



Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Praca magisterska

Paweł Rzońca

kierunek studiów: **Fizyka Techniczna**

Badanie krzywych chronometrycznych w kontekście hipotezy zegara

Opiekun: **dr hab. Łukasz Bratek**

Kraków, wrzesień 2018

Oświadczam, świadomy odpowiedzialności karnej za poświadczenie nieprawdy, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie i nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

.....

(czytelny podpis)

Kraków,

**Tematyka pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej Pawła Rzońcy, studenta V roku studiów
kierunku fizyka techniczna**

Temat pracy magisterskiej: **Badanie krzywych chronometrycznych w kontekście hipotezy zegara**

Opiekun pracy: dr hab. Łukasz Bratek

Recenzenci pracy:

Miejsce praktyki dyplomowej: WFMiI PK, Kraków

Program pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej

1. Omówienie realizacji pracy magisterskiej z opiekunem.
2. Zebranie i opracowanie literatury dotyczącej tematu pracy.
3. Praktyka dyplomowa:
 - zapoznanie się z literaturą przedmiotu dotyczącą hipotezy zegara,
 - opracowanie podstawowych pojęć i narzędzi związanych z tematyką przedmiotu,
 - konstrukcja modelu idealnego zegara dla ciała w ruchu po okręgu,
 - powtórzenie konstrukcji modelu idealnego zegara dla metryki FLRW,
 - stworzenie skryptów do generacji wykresów,
 - sporządzenie sprawozdania z praktyk.
4. Kontynuacja obliczeń związanych z tematem pracy magisterskiej.
5. Zebranie i opracowanie wyników obliczeń.
6. Analiza wyników obliczeń.
7. Opracowanie redakcyjne pracy.

Termin oddania w dziekanacie:

.....
(podpis kierownika katedry)

.....
(podpis opiekuna)

Tu zostanie umieszczona recenzja opiekuna

Tu zostanie umieszczona recenzja recenzenta

*Dziękuję mojej kochanej żonie,
za wielkie wsparcie, cierpliwość, pomoc
oraz motywację w trakcie pisania tej pracy.*

*Składam również serdeczne podziękowania
dla promotora mojej pracy dr. hab. Łukasza Bratka
za poświęcony czas, merytoryczną pomoc i cenne uwagi,
które sprawiły, że niniejsza praca nabrała odpowiedniej formy.*

Spis treści

1	Wstęp	11
2	Pojęcia wstępne	12
2.1	Wstępne pojęcia i konwencje.	12
2.2	Krzywe w czasoprzestrzeni.	12
2.3	Czas własny. Hipoteza zegara.	14
2.4	Pochodna absolutna i transport równoległy.	15
3	Konstrukcja zegara	16
3.1	Fundamentalny rotator relatywistyczny.	16
3.2	Model singularny.	18
3.3	Transport Fermiego-Walkera.	20
3.4	Czwórka symetryczna kierunków zerowych.	21
3.5	Konstrukcja zegara.	24
4	Aplikacje	26
4.1	Ruch hiperboliczny.	26
4.2	Ruch po okręgu.	27
4.3	Ruch po okręgu względem galaktyk.	28
4.4	Ruch po okręgu wokół czarnej dziury.	29
5	Analiza równania fazy zegara	33
5.1	Zegar w przypadku stałego przyspieszenia.	33
5.2	Rozwiązanie przybliżone.	33
5.3	Ruch jednostajnie przyspieszony.	35
5.4	Ruch po okręgu.	37
5.5	Analiza modelu pod kątem pomiaru.	38
6	Podsumowanie	39
A	Dodatek matematyczny	40
A.1	Rozwiązanie układu równań z funkcją f w modelu Staruszkiewicza.	40

1 Wstęp

Od czasów starożytnych czas wyobrażano sobie jako nieprzerwany zbiór chwil, który nauka nowożytna modeluje jednowymiarową rozmaitością różniczkową. Można powiedzieć, że jednowymiarowe rozmaitości różniczkowe są dwie: okrąg i prosta. Pozostałe jednowymiarowe rozmaitości możemy uzyskać poprzez rozciąganie i zginanie (dokładniej homeomorficzne przekształcanie) tychże rozmaitości. Obserwowane zjawiska – takie jak następujące po sobie pory roku czy też cykl faz Księżyca – dały początek pierwszym miarom czasu. To prowadzi do koncepcji czasu periodycznego, który możemy utożsamiać z okręgiem. Okrąg taki zostaje rozcięty przez zdarzenie, które występuje jednokrotnie. Takim zdarzeniem może być przyjsie na świat Jezusa Chrystusa, co obserwujemy w postaci powszechnie używanego kalendarza. Wyobrażenie prostej wiąże się również z porządkiem, kolejnością zdarzeń. Dostatecznie mały fragment okręgu jest bardzo zbliżony do prostej, więc w przypadku okręgu również można myśleć o porządku, lecz tylko w sensie lokalnym. W istocie, wyobrażenie czasu w postaci porządku zdarzeń pojawiło się naturalnie wcześniej niż wyobrażenie jako prosta w sensie ścisłym, które to zaczęło się pojawiać wraz z pojawieniem się ilościowego opisu przyrody [HM01].

Istotna zmiana wyobrażenia czasu nastąpiła wraz z wprowadzeniem przez Einsteina w 1905 r. szczególnej teorii względności [Ein05]. Do transformacji czasu przy przejściu pomiędzy inercjalnymi układami odniesienia zostały wplecione współrzędne przestrzenne. W 1907 r. Minkowski nadał szczególnej teorii względności geometryczną postać, traktując czas jako czwartą współrzędną [MP12], co może wprowadzać pewne problemy interpretacyjne, gdyż taki czas płynie różnie w różnych inercjalnych układach odniesienia. Wprowadził on również pojęcie czasu własnego jako długości krzywej czasopodobnej, po której odbywa się ruch, zwanej linią świata. W tym sensie czas własny porządkuje zdarzenia, czyli punkty znajdujące się na linii świata. Czas własny jest funkcjonalem określonym na danej linii świata, będącym niezmiennikiem transformacji współrzędnych, w tym lokalnych transformacji Lorentza, więc posługując się nim, nie wyróżniamy żadnego obserwatora. Hipoteza zegara mówi, że istnieje zegar idealny, który odmierza czas własny wzdłuż swojej linii świata, niezależnie od przyspieszeń (krzywizny) jakim podlega.

W następnym rozdziale wprowadzimy pojęcia wstępne oraz omówimy wspomnianą hipotezę. W rozdziale trzecim wprowadzimy pojęcie fundamentalnego relatywistycznego rotatora [Sta08] oraz zaprezentujemy model zegara idealnego. Następnie wprowadzimy krzywą chronometryczną, która jest motywowana realizacją tego modelu. Nie stanowi ona rozwiązań równań ruchu zegara, ale zawiera jego istotne cechy kinematyczne. Może więc stanowić odrębny przedmiot badań, niezależnie od rozwiązywania równań ruchu. W następnych rozdziałach zbadamy krzywe chronometryczne dla różnych ruchów pod kątem testowania hipotezy zegara.

2 Pojęcia wstępne

2.1 Wstępne pojęcia i konwencje.

Modelem czasoprzestrzeni w ogólnej teorii względności jest czterowymiarowa Lorentzowska rozmaitość różniczkowa. Czasoprzestrzeń jest zbiorem elementów, które nazywamy zdarzeniami [KT84] i będziemy oznaczali przez M . O czasoprzestrzeni zakładamy, że jest niepustą przestrzenią Hausdorffa (czyli taką, że dla każdych dwóch punktów $p, q \in M$ istnieją rozłączne otoczenia U_p, U_q odpowiednio punktów p, q). Mapą w otoczeniu U punktu $p \in M$ nazywamy parę (U, ξ) , gdzie $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem (ciągłą bijekcją, której odwrotność jest ciągła). Homeomorfizm ξ nazywamy układem współrzędnych w otoczeniu p . Mówimy, że dwie mapy są zgodne, jeżeli $\xi_1 \circ \xi_2$ (tam gdzie ma sens) jest dyfeomorfizmem klasy C^k (homeomorfizm z ciągłymi pochodnymi stopnia k). Zbiór A map parami zgodnych (o zgodności klasy C^k) takich, że pokrywają cały zbiór M nazywamy atlasem (klasy C^k). Atlasem maksymalnym nazywamy atlas, do którego nie można dodać kolejnej mapy bez złamania zgodności. Rozmaitością różniczkową (klasy C^k) nazywamy zbiór M z atlasem maksymalnym (klasy C^k) [GO03]. Wymiar rozmaitości nazywamy wymiar przestrzeni \mathbb{R}^n , na której modelujemy rozmaitość. Od teraz przyjmujemy, że rozmaitość jest klasy C^∞ oraz $n = 4$. Rozmaitość nazywamy Lorentzowską, jeśli określony na niej tensor metryczny g ma sygnaturę $(+, -, \dots, -)$.

W niniejszej pracy stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina. Ustalamy, że indeksy oznaczane literami greckimi zmieniają się w zakresie od 0 do 3, natomiast indeksy oznaczane literami arabskimi w zakresie od 1 do 3. Jednostki ustalamy tak, że $c = 1$. Przyjmujemy $\epsilon^{0123} = 1$ dla pseudotensora całkowicie antysymetrycznego (wówczas $\epsilon_{0123} = -1$).

2.2 Krzywe w czasoprzestrzeni.

W tej części pracy wprowadzimy pojęcie krzywej w czasoprzestrzeni. Jest to bardzo ważny obiekt matematyczny, gdyż służy do definiowania wektora stycznego na rozmaitości różniczkowej [GO03].

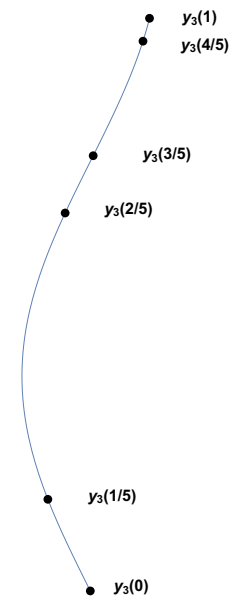
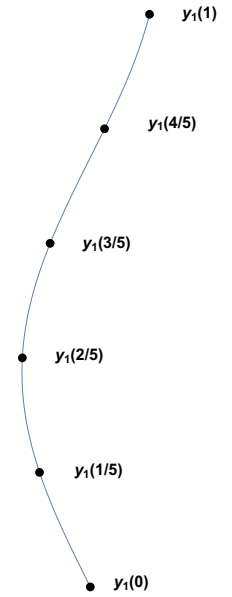
Definicja 1. Krzywą sparametryzowaną (lub parametryzacją krzywej) nazywamy odwzorowanie $y_1 : I \ni \tau \rightarrow y_1(\tau) \in M$ klasy C^∞ , gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym (niekoniecznie skończonym).

Definicja 2. Parametrem krzywej sparametryzowanej y_1 nazywamy funkcję τ_1 , taką że $y_1(I) \ni p \rightarrow \tau_1(p) = y_1^{-1}(p) \in I$. Będziemy pisać τ_1 zamiast $\tau_1(p)$, tam gdzie punkt p wynika z kontekstu.

Definicja 3. Niech $y_1 : I \rightarrow M$ i $y_2 : J \rightarrow M$ będą parametryzacjami. Reparametryzacją krzywej będziemy nazywać dyfeomorfizm $f : I \rightarrow J$ klasy C^∞ , taki że $y_1 = y_2 \circ f$.

Jeśli dla dwóch parametryzacji istnieje reparametryzacja, to są one w relacji. Można łatwo pokazać, że jest to relacja równoważności. Różne parametryzacje tej samej krzywej możemy rozumieć jako podróżywanie wzdłuż tej krzywej w różny sposób.

Definicja 4. Krzywą (lub krzywą niesparametryzowaną) nazywamy klasę równoważności parametryzacji ze względu na powyższą relację równoważności. Jeżeli y jest krzywą, a y_1 jej parametryzacją z parametrem τ_1 , to wprowadzamy oznaczenie $y(\tau_1) := y_1$.



Rysunek 1: Różne parametryzacje krzywej y .

Definicja 5. Niech (U, ξ) będzie mapą punktu $p \in U \subset M$. W tej mapie przez y^μ oznaczamy współrzędne krzywej y . Wektorem stycznym do krzywej y w punkcie p (lub wektorem prędkości w parametrze τ) nazywamy wektor $y'(\tau)$, taki że

$$y'^\mu(\tau) = \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau}.$$

Mając mapę w punkcie p , możemy określić bazę w danym punkcie za pomocą wektorów stycznych do linii układu współrzędnych. Taką bazę należy rozumieć jako bazę lokalną (bazę w punkcie p), zwaną bazą współrzędnościową. W bazie ortonormalnej macierz tensora metrycznego przybiera postać

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tensor metryczny g wprowadza następujący podział wektorów:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &> 0 \implies u - \text{wektor czasowy,} \\ g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &= 0 \implies u - \text{wektor zerowy,} \\ g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &< 0 \implies u - \text{wektor przestrzenny.} \end{aligned}$$

Powyższy podział wyróżnia trzy rodzaje krzywych: czasową, zerową i przestrzenną.

Definicja 6. Krzywą y nazywamy krzywą czasową (zerową, przestrzenną), jeżeli w każdym punkcie $p \in y$ wektor y' jest wektorem czasowym (zerowym, przestrzennym). Linia świata cząstki jest krzywa czasowa lub (dla cząstek poruszających się z prędkością światła) krzywa zerowa.

Długość $S(y(\tau))$ krzywej czasowej y obliczamy korzystając z tensora metrycznego g . Kwadrat długości elementu liniowego wyraża się przez

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.$$

Stąd długość krzywej obliczamy ze wzoru

$$S(y(\tau)) = \int_{\tau(p_0)}^{\tau(p_1)} \sqrt{g(y'(\tau), y'(\tau))} d\tau. \quad (1)$$

Oczywiście długość krzywej nie powinna zależeć od wyboru parametryzacji. Istotnie, długość dana wzorem (1) jest niezmiennicza ze względu na reparametryzację. Niech τ_1, τ_2 będą parametrami powiązanymi reparametryzacją $\tau_2 = f(\tau_1)$, taką że $f'(\tau_1) > 0$. Stosując zmianę zmiennych całkowania dostajemy

$$\begin{aligned} S(y(\tau_2)) &= \int_{\tau_2(p_0)}^{\tau_2(p_1)} \sqrt{g(y'(\tau_2), y'(\tau_2))} d\tau_2 = \int_{\tau_1(p_0)}^{\tau_1(p_1)} \sqrt{g\left(\frac{y'(\tau_1)}{f'(\tau_1)}, \frac{y'(\tau_1)}{f'(\tau_1)}\right)} f'(\tau_1) d\tau_1 = \\ &= \int_{\tau_1(p_0)}^{\tau_1(p_1)} \sqrt{g(y'(\tau_1), y'(\tau_1))} d\tau_1 = S(y(\tau_1)). \end{aligned}$$

Stosując ten sam wzór do krzywej zerowej, otrzymujemy zerową długość. Od tej pory będziemy stosować oznaczenie $x \cdot y := g(x, y)$.

2.3 Czas własny. Hipoteza zegara.

Czas własny stanowi przeniesienie koncepcji czasu obecnej w mechanice nierelatywistycznej na grunt ogólnej teorii względności. Pierwsza zasada dynamiki Newtona głosi, że istnieją ruchy będące ruchami jednostajnymi. W ruchu jednostajnym przemierzamy jednakowe odcinki drogi w jednakowych odstępach czasu. W ruchu swobodnym najprostszym elementem absolutnym jest długość linii świata, tj. suma elementarnych odcinków czasowych wyznaczanych przez obserwatorów lokalnie inercjalnych. Jak pokazaliśmy długość krzywej jest funkcjonalem prędkości (pochodnych rzędu pierwszego) jednorodnym stopnia jeden w prędkościach, a więc niezależnym od parametryzacji. Jeżeli przyjąć, że stan fizyczny zależy od położenia i ich zmiany (pochodnych), to długość krzywej jest jedyną możliwością na zbudowanie funkcjonału czasu

$$T = \int \sqrt{x'(\tau) \cdot x'(\tau)} d\tau.$$

Spośród parametryzacji krzywych możemy wyróżnić parametryzację, dla której wektor prędkości jest jednostkowy. Taki parametr będziemy oznaczać przez s (jest to naturalna parametryzacja krzywej). Wartości tego parametru pokrywają się z wartościami funkcjonału T (z dokładnością do wyboru jednostek i chwili początkowej).

Definicja 7. Parametrem afinicznym nazywamy parametr, dla którego prędkość w każdym punkcie krzywej ma tę samą długość.

Z definicji wynika natychmiast, że czas własny jest parametrem afinicznym. Łatwo pokazać, że jeśli s jest parametrem afinicznym, to każdy parametr afiniczny jest postaci $as + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Ta własność odzwierciedla swobodę wyboru zarówno jednostki czasu jak i chwili początkowej. Wektor prędkości wzdłuż krzywej y parametryzowanej czasem własnym będziemy oznaczać przez \dot{y} . Mierzac czas własny, nie wyróżniamy żadnego obserwatora inercjalnego, więc postępujemy zgodnie z zasadą względności Einsteina.

Do pomiaru czasu używa się zegarów, które możemy najogólniej zdefiniować następująco:

Definicja 8. Zegarem nazywamy dowolny układ fizyczny, w którym możemy wyodrębnić pewien mechanizm oscylacji. Oscylacje nazywamy częstością zegara, a ich ilość jest miarą czasu.

Mianem zegara idealnego określa się zegar mierzący czas własny, niezależnie od krzywizny krzywej po jakiej się porusza. **Hipoteza zegara** głosi, że istnieją zegary idealne wedle powyższej definicji. Na gruncie szczególnej teorii względności, przy założeniu ruchu bez przyspieszeń, hipoteza zegara jest spełniona, a realizacją takiego zegara może być zegar świetlny lub inaczej zegar geometrodynamiczny [OR13]. Powszechnie zakłada się, że obowiązuje ona również w ruchach przyspieszonych [KT84], jednak jest to tylko hipoteza i wymaga sprawdzenia.

Hipoteza zegara została eksperymentalnie sprawdzona dla ogromnych przyspieszeń rzędu 10^{19}m/s^2 [Bai+77]. Jednak ze stałych charakterystycznych dla elektronu można utworzyć wielkość o wymiarze przyspieszenia $m_e c^3/\hbar$, która jest rzędu 10^{29}m/s^2 . Dla tak ogromnych przyspieszeń hipoteza zegara może się załamywać.

W rozdziale trzecim przedstawimy model zegara idealnego inspirowany fundamentalnym relatywistycznym rotatorem. **Krzywa chronometryczna** daje związek między fazą zegara, jako odpowiednio zdefiniowanym kątem związanym z ruchem wewnętrznym zegara, a długością krzywej środka masy. Należy podkreślić, że rozważana tu krzywa chronometryczna nie jest rozwiązaniem równań ruchu modelu zegara idealnego, ale jest jedynie nim motywowana.

2.4 Pochodna absolutna i transport równoległy.

W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej z kartezjańskim układem współrzędnych x^i definiujemy transport równoległy wektora v w kierunku wektora w za pomocą równania

$$w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = 0.$$

To znaczy, że podczas przemieszczania wektora v po krzywej, której wektorem prędkości w parametrze τ jest wektor w , spełniony jest warunek

$$\frac{dv^i}{d\tau} = 0.$$

Jednak w ogólności możemy mieć do czynienia z krzywoliniowym układem współrzędnych lub przestrzenią zakrzywioną. W takim przypadku uogólnia się pojęcie transportu równoległego za pomocą pochodnej kowariantnej.

Definicja 9. Niech x^μ będzie układem współrzędnych. Pochodną kowariantną wektora v w kierunku wektora $w = \frac{dx(\tau)}{d\tau}$ nazywamy

$$w^\rho \nabla_\rho v^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu w^\nu v^\sigma,$$

gdzie v jest określony na krzywej dla której w jest wektorem prędkości w parametrze τ . Odwzorowanie ∇ nazywamy koneksją afiniczną, a przez $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ rozumiemy współczynniki koneksji afinicznej w układzie x^μ . Współczynniki $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ przy zmianie układu współrzędnych z x^μ na \tilde{x}^μ transformują się według reguły

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\sigma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}$$

oraz określają one całkowicie koneksję afiniczną. W ogólnej teorii względności zakłada się, że koneksja jest zgodna z metryką ($\nabla g = 0$) oraz beztorsyjna ($\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu$). Wtedy koneksja jest jednoznacznie określona i nazywamy ją koneksją Leviego-Civity.

Definicja 10. Pochodną absolutną wektora v nazywamy pochodną kowariantną wektora v w kierunku wektora prędkości y' krzywej y w parametrze τ i oznaczamy

$$\frac{Dv^\mu}{d\tau} = \frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu v^\nu y'^\sigma.$$

Pochodną absolutną wektora v wzdłuż krzywej y parametryzowanej czasem własnym s będziemy oznaczać przez Dv/ds lub \dot{v} . Pochodna absolutna wektora o stałej długości jest prostopadła do niego samego.

Definicja 11. Linią geodezyjną (lub krzywą swobodnego spadku) nazywamy krzywą y , dla której

$$\frac{Dy'}{d\tau} = by',$$

gdzie $b = 0$, gdy τ jest parametrem afinicznym.

Koneksja Leviego-Civity pozwala utożsamić pojęcia linii geodezyjnej powstałej z transportu równoległego wektora stycznego oraz ekstremalnej krzywej łączącej dwa różne punkty. Wtedy współczynniki koneksji $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ nazywamy symbolami Christoffela i możemy wyznaczyć z równości

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho} \right).$$

W dalszej części pracy przez u oraz A będziemy oznaczać prędkość oraz przyspieszenie definiowane jak następuje

$$u^\mu = \dot{y}^\mu = \frac{dy^\mu}{ds}, \quad A = \dot{u}^\mu = \frac{Du^\mu}{ds}.$$

3 Konstrukcja zegara

3.1 Fundamentalny rotator relatywistyczny.

Przez nierelatywistyczny rotator rozumiemy układ dwóch mas punktowych m_1 i m_2 połączonych nieważkim prętem o stałej długości ℓ (rys. 2). Lagrangian takiego układu w układzie środka masy ma postać [LL78]

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad r = r_2 - r_1,$$

gdzie r_1 i r_2 to odpowiednio położenia mas m_1 i m_2 . Zauważmy, że $\|r\| = \ell = \text{const}$, a zatem interesuje nas jedynie kierunek wyznaczony przez r . Z niezmienniczości powyższego Lagrangianu ze względu na obroty wiemy, że zachowany jest pseudowektor całkowitego momentu pędu (w tym jego kierunek). Ruch odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku (pseudowektora) całkowitego momentu pędu. Za pomocą współrzędnych sferycznych (r, ϕ, θ) możemy wersor $\hat{r} = r/\ell$ przedstawić w postaci $\hat{r} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$. Obracamy układ odniesienia tak, aby ruch odbywał się w płaszczyźnie $\theta = \pi/2$. Dla takiego ruchu wystarczy rozważyć Lagrangian

$$L = \frac{m\ell^2}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2.$$

Z równania Eulera-Lagrange'a dla kąta ϕ wynika, że $\ddot{\phi} = 0$. Zatem $\phi \sim t$, to znaczy, że nierelatywistyczny rotator mierzy Newtonowski czas absolutny t . Skłania nas to do refleksji nad możliwością wykorzystania relatywistycznego rotatora do mierzenia czasu. Prostota układu sugeruje, że może on być odpowiedni do testowania hipotezy zegara. Przeniesienie tego układu na grunt relatywistyczny wprowadził profesor Staruszkiewicz [Sta08] proponując następujące definicje:

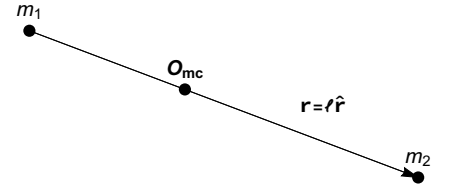
Definicja 12. Relatywistyczny rotator to układ dynamiczny opisany przez położenie x i kierunek zerowy k oraz dodatkowo dwa parametry: masę m i długość ℓ .

W powyższej definicji kierunek zerowy k jest określony wzdłuż linii świata x . Dla każdego układu relatywistycznego istnieje swoboda w wyborze parametryzacji linii świata, a ponadto kierunek zerowy nie zmienia się przy skalowaniu $k \rightarrow \lambda k$ dla dowolnej funkcji λ określonej na tej linii świata. Odpowiedni Lagrangian musi tę niezmienniczość zapewnić. Zatem zdefiniowany tak rotator ma 5 stopni swobody.

Definicja 13. Układ dynamiczny nazywamy fenomenologicznym, jeżeli jego niezmienniki Casimira są całkami ruchu. Układ dynamiczny nazywamy fundamentalnym, jeżeli jego niezmienniki Casimira są parametrami (m. in. nie zależą od warunków początkowych dla prędkości i położenia).

W oparciu o powyższe definicje można skonstruować fundamentalny rotator relatywistyczny. Z wielkości zawartych w definicji relatywistycznego rotatora tworzymy bezwymiarowy skalar

$$\xi = -\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2}.$$



Rysunek 2: Klasyczny rotator.

Możemy utworzyć Lagrangian postaci ¹

$$L = m\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} f(\xi). \quad (2)$$

Oznaczmy przez P i Π pędy kanoniczne związane odpowiednio z x i k oraz przez M całkowity moment pędu.

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \quad \Pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{k}^\mu},$$

$$M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - P_\mu x_\nu + k_\mu \Pi_\nu - \Pi_\mu k_\nu.$$

Działanie związane z Lagrangianem (2) jest niezmiennicze ze względu na transformację Lorentza oraz reparametryzację. Zmienna ξ nie zmienia postaci po transformacji $k \rightarrow fk$, gdzie f jest dowolną funkcją s . Wynika z tego, że ξ (a co za tym idzie stan fizyczny układu) zależy jedynie od kierunku zerowego, a nie zależy od skalowania wektora k . Pociąga to za sobą również, że $\Pi_\mu k^\mu = 0$. Zatem Lagrangian rotatora relatywistycznego zaproponowany przez Staruszkiewicza jest jedyną możliwą postacią Lagrangianu jednorodną stopnia pierwszego względem prędkości. Zauważmy, że oprócz $\dot{x} \cdot \dot{x}$ oraz ξ , nie ma innych skalarów niezależnych od wspomnianego wyżej skalowania wektora zerowego k , które można utworzyć z wektorów \dot{x} i \dot{k} . Zapisując Lagrangian (2) domyślnie zakładamy, że $\dot{x} \cdot \dot{x}$ nie zeruje się tożsamościowo.

W tym przypadku rozważamy niezmienniki Casimira grupy Poincarégo, którymi są $P_\mu P^\mu$ oraz $W_\mu W^\mu$, gdzie W jest pseudowektorem Pauliego-Lubańskiego danym przez

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^\sigma.$$

Kontrakcja tensora antysymetrycznego $A_{\mu\nu}$ z tensorem symetrycznym $S_{\mu\nu}$ jest równa zero. Korzystając z tego i antysymetrii tensora ε , dostajemy

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (x^\mu P^\nu - P^\mu x^\nu + k^\mu \Pi^\nu - \Pi^\mu k^\nu) P^\sigma = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (k^\mu \Pi^\nu - \Pi^\mu k^\nu) P^\sigma = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Pi^\mu k^\nu P^\sigma.$$

Dla Lagrangianu (2) mamy

$$P_\mu = \frac{m}{\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}}} f(\xi) \dot{x}_\mu - 2 \frac{m}{\dot{k} \cdot \dot{x}} \sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} f'(\xi) \xi k_\mu,$$

$$\Pi_\mu = 2 \frac{m}{\dot{k} \cdot \dot{k}} \sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} f'(\xi) \xi \dot{k}_\mu,$$

$$W_\mu = 2 \frac{m^2}{\dot{k} \cdot \dot{k}} f(\xi) f'(\xi) \xi \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \dot{k}^\mu k^\nu \dot{x}^\sigma.$$

Pozwala to zapisać $W_\mu W^\mu$ w postaci wyznacznika Grama

$$W_\mu W^\mu = 4 \frac{m^4}{(\dot{k} \cdot \dot{k})^2} f(\xi)^2 f'(\xi)^2 \xi^2 \begin{vmatrix} \dot{k} \cdot \dot{k} & \dot{k} \cdot k & \dot{k} \cdot \dot{x} \\ k \cdot \dot{k} & k \cdot k & k \cdot \dot{x} \\ \dot{x} \cdot \dot{k} & \dot{x} \cdot k & \dot{x} \cdot \dot{x} \end{vmatrix}.$$

Inwestując równości $k \cdot k = 0$ oraz $\dot{k} \cdot k = 0$ dostajemy

$$P_\mu P^\mu = m^2 (f(\xi)^2 - 4f(\xi) f'(\xi) \xi),$$

$$W_\mu W^\mu = -4m^4 \ell^2 f(\xi)^2 f'(\xi)^2 \xi.$$

¹ W zapisie Lagrangianu (2) domyślnie zakładamy więc $k \cdot k = 0$, co poprawnie robimy uwzględniając w Lagrangianie dodatkowy człon addytywny z mnożnikiem Lagrange'a: $\lambda k \cdot k$, przy czym mnożnik λ jest funkcją zależną od parametryzacji τ , którą wyznaczamy z równań ruchu. Nawiasem mówiąc, wynikający z $k \cdot k = 0$ dodatkowy więz dla prędkości: $k \cdot \dot{k} = 0$, który też można by uwzględnić, jest niepotrzebny, bo można go sprowadzić do członu postaci $\lambda k \cdot k$ z dokładnością do pochodnej zupełnej, która nie zmienia równań ruchu (jedynie składową pędu kanonicznego Π wzdłuż wektora k , co nie jest obserwowalną, bo zależy od dowolnej skali wektora k).

Zakładamy, że rotator jest fundamentalny, a więc niezmienniki Casimira powinny być parametrami, co można zapisać w postaci równości

$$P_\mu P^\mu = m^2, \quad (C1)$$

$$W_\mu W^\mu = -\frac{1}{4}m^4\ell^2, \quad (C2)$$

$$f(\xi)^2 - 4f(\xi)f'(\xi)\xi \stackrel{C1}{=} 1 \stackrel{C2}{=} 16f(\xi)^2f'(\xi)^2\xi.$$

Powyższe równania mają 4 wspólne rozwiązania (zobacz dodatek A) postaci

$$f(\xi) = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{\xi}}. \quad (3)$$

Z przyjętej w tej pracy konwencji znaku Lagrangianu

$$f(\xi) = \sqrt{1 \pm \sqrt{\xi}}.$$

W pracy [Sta08] przyjęto znak (+) pod pierwiastkiem. Przyjmując $f(\xi)$ w jednej z postaci (3), otrzymujemy za każdym razem Lagrangian, który ma defekt i ruch takiego rotatora nie byłby deterministyczny [Bra12].

3.2 Model singularny.

W tej części przedstawimy pokrótce uogólnioną konstrukcję Lagrangianu zegara, motywowaną przedstawionym modelem Staruszkiewicza i zawartą w pracy [Bra15]. Lagrangian opisujący relatywistyczny rotator powinien być niezmienniczy ze względu na lokalne skalowanie $\delta k = \epsilon k$. Aby wariacja δL zniknęła dla dowolnego ϵ , musimy założyć, że $k \cdot \Pi = 0$. Pamiętając, że k jest kierunkiem zerowym, mamy dwa więzy wynikające ze struktury rotatora

$$k \cdot \Pi = 0, \quad k \cdot k = 0. \quad (W1)$$

Następnie zakładając, że rotator ma być fundamentalny, mamy dwa więzy nakładane na niezmienniki Casimira grupy Poincarégo C1, C2. W ten sposób otrzymujemy cztery więzy będące punktem wyjścia do konstrukcji Lagrangianu zegara. Więzy (W1) pozwalają zapisać kwadrat pseudowektora W w postaci

$$W_\mu W^\mu = - \begin{vmatrix} P \cdot P & P \cdot k & P \cdot \Pi \\ k \cdot P & k \cdot k & k \cdot \Pi \\ \Pi \cdot P & \Pi \cdot k & \Pi \cdot \Pi \end{vmatrix} = (P \cdot k)^2(\Pi \cdot \Pi).$$

Dirac, w jednej ze swoich najważniejszych prac: "Generalized Hamiltonian Dynamics" [Dir50], podał jak konstruować Lagrangiany z więzami dla prędkości. Zgodnie z metodą Diraca, postać Lagrangianu dla zegara wynika z postaci Hamiltonianu zegara Staruszkiewicza. Ten Hamiltonian jest liniową kombinacją więzów pierwszego rodzaju (tj. takich, że parami zerują nawiasy Poissona) ze współczynnikami u_i (dla $i = 1, 2, 3, 4$), będącymi dowolnymi funkcjami zmiennej niezależnej τ

$$H = \frac{u_1}{2m} (P \cdot P - m^2) + \frac{u_2}{2m} \left(P \cdot P + \frac{4}{\ell^2 m^2} (k \cdot P)^2 (\Pi \cdot \Pi) \right) + u_3(k \cdot \Pi) + u_4(k \cdot k).$$

Z równań $\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ dostajemy wyjściowy układ więzów, natomiast prędkości dane są przez

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{u_1 + u_2}{m} P - u_2 \frac{m}{k \cdot P} k, \\ \dot{k} &= \frac{\partial H}{\partial \Pi} = u_2 \frac{4(k \cdot p)^2}{\ell^2 m^3} \Pi + u_3 k.\end{aligned}$$

Transformacją prowadzącą od Hamiltonianu do Lagrangianu jest przekształcenie odwrotne Legendre’a. W tym przypadku ma ono maksymalny rząd, gdy $\dot{x} \cdot \dot{x}$ jest normalizowalne. Jednak powstały w ten sposób Lagrangian, taki jak (2), ma defekt, bo zastosowana do niego zasada Hamiltona nie determinuje ruchu. Natomiast w przypadku $\dot{x} \cdot \dot{x} = 0$ rząd transformacji się obniża. Ta osobliwość odwrotnej transformacji Legendre’a wyróżnia zegar idealny, który ma własność, będącą klasycznym odpowiednikiem zjawiska Zitterbewegung odkrytego przez Schrödingera dla elektronu Diraca (w naszym przypadku jest to ruch kołowy z prędkością światła). Zastanówmy się, dlaczego ruch z prędkością światła występuje w modelu, pomimo że mamy do czynienia z cząstką masywną. Otóż z Hamiltonianu Diraca dla elektronu swobodnego wynika, że wartości własne operatora prędkości dla kwantowej cząstki relatywistycznej są równe $\pm c$. Dirac zawarł w swojej książce "The Principles of Quantum Mechanics" [Dir81] wyjaśnienie tego fenomenu dla kwantowych cząstek relatywistycznych. Mianowicie, że wartości pędu relatywistycznego są nieograniczone, a co za tym idzie, wartość oczekiwana pędu jest nieskończona. Więc z relatywistycznego związku pęd-prędkość otrzymujemy wartość c . Pomimo tego, ruch środka masy odbywa się z prędkością mniejszą niż prędkość światła c , co też zachodzi dla naszego zegara.

Założenie $u_1 = u_2 \neq 0$ obniża rząd transformacji odwrotnej Legendre’a i daje dodatkowe więzy

$$\boxed{\frac{\dot{x} \cdot \dot{x}}{\dot{x} \cdot k} = 0,} \quad (4)$$

$$\boxed{-\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} = 1.} \quad (5)$$

Otrzymujemy Lagrangian postaci

$$\boxed{L = \frac{m\kappa}{2} \frac{\dot{x} \cdot \dot{x}}{k \cdot \dot{x}} + \frac{m}{4\kappa} \left(\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{k \cdot \dot{x}} + k \cdot \dot{x} \right) + \lambda(k \cdot k),}$$

gdzie κ jest zmienną niezależną, a λ mnożnikiem Lagrange’a [Bra15]. Z powyższego Lagrangianu i z więzów mamy

$$P = m \left(\frac{\kappa}{k \cdot \dot{x}} \dot{x} + \frac{1}{2\kappa} k \right).$$

Zatem pęd P dany jest kombinacją liniową wektorów k i \dot{x} . Przyjmując $e = P/m$ dostajemy

$$\frac{\dot{x}}{e \cdot \dot{x}} = 2e - \frac{k}{e \cdot k}. \quad (6)$$

Powyższa równość określa zależność między wektorem stycznym do linii świata środka masy, a wektorami k i \dot{x} . Przyjęcie $\dot{x} \cdot \dot{x} = f$, gdzie f jest pewną funkcją s , nie ustala prędkości, i trzeba w tym celu wspomóc się jakimś konkretnym obserwatorem. Wybór obserwatora jest równoważny z arbitralnym ustaleniem kąta hiperbolicznego między wektorami \dot{x} i e . W jednorodnej przestrzeni czteroprędkości (Łobaczewskiego) każdy punkt (określający czterowektor czasowy, a więc reprezentujący konkretnego obserwatora) jest równouprawniony, co przekłada się na arbitralność wyboru fazy zegara [Bra15]. Warunek $\dot{x} \cdot \dot{x} = 0$ determinuje ruch wewnętrzny zegara w przestrzeni Minkowskiego w sposób niezmienniczy wyłącznie na podstawie struktury stożkowej. Więc (5) daje ograniczenie na częstość pracy zegara. W dalszej części pracy przy jego pomocy oraz związku (6) określimy pojęcie krzywej chronometrycznej.

3.3 Transport Fermiego-Walkera.

Poniżej przedstawimy pojęcia potrzebne do konstrukcji lokalnie nierotującej bazy. Zauważmy, że transport równoległy wzdłuż linii geodezyjnej przekształca wektory styczne w wektory styczne. Własność tę tracimy, gdy linia świata nie jest linią geodezyjną, czyli gdy pojawia się niezerowe przyspieszenie A . Transportem, który zachowuje styczność wektorów do linii świata niezależnie od jej krzywizny jest transport Fermiego-Walkera (FW) [Syn60]. Doświadczenie wskazuje, że taki transport odpowiada fizycznemu transportowi wektorów [CN15; AP14]. Do jego zdefiniowania posłużą nam odwzorowania P i R . Niech u będzie jednostkowym wektorem stycznym do linii świata y . Dowolny wektor v możemy w punkcie $p \in y$ rozłożyć na składowe: styczną $R(v)$ i prostopadłą $P(v)$ do y . Przestrzeń wektorów w punkcie p rozpada się w ten sposób na sumę prostą przestrzeni $\{P(v)\}$ i $\{R(v)\}$.

$$v = \underbrace{v - (v \cdot u)u}_{P(v)} + \underbrace{(v \cdot u)u}_{R(v)} = P(v) + R(v).$$

Definicja 14. Mówimy, że wektor v spełnia prawo **transportu Fermiego-Walkera** (FW) wzdłuż linii świata y , jeżeli

$$\frac{D_{FW}v}{ds} := P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) + R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) = 0. \quad (\text{FW})$$

Wyrażenie $\frac{D_{FW}}{ds}$ nazywamy **pochodną Fermiego-Walkera**.

Twierdzenie 1. Niech u oraz A będą odpowiednio wektorami prędkości i przyspieszenia stowarzyszonymi z linią świata y . Wtedy pochodną Fermiego-Walkera możemy zapisać w postaci

$$\frac{D_{FW}v}{ds} = \frac{Dv}{ds} + (A \cdot v)u - (u \cdot v)A. \quad (7)$$

Powyższa równość może służyć za definicję pochodnej Fermiego-Walkera [Syn60].

Dowód. Obliczamy pochodne absolutne rzutów $P(v)$ oraz $R(v)$

$$\frac{DP(v)}{ds} = \frac{Dv}{ds} - (u \cdot v)A - \frac{d(u \cdot v)}{ds}u, \quad \frac{DR(v)}{ds} = \frac{d(u \cdot v)}{ds}u + (u \cdot v)A.$$

Pamiętając, że $u \perp A$ mamy

$$\begin{aligned} P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) &= \frac{Dv}{ds} - (u \cdot v)A - \frac{d(u \cdot v)}{ds}u - \left(\frac{Dv}{ds} \cdot u\right)u + \frac{d(u \cdot v)}{ds}u = \\ &= \frac{Dv}{ds} - (u \cdot v)A - \left(\frac{Dv}{ds} \cdot u\right)u, \\ R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) &= \frac{d(u \cdot v)}{ds}u = \left(\frac{Dv}{ds} \cdot u\right)u + (A \cdot v)u. \end{aligned}$$

Zatem pochodna (FW) jest równa

$$\frac{D_{FW}v}{ds} = P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) + R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) = \frac{Dv}{ds} + (A \cdot v)u - (u \cdot v)A. \quad (8)$$

□

W przypadku zerowego przyspieszenia ($A \equiv 0$) linia świata jest linią geodezyjną, pochodna (FW) sprowadza się do pochodnej absolutnej, a transport (FW) sprowadza się do transportu równoległego.

Dla dowolnych wektorów v_1 i v_2 mamy $P(v_1) \perp R(v_2)$, a więc warunek transportu (FW) ogranicza się do zerowania każdego ze składników

$$\begin{aligned} P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) &= 0, \\ R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Definicja 15. Reperem lokalnie nierotującym nazywamy reper ruchomy, poruszający się wraz z ciałem wzdłuż jego linii świata, którego wersory spełniają prawo transportu (FW) oraz wersor czasowy jest styczny do linii świata (co odpowiada prędkości).

Reper lokalnie nierotujący jest szczególnie dogodny do opisu zjawisk fizycznych. W granicy nierelatywistycznej odpowiada on Newtonowskiej koncepcji nierotującego reperu [Syn60]. Przeprowadzimy teraz konstrukcję takiego reperu, co sprowadza się do konstrukcji odpowiedniej bazy E . Za wersor czasowy takiej bazy możemy zawsze obrać prędkość u , gdyż jest ona unormowanym wektorem czasowym spełniającym prawo transportu (FW)

$$e := u = \frac{dy}{ds}.$$

Utożsamiamy e_0 z e i dobieramy do niego wersory przestrzenne tak, aby otrzymana baza $E = \{e_\mu\}$ była ortonormalna. Warunek ortogonalności wektorów e_i i e zapewnia, że $R(e_i) = 0$. Zatem dodatkowym warunkiem, jaki trzeba nałożyć na wersory przestrzenne e_i , jest

$$P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) = 0.$$

Uwzględniając, że $e = u$ oraz $P(e_i) = e_i$, możemy powyższy warunek zapisać w postaci

$$\frac{De_i}{ds} = \left(\left(\frac{De_i}{ds} \right) \cdot e \right) e. \quad (9)$$

Przydatną własnością bazy E jest to, że dany wektor ma w tej bazie stałe współrzędne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia prawo transportu (FW). Aby to pokazać wystarczy rozłożyć dany wektor w bazie E i skorzystać z definicji transportu (FW).

3.4 Czwórka symetryczna kierunków zerowych.

Od tego momentu zakładamy, że wersor e_3 jest prostopadły do hiperpłaszczyzny ruchu tak, że $A \cdot e_3 = 0$. Nie jest to zbyt restrykcyjne założenie i pozwala na zastosowanie modelu w wielu przypadkach. Zauważmy, że wtedy wektor A leży w płaszczyźnie rozpinanej przez wektory e_1 i e_2 . Liczmy przyspieszenie właściwe α i dostajemy

$$\alpha^2 = (A \cdot e_1)^2 + (A \cdot e_2)^2.$$

Interpretując poprzednią równość jako trójkę pitagorejską, możemy wprowadzić następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \frac{A \cdot e_1}{\alpha}, \\ \sin \chi &= \frac{A \cdot e_2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Z wersorów e i e_3 tworzymy dwa zerowe wektory k_+ i k_- skierowane w przyszłość, które uważamy za wektory własne pewnej transformacji Lorentza.

$$k_+ = \frac{e + e_3}{\sqrt{2}},$$

$$k_- = \frac{e - e_3}{\sqrt{2}},$$

$$k_+ \cdot k_- = 1, \quad k_{\pm} \cdot k_{\pm} = 0.$$

Te wektory są wektorami własnymi pewnego obrotu \mathcal{O} .

$$\mathcal{O}(k_{\pm}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{O}(e \pm e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{O}e \pm \mathcal{O}e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e \pm e_3) = k_{\pm}.$$

Łatwo sprawdzić, że jest to obrót w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory e_1 i e_2 , czyli eliptyczne przekształcenie Lorentza. Ten obrót pozwala nam zinterpretować kąt χ . Zauważmy, że możemy za pomocą obrotu \mathcal{O} obrócić wersor wektora przyspieszenia o kąt $-\chi$ tak, aby spełniał prawo transportu (FW). Schematycznie przedstawiono to na rysunku 3.

Rozważamy trzeci wektor zerowy k skierowany w przyszłość, taki że $k \cdot e_3 \equiv 0$ oraz $k(0) \cdot e_1(0) = 0$. Wektor k rozkładamy w bazie E

$$k = k^0 e + k^i e_i, \quad k^1(0) = 0, k^3 = 0,$$

$$k(0) = k^0(0)e(0) + k^2(0)e_2(0).$$

Rozkładając wektor k w bazie E , stwierdzamy, że jego współrzędne formują trójkę pitagorejską

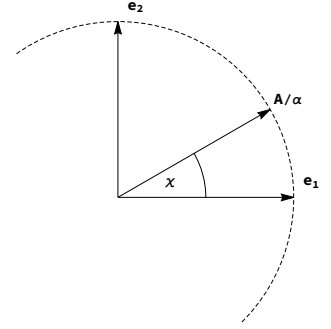
$$(k \cdot e)^2 = (k \cdot e_1)^2 + (k \cdot e_2)^2. \quad (10)$$

Kierunek zerowy k odpowiada kierunkowi wskazówki zegara. W przypadku, gdy byłyby dwie wskazówki poruszające się po tym samym okręgu, ale w przeciwnych kierunkach, moglibyśmy kolejne tyknięcia zegara wyznaczyć przez punkty spotkania się wskazówek. Jednak nasz zegar wyposażony jest w jedną wskazówkę, w wyniku czego potrzebujemy kierunku odniesienia, względem którego będziemy mierzyć jego wskazania. Fazę zegara definiujemy względem reperu przenoszonego transportem (FW), gdyż taki reper nie rotuje względem obserwatora, co umożliwia mierzenie fazy zegara względem wersorów bazy. Wprowadzamy **fazę zegara** φ równością

$$\cos \varphi = \frac{k \cdot e_1}{k \cdot e}. \quad (11)$$

Z wektora $k(0)$ tworzymy wektor zerowy $k_0(s)$ tak, aby spełniał prawo transportu (FW). Będzie on kierunkiem odniesienia w zegarze. Wiemy, że wtedy jego współrzędne w bazie E są stałe. Niech zatem $k_0(s) = \sqrt{2}(e + e_2)$. Warunek początkowy na fazę φ ustalamy jako $\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}$. Wtedy dla $s = 0$ wektory k i k_0 reprezentują ten sam kierunek zerowy. Każdemu kierunkowi zerowemu możemy przyporządkować punkt na sferze, a następnie każdemu punktowi sfery możemy przyporządkować, przez rzut stereograficzny, punkt z płaszczyzny zespolonej (odpowiednio uzwarconej) [Sta93]. W ten sposób danemu wektorowi zerowemu $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ przyporządkowujemy liczbę

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{x_0 - x_3}.$$



Rysunek 3: Schemat obrazujący obrót \mathcal{O} wykonany na wersorze przyspieszenia A/α w bazie E .

Mówimy, że wektory zerowe tworzą czwórkę symetryczną, kiedy dwustosunek odpowiadających im liczb zespolonych wynosi $e^{\pm i\pi/3}$. Dwustosunek liczb zespolonych z_0, z_1, z_2 i z_3 przyjmujemy w postaci wyrażonej równością (12) [Sta93]. Skonstruujemy teraz czwarty wektor zerowy k_3 , który razem z wektorami k_+, k_0, k_- utworzy czwórkę symetryczną. Liczby zespolone odpowiadające wektorom własnym k_ν oznaczamy przez κ_ν , gdzie $\nu \in \{+, 0, -, 3\}$. Wykonując rzut stereograficzny, możemy wyznaczyć, że $\kappa_0 = i, \kappa_+ = 0, \kappa_- = \infty$. W zależności od kolejności wektorów i przyjętego znaku w wykładniku eksponenty (13), dostajemy dwie liczby κ_3 różniące się znakiem części rzeczywistej oraz odpowiadające im wektory zerowe k_3 (14).

$$(z_0 z_1 z_2 z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)}. \quad (12)$$

$$(\kappa_0 \kappa_+ \kappa_- \kappa_3) = e^{\pm i\pi/3}. \quad (13)$$

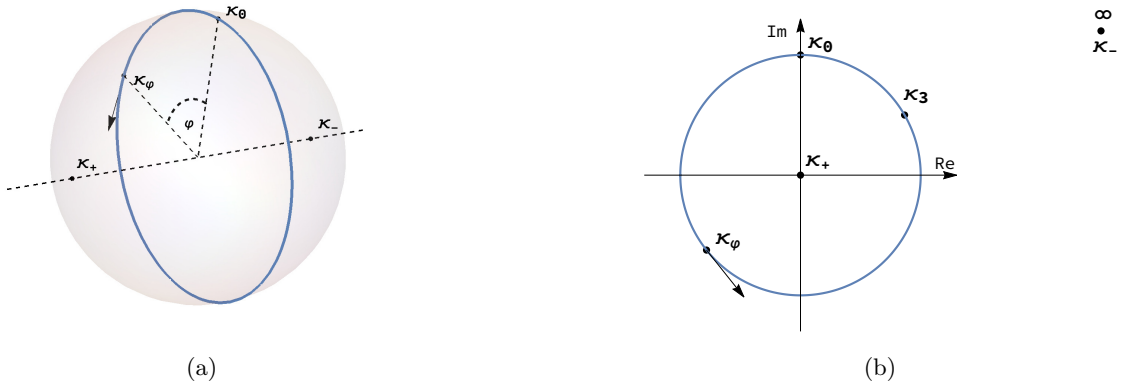
$$\kappa_3 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad k_3 = \sqrt{2}e \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2. \quad (14)$$

W czasoprzestrzeni Minkowskiego dwustosunek jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, co pozwala zdefiniować fazę [Bra15]

$$\Phi = i \text{Ln}(\kappa_\phi \kappa_+ \kappa_0 \kappa_-),$$

gdzie liczba $\kappa_\varphi = -\cos \varphi - i \sin \varphi$ odpowiada wektorowi zerowemu k . Wstawiając wartości κ_i do powyższego wzoru, otrzymujemy $\Phi = -\varphi - \pi/2$. Zatem φ jest również niezmiennikiem transformacji Lorentza w czasoprzestrzeni Minkowskiego. W zakrzywionych czasoprzestrzeniach pojawia się problem z mierzaniem fazy pomiędzy różnymi chwilami. W lokalnych układach odniesienia mierzymy wyłącznie nieskończenie małe przyrosty fazy. Dlatego potrzebujemy odpowiedniego przeniesienia wektorów zerowych pomiędzy odległymi chwilami. Możliwe są również zaburzenia w fazie, spowodowane rotacją lokalnych inercjalnych układów odniesienia [Bra15]. To uzasadnia mierzanie fazy φ w odniesieniu do lokalnie nierotującego układu odniesienia i przenoszenie wektorów zerowych za pomocą prawa transportu (FW). Na rysunkach 4a i 4b widzimy wzajemne położenie uzyskanej czwórki symetrycznej (dla $\text{Re}(\kappa_3) > 0$) oraz obrazu wektora k . Punkt κ_φ porusza się po okręgu jednostkowym wraz ze wzrostem φ . Uzyskane wektory są liniowo niezależne i tworzą bazę kierunków zerowych, która dodatkowo spełnia prawo transportu (FW) oraz równości

$$k_\mu \cdot k_\nu = 1, \quad k_\nu \cdot k_\nu = 0, \quad \text{dla } \mu \neq \nu, \text{ gdzie } \mu, \nu \in \{0, +, -, 3\}.$$



Rysunek 4: Obraz czwórki symetrycznej oraz kierunku k na płaszczyźnie zespolonej (a) oraz na sferze jednostkowej (b). Wektorem stycznym do okręgu zaznaczono kierunek ruchu.

3.5 Konstrukcja zegara.

Zakładamy, że podczas ruchu mamy spełniony więz (5) oraz że wektor zerowy \dot{x} można przedstawić jako kombinację liniową wektorów e i k . Ostatnie założenie opieramy na równości (6) w cechowaniu $e \cdot \dot{x} = 1$. Rozkładając \dot{x} w bazie E , dostajemy

$$\dot{x} = e - C(k \cdot e_1)e_1 - C(k \cdot e_2)e_2.$$

Korzystając z faktu, że \dot{x} jest zerowy, możemy wyznaczyć współczynniki kombinacji liniowej.

$$0 = \dot{x} \cdot \dot{x} = 1 - C^2(k \cdot e_1)^2 - C^2(k \cdot e_2)^2 = 1 - C^2(k \cdot e)^2,$$

$$C = \pm 1/(k \cdot e).$$

Wybieramy znak ujemny, gdyż w przeciwnym przypadku $\dot{x} \cdot k = 0$, co jest sprzeczne z więzem (4). Zatem

$$\dot{x} = 2e - k/(k \cdot e) = e + \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2, \quad \dot{x} \cdot k = 2k \cdot e. \quad (15)$$

Wyznaczamy pochodną absolutną wektora k i jej kwadrat

$$\dot{k} = \underbrace{\frac{d(k \cdot e)}{ds}e - \frac{d(k \cdot e_1)}{ds}e_1 - \frac{d(k \cdot e_2)}{ds}e_2}_{K_p} + \underbrace{(k \cdot e)\dot{e} - (k \cdot e_1)\dot{e}_1 - (k \cdot e_2)\dot{e}_2}_K,$$

$$\dot{k} \cdot \dot{k} = K_p \cdot K_p + K \cdot K + 2K_p \cdot K.$$

Obliczamy oddzielnie każdy ze składników powyższej sumy. W tym celu przedstawimy pochodne wersorów bazy w bardziej użytecznej postaci

$$\dot{e} = \frac{De}{ds} = A,$$

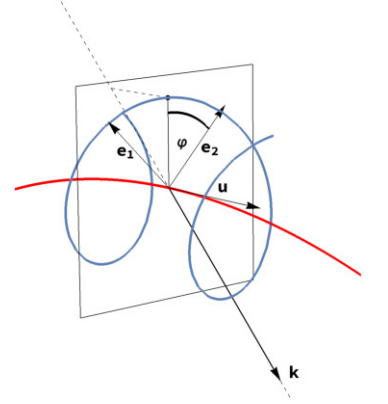
$$\dot{e}_1 = \frac{De_1}{ds} = \frac{D(e_1)_\perp}{ds} \stackrel{(FW)}{=} \left(\frac{D(e_1)_\perp}{ds} \cdot e_0 \right) e = \left(\frac{De_1}{ds} \cdot e \right) e \stackrel{(FW)}{=} - \left(\frac{De}{ds} \cdot e_1 \right) e = -(A \cdot e_1) e,$$

$$\dot{e}_2 = \frac{De_2}{ds} = \frac{D(e_2)_\perp}{ds} \stackrel{(FW)}{=} \left(\frac{D(e_2)_\perp}{ds} \cdot e \right) e = \left(\frac{De_2}{ds} \cdot e \right) e \stackrel{(FW)}{=} - \left(\frac{De}{ds} \cdot e_2 \right) e = -(A \cdot e_2) e.$$

Zgodnie z powyższym zachodzą równości

$$K = (k \cdot e)(A + (A \cdot e_1) \cos \varphi e + (A \cdot e_2) \sin \varphi e),$$

$$K_p = (k \cdot e)\dot{\varphi}(\sin \varphi e_1 - \cos \varphi e_2) + \frac{d(k \cdot e)}{ds}(e - \cos \varphi e_1 - \sin \varphi e_2),$$



Rysunek 5: Schematyczny rysunek obrazujący działanie zegara.

$$\begin{aligned}
K_p \cdot K_p &= \left(\frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d(k \cdot e_1)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d(k \cdot e_2)}{ds} \right)^2 = \left(\frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d(k \cdot e) \cos \varphi}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d(k \cdot e) \sin \varphi}{ds} \right)^2 = \\
&= \left(\frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - (k \cdot e)^2 (\dot{\varphi})^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \\
&= -(k \cdot e)^2 (\dot{\varphi})^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2K_p \cdot K &= 2(k \cdot e_0) \dot{\varphi} ((A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi) - \frac{d(k \cdot e_0)}{ds} ((A \cdot e_1) \cos \varphi + (A \cdot e_2) \sin \varphi) + \\
&+ \frac{d(k \cdot e_0)}{ds} (A \cdot e_1) \cos \varphi + \frac{d(k \cdot e_0)}{ds} (A \cdot e_2) \sin \varphi = \\
&= 2(k \cdot e_0) \dot{\varphi} ((A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K \cdot K &= (k \cdot e)^2 ((A \cdot A) + ((A \cdot e_1) \cos \varphi + (A \cdot e_2) \sin \varphi)^2) = \\
&= -(k \cdot e)^2 ((A \cdot e_1)^2 + (A \cdot e_2)^2 - (A \cdot e_1)^2 \cos^2 \varphi - (A \cdot e_2)^2 \sin^2 \varphi - 2(A \cdot e_1)(A \cdot e_2) \sin \varphi \cos \varphi) = \\
&= -(k \cdot e)^2 ((A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi)^2.
\end{aligned}$$

Sumę obliczonych składników wstawiamy do równości (5). Następnie, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, otrzymujemy

$$1 = -\frac{\ell^2 \dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} = \frac{\ell^2}{4} (\dot{\varphi} - (A \cdot e_1) \sin \varphi + (A \cdot e_2) \cos \varphi)^2$$

oraz wyznaczamy

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + (A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi.$$

Podstawiając zmienną χ , możemy zapisać owo równanie w zgrabnej postaci

$$\boxed{\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \chi)}. \quad (16)$$

W przypadku zerowego przyspieszenia właściwego wprowadzony model zegara mierzy czas własny s .

$$\dot{\varphi} = \frac{2}{\ell}, \quad \varphi = \pm \frac{2}{\ell} s + \varphi_0. \quad (17)$$

4 Aplikacje

4.1 Ruch hiperboliczny.

Jako pierwszy przypadek zbadamy relatywistyczny odpowiednik ruchu jednostajnie przyspieszonego. Poniższe wyprowadzenie kształtu linii świata takiego ruchu można znaleźć w książce [KT84]. W układzie obserwatora inercyjnego \mathcal{I} posługującego się kartezjańskim układem współrzędnych, rozważamy linię świata $y = y(s)$ obserwatora \mathcal{Z} parametryzowaną czasem własnym s . Ruch ten odbywa się w jednym wymiarze przestrzennym. W takim przypadku wektor prędkości, po uwzględnieniu warunku unormowania, ma postać

$$(u^\mu) = (\cosh \beta(s), \sinh \beta(s), 0, 0), \quad (18)$$

gdzie $\beta(s)$ jest pewną funkcją parametryzowaną czasem własnym s . Żądamy teraz, aby przyspieszenie właściwe α było stałe ze względu na s .

$$(A^\mu) = (\dot{\beta}(s) \sinh \beta(s), \dot{\beta}(s) \cosh \beta(s), 0, 0),$$

$$\alpha = \sqrt{-A^\mu A_\mu} = \dot{\beta}(s).$$

Otrzymujemy równanie różniczkowe na funkcję $\beta(s)$. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $\beta(0) = 0$. Wtedy rozwiązanie jest postaci

$$\beta(s) = \alpha s,$$

$$(u^\mu) = (\cosh \alpha s, \sinh \alpha s, 0, 0),$$

$$(A^\mu) = (\alpha \sinh \alpha s, \alpha \cosh \alpha s, 0, 0).$$

Zatem odpowiednikiem ruchu jednostajnie przyspieszonego w czasoprzestrzeni Minkowskiego jest ruch opisany przez hiperbolę. Łatwo sprawdzić, że dla małych prędkości przechodzi on w ruch jednostajnie przyspieszony. Ciało w takim ruchu porusza się po linii świata

$$(y^\mu) = \left(\frac{1}{\alpha} \sinh \alpha s, \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha s, 0, 0 \right). \quad (19)$$

Chcemy skonstruować reper współporuszający się z obserwatorem \mathcal{Z} . W tym celu za wersor czasowy obieramy prędkość $e = u$, a za pierwszy z wersorów przestrzennych unormowane przyspieszenie $e_1 = A/\alpha$. Wersory te uzupełniamy do bazy za pomocą wersorów kanonicznych. Otrzymaną bazę możemy zapisać zgrabnie w postaci macierzy (20). Łatwo sprawdzić, że tak skonstruowany reper spełnia prawo transportu (FW).

$$\begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha s & \sinh \alpha s & 0 & 0 \\ \sinh \alpha s & \cosh \alpha s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Możemy teraz zapisać równanie na fazę zegara ϕ

$$\begin{aligned} \chi &= \pi, \quad \alpha = \text{const}, \\ \dot{\phi} &= \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \pi) = \pm \frac{2}{\ell} - \alpha \sin(\varphi). \end{aligned}$$

4.2 Ruch po okręgu.

W układzie obserwatora inercjalnego \mathcal{I} z kartezjańskim układem współrzędnych rozważamy linię świata obserwatora \mathcal{Z} w ruchu jednostajnym po okręgu. Zagadnienie rozpatrujemy w czasoprzestrzeni Minkowskiego. Rozpatrzmy punkt poruszający się po okręgu o promieniu R i częstości ω . W układzie obserwatora inercjalnego \mathcal{I} porusza się on po trajektorii $y = y(s)$. W kartezjańskim układzie współrzędnych współrzędne tej trajektorii wynoszą

$$(y^\mu) = (\gamma s, R \cos \omega \gamma s, R \sin \omega \gamma s, 0).$$

Wtedy wektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$(u^\mu) = (\gamma, -R\omega\gamma \sin \omega \gamma s, R\omega\gamma \cos \omega \gamma s, 0),$$

$$(A^\mu) = (0, -R\omega^2\gamma^2 \cos \omega \gamma s, -R\omega^2\gamma^2 \sin \omega \gamma s, 0),$$

a podczas ruchu zachowane jest przyspieszenie właściwe

$$\alpha = \sqrt{-A \cdot A} = R\omega^2\gamma^2.$$

Teraz zajmijmy się znalezieniem reperu lokalnie nierotującego, poruszającego się po rozpatrywanej linii świata. Za wersor e obieramy prędkość u , za e'_1 – wersor przeciwny do przyspieszenia, za e_3 – wersor prostopadły do płaszczyzny ruchu. Wersor e'_2 wybieramy tak, aby był ortogonalny do pozostałych. Uzyskaną bazę zapisujemy w postaci macierzowej

$$E' = \begin{pmatrix} e \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega \gamma s & R\omega\gamma \cos \omega \gamma s & 0 \\ 0 & \cos \omega \gamma s & \sin \omega \gamma s & 0 \\ R\omega\gamma & -\gamma \sin \omega \gamma s & \gamma \cos \omega \gamma s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Chcemy, aby obrona baza spełniała prawo transportu (FW). Łatwo sprawdzić, że wersor e_3 spełnia prawo transportu (FW), natomiast wersory e'_1 i e'_2 nie. Aby to naprawić, dokonamy obrotu bazy o kąt $\psi = \psi(s)$ w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory e'_1 i e'_2 . Odpowiedni obrót w bazie kanonicznej ma w reprezentacji macierzowej postać (22) [Sta93]. Właściwie obrócone wersory obliczamy za pomocą równości (23).

$$(\mathcal{O}^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

$$\begin{aligned} e_1 &= \mathcal{O}_1^\mu E'_\mu, \\ e_2 &= \mathcal{O}_2^\mu E'_\mu. \end{aligned} \quad (23)$$

Wstawiając obrócone wersory do warunku (FW), otrzymujemy równania różniczkowe na kąt ψ , które (przyjmując bez straty ogólności $\psi(0) = 0$) mają wspólne rozwiązanie postaci $\psi(s) = -\omega\gamma^2 s$. Otrzymana ortonormalna baza (24) spełnia prawo transportu (FW).

$$\begin{aligned}
E = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega\gamma s & R\omega\gamma \cos \omega\gamma s & 0 \\ R\omega\gamma \sin \psi & \cos \omega\gamma s \cos \psi - \gamma \sin \omega\gamma s \sin \psi & \sin \omega\gamma s \cos \psi + \gamma \cos \omega\gamma s \sin \psi & 0 \\ R\omega\gamma \cos \psi & -\cos \omega\gamma s \sin \psi - \gamma \sin \omega\gamma s \cos \psi & -\sin \omega\gamma s \sin \psi + \gamma \cos \omega\gamma s \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega\gamma s & R\omega\gamma \cos \omega\gamma s & 0 \\ -R\omega\gamma \sin \omega\gamma^2 s & \cos \omega\gamma^2 s \cos \omega\gamma s + \gamma \sin \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s & \sin \omega\gamma s \cos \omega\gamma^2 s - \gamma \cos \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s & 0 \\ R\omega\gamma \cos \omega\gamma^2 s & \cos \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s - \gamma \sin \omega\gamma s \cos \omega\gamma^2 s & \sin \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s + \gamma \cos \omega\gamma s \cos \omega\gamma^2 s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)
\end{aligned}$$

Zapisujemy równanie na kąt φ

$$\begin{aligned}
\chi &= \omega\gamma^2 s = -\psi, \quad \alpha = R\omega\gamma^2, \\
\dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + R\omega^2\gamma^2 \sin(\varphi - \omega\gamma^2 s) = \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \alpha s/R\omega).
\end{aligned}$$

4.3 Ruch po okręgu względem galaktyk.

Rozważymy teraz ponownie ruch po okręgu, z tą różnicą, że wiążemy obserwatora \mathcal{I} z odległymi galaktykami w ekspandującym wszechświecie. Sytuacji tej odpowiada metryka Friedmana-Lemaître'a-Robertsona-Walkera (FLRW). Dla uproszczenia zakładamy zerową krzywiznę przestrzenną. Tensor metryczny dany jest przez

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -a(t)^2, -a(t)^2, -a(t)^2). \quad (25)$$

Warto zauważyć, że dla $a(t) \equiv 1$ ta metryka przechodzi w zwykłą metrykę czasoprzestrzeni Minkowskiego, a zatem można łatwo zweryfikować poprawność wyników. W dalszej części tego rozdziału przyjmujemy następujące oznaczenia

$$a := a(t), \quad a' := \frac{da(t)}{dt}.$$

Dla tej metryki symbole Chrostofella Γ_{ij}^k przedstawiamy poniżej w tablicach odpowiednio dla $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aa' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aa' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & aa' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{a'}{a} & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a'}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a'}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozważamy linie świata cząstki w ruchu po okręgu

$$(y^\mu) = (t(s), R \cos \omega t(s), R \sin \omega t(s), 0).$$

Wtedy wektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$(u^\mu) = (\gamma, -R\omega\gamma \sin \omega t, R\omega\gamma \cos \omega t, 0),$$

$$(A^\mu) = \left(a' a R^2 \omega^2 \gamma^2 (\gamma^2 + 1), -\frac{a'}{a} R\omega\gamma^2 (\gamma^2 + 1) \sin \omega t - R\omega^2 \gamma^2 \cos \omega t, \frac{a'}{a} R\omega\gamma^2 (\gamma^2 + 1) \cos \omega t - R\omega^2 \gamma^2 \sin \omega t, 0 \right),$$

gdzie $\gamma = dt/ds = (1 - a^2 R^2 \omega^2)^{-1/2}$. Przyspieszenie właściwe wynosi

$$\alpha = \sqrt{-A_\mu A^\mu}, \quad \text{gdzie } A_\mu A^\mu = -\left(\frac{a'}{a}\right)^2 (\gamma^2 - 1) (\gamma^2 + 1)^2 - a^2 R^2 \omega^4 \gamma^4.$$

Konstrukcję reperu lokalnie nierotującego E można przeprowadzić analogicznie do przedstawionej w poprzednim rozdziale. Jednakże rachunki uprościmy, wykonując konstrukcję w inny sposób. Mianowicie stosunkowo łatwo jest uogólnić wersory uzyskanej wcześniej bazy (24) tak, aby tworzyły bazę ortonormalną w metryce (25). Odpowiednia baza jest postaci

$$E_{FLRW} = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega t & R\omega\gamma \cos \omega t & 0 \\ aR\omega\gamma \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \omega t \cos \psi - \frac{1}{a} \gamma \sin \omega t \sin \psi & \frac{1}{a} \sin \omega t \cos \psi + \frac{1}{a} \gamma \cos \omega t \sin \psi & 0 \\ aR\omega\gamma \cos \psi & -\frac{1}{a} \cos \omega t \sin \psi - \frac{1}{a} \gamma \sin \omega t \cos \psi & -\frac{1}{a} \sin \omega t \sin \psi + \frac{1}{a} \gamma \cos \omega t \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}.$$

Wersory e i e_3 są transportowane wzdłuż linii świata zgodnie z prawem (FW). Wersory e_1 i e_2 zależą od kąta obrotu ψ . Kąt ψ powinien w granicy $a \rightarrow 1$ przechodzić w kąt znaleziony dla ciała poruszającego się po okręgu w czasoprzestrzeni Minkowskiego. Traktujemy tę granicę jako test poprawności wyników. Wartość kąta ψ znajdujemy żądając, aby wersory e_1 i e_2 spełniały prawo transportu (FW). Wspólne rozwiązanie dla otrzymanych równań różniczkowych wyrażamy przez

$$\psi(s) = \int_0^s -\omega\gamma(s_1)^2 ds_1, \quad \text{gdzie } \gamma(s) = (1 - a(t(s))^2 R^2 \omega^2)^{-1/2}.$$

Mając znaleziony odpowiedni reper, obliczamy wielkości potrzebne do równania na fazę zegara φ .

$$\begin{aligned} A \cdot e_1 &= -a' R\omega\gamma (\gamma^2 + 1) \sin \psi + aR\omega^2 \gamma^2 \cos \psi, \\ A \cdot e_2 &= -a' R\omega\gamma (\gamma^2 + 1) \cos \psi - aR\omega^2 \gamma^2 \sin \psi, \\ \chi &= \arccos(A \cdot e_1 / \alpha), \\ \alpha &= aR\omega\gamma \sqrt{a'^2 (\gamma^2 + 1)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \\ \dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \chi). \end{aligned}$$

Rozwijamy prawą stronę równania na φ względem R dla małych promieni

$$\begin{aligned} \psi &= -\omega s + O(R^2), \quad \alpha = a\omega \sqrt{4a'^2 + \omega^2} R + O(R^3), \\ \dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + a\omega \sqrt{4a'^2 + \omega^2} R \sin \left(\varphi - \arccos \left(\frac{a\omega \cos(\omega s) - 2a' \sin(\omega s)}{a\sqrt{4a'^2 + \omega^2}} \right) \right) + O(R^3). \end{aligned}$$

Dla krótkich przedziałów czasowych możemy przyjąć $a' \rightarrow 0$, co daje

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + a\omega^2 R \sin(\varphi - \omega s) + O(R^3).$$

4.4 Ruch po okręgu wokół czarnej dziury.

W układzie obserwatora inercyjnego \mathcal{I} ze sferycznym układem współrzędnych (t, r, ϕ, θ) rozważamy linię świata obserwatora \mathcal{Z} w ruchu jednostajnym po okręgu wokół czarnej dziury. Będziemy używać metryki Schwarzschilda, która odpowiada czasoprzestrzeni w pobliżu nierotującej sferycznie symetrycznej masy nieobdarzonej ładunkiem [Har16]. Metrykę Schwarzschilda ma postać

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - r^2 d\theta^2. \quad (26)$$

Dla metryki (26) symbole Christoffela Γ_{ij}^k przedstawiamy poniżej w tablicach odpowiednio dla $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) r \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & -\cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozważamy ruch po okręgu o promieniu R i częstotliwości ω . Linie świata w tym przypadku zapisujemy następująco

$$(y^\mu) = \left(t, R, \omega t, \frac{\pi}{2}\right). \quad (27)$$

Wtedy wektor prędkości ma postać

$$(u^\mu) = (\gamma, 0, \omega\gamma, 0), \quad \text{gdzie } \gamma = dt/ds.$$

Z danego elementu liniowego (26), po uwzględnieniu (27), wyznaczamy

$$\gamma = \left(1 - \frac{2M}{R} - R^2\omega^2\right)^{-1/2}.$$

Następnie obliczamy wektor przyspieszenia oraz przyspieszenie właściwe

$$(A^\mu) = \left(0, -\gamma^2 \left(R\omega^2 - \frac{M}{R^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{R}\right), 0, 0\right),$$

$$\alpha = \sqrt{-A \cdot A} = \gamma^2 \left| R\omega^2 - \frac{M}{R^2} \right| \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}.$$

Ponownie korzystamy z wyznaczonej wcześniej bazy dla przypadku czasoprzestrzeni Minkowskiego i uogólnimy ją w taki sposób, aby była unormowana i spełniała prawo transportu (FW). W pierwszym kroku musimy przetransformować wektory bazy (24) do współrzędnych sferycznych. Na potrzeby tej transformacji współrzędne kartezjańskie oznaczmy przez x^i , natomiast współrzędne sferyczne przez \tilde{x}^i . Współrzędne wektorów transformują się kontrawariantnie [IJ80], co można zapisać jako

$$\tilde{v}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} v^j.$$

Współczynniki tej transformacji obliczamy w punkcie należącym do rozważanej linii świata. Baza (24) we współrzędnych sferycznych ma zatem postać

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\omega & 0 \\ R\omega\gamma \sin \psi & \cos \psi & \frac{\gamma}{R} \sin \psi & 0 \\ R\omega\gamma \cos \psi & -\sin \psi & \frac{\gamma}{R} \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Baza (28) nie jest ortonormalna w metryce Schwarzschilda, jednak można ten defekt stosunkowo łatwo naprawić w poniższy sposób

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\omega & 0 \\ R\omega\gamma \sin \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} & \cos \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & \frac{\gamma}{R} \sin \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & 0 \\ R\omega\gamma \cos \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} & -\sin \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & \frac{\gamma}{R} \cos \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

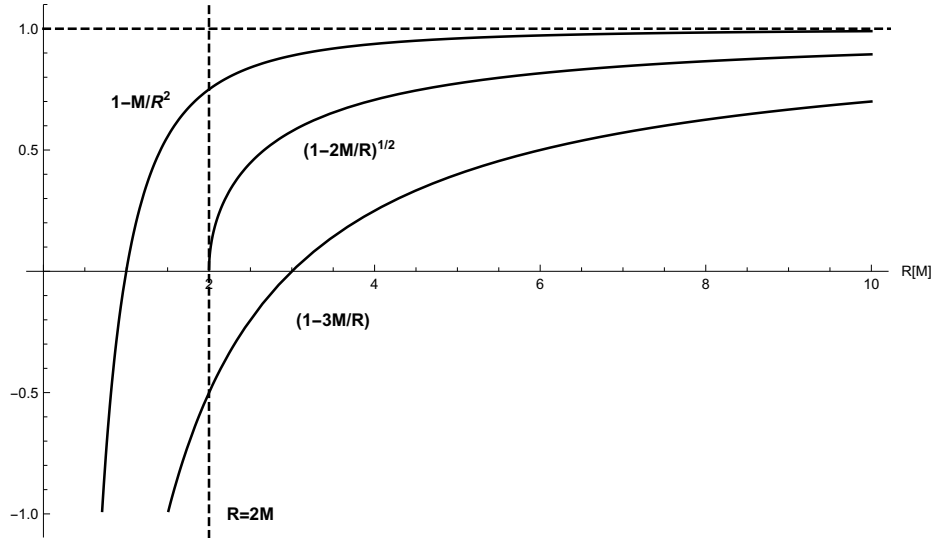
Z prawa transportu (FW) otrzymujemy równania różniczkowe na kąt obrotu ψ . Bez straty ogólności zakładamy warunek początkowy $\psi(0) = 0$ i otrzymujemy rozwiązanie

$$\psi = -\omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right).$$

Mając odpowiedni reper ruchomy, znajdujemy równanie na fazę zegara

$$\begin{aligned} \chi = -\psi &= \omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right), \quad \alpha = \gamma^2 \left| R\omega^2 - \frac{M}{R^2} \right| \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}, \\ \dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + \gamma^2 \left| R\omega^2 - \frac{M}{R^2} \right| \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \sin \left(\varphi - \omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right) \right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że uzyskane równanie różni się od rozwiązania, otrzymanego w ruchu po okręgu w płaskiej metryce Minkowskiego czynnikami $(1 - 2M/R)^{1/2}$, $(1 - 3M/R)$, $-M/R^2$ oraz strukturą czynnika γ . Porównanie wielkości każdego z czynników w zależności od R przedstawiamy na wykresie 6. Dla uproszczenia oraz lepszego oddania charakteru czynników, kreślimy wykres $1 - M/R^2$ zamiast M/R^2 . Pomijamy w analizie czynnik γ , gdyż zbiega on do swojego odpowiednika w metryce Minkowskiego podobnie jak $(1 - 2M/R)^{1/2}$ do jedności. Dla odpowiednio dużych R wpływ masy M na działanie zegara jest niewielki, przy czym silniej wpływa na kąt χ niż na przyspieszenie α .



Rysunek 6: Wykres czynników wpływających na działanie zegara pochodzących od M w zależności od R .

Jeśli zamiast ruchu po okręgu rozważymy zegar spoczywający w polu grawitacyjnym, to odpowiednie rachunki przebiegają podobnie i wystarczy w poprzednich rozwiązaniach położyć $\omega = 0$. Dostajemy wtedy

$$\begin{aligned}\gamma &= \left(1 - \frac{M}{R^2}\right)^{-1/2}, \\ \alpha &= \frac{M}{R^2} \left(1 - \frac{M}{R^2}\right)^{1/2}, \\ \chi &= 0, \\ \dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + \gamma^2 \frac{M}{R^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \sin(\varphi).\end{aligned}$$

W przypadku zegara spoczywającego w polu grawitacyjnym, struktura równania na fazę przypomina równanie uzyskane dla ruchu hiperbolicznego. Sugeruje to, że działanie zegara w obu przypadkach może być podobne.

5 Analiza równania fazy zegara

5.1 Zegar w przypadku stałego przyspieszenia.

Jeśli założymy stałe przyspieszenie właściwe α , to wektor przyspieszenia A będzie zależeć od parametru χ . Założmy dodatkowo szczególną postać $\chi(s) = ps + q$, gdzie $p, q = \text{const}(s)$. Gdy $p = 0$, to wektor A jest podczas ruchu transportowany za pomocą transportu (FW). W tym przypadku rozwiązanie uzyskujemy stosując podstawienie

$$\begin{aligned}\Phi &= \varphi - \chi, \\ \frac{d\Phi}{ds} &= \frac{d\varphi}{ds} - p, \\ \frac{d\Phi}{ds} &= \pm \frac{2}{\ell} - p + \alpha \sin(\Phi), \\ ds &= \frac{d\Phi}{\pm \frac{2}{\ell} - p + \alpha \sin(\Phi)}.\end{aligned}\tag{29}$$

Całkując prawą stronę powyższej równości, stosujemy podstawienie $x = \text{tg}(\Phi/2)$. Dla uproszczenia wprowadzamy oznaczenia $B = \pm \frac{2}{\ell} - p$, $C = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{B^2}}$.

$$s + s_0 = \frac{2}{BC} \arctg \left(\frac{\text{tg}(\Phi/2)}{C} + \frac{\alpha}{BC} \right).$$

Po oczywistych przekształceniach otrzymujemy

$$\varphi = ps + q + 2 \arctg \left(C \text{tg}(BC(s + s_0)/2) - \frac{\alpha}{B} \right).$$

Zauważmy, że dla $\alpha \rightarrow 0$ rozwiązanie jest postaci

$$\varphi = \pm \frac{2}{\ell} s + \text{const}.$$

Zakładając warunek początkowy $\varphi(0) = -\pi/2$, możemy wyznaczyć stałą całkowania

$$s_0 = \frac{2}{BC} \arctg \left(-\frac{1}{C} \text{tg}(q/2 + \pi/4) + \frac{\alpha}{BC} \right).$$

5.2 Rozwiązanie przybliżone.

Interesuje nas, jak zegar zachowuje się dla małych przyspieszeń. W tym celu rozwiążemy równanie (16), stosując rachunek zaburzeń ze względu na parametr α . Zapisujemy ϕ oraz χ w postaci szeregów

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \varphi_n, \\ \chi &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \chi_n,\end{aligned}$$

Następnie w równaniu (16) rozwijamy sinus w szereg

$$\dot{\varphi} \mp \frac{2}{\ell} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\varphi - \chi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0.$$

Wstawiamy rozwinięcia φ i χ do uzyskanego równania i porządkujemy wyrazy ze względu na α z dokładnością do $O(\alpha^2)$. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_0 = \pm \frac{2}{\ell}, & \varphi_0(0) = -\frac{\pi}{2}, \\ \dot{\varphi}_1 = \sin(\varphi_0 - \chi_0), & \varphi_1(0) = 0, \end{cases}$$

z którego wyznaczamy następujące rozwiązania

$$\begin{cases} \varphi_0 = \pm \frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2}, \\ \varphi_1 = -\alpha \int_0^s \cos\left(\pm \frac{2s_1}{\ell} - \chi_0(s_1)\right) ds_1. \end{cases}$$

Ostatecznie szukane przez nas rozwiązanie przybliżone ma postać

$$\varphi = \pm \frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2} - \alpha \int_0^s \cos\left(\pm \frac{2s_1}{\ell} - \chi_0(s_1)\right) ds_1 + O(\alpha^2). \quad (30)$$

Z rozwiązania przybliżonego wiemy, że dla małych przyspieszeń nasz model zegara dobrze mierzy czas własny s . Przyspieszenie charakterystyczne, przy którym poprawki pierwszego rzędu zaczynają mieć istotny wpływ na działanie zegara, wynosi $\alpha_c = \frac{2}{\ell}$. Dla małych przyspieszeń rząd wielkości poprawki szacujemy przez $\epsilon = \frac{\alpha}{\alpha_c}$.

5.3 Ruch jednostajnie przyspieszony.

W przypadku relatywistycznego odpowiednika ruchu jednostajnie przyspieszonego mamy $\chi = \pi$ oraz $\alpha = \text{const.}$ Analityczne rozwiązanie równania na fazę zegara jest postaci

$$\varphi = \pi + 2\text{arctg} \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}} \text{tg} \left(\pm \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}} (s + s_0) / \ell \right) \mp \frac{\alpha \ell}{2} \right),$$

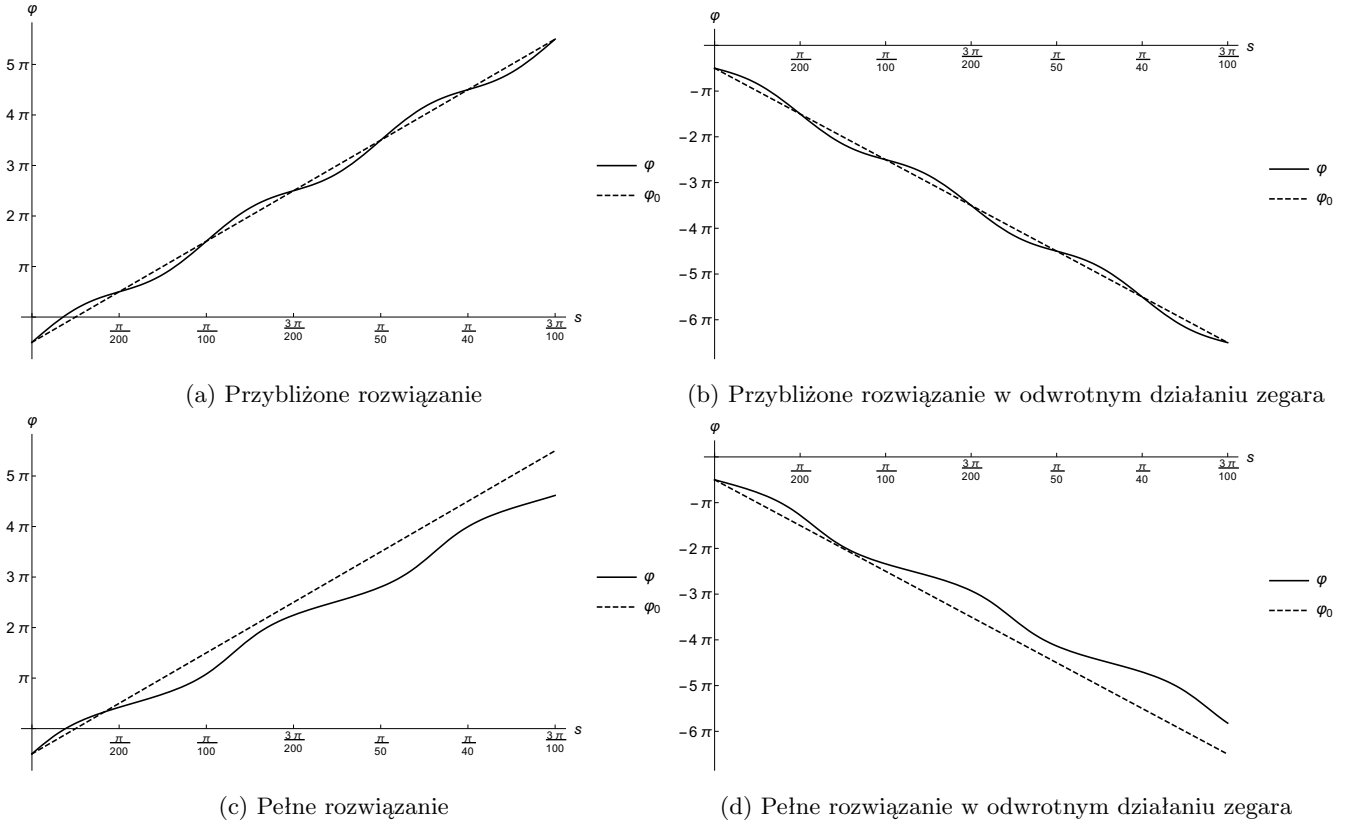
gdzie stała s_0 wynosi

$$s_0 = \pm \ell \text{arctg} \left(\left(1 \pm \frac{\alpha \ell}{2} \right) / \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}} \right) / \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}},$$

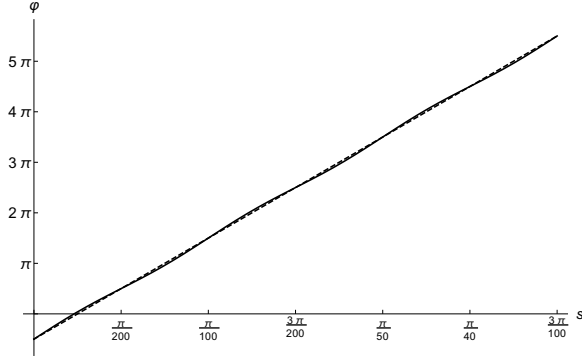
natomiast przybliżone rozwiązanie dane jest przez

$$\varphi = \pm \frac{2}{\ell} s - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha \ell}{2} \sin(2s/\ell) + O(\alpha^2).$$

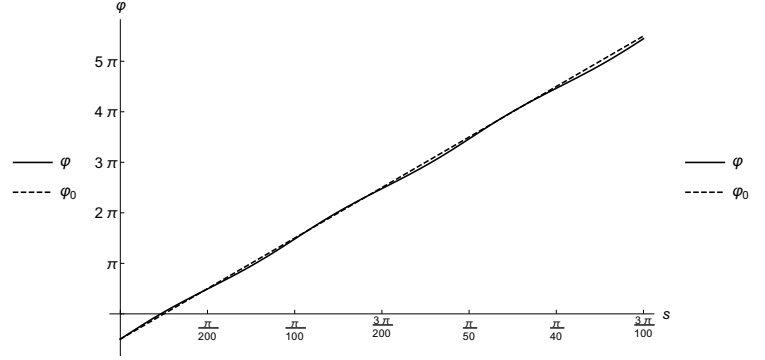
Rozwiązania dla $\ell = 0,01$ oraz $\alpha = 100$ przy różnych kierunkach działania zegara zostały przedstawione na wykresach 7a-7d. Wykres pełnego rozwiązania ukazuje, że niezależnie od kierunku działania zegara przy dużych przyspieszeniach, zegar będzie opóźniony w stosunku do czasu własnego. Tego efektu nie widać w rozwiązaniu przybliżonym. Na wykresach 8a-8f porównano przybliżone rozwiązanie z pełnym dla różnych przyspieszeń. Widzimy, że przybliżenie jest zadowalające dla odpowiednio małych wartości $\epsilon = \alpha/\alpha_c$.



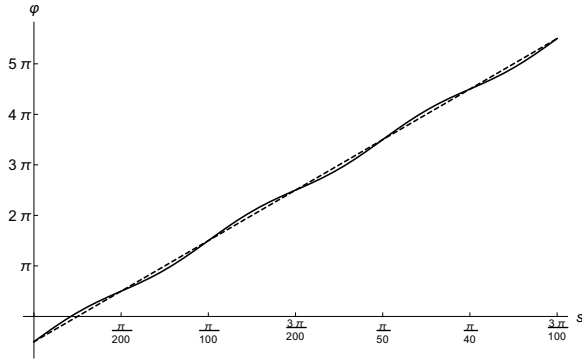
Rysunek 7: Faza zegara φ w ruchu hiperbolicznym dla $\ell = 0,01$ oraz $\alpha = 100$ w porównaniu do fazy φ_0 w układzie bez przyspieszeń.



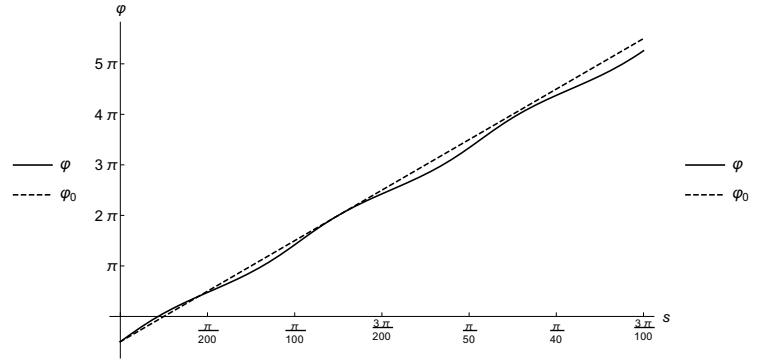
(a) Przybliżone rozwiązanie dla $\alpha = 25$



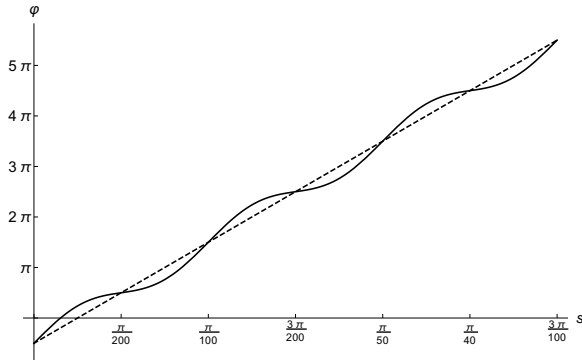
(b) Pełne rozwiązanie dla $\alpha = 25$



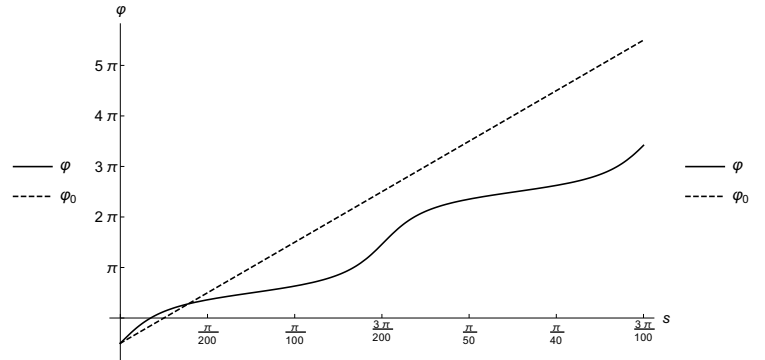
(c) Przybliżone rozwiązanie dla $\alpha = 50$



(d) Pełne rozwiązanie dla $\alpha = 50$



(e) Przybliżone rozwiązanie dla $\alpha = 150$



(f) Pełne rozwiązanie dla $\alpha = 150$

Rysunek 8: Porównanie rozwiązania przybliżonego z rozwiązaniem pełnym dla fazy zegara φ w ruchu hiperbolicznym przy $\ell = 0,01$. Linia przerywaną zaznaczono fazę φ_0 w układzie bez przyspieszeń.

5.4 Ruch po okręgu.

Dla ruchu po okręgu o promieniu R z częstością ω mamy $\chi = \omega\gamma^2 s$ oraz $\alpha = R\omega^2\gamma^2$. W takim przypadku rozwiązanie równania na fazę zegara dane jest przez

$$\varphi = \omega\gamma^2 s + 2\arctg\left(\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}} \operatorname{tg}\left(\left(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2\right)\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}}(s + s_0)/2\right) - \frac{R\omega^2\gamma^2}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2}\right),$$

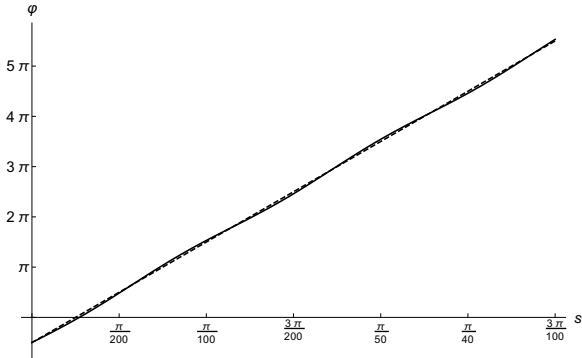
gdzie

$$s_0 = \frac{2}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2} \arctg\left(\left(\frac{R\omega^2\gamma^2}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2} - 1\right) / \sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}}\right) / \sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}},$$

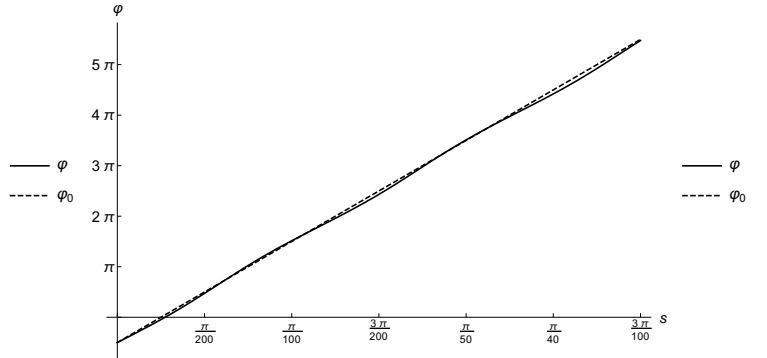
a przybliżenie dla małych przyspieszeń ma postać

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2} + \frac{R\omega^2\gamma^2}{\pm 2/\ell - \omega\gamma^2} \sin((\pm 2/\ell - \omega\gamma^2)s) + O(\alpha^2).$$

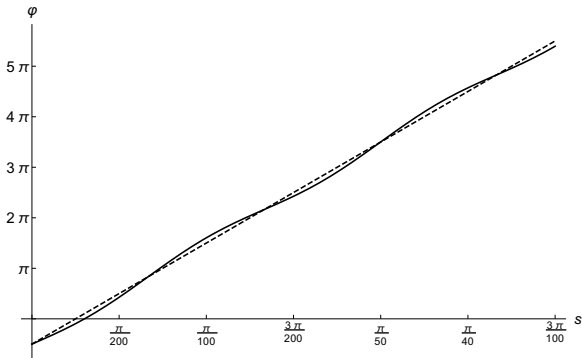
Na rysunkach 9a-9d przedstawiono wykres fazy zegara φ od czasu własnego s w ruchu po okręgu przy parametrach $\ell = 0,01$ i $R = 1$ dla różnych prędkości kątowych ω . Widzimy, że mimo różnic pomiędzy ruchem hiperbolicznym, a ruchem po okręgu, charakter zaburzeń wprowadzanych przez obecność przyspieszenia jest bardzo zbliżony. Rozwiązanie przybliżone przestaje być dobre dopiero dla ogromnych prędkości kątowych.



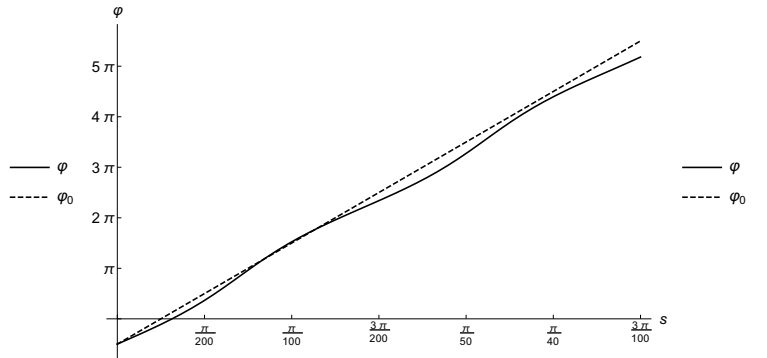
(a) Rozwiązanie przybliżone dla $\omega = 0,98$



(b) Rozwiązanie pełne dla $\omega = 0,98$



(c) Rozwiązanie przybliżone dla $\omega = 0,99$



(d) Rozwiązanie pełne dla $\omega = 0,99$

Rysunek 9: Porównanie rozwiązania przybliżonego z rozwiązaniem pełnym dla fazy zegara φ w ruchu po okręgu przy $\ell = 0,01$ i $R = 1$ dla różnych prędkości ω . Linia przerywaną zaznaczono fazę φ_0 w układzie bez przyspieszeń.

5.5 Analiza modelu pod kątem pomiaru.

Najprostszym obiektem, dla którego można użyć modelu zegara idealnego, wydaje się być elektron. Oszacujemy rząd wielkości przyspieszenia, dla którego spodziewamy się obserwowalnych odstępstw od hipotezy zegara. Za parametr ℓ możemy podstawić wielkość charakterystyczną dla elektronu o wymiarze metra – długość Komptonowską fali (31). Wtedy przyspieszenie charakterystyczne wynosi (32). Dla porównania energie, elektronów otrzymywane w akceleratorach liniowych są rzędu kilku-kilkunastu GeV. Dla szacowania przyjmujemy gradient przyspieszenia rzędu kilku GeV/m [GK15]. Zatem osiągalne przyspieszenia szacujemy jako (33).

$$\lambda_e \approx 2,426 \cdot 10^{-10} \text{cm}, \quad (31)$$

$$\alpha_c \approx 8,244 \cdot 10^9 \text{cm}^{-1}, \quad (32)$$

$$\alpha \approx 10^2 \text{cm}^{-1}. \quad (33)$$

Energie protonów osiąmane w ośrodku badawczym CERN są rzędu 7TeV [Cer]. Tak wysokie energie, a co za tym idzie przyspieszenia, skłaniają do przeprowadzenia podobnego szacowania dla protonu. Komptonowska długość fali protonu wynosi (34). Przyspieszenie charakterystyczne dla protonu jest równe (35). Proton, krążący po pierścieniu akceleryjnym z energią 7TeV, doświadczy przyspieszenia rzędu (36). Porównując rzędy wielkości przyspieszeń stwierdzamy, że osiągalne w tej chwili przyspieszenia nie są wystarczające do sprawdzenia hipotezy.

$$\lambda_p \approx 1,321 \cdot 10^{-13} \text{cm}, \quad (34)$$

$$\alpha_c \approx 7,57 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-1}, \quad (35)$$

$$\alpha \approx 124 \text{cm}^{-1}. \quad (36)$$

6 Podsumowanie

Badanie hipotezy zegara jest ważne ze względu na jej podstawowy charakter w teorii względności. Fundamentalny rotator relatywistyczny dostarcza matematycznej interpretacji mechanizmu zegarowego, która pozwala na zbudowanie modelu zegara idealnego. Krzywa chronometryczna stowarzyszona z takim zegarem daje zależność fazy zegara φ , będącej wyróżnioną parametryzacją tej krzywej, od czasu własnego rozumianego jako długość linii świata środka masy. Motywowani modelem zegara idealnego, wyprowadziliśmy równanie różniczkowe, które określa postać fazy φ . W układach bez przyspieszeń równanie zredukowało się, a faza zegara stała się równa czasowi własnemu (z dokładnością do wyboru jednostek i chwili początkowej). Następnie zbadaliśmy krzywą chronometryczną w różnych warunkach fizycznych, w których występuje niezerowe przyspieszenie. Wyzaczyliśmy równanie na fazę φ w ruchu hiperbolicznym i ruchu po okręgu w przestrzeni Minkowskiego oraz ruchu po okręgu z perspektywy odległych galaktyk. Zbadaliśmy również jak działa zegar w polu grawitacyjnym czarnej dziury. W układach tych pojawił się czynnik zaburzający działanie zegara, który zależy nie tylko od wartości przyspieszenia, ale również od jego kierunku. Faza φ przestaje być wtedy odpowiednia do pomiaru czasu własnego. Sugeruje to, że hipoteza zegara może się załamywać, gdy pojawia się przyspieszenie. Zaburzenie fazy zegara jest zauważalne dopiero dla ogromnych przyspieszeń. Aktualnie przeprowadzane eksperymenty odbywają się w warunkach o zbyt małych przyspieszeniach. Otrzymane wyniki mogą być motywacją do projektowania doświadczeń, w których można będzie zaobserwować załamanie się hipotezy zegara.

Załączniki

A Dodatek matematyczny

A.1 Rozwiązanie układu równań z funkcją f w modelu Staruszkiewicza.

Dany jest układ równań postaci

$$f(\xi)^2 - 4f(\xi)f'(\xi)\xi = 1 = 16f(\xi)^2f'(\xi)^2\xi.$$

Zauważmy przy tym, że

$$\xi = -\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} > 0.$$

Rozwiążemy teraz pierwsze z równań, to jest

$$f(\xi)^2 - 4f(\xi)f'(\xi)\xi = 1.$$

Można je przekształcić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

$$\frac{1}{\xi} = \frac{4f(\xi)}{f(\xi)^2 - 1} f'(\xi)$$

$$\ln \xi = \int \frac{4f}{f^2 - 1} df$$

$$\ln \xi = \int \frac{2}{f^2 - 1} df^2$$

$$\ln C_1 \xi = 2 \ln |f^2 - 1|, \quad C_1 > 0$$

$$C_1 \xi = (f^2 - 1)^2$$

$$\sqrt{C_1 \xi} = |f^2 - 1|$$

$$|f(\xi)| = \sqrt{1 \pm C \sqrt{\xi}}$$

Rozwiążemy teraz równanie

$$16f(\xi)^2 f'(\xi)^2 \xi = 1.$$

Ponownie równanie to da się zapisać jako równanie o zmiennych rozdzielonych.

$$4f(\xi)f'(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

$$2f^2 = \pm 2\sqrt{\xi} + 2C_2$$

$$f^2 = \pm \sqrt{\xi} + C_2$$

$$|f| = \sqrt{\pm \sqrt{\xi} + C_2}$$

Oba rozwiązania uzgadniamy, wybierając stałe całkowania $C_1 = 1$ oraz $C_2 = 1$.

Bibliografia

- [HM01] M. Heller i J. Mączka. *Czas...* BIBLOS Tarnów & OBI Kraków, 2001. ISBN: 83-7332-019-9.
- [Ein05] A. Einstein. “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”. Deutsch. In: *Annalen der Physik* 322 (1905), S. 891–921. DOI: 10.1002/andp.19053221004.
- [MP12] H. Minkowski and V. Petkov. *Space and Time: Minkowski’s papers on relativity*. English. Minkowski Institute Press, 2012. ISBN: 978-0-9879871-2-9.
- [Sta08] A. Staruszkiewicz. “Fundamental relativistic rotator”. English. In: *Acta Phys. Pol. B* 1 (Jan. 2008), pp. 109–112.
- [KT84] W. Kopczyński i A. Trautmann. *Czasoprzestrzeń i grawitacja*. PWN, Warszawa, 1984. ISBN: 83-01-02266-3.
- [GO03] J. Gancarzewicz i B. Opozda. *Wstęp do geometrii różniczkowej*. Matematyka. Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 2003. ISBN: 83-233-1768-2.
- [OR13] H. C. Ohanian and R. Ruffini. *Gravitation and Spacetime*. English. Cambridge University Press, 2013. ISBN: 9781139003391.
- [Bai+77] J. Bailey et al. “Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit”. English. In: *Nature* 268 (1977), pp. 301–305.
- [LL78] L. D. Landau i E. M. Lifszyc. *Krótki kurs fizyki teoretycznej: Mechanika, Elektrodynamika*. PWN, Warszawa, 1978.
- [Bra12] Ł. Bratek. “Spinor particle. An indeterminacy in the motion of relativistic dynamical systems with separately fixed mass and spin”. English. In: *J. Phys.: Conf. Ser.* 343, 012017 (Feb. 2012).
- [Bra15] Ł. Bratek. “Relativistic Ideal Clock”. English. In: *ArXiv e-prints* (Nov. 2015). arXiv: 1511.00419 [math-ph].
- [Dir50] P. A. M. Dirac. “Generalized Hamiltonian Dynamics”. W: *Can. J. Math.* 2.1246 (1950), s. 129–148.
- [Dir81] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1981. ISBN: 9780198520115.
- [Syn60] J. L. Synge. *Relativity: The general theory*. English. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
- [CN15] L. F. O. Costa and J. Natário. “Inertial forces in general relativity”. English. In: *J. Phys.: Conf. Ser.* 600.1, 012053 (2015). DOI: 10.1088/1742-6596/600/1/012053.
- [AP14] A. Ashtekar and V. Petkov. *Springer Handbook of Spacetime*. English. Springer, Berlin, 2014. DOI: 10.1007/978-3-642-41992-8.
- [Sta93] A. Staruszkiewicz. *Algebra i geometria*. Wykłady dla fizyków, tom I. $\langle N|K|F \rangle$, Kraków, 1993. ISBN: 83-7081-086-1.
- [Har16] J. B. Hartle. *Grawitacja: Wprowadzenie do ogólnej teorii względności Einsteina*. Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 2016. ISBN: 978-83-235-0476-4.
- [IJ80] R. S. Ingarden i A. Jamiołkowski. *Elektrodynamika klasyczna*. PWN, Warszawa, 1980. ISBN: 83-01-00464-9.

- [GK15] H. S. Ghotra and N. Kant. “Electron acceleration by a chirped laser pulse in vacuum under the influence of magnetic field”. English. In: *Opt. Rev.* 22.4 (2015), pp. 539–543. issn: 1349-9432. DOI: 10.1007/s10043-015-0113-6.
- [Cer] *The accelerator complex*. English. <https://home.cern/about/accelerators>. Dostęp: 2018-05-15.