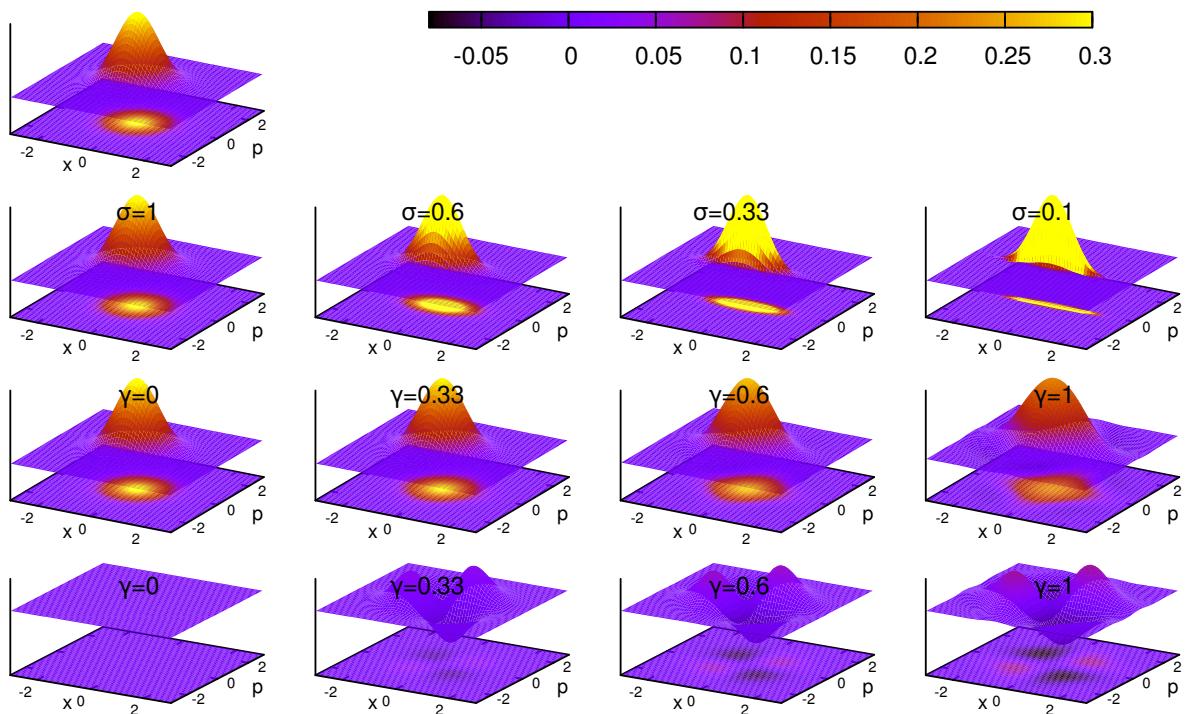
$$\delta + 1 = \int_{\mathbb{R}^2} dx dp' |f(x, p', t)|,$$

skąd wynika, że parametr nieklasyczności δ nie zależy od parametru σ , jak to zostało przedstawione na rys. 1.

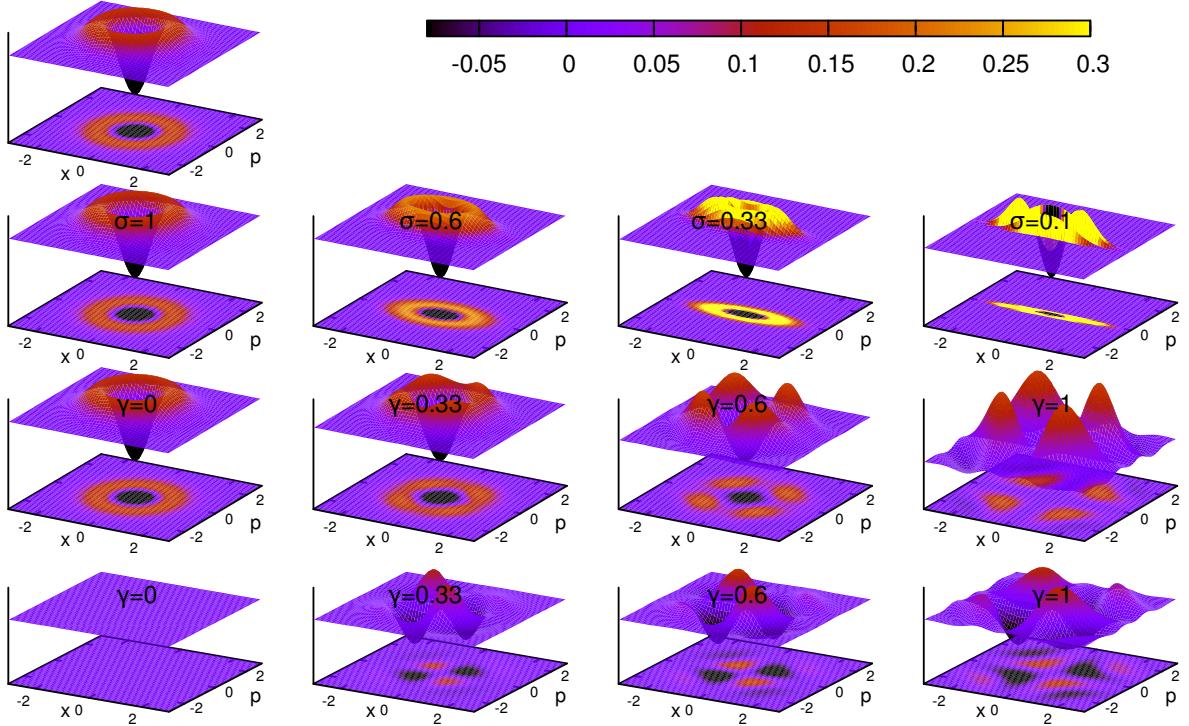
Z własności (4) dla σ -funkcji Wigner wynika, że wraz z malejącym parametrem σ rozkład brzegowy dla zmiennej pędowej zostaje ściskany. Efektywnie wraz ze zmniejszaniem parametru σ funkcja rozkładu zostajeścienna wzdłuż osi pędów tak, że w granicy otrzymujemy rozkład brzegowy dla zmiennej położeniowej przemnożony przez deltę Diraca. Na rys. 2 i 3 przedstawiono ściskanie funkcji Wigner dla oscylatora harmonicznego przy malejącym σ .



Rysunek 1: Zależność parametru nieklasyczności od parametru σ dla funkcji f_σ odpowiadającej oscylatorowi harmonicznemu w stanach własnych $n = 0, 1$.



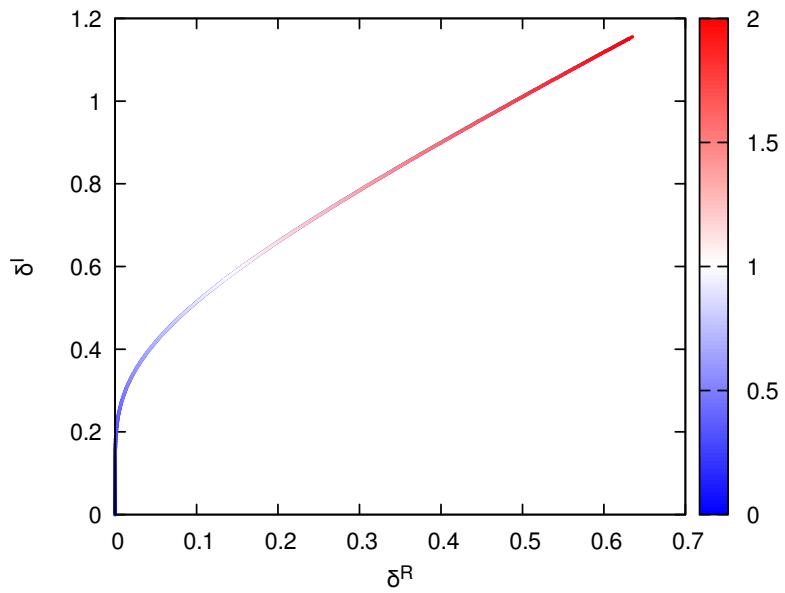
Rysunek 2: Funkcja Wignera dla oscylatora harmonicznego w stanie własnym $n = 0$ oraz jej parametryzacje dla różnych wartości σ oraz γ . Od góry kolejno: funkcja Wignera, σ -funkcja Wignera, część rzeczywista i część urojona γ -funkcji Wignera.



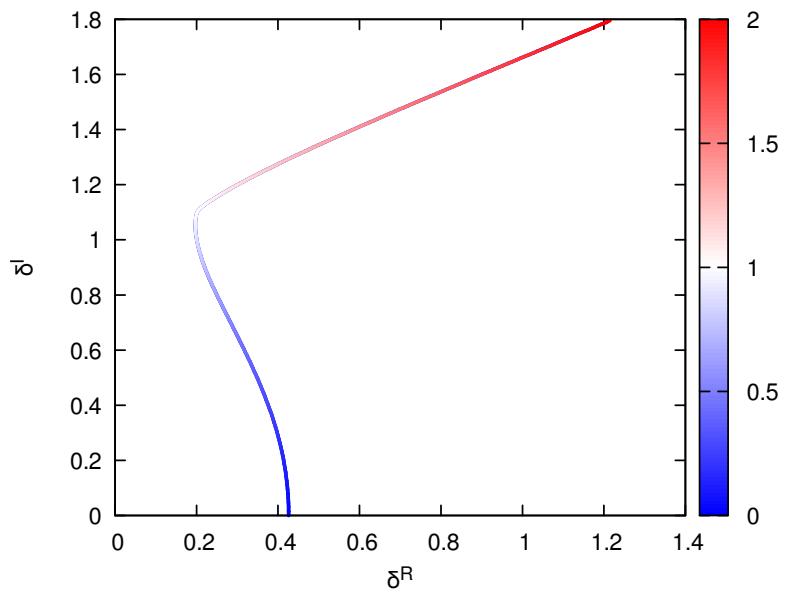
Rysunek 3: Funkcja Wignera dla oscylatora harmonicznego w stanie własnym $n = 1$ oraz jej parametryzacje dla różnych wartości σ oraz γ . Od góry kolejno: funkcja Wignera, σ -funkcja Wignera, część rzeczywista i część urojona γ -funkcji Wignera.

Parametr nieklasyczności δ dla γ -funkcji Wignera

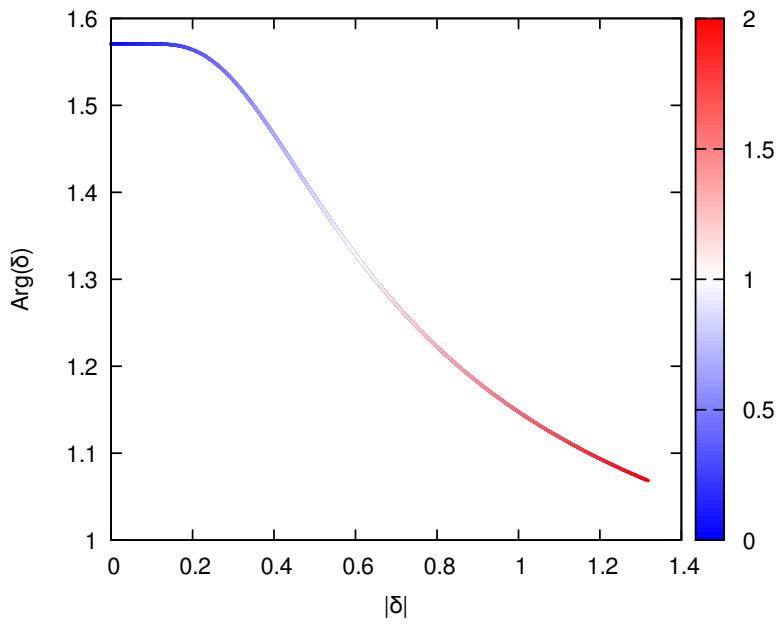
Na rysunkach 4, 5, 6 oraz 7 przedstawiono zależności parametru nieklasyczności δ od parametru γ uzyskane na drodze obliczeń numerycznych. Rysunki 4 oraz 5 przedstawiają ową zależność na płaszczyźnie zespolonej. Z kolei na rysunkach 6 i 7 przedstawiono biegunkowy diagram Arganda dla zespolonego parametru nieklasyczności. Ponadto na rysunkach 2 i 3 przedstawiono zmiany kształtu funkcji Wignera dla wybranych stanów własnych oscylatora harmonicznego oscylatora harmonicznego indukowane zmieniającą się wartością parametru γ . Na podstawie tych wyników można wnioskować, że parametr nieklasyczności δ nie zależy od znaku γ , ale tylko od $|\gamma|$. Na wykresach, dla zachowania przejrzystości, ograniczono się jedynie do dodatnich wartości parametru γ .



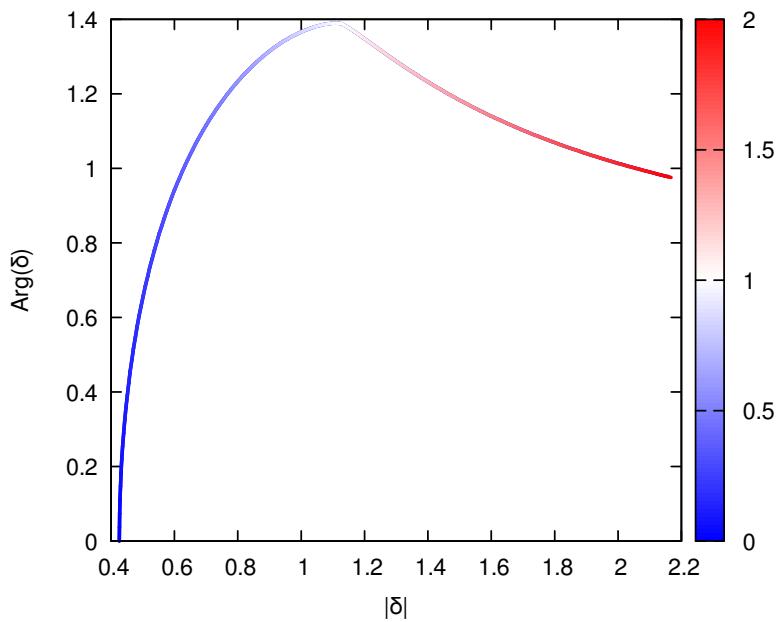
Rysunek 4: Zespolony parametr nieklasyczności δ dla funkcji f_γ odpowiadającej oscylatorowi harmonциальнemu w stanie własnym $n = 0$, dla $\gamma \in [0; 2]$. Wartości parametru γ reprezentuje kolor według skali z prawej strony rysunku.



Rysunek 5: Zespolony parametr nieklasyczności δ dla funkcji f_γ odpowiadającej oscylatorowi harmonциальнemu w stanie własnym $n = 1$, dla $\gamma \in [0; 2]$. Wartości parametru γ reprezentuje kolor według skali z prawej strony rysunku.



Rysunek 6: Zespolony parametr nieklasyczności δ dla funkcji f_γ odpowiadającej oscylatorowi harmonijnemu w stanie własnym $n = 0$, dla $\gamma \in [0; 2]$. Wartości parametru γ reprezentuje kolor według skali z prawej strony rysunku.



Rysunek 7: Zespolony parametr nieklasyczności δ dla funkcji f_γ odpowiadającej oscylatorowi harmonijnemu w stanie własnym $n = 1$, dla $\gamma \in [0; 2]$. Wartości parametru γ reprezentuje kolor według skali z prawej strony rysunku.

4.3 Dyskusja wyników

σ -funkcja Wignera

W przypadku tej nieklasycznej funkcji rozkładu otrzymano niezależność parametru nieklasyczności δ od parametru σ w prawie całym obszarze jego zmienności. Zmniejszanie wartości σ nie zmniejsza obszarów ujemnych funkcji Wignera. Z wyników przedstawionych na rys. 2 oraz 3 wynika, że σ -funkcja Wignera dla $\sigma \rightarrow 0$ przechodzi w deltę Diraca względem zmiennej pędowej.

Należy w tym miejscu podkreślić, iż motywacją wprowadzenia parametru σ było przypuszczenie, że w przejściu granicznym $\sigma \rightarrow 0$ zostaną usunięte korelacje położeniowo-pędowe. Wynika to stąd, że zmniejszenie wartość parametru σ prowadzi do usunięcia elementów pozadiagonalnych macierzy gęstości, które to elementy odpowiadają za korelacje. Należy zauważyć, że parametr σ , występuje zawsze razem ze stałą Plancka (por. (59)). Oznacza to, iż można interpretować zmniejszenie parametru σ jako przechodzenie ze stałą Plancka do zera, a tym samym uzyskać przejście do klasycznej funkcji rozkładu. W związku z tym co zostało napisane wcześniej, spodziewano się, że wraz ze zmniejszaniem się parametru σ , parametr nieklasyczności będzie zmierzał monotonicznie do zera. Tymczasem uzyskany wynik wskazuje na to, że usuwanie korelacji tkwiących w elementach pozadiagonalnych macierzy gęstości za pomocą parametru σ prowadzi do skokowej zmiany rozpatrywanego parametru nieklasyczności δ .

γ -funkcja Wignera

Dla tego przypadku, wyniki przedstawiające zależność parametru nieklasyczności od parametru γ zestawiono na rysunkach 4, 5, 6 oraz 7. Na rysunkach 6 oraz 7 można zauważyć, że dla $|\gamma| = 1$ krzywa reprezentująca parametr nieklasyczności zmienia charakter. Należy pamiętać, że $\gamma = \pm 1$ odpowiadają nieklasycznym funkcjom rozkładu związanym z innym porządkiem operatorów niż funkcja Wignera [18]. Warto zaznaczyć, że wraz ze wzrostem $|\gamma|$ moduł parametru nieklasyczności $|\delta|$ jest silnie rosnący, a minimum osiąga dla $\gamma = 0$ czyli dla funkcji Wignera.

5 Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiono i omówiono uogólnienie pojęcia funkcji Wignera poprzez odpowiednią parametryzację transformaty Weyla. W rezultacie wprowadzono na bazie rozważanej nieklasycznej funkcji rozkładu dwie inne parametryzowane nieklasyczne funkcje rozkładu, mianowicie γ -funkcję Wignera oraz σ -funkcję Wignera. W obu przypadkach przedyskutowano ich wybrane własności. W szczególności zauważono, że γ -funkcja Wignera przechodzi w funkcję Wignera dla parametru $\gamma = 0$. Natomiast analogiczne przejście graniczne (tj. $\sigma \rightarrow 0$) w przypadku σ -funkcji Wignera prowadzi do jej faktoryzacji, tzn. uogólniona funkcja może zostać zapisana w postaci iloczynu funkcji zależnej tylko od zmiennych położeniowych oraz delty Diraca zależnej od zmiennych pędowych. Taka separacja zmiennych pęd-położenie sugeruje niezależność zmiennych pędowych od zmiennych położeniowych, co można interpretować jako zanik korelacji pędowo-położeniowych. Ponadto przebadano parametr nieklasyczności dla obu wprowadzonych nieklasycznych funkcji rozkładu na przykładzie dwóch najniższych stanów własnych oscylatora harmonicznego oraz przeanalizowano zachowanie tego parametru jako funkcji zmiennych γ oraz σ dla odpowiednich przypadków. Powyższa analiza została poprzedzona wyprowadzeniem jawnych wyrażeń dla odpowiednich uogólnionych funkcji Wignera.

W pracy przedstawiono także wyniki dotyczące Bi-funkcji Wignera, a w szczególności przedyskutowano jej podstawowe własności z których wynika, że w ogólnym przypadku jest ona funkcją zespoloną zmiennych rzeczywistych. Dla stanów ortogonalnych, które były rozpatrywane w tej pracy (stany własne oscylatora harmonicznego) taka funkcja jest tożsamościowo równa zeru, co wynika wprost z przyjętej definicji.

Wyniki przeprowadzonych badań dotyczących wybranych nieklasycznych funkcji rozkładu¹ zebrano w tabeli 1.

Tabela 1: Wybrane własności nieklasycznych funkcji rozkładu: funkcji Wignera, Bi-funkcji Wignera, γ -funkcji Wignera oraz σ -funkcji Wignera.

	$f(x, p, t)$	$F_{nm}(x, p, t)$	$f_\gamma(x, p, t)$	$f_\sigma(x, p, t)$
przeciwzdiedzina	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{C}	\mathbb{R}
unormowanie	$\int dx dp f(x, p, t)$	1	δ_{nm}	1
ograniczenie	$ f(x, p, t) $	$\leq \frac{1}{\pi\hbar}$	$\leq \frac{1}{\pi\hbar}$	$\leq \frac{1}{\pi\hbar\sqrt{1-\gamma^2}}$
rozkłady brzegowe	$\int dp f(x, p, t)$	$ \psi(x) ^2$	$\psi_n^*(x)\psi_m(x)$	$ \psi(x) ^2$
	$\int dx f(x, p, t)$	$ \varphi(p) ^2$	$\varphi_n^*(p)\varphi_m(p)$	$ \varphi(p) ^2$
				$(2\pi\hbar\sigma)^{-1} \varphi(p/\sigma) ^2$

¹Dla Bi-funkcji Wignera przyjęto ortonormalność stanów $|\psi_n\rangle$ i $|\psi_m\rangle$.

6 Dodatek matematyczny

6.1 Wyrowadzenie funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego

Podstawienie jawnej postaci funkcji falowej dla oscylatora harmonicznego (67) do definicji funkcji Wignera (9) prowadzi do następującego wyrażenia

$$\begin{aligned}
f(x, p, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi_n^* \left(x - \frac{1}{2}X \right) \psi_n \left(x + \frac{1}{2}X \right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \frac{1}{x_0} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\frac{1}{2x_0^2}(x-\frac{1}{2}X)^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{X}{2x_0} \right) e^{-\frac{1}{2x_0^2}(x+\frac{1}{2}X)^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{X}{2x_0} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \frac{1}{x_0} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\left(\frac{x}{2x_0}\right)^2 - \frac{i}{\hbar}pX} H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{X}{2x_0} \right) H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{X}{2x_0} \right).
\end{aligned}$$

Wykładnik eksponenty można zapisać następująco

$$-\left(\frac{X}{2x_0}\right)^2 - \frac{i}{\hbar}pX = -\left(\frac{X}{2x_0} + \frac{i}{\hbar}px_0\right)^2 + \left(\frac{i}{\hbar}px_0\right)^2. \quad (80)$$

Skorzystanie z powyższej równości oraz podstawienie

$$\eta = \frac{X}{2x_0} + \frac{i}{\hbar}px_0, \quad d\eta = \frac{1}{2x_0}dX,$$

daje w efekcie równość

$$\begin{aligned}
f(x, p, t) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\hbar}p\right)^2} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} d\eta e^{-\eta^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{i}{\hbar}px_0 - \eta \right) H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{i}{\hbar}px_0 + \eta \right).
\end{aligned}$$

Skorzystanie z własności

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad (81)$$

oraz z równości

$$\int_{\mathbb{R}} d\eta e^{-\eta^2} H_m(\eta + \mu) H_n(\eta + \varepsilon) = 2^m \sqrt{\pi} m! L_m^{n-m}(-2\mu\varepsilon), \quad (82)$$

gdzie $L_m^{n-m}(x)$ to stwarzyszony wielomian Laguerra [23], daje w efekcie

$$\begin{aligned}
f(x, p, t) &= \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\hbar}p\right)^2} L_n \left[2 \left(\frac{x}{x_0} - \frac{i}{\hbar}px_0 \right) \left(\frac{x}{x_0} + \frac{i}{\hbar}px_0 \right) \right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\hbar}p\right)^2} L_n \left[2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_0}{\hbar}p \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

6.2 Wyprowadzenie Bi-funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego

Podstawienie jawnych postaci funkcji falowych odpowiadających n -temu oraz m -temu stanowi własnemu oscylatora harmonicznego (67) do definicji Bi-funkcji Wignera (29) prowadzi do następującego wyrażenia

$$\begin{aligned}
F_{nm}(x, p, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi_n^* \left(x - \frac{1}{2}X \right) \psi_m \left(x + \frac{1}{2}X \right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{2^{n+m} n! m! \pi}} \frac{1}{x_0} \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\frac{1}{2x_0^2} (x - \frac{1}{2}X)^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{X}{2x_0} \right) \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{2x_0^2} (x + \frac{1}{2}X)^2} H_m \left(\frac{x}{x_0} + \frac{X}{2x_0} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{2^{n+m} n! m! \pi}} \frac{1}{x_0} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\left(\frac{X}{2x_0}\right)^2 - \frac{i}{\hbar}pX} H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{X}{2x_0} \right) H_m \left(\frac{x}{x_0} + \frac{X}{2x_0} \right).
\end{aligned}$$

Wykładnik eksponenty można zapisać następująco

$$-\left(\frac{X}{2x_0}\right)^2 - \frac{i}{\hbar}pX = -\left(\frac{X}{2x_0} + \frac{i}{\hbar}px_0\right)^2 + \left(\frac{i}{\hbar}px_0\right)^2. \quad (83)$$

Skorzystanie z powyższej równości oraz podstawienia

$$\eta = \frac{X}{2x_0} + \frac{i}{\hbar}px_0, \quad d\eta = \frac{1}{2x_0}dX,$$

daje w efekcie równość

$$\begin{aligned}
F_{nm}(x, p, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{2^{n+m} n! m! \pi}} \frac{1}{x_0} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\hbar}p\right)^2} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} d\eta e^{-\eta^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{i}{\hbar}px_0 - \eta \right) H_m \left(\frac{x}{x_0} - \frac{i}{\hbar}px_0 + \eta \right).
\end{aligned}$$

Następnie skorzystanie z równości (81) oraz (82) prowadzi do równości

$$\begin{aligned}
F_{nm}(x, p, t) &= \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{n!}{m!} 2^{n-m}} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\hbar}p\right)^2} L_n^{m-n} \left[2 \left(\frac{x}{x_0} - \frac{i}{\hbar}px_0 \right) \left(\frac{x}{x_0} + \frac{i}{\hbar}px_0 \right) \right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{n!}{m!} 2^{n-m}} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\hbar}p\right)^2} L_n^{m-n} \left[2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_0}{\hbar}p \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

6.3 Wyprowadzenie γ -funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego

Podstawiając funkcję falową dla oscylatora harmonicznego (67) do definicji γ -funkcji Wignera (50) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
f_\gamma(x, p, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi_n^* \left(x - \frac{1}{2}(1-\gamma)X \right) \psi_n \left(x + \frac{1}{2}(1+\gamma)X \right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \frac{1}{x_0} \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\frac{1}{2x_0^2} (x - \frac{1}{2}(1-\gamma)X)^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{X}{2x_0}(1-\gamma) \right) \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{2x_0^2} (x + \frac{1}{2}(1+\gamma)X)^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{X}{2x_0}(1+\gamma) \right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \frac{1}{x_0} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\left(\frac{x}{2x_0}\right)^2 (1+\gamma^2) - (\frac{i}{\hbar}p + \gamma \frac{x}{x_0^2})X} \\
&\quad \times H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{X}{2x_0}(1-\gamma) \right) H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{X}{2x_0}(1+\gamma) \right)
\end{aligned}$$

Zastosowanie podstawienia $z = \frac{i}{\hbar}p + \gamma x/x_0^2$ oraz $\beta = \sqrt{1 + \gamma^2}$ umożliwia przekształcenie wykładnika eksponenty w następujący sposób

$$-\left(\frac{\beta X}{2x_0}\right)^2 - zX = -\left(\frac{\beta X}{2x_0} + \frac{zx_0}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{zx_0}{\beta}\right)^2. \quad (84)$$

Skorzystanie z powyższej równości oraz podstawienia

$$\eta = \frac{\beta X}{2x_0} + \frac{zx_0}{\beta}, \quad d\eta = \frac{\beta}{2x_0} dX,$$

prowadzi do równości

$$\begin{aligned}
f_\gamma(x, p, t) &= \frac{1}{\pi\hbar\beta} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{zx_0}{\beta}\right)^2} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} d\eta e^{-\eta^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{zx_0}{\beta^2}(1-\gamma) - \frac{1}{\beta}(1-\gamma)\eta \right) \\
&\quad \times H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{zx_0}{\beta^2}(1+\gamma) + \frac{1}{\beta}(1+\gamma)\eta \right).
\end{aligned}$$

Dla stanów $n = 0, 1$ funkcja f_γ ma postać

$$f_\gamma^{n=0}(x, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar\beta} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{zx_0}{\beta}\right)^2} \quad (85)$$

$$f_\gamma^{n=1}(x, p, t) = \frac{2}{\pi\hbar\beta} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{zx_0}{\beta}\right)^2} \left[\left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - 2\gamma x \frac{z}{\beta^2} - \frac{1-\gamma^2}{\beta^2} \left(\frac{z^2 x_0^2}{\beta^2} + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (86)$$

6.4 Wyprowadzenie σ -funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego

Podstawienie jawniej postaci funkcji falowej dla oscylatora harmonicznego (67) do definicji σ -funkcji Wignera (57) prowadzi do następującego wyrażenia

$$\begin{aligned}
f_\sigma(x, p, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dX \psi_n^* \left(x - \frac{\sigma}{2}X \right) \psi_n \left(x + \frac{\sigma}{2}X \right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \frac{1}{x_0} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\frac{1}{2x_0^2}(x-\frac{\sigma}{2}X)^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{\sigma X}{2x_0} \right) e^{-\frac{1}{2x_0^2}(x+\frac{\sigma}{2}X)^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{\sigma X}{2x_0} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}pX} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \frac{1}{x_0} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} dX e^{-\left(\frac{\sigma X}{2x_0}\right)^2 - \frac{i}{\hbar}pX} H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{\sigma X}{2x_0} \right) H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{\sigma X}{2x_0} \right).
\end{aligned}$$

Wykładnik eksponenty można zapisać następująco

$$-\left(\frac{\sigma X}{2x_0}\right)^2 - \frac{i}{\hbar}pX = -\left(\frac{\sigma X}{2x_0} + \frac{i}{\sigma\hbar}px_0\right)^2 + \left(\frac{i}{\sigma\hbar}px_0\right)^2. \quad (87)$$

Skorzystanie z powyższej równości oraz podstawienia

$$\eta = \frac{\sigma X}{2x_0} + \frac{i}{\hbar}px_0, \quad d\eta = \frac{\sigma}{2x_0}dX,$$

prowadzi do równości

$$\begin{aligned}
f_\sigma(x, p, t) &= \frac{1}{\sigma\pi\hbar} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\sigma\hbar}p\right)^2} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} d\eta e^{-\eta^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} + \frac{i}{\sigma\hbar}px_0 - \eta \right) H_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{i}{\sigma\hbar}px_0 + \eta \right).
\end{aligned}$$

Następnie skorzystanie z własności (81) oraz (82) prowadzi do równości

$$\begin{aligned}
f(x, p, t) &= \frac{(-1)^n}{\pi\sigma\hbar} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\sigma\hbar}p\right)^2} L_n \left[2 \left(\frac{x}{x_0} - \frac{i}{\sigma\hbar}px_0 \right) \left(\frac{x}{x_0} + \frac{i}{\sigma\hbar}px_0 \right) \right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi\sigma\hbar} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_0}{\sigma\hbar}p\right)^2} L_n \left[2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_0}{\sigma\hbar}p \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Literatura

- [1] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40:749, 1932.
- [2] I. Białyński-Birula, M. Cieplak, and J. Kamiński. *Teoria kwantów: mechanika falowa*. Wyd. Naukowe PWN, 2001.
- [3] R.P. Feynman and A.R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, 1965.
- [4] Białkowski. *Mechanika klasyczna*. Wyd. Naukowe PWN, 1975.
- [5] C. Jacoboni and P. Bordone. The Wigner-function approach to non-equilibrium electron transport. *Rep. Prog. Phys.*, 67:1033, 2004.
- [6] D. Querlioz, J. Saint-Martin, A. Bournel, and P. Dollfus. Wigner Monte Carlo simulation of phonon-induced electron decoherence in semiconductor nanodevices. *Phys. Rev. B*, 78:165306, 2008.
- [7] R. Rosati, F. Dolcini, R. C. Iotti, and F. Rossi. Wigner-function formalism applied to semiconductor quantum devices: Failure of the conventional boundary condition scheme. *Phys. Rev. B*, 88:035401, 2013.
- [8] W. B. Case. Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians. *Am. J. Phys.*, 76:937, 2008.
- [9] K. Huang. *Statistical mechanics*. Wiley, 1987.
- [10] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner. Distribution functions in physics: Fundamentals. *Phys. Rep.*, 106:121, 1984.
- [11] H.-W. Lee. Theory and application of the quantum phase-space distribution functions. *Phys. Rep.*, 259:147, 1995.
- [12] C. Zachos, D. Fairlie, and T. Curtright. *Quantum Mechanics in Phase Space: An Overview with Selected Papers*. World Scientific series in 20th century physics. World Scientific, 2005.
- [13] W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley, 2011.
- [14] F. W. Byron and R. W. Fuller. *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Number t. 1-2. Dover Publications, 1992.
- [15] J. E. Moyal. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 45:99, 1949.
- [16] J.D. Garcia, A. Galindo, L. Alvarez-Gaume, and P. Pascual. *Quantum Mechanics I. Theoretical and Mathematical Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [17] L. I. Schiff. *Quantum mechanics*.
- [18] J.-S. Wang, H.-Y. Fan, and X.-G. Meng. A generalized Weyl-Wigner quantization scheme unifying $P - Q$ and $Q - P$ ordering and Weyl ordering of operators. *Chin. Phys. B*, 21:064204, 2012.

- [19] V. I. Tatarski. The Wigner representation of quantum mechanics. *Sov. Phys. Usp.*, 26:311, 1983.
- [20] S. Nouri. Wigner phase-space distribution function for the hydrogen atom. *Phys. Rev. A*, 57:1526, 1998.
- [21] A. Kenfack and K. Życzkowski. Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality. *J. Opt. B*, 6:396, 2004.
- [22] R. L. Hudson. When is the Wigner quasi-probability density non-negative? *Rep. Math. Phys.*, 6:249, 1974.
- [23] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier Science, 2014.