



Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Praca magisterska

Paweł Rzońca

kierunek studiów: **Fizyka Techniczna**

Badanie krzywych chronometrycznych w kontekście hipotezy zegara

Opiekun: **dr hab. Łukasz Bratek**

Kraków, wrzesień 2018

Oświadczam, świadomy odpowiedzialności karnej za poświadczenie nieprawdy, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie i nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

.....

(czytelny podpis)

Kraków,

**Tematyka pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej Pawła Rzońcy, studenta V roku studiów
kierunku fizyka techniczna**

Temat pracy magisterskiej: **Badanie krzywych chronometrycznych w kontekście hipotezy zegara**

Opiekun pracy: dr hab. Łukasz Bratek

Recenzenci pracy:

Miejsce praktyki dyplomowej: WFMI PK, Kraków

Program pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej

1. Omówienie realizacji pracy magisterskiej z opiekunem.
2. Zebranie i opracowanie literatury dotyczącej tematu pracy.
3. Praktyka dyplomowa:
 - zapoznanie się z literaturą przedmiotu dotyczącą hipotezy zegara,
 - opracowanie podstawowych pojęć i narzędzi związanych z tematyką przedmiotu,
 - konstrukcja modelu idealnego zegara dla ciała w ruchu po okręgu,
 - powtórzenie konstrukcji modelu idealnego zegara dla metryki FLRW,
 - stworzenie skryptów do generacji wykresów,
 - sporządzenie sprawozdania z praktyk.
4. Kontynuacja obliczeń związanych z tematem pracy magisterskiej.
5. Zebranie i opracowanie wyników obliczeń.
6. Analiza wyników obliczeń.
7. Opracowanie redakcyjne pracy.

Termin oddania w dziekanacie:

.....
(podpis kierownika katedry)

.....
(podpis opiekuna)

Na kolejnych dwóch stronach proszę dołączyć kolejno recenzje pracy popelnione przez Opiekuna oraz Recenzenta (wydrukowane z systemu MISIO i podpisane przez odpowiednio Opiekuna i Recenzenta pracy). Papierową wersję pracy (zawierającą podpisane recenzje) proszę złożyć w dziekanacie celem rejestracji co najmniej na tydzień przed planowaną obroną.

Tu zostanie umieszczona recenzja opiekuna

Tu zostanie umieszczona recenzja recenzenta

Spis treści

1	Wstęp	8
2	Pojęcia wstępne	9
2.1	Wstępne pojęcia i konwencje.	9
2.2	Krzywe w czasoprzestrzeni.	9
2.3	Czas własny. Hipoteza zegara.	11
2.4	Pochodna absolutna i transport równoległy.	12
3	Konstrukcja zegara	13
3.1	Fundamentalny relatywistyczny rotator.	13
3.2	Model uogólniony.	15
3.3	Transport Fermiego-Walkera.	16
3.4	Czwórka symetryczna kierunków zerowych.	17
3.5	Konstrukcja zegara.	20
4	Aplikacje	23
4.1	Ruch hiperboliczny.	23
4.2	Ruch po okręgu.	24
4.3	Ruch po okręgu względem galaktyk.	25
4.4	Ruch po okręgu wokół czarnej dziury.	26
5	Analiza równania fazy zegara	30
5.1	Zegar w przypadku stałego przyspieszenia.	30
5.2	Rozwiązanie przybliżone.	31
5.3	Ruch jednostajnie przyspieszony.	32
5.4	Ruch po okręgu.	34
5.5	Analiza modelu pod kątem pomiaru.	35
6	Podsumowanie	36
A	Dodatek matematyczny	37
A.1	Rozwiązanie układu równań z funkcją f w modelu Staruszkiewicza.	37

1 Wstęp

Od czasów starożytnych czas wyobrażano sobie jako jednowymiarową rozmaitość różniczkową. Oczywiście pojęcie rozmaitości różniczkowej jeszcze wtedy nie istniało, lecz ówczesne wyobrażenia dobrze pasują do jej definicji [Hel93]. Można powiedzieć, że rozmaitości różniczkowe jednowymiarowe są dwie: okrąg i prosta. Pozostałe jednowymiarowe rozmaitości możemy uzyskać poprzez rozciąganie i zginanie (dokładniej homeomorficzne przekształcenie) tychże rozmaitości. Obserwowane zjawiska takie jak następujące po sobie pory roku czy też cykl faz Księżyca dały początek pierwszym miarom czasu. Prowadzi to do koncepcji czasu periodycznego, który możemy utożsamiać z okręgiem. Okrąg taki zostaje rozcięty przez zdarzenie, które występuje jednokrotnie. Takim zdarzeniem może być na przykład przyjście na świat Jezusa Chrystusa, co obserwujemy w postaci powszechnie używanego kalendarza. Wyobrażenie prostej wiąże się również z porządkiem, kolejnością zdarzeń. Dostatecznie mały fragment okręgu jest bardzo zbliżony do prostej, więc w przypadku okręgu również można myśleć o porządku, lecz tylko w sensie lokalnym. W istocie wyobrażenie czasu w postaci porządku zdarzeń pojawiło się naturalnie wcześniej niż wyobrażenie jako prosta w sensie ścisłym, które to zaczęło się pojawiać wraz z pojawieniem się ilościowego opisu przyrody [HM01].

Istotna zmiana wyobrażenia czasu nastąpiła wraz z wprowadzeniem przez Einsteina w 1905 r. Szczególnej Teorii Względności [Ein05]. Pojawiło się mieszanie współrzędnych przestrzennych i czasu przy transformacji inercjalnych układów odniesienia. W 1907 Minkowski nadał szczególnej teorii względności geometryczną postać traktując czas jako czwartą współrzędną [MP12], co może wprowadzać pewne problemy interpretacyjne, gdyż taki czas płynie różnie w różnych inercjalnych układach odniesienia. Wprowadził on również pojęcie czasu własnego jako długości krzywej czasoprzestrzennej, po której odbywa się ruch, zwanej linią świata. W tym sensie czas własny porządkuje zdarzenia czyli punkty znajdujące się na linii świata. Czas własny jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, więc posługując się nim nie wyróżniamy żadnego obserwatora. Hipoteza zegara mówi, że istnieje zegar idealny, który odmierza czas własny wzdłuż swojej linii świata niezależnie od przyspieszeń (krzywizny) jakim podlega.

W następnym rozdziale wprowadzimy pojęcia wstępne oraz omówimy wspomnianą hipotezę. W rozdziale trzecim wprowadzamy pojęcie fundamentalnego relatywistycznego rotatora [Sta08] oraz zaprezentujemy model zegara idealnego. Następnie wprowadzamy krzywą chronometryczną, która jest motywowana realizacją tego modelu. W następnych rozdziałach badamy krzywe chronometryczne dla różnych ruchów pod kątem prawdziwości hipotezy zegara.

2 Pojęcia wstępne

2.1 Wstępne pojęcia i konwencje.

Modelem ogólnej teorii względności jest czterowymiarowa Lorenzowska rozmaitość różniczkowa. Czasoprzestrzeń jest zbiorem elementów, które nazywamy zdarzeniami [KT84] i będziemy oznaczali przez M . O czasoprzestrzeni zakładamy, że jest niepustą przestrzenią Hausdorffa (czyli taką, że dla każdych dwóch punktów $p, q \in M$ istnieją rozłączne otoczenia U_p, U_q odpowiednio punktów p, q). Mapą w otoczeniu U punktu $p \in M$ nazywamy parę (U, ξ) , gdzie $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem (ciągłą bijekcją, której odwrotność jest ciągła). Homeomorfizm ξ nazywamy układem współrzędnych w otoczeniu p . Mówimy, że dwie mapy są zgodne, jeżeli $\xi_1 \circ \xi_2$ (tam gdzie ma sens) jest dyfeomorfizmem klasy C^k (homeomorfizm z ciągłymi pochodnymi stopnia k). Zbiór A map parami zgodnych (o zgodności klasy C^k) takich, że pokrywają cały zbiór M nazywamy atlasem klasy C^k . Atlasem maksymalnym nazywamy atlas do którego nie można dodać kolejnej mapy bez złamania zgodności. Rozmaitością różniczkową klasy C^k nazywamy zbiór M z atlasem maksymalnym klasy C^k . Wymiarem rozmaitości nazywamy wymiar przestrzeni \mathbb{R}^n , na której modelujemy rozmaitość. Od teraz przyjmujemy, że rozmaitość jest klasy C^∞ oraz $n = 4$. Rozmaitość nazywamy Lorenzowską jeśli określony na niej tensor metryczny g ma sygnaturę $(+, -, \dots, -)$.

Będziemy stosować konwencję sumacyjną Einsteina. Ustalamy, że indeksy oznaczane literami greckimi zmieniają się w zakresie od 0 do 3, natomiast indeksy oznaczane literami arabskimi w zakresie od 1 do 3. Jednostki ustalamy tak, że $c = 1$.

2.2 Krzywe w czasoprzestrzeni.

W tej części wprowadzimy pojęcie krzywej w czasoprzestrzeni. Jest to bardzo ważny obiekt matematyczny, gdyż służy do definiowania wektora stycznego na rozmaitości różniczkowej [GO03].

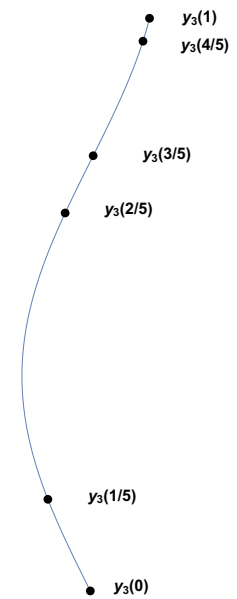
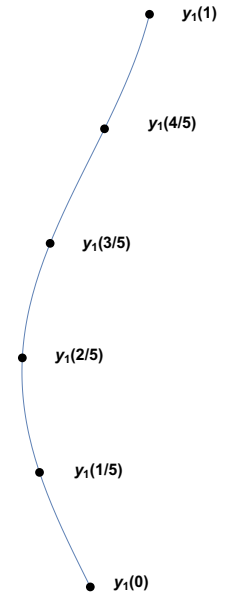
Definicja 1. Krzywą sparametryzowaną (lub parametryzacją krzywej) nazywamy odwzorowanie $y_1 : I \ni \tau \rightarrow y_1(\tau) \in M$ klasy C^∞ , gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym (niekoniecznie skończonym).

Definicja 2. Parametrem krzywej sparametryzowanej y_1 nazywamy funkcję τ_1 taką, że $y_1(I) \ni p \rightarrow \tau_1(p) = y_1^{-1}(p) \in I$. Będziemy pisać τ_1 zamiast $\tau_1(p)$, wszędzie gdzie punkt p wynika z kontekstu.

Definicja 3. Niech $y_1 : I \rightarrow M$ i $y_2 : J \rightarrow M$ będą parametryzacjami. Reparametryzacją krzywej będziemy nazywać dyfeomorfizm $f : I \rightarrow J$ klasy C^∞ taki, że $y_1 = y_2 \circ f$.

Jeśli dla dwóch parametryzacji istnieje reparametryzacja to mówimy, że są one równoważne. Można łatwo pokazać, że jest to relacja równoważności. Możliwość różnego parametryzowania tej samej krzywej możemy rozumieć tak, że możemy podróżować wzdłuż krzywej w różny sposób.

Definicja 4. Krzywą (lub krzywą niesparametryzowaną) nazywamy klasę równoważności parametryzacji ze względu na powyższą relację równoważności. Jeżeli y jest krzywą, y_1 jej parametryzacją z parametrem τ_1 to wprowadzamy oznaczenie $y_1 := y(\tau_1)$.



Rysunek 1: Różne parametryzacje krzywej y .

Definicja 5. Niech (U, ξ) będzie mapą punktów $p \in U \subset M$. W tej mapie przez y^μ oznaczamy współrzędne krzywej y . Wektorem stycznym do krzywej y w punkcie p (lub wektorem prędkości w parametrze τ) nazywamy wektor $y'(\tau)$ taki, że

$$y'(\tau) = \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau}.$$

Mając mapę w punkcie p możemy określić bazę w danym punkcie za pomocą wektorów stycznych do linii układu współrzędnych. Taką bazę należy rozumieć jako bazę lokalną (bazę w punkcie p). W bazie ortonormalnej macierz tensora metrycznego przybiera postać

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tensor metryczny g wprowadza następujący podział wektorów:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &> 0 \implies u - \text{wektor czasowy,} \\ g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &= 0 \implies u - \text{wektor zerowy,} \\ g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &< 0 \implies u - \text{wektor przestrzenny.} \end{aligned}$$

Powyższy podział wyróżnia trzy rodzaje krzywych: czasową, zerową i przestrzenną.

Definicja 6. Krzywą y nazywamy krzywą czasową (zerową, przestrzenną), jeżeli w każdym punkcie $p \in y$ wektor y' jest wektorem czasowym (zerowym, przestrzennym). Linia świata cząstki jest krzywa czasowa lub, dla cząstek poruszających się z prędkością światła, krzywa zerowa.

Długość $S(y(\tau))$ krzywej czasowej y liczymy korzystając z tensora metrycznego g . Kwadrat długości elementu liniowego wyraża się przez

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.$$

Stąd długość krzywej liczymy wzorem

$$S(y(\tau)) = \int_{\tau(p_0)}^{\tau(p_1)} \sqrt{g(y'(\tau), y'(\tau))} d\tau. \quad (1)$$

Oczywiście długość krzywej nie powinna zależeć od wyboru parametryzacji. Istotnie, długość dana wzorem (1) jest niezmiennicza ze względu na reparametryzację. Niech τ_1, τ_2 będą parametrami powiązanymi reparametryzacją $\tau_2 = f(\tau_1)$, taką że $f'(\tau_1) > 0$ (gdy $f'(\tau_1) < 0$ rozumowanie przebiega analogicznie). Stosując zmianę zmiennych całkowania dostajemy

$$\begin{aligned} S(y(\tau_2)) &= \int_{\tau_2(p_0)}^{\tau_2(p_1)} \sqrt{g(y'(\tau_2), y'(\tau_2))} d\tau_2 = \int_{\tau_1(p_0)}^{\tau_1(p_1)} \sqrt{g\left(\frac{y'(\tau_1)}{f'(\tau_1)}, \frac{y'(\tau_1)}{f'(\tau_1)}\right)} f'(\tau_1) d\tau_1 = \\ &= \int_{\tau_1(p_0)}^{\tau_1(p_1)} \sqrt{g(y'(\tau_1), y'(\tau_1))} d\tau_1 = S(y(\tau_1)). \end{aligned}$$

Stosując ten sam wzór do krzywej zerowej otrzymujemy zerową długość. Od tej pory będziemy stosowali oznaczenie $x \cdot y := g(x, y)$.

2.3 Czas własny. Hipoteza zegara.

Czas własny stanowi przeniesienie na grunt Ogólnej Teorii Względności koncepcji czasu obecnej w mechanice nie-relatywistycznej. Pierwsza zasada dynamiki Newtona głosi, że istnieją ruchy będące ruchami jednostajnymi. W ruchu jednostajnym przemierzamy jednakowe odcinki drogi w jednakowych odstępach czasu. W ruchu swobodnym najprostszym elementem absolutnym jest długość linii świata tj. suma elementarnych odcinków czasowych wyznaczonych przez obserwatorów lokalnie inercjalnych. Jak pokazaliśmy długość krzywej jest funkcjonalem pierwszego rzędu w prędkościach niezależnym od parametryzacji. Jeżeli przyjąć, że stan fizyczny zależy od położenia i ich zmiany (pochodnych) to długość krzywej jest jedyną możliwością na zbudowanie funkcjonału czasu

$$T = \int \sqrt{x'(\tau) \cdot x'(\tau)} d\tau.$$

Spośród parametryzacji krzywych możemy wyróżnić parametryzację, dla której wektor prędkości jest jednostkowy. Taki parametr będziemy oznaczać przez s . Wartości tego parametru pokrywają się z wartością funkcjonału T (z dokładnością do wyboru jednostek i chwili początkowej).

Definicja 7. Parametrem afinicznym nazywamy parametr, dla którego prędkość w każdym punkcie krzywej ma tę samą długość.

Wynika z tego natychmiast, że czas własny jest parametrem afinicznym. Łatwo pokazać, że jeśli s jest parametrem afinicznym, to każdy parametr afiniczny jest postaci $as+b$, gdzie $a, b \in R$ i ta własność odzwierciedla swobodę wyboru jednostki i chwili początkowej. Wektor prędkości wzdłuż krzywej y parametryzowanej czasem własnym będziemy oznaczać przez \dot{y} . Mierzac czas własny nie wyróżniamy żadnego obserwatora inercjalnego, więc postępujemy zgodnie z zasadą względności Einsteina.

Do pomiaru czasu używa się zegarów, które możemy najogólniej zdefiniować następująco:

Definicja 8. Zegarem nazywamy dowolny układ fizyczny, w którym możemy wyodrębnić pewien mechanizm oscylacji. Oscylacje nazywamy częstością zegara, a ich ilość jest miarą czasu.

Mianem zegara idealnego określa się zegar mierzący czas własny niezależnie od krzywizny krzywej po jakiej się porusza. **Hipoteza zegara** głosi, że istnieją zegary idealne wedle powyższej definicji. Na gruncie Szczególnej Teorii Względności, przy założeniu ruchu bez przyspieszeń, hipoteza zegara jest spełniona, a realizacją takiego zegara może być zegar świetlny lub inaczej zegar geometrodynamiczny [OR13]. Powszechnie zakłada się, że obowiązuje ona również w ruchach przyspieszonych [KT84], jednak jest to tylko hipoteza i wymaga sprawdzenia.

Hipoteza zegara została eksperymentalnie sprawdzona dla ogromnych przyspieszeń rzędu 10^{19}m/s^2 [Bai+77]. Jednak ze stałych charakterystycznych dla elektronu można utworzyć wielkość o wymiarze przyspieszenia $m_e c^3 / \hbar$, która jest rzędu 10^{29}m/s^2 . Dla tak ogromnych przyspieszeń hipoteza zegara może się załamywać.

W rozdziale trzecim przedstawimy model zegara idealnego inspirowany fundamentalnym relatywistycznym rotatorem. **Krzywa chronometryczna**, która daje związek między fazą zegara jako odpowiednio zdefiniowanym kątem związanym z ruchem wewnętrznym zegara, a długością krzywej środka masy. Należy podkreślić, że rozważana tu krzywa chronometryczna nie jest rozwiązaniem równań ruchu modelu zegara idealnego, ale jest jedynie nim motywowana.

2.4 Pochodna absolutna i transport równoległy.

W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej z kartezjańskim układem współrzędnych x^i definiujemy transport równoległy wektora v w kierunku wektora w za pomocą równania

$$w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = 0.$$

To znaczy, że podczas przemieszczania wektora v po krzywej, której wektorem prędkości w parametrze τ jest wektor w , spełniony jest warunek

$$\frac{dv^i}{d\tau} = 0.$$

Jednak w ogólności możemy mieć do czynienia z krzywoliniowym układem współrzędnych lub przestrzenią zakrzywioną. W takim przypadku uogólnia się pojęcie transportu równoległego za pomocą pochodnej kowariantnej.

Definicja 9. Niech x^μ będzie układem współrzędnych. Pochodną kowariantną wektora v w kierunku wektora w nazywamy

$$w^\rho \nabla_\rho v^\mu = w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu w^\nu v^\sigma,$$

gdzie ∇ nazywamy koneksją afiniczną, a przez $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ są współczynnikami koneksji afinicznej w układzie x^μ . Współczynniki $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ przy zmianie układu współrzędnych z x^μ na \tilde{x}^μ transformują się według reguły

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\sigma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}$$

oraz określają one całkowitą koneksję afiniczną. W ogólnej teorii względności zakłada się, że koneksja jest

1. zgodna z metryką ($\nabla g = 0$),
2. beztorsyjna ($\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu$).

Wtedy koneksja jest jednoznacznie określona i nazywamy ją koneksją Leviego-Civity, a współczynniki $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ symbolami Christoffela danymi przez

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho} \right).$$

Definicja 10. Pochodną kowariantną wektora v w kierunku wektora prędkości y' krzywej y w parametrze τ nazywamy pochodną absolutną wektora v i oznaczamy

$$\frac{Dv^\mu}{d\tau} = \frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu v^\nu u^\rho.$$

Pochodną absolutną wektora v wzdłuż krzywej y parametryzowanej czasem własnym s będziemy oznaczać przez Dv/ds lub \dot{v} . Pochodna absolutna wektora o stałej długości jest prostopadła do niego samego.

Definicja 11. Linią geodezyjną (lub krzywą swobodnego spadku) nazywamy krzywą y , dla której

$$\frac{Dy'}{d\tau} = by',$$

gdzie $b = 0$, gdy τ jest parametrem afinicznym.

W dalszej części pracy przez u oraz A będziemy oznaczać prędkość oraz przyspieszenie definiowane jak następuje

$$u^\mu = \dot{y}^\mu = \frac{dy^\mu}{ds}, \quad A = \dot{u}^\mu = \frac{Du^\mu}{ds}.$$

3 Konstrukcja zegara

3.1 Fundamentalny relatywistyczny rotator.

Przez nierelatywistyczny rotator rozumiemy układ dwóch mas punktowych m_1 i m_2 połączonych nieważkim prętem długości ℓ (rys. 2). Lagrangian takiego układu w układzie środka masy ma postać [LL78]

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2, \quad m = m_1 + m_2, \quad r = r_2 - r_1,$$

gdzie r_1 i r_2 to odpowiednio położenia mas m_1 i m_2 . Zauważmy, że $\|r\| = \ell = \text{const}$, a zatem interesuje nas jedynie kierunek wyznaczony przez r . Z niezmienniczości powyższego Lagrangianu ze względu na obroty wiemy, że zachowany jest pseudowektor całkowitego momentu pędu (w tym jego kierunek). Ruch odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektor równoległy do kierunku wyznaczonego przez całkowity moment pędu. Za pomocą współrzędnych sferycznych (r, ϕ, θ) możemy wektor $\hat{r} = r/\ell$ przedstawić w postaci $\hat{r} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$. Obracamy układ odniesienia tak, aby ruch odbywał się w płaszczyźnie $\theta = \pi/2$. Lagrangian przyjmuje wtedy postać

$$L = \frac{m\ell^2}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2.$$

Z równania Eulera-Lagrange'a dla kąta ϕ wynika, że $\ddot{\phi} = 0$. Zatem $\phi \sim t$, to znaczy, że nierelatywistyczny rotator mierzy Newtonowski czas absolutny t . Skłania nas to do refleksji nad możliwością wykorzystania relatywistycznego rotatora do mierzenia czasu. Prostota układu sugeruje, że może on być odpowiedni do testowania hipotezy zegara.

Przeniesienie tego układu na grunt relatywistyczny wprowadził profesor Staruszkiewicz [Sta08] proponując następujące definicje:

Definicja 12. Relatywistyczny rotator to układ dynamiczny opisany przez położenie x i kierunek zerowy k oraz dodatkowo dwa parametry: masę m i długość ℓ .

Definicja 13. Układ dynamiczny nazywamy fenomenologicznym, jeżeli jego niezmienniki Casimira są całkami ruchu. Układ dynamiczny nazywamy fundamentalnym, jeżeli jego niezmienniki Casimira są parametrami (m. in. nie zależą od warunków początkowych).

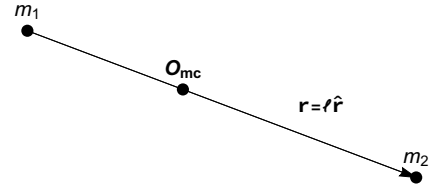
W oparciu o powyższe definicje można skonstruować fundamentalny relatywistyczny rotator. Z wielkości zawartych w definicji relatywistycznego rotatora tworzymy bezwymiarową wielkość

$$\xi = -\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2}.$$

Możemy wtedy utworzyć Lagrangian postaci

$$L = m\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} f(\xi). \quad (2)$$

Działanie związane z powyższym Lagrangianem jest niezmiennicze ze względu na transformację Lorentza oraz reparametryzację. Dodatkowo z racji, że k jest kierunkiem zerowym postać Lagrangianu nie zmienia się po przeskalowaniu $k \rightarrow ak$. Nie jest to najogólniejszy relatywistyczny rotator jaki można wziąć pod uwagę, gdyż ξ nie jest jedyną możliwą bezwymiarową kombinacją wielkości charakterystycznych dla relatywistycznego rotatora [Bra09].



Rysunek 2: Klasyczny rotator.

Oznaczmy przez P i Π pędy kanoniczne związane odpowiednio z x i k oraz przez M całkowity moment pędu.

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \quad \Pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{k}^\mu},$$

$$M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - P_\mu x_\nu + k_\mu \Pi_\nu - \Pi_\mu k_\nu.$$

Dla Lagrangianu (2) mamy

$$P_\mu = \frac{m}{\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}}} f(\xi) \dot{x}_\mu - 2 \frac{m}{\dot{k} \cdot \dot{x}} \sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} f'(\xi) \xi k_\mu,$$

$$\Pi_\mu = 2 \frac{m}{\dot{k} \cdot \dot{k}} \sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} f'(\xi) \xi \dot{k}_\mu.$$

W tym przypadku rozważamy niezmienniki Casimira grupy Poincarégo, którymi są $P_\mu P^\mu$ oraz $W_\mu W^\mu$, gdzie W jest pseudowektorem Pauliego-Lubańskiego danym przez

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^\sigma.$$

Kontrakcja tensora antysymetrycznego $A_{\mu\nu}$ z tensorem symetrycznym $S_{\mu\nu}$ jest równa zeru. Korzystając z tego i antysymetrii tensora ε dostajemy

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (x^\mu P^\nu - P^\mu x^\nu + k^\mu \Pi^\nu - \Pi^\mu k^\nu) P^\sigma = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (k^\mu \Pi^\nu - \Pi^\mu k^\nu) P^\sigma = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Pi^\mu k^\nu P^\sigma.$$

Dla Lagrangianu (2) możemy zapisać W_μ w postaci

$$W_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Pi^\mu k^\nu P^\sigma = 2 \frac{m^2}{\dot{k} \cdot \dot{k}} f(\xi) f'(\xi) \xi \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \dot{k}^\mu k^\nu \dot{x}^\sigma.$$

Pozwala to zapisać $W_\mu W^\mu$ w postaci wyznacznika Gramma

$$W_\mu W^\mu = 4 \frac{m^4}{(\dot{k} \cdot \dot{k})^2} f(\xi)^2 f'(\xi)^2 \xi^2 \begin{vmatrix} \dot{k} \cdot \dot{k} & \dot{k} \cdot k & \dot{k} \cdot \dot{x} \\ k \cdot \dot{k} & k \cdot k & k \cdot \dot{x} \\ \dot{x} \cdot \dot{k} & \dot{x} \cdot k & \dot{x} \cdot \dot{x} \end{vmatrix}.$$

Inwestując równości $k \cdot k = 0$, $\dot{x} \cdot \dot{x} = 1$ oraz $\dot{k} \cdot k = 0$ dostajemy

$$P_\mu P^\mu = m^2 (f(\xi)^2 - 4f(\xi) f'(\xi) \xi) W_\mu W^\mu = -4m^4 \ell^2 f(\xi)^2 f'(\xi)^2 \xi.$$

Zakładamy, że rotator jest fundamentalny, a więc niezmienniki Casimira powinny być parametrami, co można zapisać w postaci równości

$$P_\mu P^\mu = m^2, \tag{C1}$$

$$W_\mu W^\mu = -\frac{1}{4} m^4 \ell^2, \tag{C2}$$

$$f(\xi)^2 - 4f(\xi) f'(\xi) \xi \stackrel{\text{C1}}{=} 1 \stackrel{\text{C2}}{=} 16f(\xi)^2 f'(\xi)^2 \xi.$$

Powyższe równania mają wspólne rozwiązanie postaci (zobacz dod. A)

$$f(\xi) = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{\xi}}.$$

Z fizycznych powodów wybieramy rozwiązanie ze znakami dodatnimi [Bra09].

$$f(\xi) = \sqrt{1 + \sqrt{\xi}}.$$

Otrzymany Lagrangian ma jednak defekt i ruch takiego rotatora nie byłby deterministyczny [Bra12].

3.2 Model uogólniony.

W tej części przedstawimy pokrótce uogólnioną konstrukcję Lagrangianu zegara motywowaną przedstawionym modelem Staruszkiewicza i zawartą w pracy [Bra15]. Lagrangian opisujący relatywistyczny rotator powinien być niezmienniczy ze względu na lokalne skalowanie $\delta k = \epsilon k$. Aby wariacja δL zniknęła dla dowolnego ϵ musimy założyć, że $k \cdot \Pi = 0$. Pamiętając, że k jest kierunkiem zerowym mamy dwa więzy wynikające ze struktury rotatora

$$k \cdot \Pi = 0, \quad k \cdot k = 0. \quad (\text{W1})$$

Następnie zakładając, że rotator ma być fundamentalny, mamy dwa więzy nakładane na niezmienniki Casimira grupy Poincarego C1, C2. Otrzymujemy w ten sposób cztery więzy będące punktem wyjścia do konstrukcji Lagrangianu zegara. Więzy (W1) pozwalają zapisać kwadrat pseudowektora W w postaci

$$W_\mu W^\mu = - \begin{vmatrix} P \cdot P & P \cdot k & P \cdot \Pi \\ k \cdot P & k \cdot k & k \cdot \Pi \\ \Pi \cdot P & \Pi \cdot k & \Pi \cdot \Pi \end{vmatrix} = (P \cdot k)^2 (\Pi \cdot \Pi).$$

Dirac, w jednej ze swoich najważniejszych prac: "Generalized Hamiltonian Dynamics" [Dir50], podał jak konstruować Lagrangiany z więzami dla prędkości. Zgodnie z metodą Diraca postać Lagrangianu dla zegara wynika z postaci Hamiltonianu zegara Staruszkiewicza. Hamiltonian ten jest liniową kombinacją więzów pierwszego rodzaju (tj. takich, że parami zerują nawiasy Poissona) ze współczynnikami będącymi funkcjami u_i

$$H = \frac{u_1}{2m} (P \cdot P - m^2) + \frac{u_2}{2m} \left(P \cdot P + \frac{4}{\ell^2 m^2} (k \cdot P)^2 (\Pi \cdot \Pi) \right) + u_3 (k \cdot \Pi) + u_4 (k \cdot k).$$

Z równań $\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ dostajemy wyjściowy układ więzów, natomiast prędkości dane są przez

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial P} = (u_1 + u_2) \frac{P}{m} - u_2 \frac{m}{k \cdot P} k, \\ \dot{k} &= \frac{\partial H}{\partial \Pi} = u_2 \frac{4(k \cdot p)^2}{\ell^2 m^3} \Pi + u_3 k. \end{aligned}$$

Transformacją prowadzącą od Hamiltonianu do Lagrangianu jest przekształcenie odwrotne Legendre'a. W tym przypadku ma ono maksymalny rząd, gdy $\dot{x} \cdot \dot{x}$ jest normalizowalne. Jednak powstały w ten sposób Lagrangian ma defekt i nie determinuje ruchu [Bra15]. Natomiast w przypadku $\dot{x} \cdot \dot{x} = 0$ rząd transformacji się obniża. Ta osobliwość odwrotnej transformacji Legendre'a wyróżnia zegar idealny, który ma własność, będącą klasycznym odpowiednikiem zjawiska Zitterbewegung odkrytego przez Schrödingera dla elektronu Diraca. Z Hamiltonianu Diraca dla elektronu swobodnego wynika, że wartości własne operatora prędkości dla kwantowej cząstki relatywistycznej są równe $\pm c$. Dirac zawarł w swojej książce "The Principles of Quantum Mechanics" [Dir81] wyjaśnienie tego fenomenu dla kwantowych cząstek relatywistycznych. Mianowicie że, wartości pędu relatywistycznego są nieograniczone, a co za tym idzie wartość oczekiwana pędu jest nieskończona. Więc z relatywistycznego związku pęd-prędkość otrzymujemy wartość c .

Założenie $u_1 = u_2 \neq 0$ obniża rząd transformacji odwrotnej Legendre'a i daje dodatkowe więzy

$$\boxed{\frac{\dot{x} \cdot \dot{x}}{\dot{x} \cdot k} = 0,} \quad (3)$$

$$\boxed{-\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} = 1.} \quad (4)$$

Otrzymujemy Lagrangian postaci

$$L = \frac{m\kappa}{2} \frac{\dot{x} \cdot \dot{x}}{k \cdot \dot{x}} + \frac{m}{4\kappa} \left(\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{k \cdot \dot{x}} + k \cdot \dot{x} \right) + \lambda(k \cdot k),$$

gdzie κ jest zmienną niezależną, a λ mnożnikiem Lagrange'a [Bra15]. Więz (4) daje ograniczenie na częstotść pracy zegara. W dalszej części pracy określimy przy jego pomocy równanie na fazę zegara.

3.3 Transport Fermiego-Walkera.

Poniżej przedstawimy pojęcia potrzebne do konstrukcji lokalnie nierotującej bazy. Zauważmy, że transport równoległy wzdłuż linii geodezyjnej przekształca wektory styczne w wektory styczne. Własność tę tracimy, gdy linia świata nie jest linią geodezyjną, czyli gdy pojawia się niezerowe przyspieszenie A . Transportem, który zachowuje styczność wektorów do linii świata niezależnie od jej krzywizny jest transport Fermiego-Walkera (FW) [Syn60]. Doświadczenie wskazuje, że taki transport odpowiada fizycznemu transportowi wektorów [CN15; AP14]. Do jego zdefiniowania posłużą nam odwzorowania P i R . Niech u będzie jednostkowym wektorem stycznym do linii świata y . Dowolny wektor v możemy w punkcie $p \in y$ rozłożyć na składowe styczną $R(v)$ i prostopadłą $P(v)$ do y . Przestrzeń wektorów w punkcie p rozpada się w ten sposób na sumę prostą przestrzeni $\{P(v)\}$ i $\{R(v)\}$.

$$v = \underbrace{v - (v \cdot u)u}_{P(v)} + \underbrace{(v \cdot u)u}_{R(v)} = P(v) + R(v).$$

Definicja 14. Mówimy, że wektor v spełnia prawo **transportu Fermiego-Walkera** (FW) wzdłuż linii świata y , jeżeli

$$\frac{D_{FW}(v)}{ds} := P \left(\frac{DP(v)}{ds} \right) + R \left(\frac{DR(v)}{ds} \right) = 0. \quad (\text{FW})$$

Wyrażenie $\frac{D_{FW}}{ds}$ nazywamy **pochodną Fermiego-Walkera**.

Twierdzenie 1. Niech u oraz A będą odpowiednio wektorami prędkości i przyspieszenia stowarzyszonymi z linią świata y . Wtedy pochodną Fermiego-Walkera możemy zapisać w postaci

$$\frac{D_{FW}v}{ds} = \frac{Dv}{ds} + (A \cdot v)u - (u \cdot v)A. \quad (5)$$

Powyższa równość może służyć za definicję pochodnej Fermiego-Walkera [Syn60].

Dowód. Obliczamy pochodne absolutne rzutów $P(v)$ oraz $R(v)$

$$\frac{DP(v)}{ds} = \frac{Dv}{ds} - (u \cdot v)A - \frac{d(u \cdot v)}{ds}u, \quad \frac{DR(v)}{ds} = \frac{d(u \cdot v)}{ds}u + (u \cdot v)A.$$

Pamiętając, że $u \perp A$ mamy

$$\begin{aligned} P \left(\frac{DP(v)}{ds} \right) &= \frac{Dv}{ds} - (u \cdot v)A - \frac{d(u \cdot v)}{ds}u - \left(\frac{Dv}{ds} \cdot u \right)u + \frac{d(u \cdot v)}{ds}u = \\ &= \frac{Dv}{ds} - (u \cdot v)A - \left(\frac{Dv}{ds} \cdot u \right)u, \\ R \left(\frac{DR(v)}{ds} \right) &= \frac{d(u \cdot v)}{ds}u = \left(\frac{Dv}{ds} \cdot u \right)u + (A \cdot v)u. \end{aligned}$$

Zatem pochodna (FW) jest równa

$$\frac{D_{FW}(v)}{ds} = P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) + R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) = \frac{Dv}{ds} + (A \cdot v)u - (u \cdot v)A. \quad (6)$$

□

W przypadku zerowego przyspieszenia ($A \equiv 0$) linia świata jest linią geodezyjną, pochodna (FW) sprowadza się do pochodnej absolutnej, a transport (FW) sprowadza się do transportu równoległego.

Dla dowolnych wektorów v_1 i v_2 mamy $P(v_1) \perp R(v_2)$, a więc warunek transportu (FW) sprowadza się zerowania się każdego ze składników

$$\begin{aligned} P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) &= 0, \\ R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Definicja 15. Reperem lokalnie nierotującym nazywamy reper ruchomy poruszający się wraz z ciałem wzdłuż jego linii świata, którego wersor czasowy jest styczny do linii świata (co odpowiada prędkości) i którego wersory spełniają prawo transportu (FW).

Reper lokalnie nierotujący jest szczególnie dogodny do opisu zjawisk fizycznych. W granicy nierelatywistycznej odpowiada on Newtonowskiej koncepcji nierotującego reperu [Syn60]. Przeprowadzimy teraz konstrukcję takiego reperu, co sprowadza się do konstrukcji odpowiedniej bazy E .

Za wersor czasowy takiej bazy możemy zawsze obrać prędkość u , gdyż jest ona unormowanym wektorem czasowym spełniającym prawo transportu (FW)

$$e := u = \frac{dy}{ds}.$$

Utożsamiamy e_0 z e i dobieramy do niego wersory przestrzenne tak, aby otrzymana baza $E = \{e_\mu\}$ była ortonormalna. Warunek $e_i \perp e$ zapewnia, że $R(e_i) = 0$. Zatem dodatkowym warunkiem jaki trzeba nałożyć na wersory przestrzenne e_i jest

$$P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) = 0.$$

Uwzględniając, że $e = u$ oraz $P(e_i) = e_i$ możemy powyższy warunek zapisać w postaci

$$\frac{De_i}{ds} = \left(\left(\frac{De_i}{ds} \right) \cdot e \right) e. \quad (7)$$

Przydatną własnością bazy E jest, że dany wektor ma w tej bazie stałe współrzędne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia prawo transportu (FW). Aby to pokazać wystarczy rozłożyć dany wektor w bazie E i skorzystać z definicji transportu (FW).

3.4 Czwórka symetryczna kierunków zerowych.

Od tego momentu zakładamy, że wersor e_3 jest prostopadły do hiperpłaszczyzny ruchu tak, że

$$A \cdot e_3 = 0.$$

Nie jest to zbyt restrykcyjne założenie i pozwala na zastosowanie modelu w wielu przypadkach. Zauważmy, że wtedy wektor A leży w płaszczyźnie rozpinanej przez wektory e_1 i e_2 . Liczymy przyspieszenie właściwe α i dostajemy

$$\alpha^2 = (A \cdot e_1)^2 + (A \cdot e_2)^2.$$

Interpretując powyższą równość jako trójkę pitagorejską możemy wprowadzić następujące oznaczenia

$$\cos \chi = \frac{A \cdot e_1}{\alpha},$$

$$\sin \chi = \frac{A \cdot e_2}{\alpha}.$$

Z wersorów e i e_3 tworzymy dwa zerowe wektory k_+ i k_- skierowane w przyszłość, które uważamy za wektory własne pewnej transformacji Lorentza.

$$k_+ = \frac{e + e_3}{\sqrt{2}}, \quad (8)$$

$$k_- = \frac{e - e_3}{\sqrt{2}}, \quad (9)$$

$$k_+ \cdot k_- = 1, \quad k_{\pm} \cdot k_{\pm} = 0.$$

Wektory te są wektorami własnymi pewnego obrotu \mathcal{O} .

$$\mathcal{O}(k_{\pm}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{O}(e \pm e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{O}e \pm \mathcal{O}e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e \pm e_3) = k_{\pm}.$$

Łatwo sprawdzić, że jest to obrót w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory e_1 i e_2 , czyli eliptyczne przekształcenie Lorentza.

Obrót ten pozwala nam zinterpretować kąt χ . Zauważmy, że możemy za pomocą obrotu \mathcal{O} obrócić, wersor wektora przyspieszenia o kąt $-\chi$ tak, aby spełniał prawo transportu (FW). Schematycznie przedstawiono to na rysunku 3.

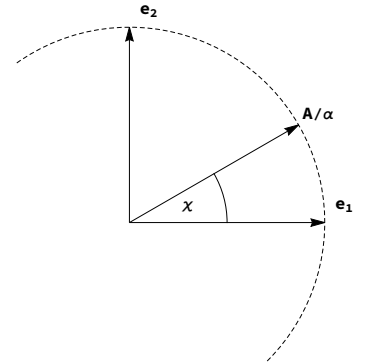
Rozważamy trzeci wektor zerowy k skierowany w przyszłość taki, że $k \cdot e_3 \equiv 0$ oraz $k(0) \cdot e_1(0) = 0$. Wektor k rozkładamy w bazie E

$$k = k^0 e + k^i e_i, \quad k^1(0) = 0, k^3 = 0,$$

$$k(0) = k^0(0)e(0) + k^2(0)e_2(0).$$

Rozkładając k w bazie E stwierdzamy, że jego współrzędne formują trójkę pitagorejską

$$(k \cdot e)^2 = (k \cdot e_1)^2 + (k \cdot e_2)^2. \quad (10)$$



Rysunek 3: Schemat obrazujący obrót \mathcal{O} wykonany na wersorze przyspieszenia A/α w bazie E .

Kierunek zerowy k odpowiada kierunkowi wskazówki zegara. W przypadku, gdy byłyby dwie wskazówki poruszające się po tym samym okręgu ale w przeciwnych kierunkach moglibyśmy kolejne tyknięcia zegara wyznaczyć przez punkty spotkania się wskazówek. Jednak nasz zegar wyposażony jest w jedną wskazówkę i potrzebujemy kierunku odniesienia względem którego będziemy mierzyć jego wskazania. Fazę zegara definiujemy względem reperu przenoszonego

transportem (FW), gdyż taki reper nie rotuje względem obserwatora, co umożliwia mierzenie fazy zegara względem wersorów bazy. Wprowadzamy **fazę zegara** φ równością

$$\cos \varphi = \frac{k \cdot e_1}{k \cdot e}, \quad (11)$$

$$k = (k \cdot e)(e - \cos \varphi e_1 - \sin \varphi e_2).$$

Z wektora $k(0)$ tworzymy wektor zerowy $k_0(s)$ tak, aby spełniał prawo transportu (FW). Będzie on kierunkiem odniesienia w zegarze. Wiemy, że wtedy jego współrzędne w bazie E są stałe. Niech zatem $k_0(s) = \sqrt{2}(e + e_2)$. Warunek początkowy na fazę φ ustalamy jako $\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}$. Wtedy dla $s = 0$ wektory k i k_0 reprezentują ten sam kierunek zerowy. Każdemu kierunkowi zerowemu możemy przyporządkować punkt na sferze, a następnie każdemu punktowi sfery możemy przyporządkować, przez rzut stereograficzny, punkt z płaszczyzny zespolonej (odpowiednio uzwarconej) [Sta]. Mówimy, że wektory zerowe tworzą czwórkę symetryczną, kiedy dwustosunek odpowiadających im liczb zespolonych wynosi $e^{\pm i\pi/3}$. Dwustosunek liczb zespolonych z_0, z_1, z_2, z_3 przyjmujemy w postaci wyrażonej równością (12) [Sta]. Skonstruujemy teraz czwarty wektor zerowy k_3 , który razem z wektorami k_+, k_0, k_- utworzy czwórkę symetryczną. Liczby zespolone odpowiadające wektorom własnym k_ν oznaczamy przez κ_ν , gdzie $\nu \in \{+, 0, -, 3\}$. W zależności od kolejności wektorów i przyjętego znaku w wykładniku eksponenty (13) otrzymujemy dwie liczby κ_3 różniące się znakiem części rzeczywistej (14).

$$(z_0 z_1 z_2 z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)}. \quad (12)$$

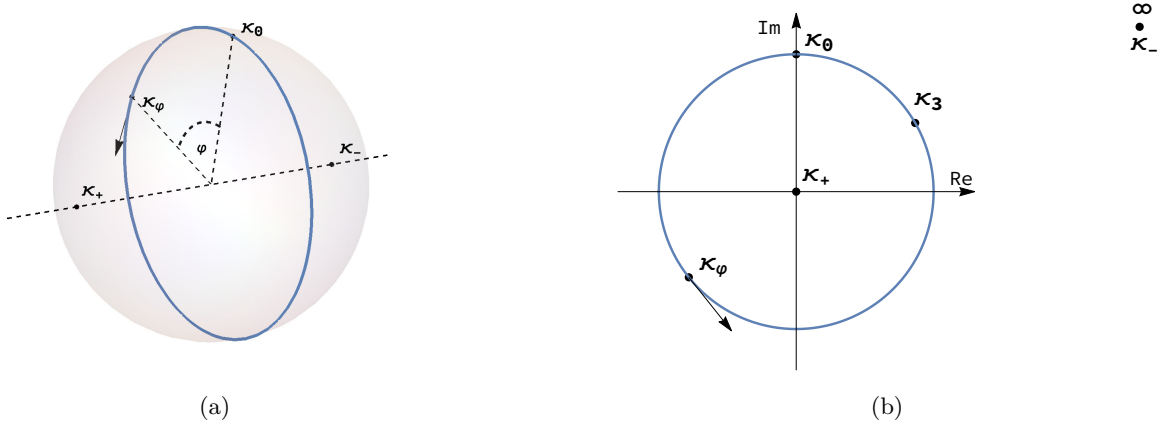
$$\kappa_0 = i, \kappa_+ = 0, \kappa_- = \infty, \quad (\kappa_0 \kappa_+ \kappa_- \kappa_3) = e^{\pm i\pi/3} \quad (13)$$

$$\kappa_3 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad k_3 = \sqrt{2}e \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \quad (14)$$

$$k_\mu \cdot k_\nu = 1, \quad k_\nu \cdot k_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu, \mu, \nu \in \{0, +, -, 3\}.$$

Niech teraz wektorowi zerowemu k odpowiada liczba κ_φ (15). Na rysunkach 4(a) i 4(b) widzimy wzajemne położenie uzyskanej czwórki symetrycznej (dla $\text{Re}(\kappa_3) > 0$) oraz obrazu wektora k . Uzyskane wektory są liniowo niezależne i tworzą bazę kierunków zerowych, która dodatkowo spełnia prawo transportu (FW).

$$\kappa_\varphi = -\cos \varphi - i \sin \varphi. \quad (15)$$



Rysunek 4: Obraz czwórki symetrycznej oraz kierunku k na płaszczyźnie zespolonej (a) oraz na sferze jednostkowej (b). Punkt κ_φ porusza się po zaznaczonym okręgu jednostkowym wraz ze wzrostem φ . Wektorem stycznym do okręgu zaznaczono kierunek ruchu.

3.5 Konstrukcja zegara.

Zakładamy, że podczas ruchu mamy spełniony więz (4). Założymy dodatkowo, że wektor zerowy \dot{x} można przedstawić jako kombinację liniową e oraz k taką, że $e \cdot \dot{x} = 1$. Rozkładając \dot{x} w bazie E dostajemy

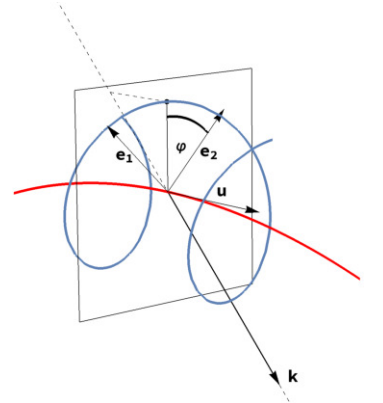
$$\dot{x} = e - C(k \cdot e_1)e_1 - C(k \cdot e_2)e_2.$$

Korzystając z faktu, że \dot{x} jest zerowy możemy wyznaczyć współczynniki kombinacji liniowej.

$$0 = \dot{x} \cdot \dot{x} = 1 - C^2(k \cdot e_1)^2 - C^2(k \cdot e_2)^2 = 1 - C^2(k \cdot e)^2, \\ C = \pm 1/(k \cdot e).$$

Wybieramy znak ujemny, gdyż w przeciwnym przypadku $\dot{x} \cdot k = 0$, co jest sprzeczne z więzem (3). Zatem

$$\dot{x} = 2e - k/(k \cdot e) = e + \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2, \quad \dot{x} \cdot k = 2k \cdot e. \quad (16)$$



Rysunek 5: Schematyczny rysunek obrazujący działania zegara.

Następnie obliczamy pochodną absolutną wektora k

$$\dot{k} = \underbrace{\frac{d(k \cdot e)}{ds} e - \frac{d(k \cdot e_1)}{ds} e_1 - \frac{d(k \cdot e_2)}{ds} e_2}_{K_p} + \underbrace{(k \cdot e)\dot{e} - (k \cdot e_1)\dot{e}_1 - (k \cdot e_2)\dot{e}_2}_K,$$

$$\dot{k} \cdot \dot{k} = K_p \cdot K_p + K \cdot K + 2K_p \cdot K.$$

Obliczamy oddzielnie każdy ze składników powyższej sumy. Zaczniemy od przedstawienia pochodnych wektorów bazy w bardziej użytecznej postaci

$$\dot{e} = \frac{De}{ds} = A,$$

$$\dot{e}_1 = \frac{De_1}{ds} = \frac{D(e_1)_\perp}{ds} \stackrel{(FW)}{=} \left(\frac{D(e_1)_\perp}{ds} \cdot e_0 \right) e = \left(\frac{De_1}{ds} \cdot e \right) e \stackrel{(FW)}{=} - \left(\frac{De}{ds} \cdot e_1 \right) e = - (A \cdot e_1) e,$$

$$\dot{e}_2 = \frac{De_2}{ds} = \frac{D(e_2)_\perp}{ds} \stackrel{(FW)}{=} \left(\frac{D(e_2)_\perp}{ds} \cdot e \right) e = \left(\frac{De_2}{ds} \cdot e \right) e \stackrel{(FW)}{=} - \left(\frac{De}{ds} \cdot e_2 \right) e = - (A \cdot e_2) e.$$

Zgodnie z powyższym zachodzą równości

$$K = (k \cdot e)(A + (A \cdot e_1) \cos \varphi e + (A \cdot e_2) \sin \varphi e),$$

$$K_p = (k \cdot e)\dot{\varphi}(\sin \varphi e_1 - \cos \varphi e_2) + \frac{d(k \cdot e)}{ds}(e - \cos \varphi e_1 - \sin \varphi e_2),$$

$$\begin{aligned} K_p \cdot K_p &= \left(\frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d(k \cdot e_1)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d(k \cdot e_2)}{ds} \right)^2 = \left(\frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d(k \cdot e) \cos \varphi}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d(k \cdot e) \sin \varphi}{ds} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - (k \cdot e)^2 (\dot{\varphi})^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \\ &= -(k \cdot e)^2 (\dot{\varphi})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2K_p \cdot K &= 2(k \cdot e_0)\dot{\varphi}((A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi) - \frac{d(k \cdot e_0)}{ds}((A \cdot e_1) \cos \varphi + (A \cdot e_2) \sin \varphi) + \\ &+ \frac{d(k \cdot e_0)}{ds}(A \cdot e_1) \cos \varphi + \frac{d(k \cdot e_0)}{ds}(A \cdot e_2) \sin \varphi = \\ &= 2(k \cdot e_0)\dot{\varphi}((A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K \cdot K &= (k \cdot e)^2((A \cdot A) + ((A \cdot e_1) \cos \varphi + (A \cdot e_2) \sin \varphi)^2) = \\ &= -(k \cdot e)^2((A \cdot e_1)^2 + (A \cdot e_2)^2 - (A \cdot e_1)^2 \cos^2 \varphi - (A \cdot e_2)^2 \sin^2 \varphi - 2(A \cdot e_1)(A \cdot e_2) \sin \varphi \cos \varphi) = \\ &= -(k \cdot e)^2((A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi)^2. \end{aligned}$$

Sumę powyższych składników możemy zwinąć do kwadratu

$$1 = -\frac{\ell^2 \dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} = \frac{\ell^2}{4}(\dot{\varphi} - (A \cdot e_1) \sin \varphi + (A \cdot e_2) \cos \varphi)^2$$

i wyznaczamy

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + (A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi.$$

Podstawiając zmienną χ możemy zapisać owo równanie w zgrabnej postaci

$$\boxed{\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \chi).} \quad (17)$$

W przypadku zerowego przyspieszenia właściwego wprowadzony model zegara mierzy czas własny s .

$$\dot{\varphi} = \frac{2}{\ell}, \quad \varphi = \pm \frac{2}{\ell} s + \varphi_0. \quad (18)$$

4 Aplikacje

4.1 Ruch hiperboliczny.

Jako pierwszy przypadek zbadamy relatywistyczny odpowiednik ruchu jednostajnie przyspieszonego. Poniższe wyprowadzenie kształtu linii świata takiego ruchu można znaleźć w książce [KT84]. W układzie obserwatora inercjalnego \mathcal{I} posługującego się kartezjańskim układem współrzędnych rozważamy linię świata $y = y(s)$ obserwatora \mathcal{Z} parametryzowaną czasem własnym s . Ruch ten odbywa się w jednym wymiarze przestrzennym. W takim przypadku ogólna postać wektora prędkości, po uwzględnieniu warunku unormowania, ma postać

$$(u^\mu) = (\cosh \beta(s), \sinh \beta(s), 0, 0), \quad (19)$$

gdzie $\beta(s)$ jest pewną funkcją parametryzowaną czasem własnym s . Żądamy teraz, aby przyspieszenie właściwe α było stałe ze względu na s .

$$(A^\mu) = (\dot{\beta}(s) \sinh \beta(s), \dot{\beta}(s) \cosh \beta(s), 0, 0),$$

$$\alpha = \sqrt{-A^\mu A_\mu} = \dot{\beta}(s).$$

Otrzymujemy równanie różniczkowe na funkcję $\beta(s)$. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $\beta(0) = 0$. Wtedy rozwiązanie jest postaci

$$\beta(s) = \alpha s,$$

$$(u^\mu) = (\cosh \alpha s, \sinh \alpha s, 0, 0),$$

$$(A^\mu) = (\alpha \sinh \alpha s, \alpha \cosh \alpha s, 0, 0).$$

Zatem odpowiednik ruchu jednostajnie przyspieszonego w czasoprzestrzeni Minkowskiego to ruch opisany przez hiperbolę. Łatwo sprawdzić, że dla małych prędkości ruch ten przechodzi w ruch jednostajnie przyspieszony. Ciało w takim ruchu porusza się po linii świata

$$(y^\mu) = \left(\frac{1}{\alpha} \sinh \alpha s, \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha s, 0, 0 \right). \quad (20)$$

Chcemy skonstruować reper współporuszający się z obserwatorem \mathcal{Z} . W tym celu za wersor czasowy obieramy prędkość $e = u$, a za pierwszy z wersorów przestrzennych unormowane przyspieszenie $e_1 = A/\alpha$. Wersory te uzupełniamy do bazy za pomocą wersorów kanonicznych. Otrzymaną bazę możemy zapisać zgrabnie w postaci macierzy (21). Łatwo sprawdzić, że tak skonstruowany reper spełnia prawo transportu (FW).

$$\begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha s & \sinh \alpha s & 0 & 0 \\ \sinh \alpha s & \cosh \alpha s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Możemy teraz podać równanie na fazę zegara ϕ

$$\begin{aligned} \chi &= \pi, \quad \alpha = \text{const}, \\ \dot{\phi} &= \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \pi) = \pm \frac{2}{\ell} - \alpha \sin(\varphi). \end{aligned}$$

4.2 Ruch po okręgu.

W układzie obserwatora inercjalnego \mathcal{I} z kartezjańskim układem współrzędnych rozważamy linię świata obserwatora \mathcal{Z} w ruchu jednostajnym po okręgu. Zagadnienie rozpatrujemy w czasoprzestrzeni Minkowskiego. Rozpatrzmy punkt poruszający się po okręgu o promieniu R i częstości ω . W układzie obserwatora inercjalnego \mathcal{I} porusza się on po trajektorii $y = y(s)$. Współrzędne tej trajektorii mają, w kartezjańskim układzie współrzędnych, postać

$$(y^\mu) = (\gamma s, R \cos \omega \gamma s, R \sin \omega \gamma s, 0).$$

Wtedy wektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$(u^\mu) = \left(\frac{dy^\mu}{ds} \right) = (\gamma, -R\omega\gamma \sin \omega \gamma s, R\omega\gamma \cos \omega \gamma s, 0),$$

$$(A^\mu) = \left(\frac{Du^\mu}{ds} \right) = (0, -R\omega^2\gamma^2 \cos \omega \gamma s, -R\omega^2\gamma^2 \sin \omega \gamma s, 0),$$

a podczas ruchu zachowane jest przyspieszenie właściwe

$$\alpha = \sqrt{-A \cdot A} = R\omega^2\gamma^2.$$

Teraz zajmijmy się znalezieniem reperu lokalnie nierotującego poruszającego się po rozpatrywanej linii świata. Jako wersor czasowy e wybieramy prędkość u . Pierwszy z wersorów przestrzennych e'_1 wybieramy przeciwny do przyspieszenia. Jako wersor e_3 wybieramy unormowany wektor prostopadły do płaszczyzny ruchu. Wersor e'_2 wybieramy tak, aby był ortogonalny do pozostałych. Uzyskaną bazę zapisujemy w postaci macierzowej

$$E' = \begin{pmatrix} e \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega \gamma s & R\omega\gamma \cos \omega \gamma s & 0 \\ 0 & \cos \omega \gamma s & \sin \omega \gamma s & 0 \\ R\omega\gamma & -\gamma \sin \omega \gamma s & \gamma \cos \omega \gamma s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Chcemy, aby obrona baza spełniała prawo transportu (FW). Łatwo sprawdzić, że wersor e_3 spełnia prawo transportu (FW), natomiast wersory e'_1 i e'_2 nie. Aby to naprawić dokonamy obrotu bazy o kąt $\psi = \psi(s)$ w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory e'_1 i e'_2 . Odpowiedni obrót w bazie kanonicznej ma w reprezentacji macierzowej postać (23) [Sta]. Właściwie obrocone wersory obliczamy za pomocą równości (24).

$$(\mathcal{O}^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

$$e_1 = \mathcal{O}^\mu_1 E'_\mu, \quad (24)$$

$$e_2 = \mathcal{O}^\mu_2 E'_\mu.$$

Wstawiając obrocone wersory do warunku (FW) otrzymujemy równania różniczkowe na kąt ψ , które (przyjmując bez straty ogólności $\psi(0) = 0$) mają wspólne rozwiązanie postaci $\psi(s) = -\omega\gamma^2 s$. Otrzymana ortonormalna baza (26) spełnia prawo transportu (FW).

$$(25)$$

$$\begin{aligned}
E = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega\gamma s & R\omega\gamma \cos \omega\gamma s & 0 \\ R\omega\gamma \sin \psi & \cos \omega\gamma s \cos \psi - \gamma \sin \omega\gamma s \sin \psi & \sin \omega\gamma s \cos \psi + \gamma \cos \omega\gamma s \sin \psi & 0 \\ R\omega\gamma \cos \psi & -\cos \omega\gamma s \sin \psi - \gamma \sin \omega\gamma s \cos \psi & -\sin \omega\gamma s \sin \psi + \gamma \cos \omega\gamma s \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega\gamma s & R\omega\gamma \cos \omega\gamma s & 0 \\ -R\omega\gamma \sin \omega\gamma^2 s & \cos \omega\gamma^2 s \cos \omega\gamma s + \gamma \sin \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s & \sin \omega\gamma s \cos \omega\gamma^2 s - \gamma \cos \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s & 0 \\ R\omega\gamma \cos \omega\gamma^2 s & \cos \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s - \gamma \sin \omega\gamma s \cos \omega\gamma^2 s & \sin \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s + \gamma \cos \omega\gamma s \cos \omega\gamma^2 s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Mając odpowiedni reper możemy podać równanie na kąt φ

$$\begin{aligned}
\chi = \omega\gamma^2 s = -\psi, \quad \alpha = R\omega\gamma^2, \\
\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + R\omega^2\gamma^2 \sin(\varphi - \omega\gamma^2 s) = \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \alpha s/R\omega).
\end{aligned}$$

4.3 Ruch po okręgu względem galaktyk.

Rozważymy teraz ponownie ruch po okręgu z tą różnicą, że wiążemy obserwatora \mathcal{I} z odległymi galaktykami w ekspandującym wszechświecie. Sytuacji tej odpowiada metryka Friedmana-Lemaître'a-Robertsona-Walkera (FLRW). Dla uproszczenia zakładamy zerową krzywiznę przestrzenną. Tensor metryczny dany jest przez

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -a(t)^2, -a(t)^2, -a(t)^2). \tag{27}$$

Warto zauważyć, że dla $a(t) \equiv 1$ metryka ta przechodzi w zwykłą metrykę czasoprzestrzeni Minkowskiego, a zatem można łatwo zweryfikować poprawność wyników. W dalszej części tego rozdziału przyjmujemy następujące oznaczenia

$$a := a(t), \quad a' := \frac{da(t)}{dt}.$$

Dla tej metryki symbole Chrostofella Γ_{ij}^k przedstawiamy poniżej w tablicach odpowiednio dla $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aa' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aa' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & aa' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{a'}{a} & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a'}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a'}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozważamy linie świata cząstki w ruchu po okręgu

$$y^\mu(s) = (t, x, y, z) = (t(s), R \cos \omega t(s), R \sin \omega t(s), 0),$$

gdzie $dt/ds = \gamma = (1 - a^2 R^2 \omega^2)^{-1/2}$. Wtedy wektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$u^\mu = \dot{y}^\mu = \frac{dy}{ds} = (\gamma, -R\omega\gamma \sin \omega t, R\omega\gamma \cos \omega t, 0),$$

$$\begin{aligned}
(A^\mu) &= \left(\frac{Du^\mu}{ds} \right) = \\
&= (a'aR^2\omega^2\gamma^2(\gamma^2 + 1), -\frac{a'}{a}R\omega\gamma^2(\gamma^2 + 1)\sin \omega t - R\omega^2\gamma^2 \cos \omega t, \frac{a'}{a}R\omega\gamma^2(\gamma^2 + 1)\cos \omega t - R\omega^2\gamma^2 \sin \omega t, 0).
\end{aligned} \tag{28}$$

Właściwe przyspieszenie wynosi

$$\alpha = \sqrt{-A_\mu A^\mu}, \quad \text{gdzie } A^\mu A_\mu = -\left(\frac{a'}{a}\right)^2 (\gamma^2 - 1) (\gamma^2 + 1)^2 - a^2 R^2 \omega^4 \gamma^4.$$

Konstrukcję reperu lokalnie nierotującego E można przeprowadzić analogicznie do przedstawionej w poprzednim rozdziale. Jednakże rachunki uprościmy wykonując konstrukcję w inny sposób. Mianowicie stosunkowo łatwo jest uogólnić wersory uzyskanej wcześniej bazy (26) tak, aby tworzyły bazę ortonormalną w metryce (27). Odpowiednia baza jest postaci

$$E_{FLRW} = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega t & R\omega\gamma \cos \omega t & 0 \\ aR\omega\gamma \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \omega t \cos \psi - \frac{1}{a} \gamma \sin \omega t \sin \psi & \frac{1}{a} \sin \omega t \cos \psi + \frac{1}{a} \gamma \cos \omega t \sin \psi & 0 \\ aR\omega\gamma \cos \psi & -\frac{1}{a} \cos \omega t \sin \psi - \frac{1}{a} \gamma \sin \omega t \cos \psi & -\frac{1}{a} \sin \omega t \sin \psi + \frac{1}{a} \gamma \cos \omega t \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}.$$

Jak poprzednio wersory e i e_3 są transportowane wzdłuż linii świata zgodnie z prawem (FW). Wersory e_1 i e_2 zależą od kąta obrotu ψ . Kąt ψ powinien w granicy $a \rightarrow 1$ przechodzić w kąt znaleziony dla ciała poruszającego się po okręgu w czasoprzestrzeni Minkowskiego. Traktujemy tę granicę jako test poprawności wyników. Wartość ψ można znaleźć żądając, aby wersory e_1 i e_2 spełniały prawo transportu (FW). Wspólne rozwiązanie dla otrzymanych równań różniczkowych można wyrazić przez

$$\psi(s) = \int_0^s -\omega \gamma(s_1)^2 ds_1, \quad \text{gdzie } \gamma(s) = (1 - a(t(s))^2 R^2 \omega^2)^{-1/2}.$$

Mając znaleziony odpowiedni reper możemy obliczyć wielkości potrzebne do równania na fazę zegara φ .

$$\begin{aligned} A \cdot e_1 &= -a' R \omega \gamma (\gamma^2 + 1) \sin \psi + a R \omega^2 \gamma^2 \cos \psi, \\ A \cdot e_2 &= -a' R \omega \gamma (\gamma^2 + 1) \cos \psi - a R \omega^2 \gamma^2 \sin \psi, \\ \chi &= \arccos(A \cdot e_1 / \alpha), \\ \alpha &= a R \omega \gamma \sqrt{a'^2 (\gamma^2 + 1)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \\ \dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \chi). \end{aligned}$$

Rozwijamy prawą stronę równania na φ względem R dla małych promieni

$$\begin{aligned} \psi &= -\omega s + O(R^2), \quad \alpha = a \omega \sqrt{4a'^2 + \omega^2} R + O(R^3), \\ \dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + a \omega \sqrt{4a'^2 + \omega^2} R \sin \left(\varphi - \arccos \left(\frac{a \omega \cos(\omega s) - 2a' \sin(\omega s)}{a \sqrt{4a'^2 + \omega^2}} \right) \right) + O(R^3). \end{aligned}$$

Dla krótkich przedziałów czasowych możemy przyjąć $a' \rightarrow 0$, co daje

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + a \omega^2 R \sin(\varphi - \omega s) + O(R^3).$$

4.4 Ruch po okręgu wokół czarnej dziury.

W układzie obserwatora inercyjnego \mathcal{I} ze sferycznym układem współrzędnych (t, r, ϕ, θ) rozważamy linię świata obserwatora \mathcal{Z} w ruchu jednostajnym po okręgu wokół czarnej dziury. Będziemy używać metryki Schwarzschilda, która odpowiada czasoprzestrzeni w pobliżu nierotującej sferycznie symetrycznej masy nieobdarzonej ładunkiem [Har16]. Element liniowy oraz macierz tensora metrycznego mają postać

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - r^2 d\theta^2, \quad (29)$$

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}.$$

Dla metryki (29) symbole Christoffela Γ_{ij}^k przedstawiamy poniżej w tablicach odpowiednio dla $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) r \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & -\cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak poprzednio rozważamy ruch po okręgu o promieniu R i częstości ω . Linie świata w tym przypadku można zapisać następująco

$$(y^\mu) = \left(t, R, \omega t, \frac{\pi}{2}\right). \quad (30)$$

Wtedy wektor prędkości ma postać

$$(u^\mu) = \left(\frac{dy^\mu}{ds}\right) = (\gamma, 0, \omega\gamma, 0), \quad \text{gdzie } \gamma = dt/ds.$$

Z danego elementu liniowego (29), po uwzględnieniu (30), wyznaczamy

$$\gamma = \frac{dt}{ds} = \left(1 - \frac{2M}{R} - R^2\omega^2\right)^{-1/2}.$$

Następnie obliczamy przyspieszenie oraz przyspieszenie właściwe

$$(A^\mu) = \left(0, -\gamma^2 \left(R\omega^2 - \frac{M}{R^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{R}\right), 0, 0\right),$$

$$\alpha = \sqrt{-A \cdot A} = \gamma^2 \left| R\omega^2 - \frac{M}{R^2} \right| \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}.$$

Ponownie skorzystamy z bazy wyznaczonej wcześniej dla przypadku czasoprzestrzeni Minkowskiego i uogólnimy ją w taki sposób, aby była unormowana i spełniała prawo transportu (FW). W pierwszym kroku musimy przetransformować wektory bazy (26) do współrzędnych sferycznych. Na potrzeby tej transformacji współrzędne kartezjańskie oznaczmy przez x^i , natomiast współrzędne sferyczne przez \tilde{x}^i . Współrzędne wektorów transformują się kontrawariantnie [IJ80] co można zapisać jako

$$\tilde{v}^i = \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial v^j} v^j.$$

Współczynniki tej transformacji obliczamy w punkcie należącym do rozważanej linii świata. Baza (26) we współrzędnych sferycznych ma zatem postać

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\omega & 0 \\ R\omega\gamma \sin \psi & \cos \psi & \frac{\gamma}{R} \sin \psi & 0 \\ R\omega\gamma \cos \psi & -\sin \psi & \frac{\gamma}{R} \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Powyższa baza nie jest ortonormalna w metryce Schwarzschilda, jednak można ten defekt stosunkowo łatwo naprawić w poniższy sposób

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\omega & 0 \\ R\omega\gamma \sin \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} & \cos \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & \frac{\gamma}{R} \sin \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & 0 \\ R\omega\gamma \cos \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} & -\sin \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & \frac{\gamma}{R} \cos \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

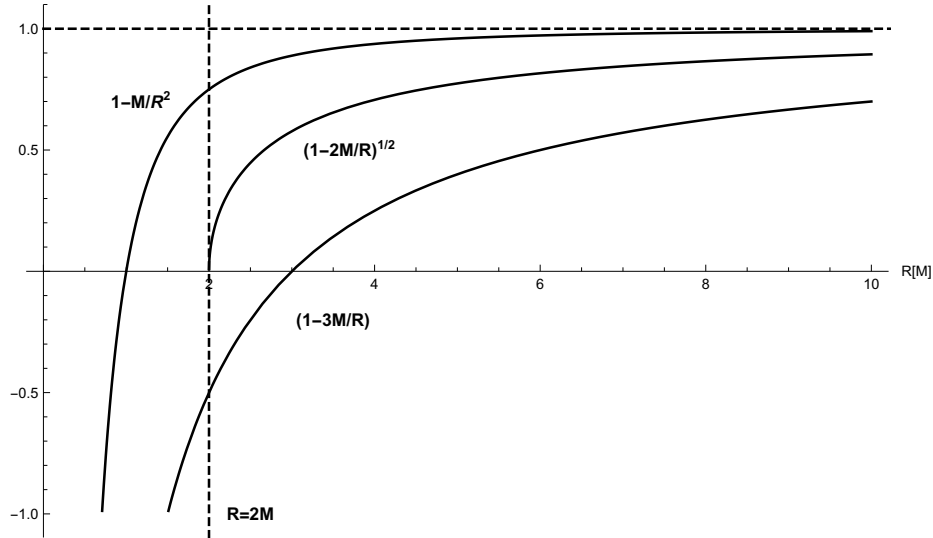
Z prawa transportu (FW) otrzymujemy równania różniczkowe na kąt obrotu ψ . Jak poprzednio zakładamy warunek początkowy $\psi(0) = 0$ i otrzymujemy rozwiązanie

$$\psi = -\omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right).$$

Mając odpowiedni reper ruchomy znajdujemy równanie na fazę zegara

$$\begin{aligned} \chi = -\psi &= \omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right), \quad \alpha = \gamma^2 \left| R\omega^2 - \frac{M}{R^2} \right| \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}, \\ \dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + \gamma^2 \left| R\omega^2 - \frac{M}{R^2} \right| \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \sin \left(\varphi - \omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right) \right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że uzyskane równanie różni się od rozwiązania otrzymanego w ruchu po okręgu w płaskiej metryce Minkowskiego czynnikami $(1 - 2M/R)^{1/2}$, $(1 - 3M/R)$, $-M/R^2$ oraz czynnikiem γ . Porównanie wagi każdego z czynników w zależności od R przedstawiamy na wykresie 6. Dla uproszczenia porównania oraz lepszego oddania kreślimy wykres $1 - M/R^2$ zamiast M/R^2 . Pomijamy w analizie czynnik γ , gdyż zbiega on do swojego odpowiednika w metryce Minkowskiego podobnie jak $(1 - 2M/R)^{1/2}$ do jedności. Dla odpowiednio dużych R wpływ masy M na działanie zegara jest niewielki, przy czym silniej wpływa na kąt χ niż na przyspieszenie α .



Rysunek 6: Wykres czynników wpływających na działanie zegara pochodzących od M w zależności od R .

Jeśli zamiast ruchu po okręgu rozważymy zegar spoczywający w polu grawitacyjnym odpowiednie rachunki przebiegają podobnie i wystarczy w powyższych rozważaniach położyć $\omega = 0$. Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned}\gamma &= \left(1 - \frac{M}{R^2}\right)^{-1/2}, \\ \alpha &= \frac{M}{R^2} \left(1 - \frac{M}{R^2}\right)^{1/2}, \\ \chi &= 0, \\ \dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + \gamma^2 \frac{M}{R^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \sin(\varphi).\end{aligned}$$

W przypadku zegara spoczywającego w polu grawitacyjnym struktura równania na fazę przypomina równanie uzyskane dla ruchu hiperbolicznego, co sugeruje, że działanie zegara w tych przypadkach może być podobne.

5 Analiza równania fazy zegara

W tym rozdziale przeprowadzimy analizę równania na fazę zegara. Najbardziej interesującym nas parametrem jest przyspieszenie właściwe.

5.1 Zegar w przypadku stałego przyspieszenia.

Jeśli założymy stałe przyspieszenie właściwe α , to wektor przyspieszenia A będzie zależeć od parametru χ . Założmy dodatkowo szczególną postać $\chi(s) = ps + q$, gdzie $p, q = \text{const}(s)$. Gdy $p = 0$, to wektor A jest podczas ruchu transportowany za pomocą transportu (FW). W tym przypadku rozwiązanie uzyskujemy stosując podstawienie

$$\begin{aligned}\Phi &= \varphi - \chi, \\ \frac{d\Phi}{ds} &= \frac{d\varphi}{ds} - p, \\ \frac{d\Phi}{ds} &= \pm \frac{2}{\ell} - p + \alpha \sin(\Phi), \\ ds &= \frac{d\Phi}{\pm \frac{2}{\ell} - p + \alpha \sin(\Phi)}.\end{aligned}\tag{31}$$

Całkując prawą stronę powyższej równości stosujemy podstawienie $x = \text{tg}(\Phi/2)$. Dla uproszczenia wprowadzamy oznaczenia $B = \pm \frac{2}{\ell} - p$, $C = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{B^2}}$.

$$s + s_0 = \frac{2}{BC} \text{arctg} \left(\frac{\text{tg}(\Phi/2)}{C} + \frac{\alpha}{BC} \right).$$

Po oczywistych przekształceniach otrzymujemy

$$\varphi = ps + q + 2 \text{arctg} \left(C \text{tg}(BC(s + s_0)/2) - \frac{\alpha}{B} \right).$$

Zauważmy, że dla $\alpha \rightarrow 0$ rozwiązanie jest postaci

$$\varphi = \pm \frac{2}{\ell} s + \text{const}.$$

Zakładając warunek początkowy $\varphi(0) = -\pi/2$ możemy wyznaczyć stałą całkowania s_0 .

$$s_0 = \frac{2}{BC} \text{arctg} \left(-\frac{1}{C} \text{tg}(q/2 + \pi/4) + \frac{\alpha}{BC} \right).$$

5.2 Rozwiązanie przybliżone.

Interesuje nas jak zegar zachowuje się dla małych przyspieszeń. W tym celu rozwiążemy równanie (17) stosując rachunek zaburzeń ze względu na parametr α . Zapisujemy ϕ oraz χ w postaci szeregów (32) (33). Następnie w równaniu (17) rozwijamy sinus w szereg (34).

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \varphi_n, \quad (32)$$

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \chi_n, \quad (33)$$

$$\dot{\varphi} \mp \frac{2}{\ell} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\varphi - \chi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0. \quad (34)$$

Wstawiamy rozwinięcia φ i χ do uzyskanego równania i porządkujemy wyrazy ze względu na α z dokładnością do $O(\alpha^2)$. Otrzymujemy równania (35), których rozwiązania są postaci (36).

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_0 = \pm \frac{2}{\ell}, & \varphi_0(0) = -\frac{\pi}{2}, \\ \dot{\varphi}_1 = \sin(\varphi_0 - \chi_0), & \varphi_1(0) = 0. \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = \pm \frac{2}{\ell} s - \frac{\pi}{2}, \\ \varphi_1 = -\alpha \int_0^s \cos(\pm 2s_1/\ell - \chi_0(s_1)) ds_1. \end{cases} \quad (36)$$

Ostatecznie szukane przez nas rozwiązanie przybliżone ma postać

$$\varphi = \pm \frac{2}{\ell} s - \frac{\pi}{2} - \alpha \int_0^s \cos(\pm 2s_1/\ell - \chi_0(s_1)) ds_1 + O(\alpha^2). \quad (37)$$

Z rozwiązania przybliżonego wiemy, że dla małych przyspieszeń nasz model zegara dobrze mierzy czas własny s . Przyspieszenie charakterystyczne dla którego efekt powinien mieć istotny wpływ to $\alpha_c = \frac{2}{\ell}$. Wpływ zaburzenia φ_1 na działanie zegara jest rzędu $\epsilon = \frac{\alpha}{\alpha_c}$.

5.3 Ruch jednostajnie przyspieszony.

W przypadku relatywistycznego odpowiednika ruchu jednostajnie przyspieszonego mamy $\chi = \pi$ oraz $\alpha = \text{const.}$ W tym przypadku analitycznie rozwiązanie równania na fazę zegara jest postaci

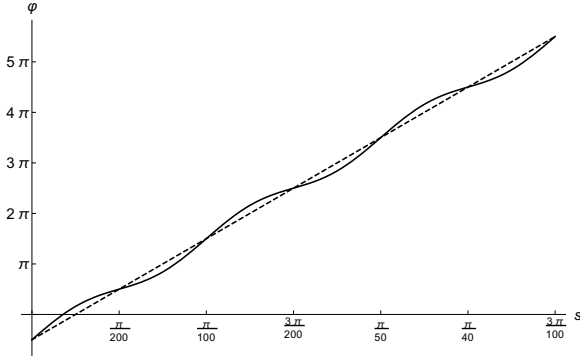
$$\varphi = \pi + 2\text{arctg} \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}} \text{tg} \left(\pm \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}} (s + s_0) / \ell \right) \mp \frac{\alpha \ell}{2} \right),$$

$$s_0 = \pm \ell \text{arctg} \left(\left(1 \pm \frac{\alpha \ell}{2} \right) / \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}} \right) / \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}},$$

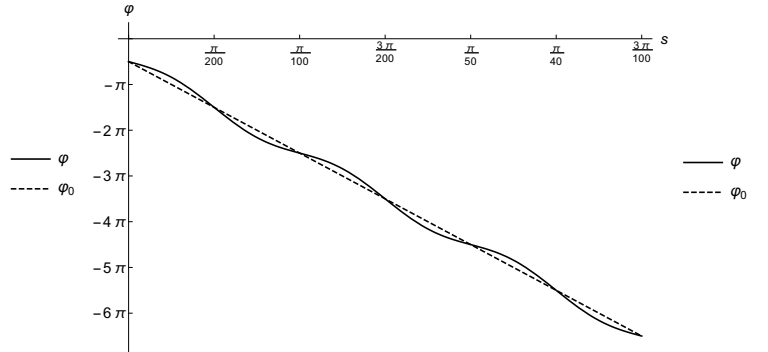
natomiast rozwiązanie przybliżone

$$\varphi = \pm \frac{2}{\ell} s - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha \ell}{2} \sin(2s/\ell) + O(\alpha^2).$$

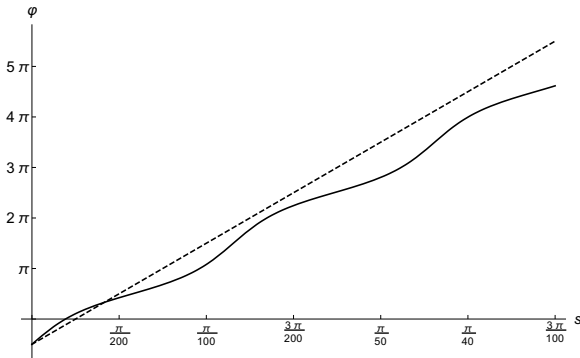
Rozwiązania dla $\ell = 0.01$ oraz $\alpha = 100$ przy różnych kierunkach działania zegara zostały przedstawione na wykresach 7a-7d. Wykres rozwiązania pełnego ukazuje, że niezależnie od kierunku działania zegara przy dużych przyspieszeniach zegar będzie opóźniony w stosunku do czasu własnego. Tego efektu nie widać w rozwiązaniu przybliżonym. Na wykresach 8a-8f porównano rozwiązanie przybliżone z rozwiązaniem pełnym dla różnych przyspieszeń. Widzimy, że przybliżenie jest zadowalające dla odpowiednio małych wartości $\epsilon = \alpha/\alpha_c$.



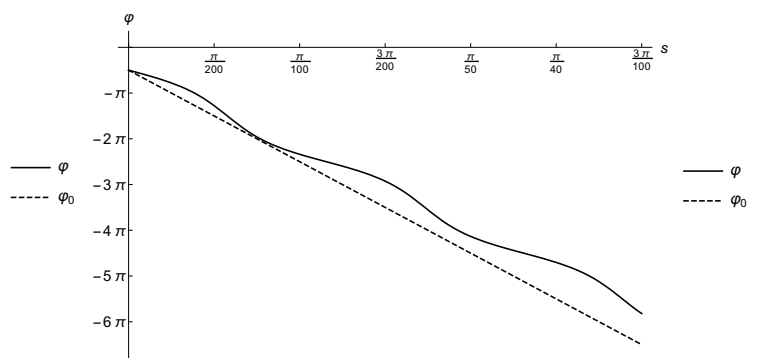
(a) Rozwiązanie przybliżone



(b) Rozwiązanie przybliżone w odwrotnym działaniu

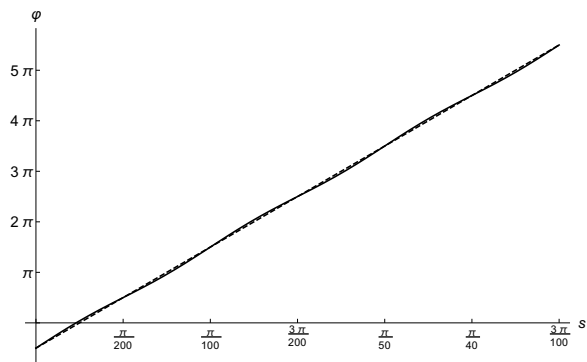


(c) Rozwiązanie pełne

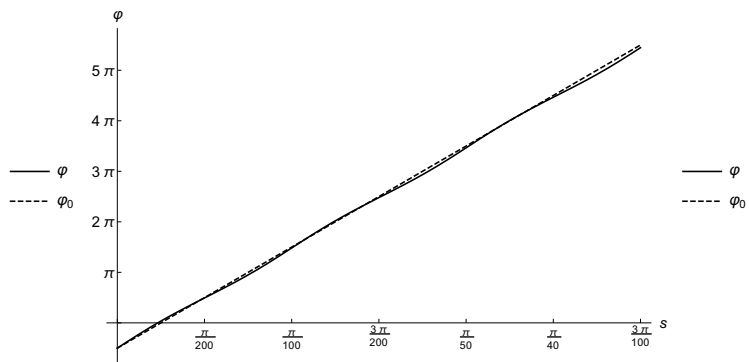


(d) Rozwiązanie pełne w odwrotnym działaniu

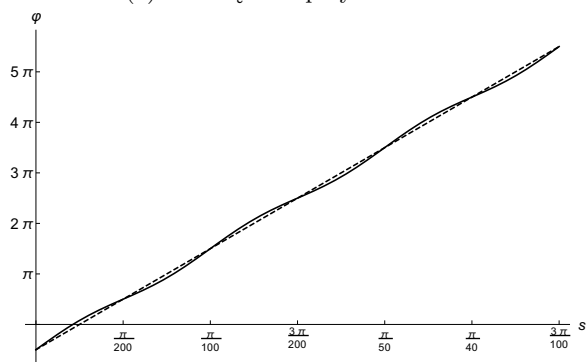
Rysunek 7: Faza zegara φ w ruchu hiperbolicznym dla $\ell = 0.01$ oraz $\alpha = 100$ w porównaniu do fazy φ_0 w układzie bez przyspieszeń.



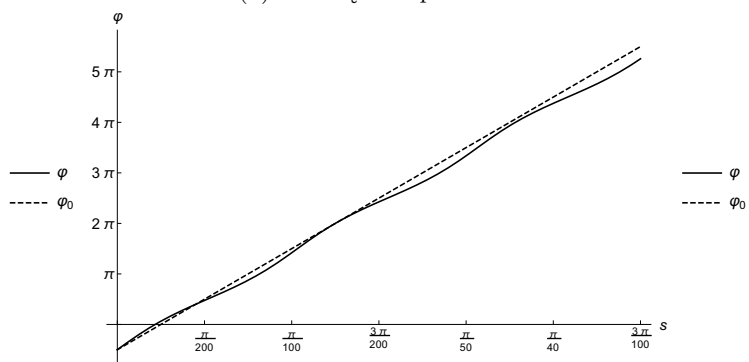
(a) Rozwiązanie przybliżone dla $\alpha = 25$



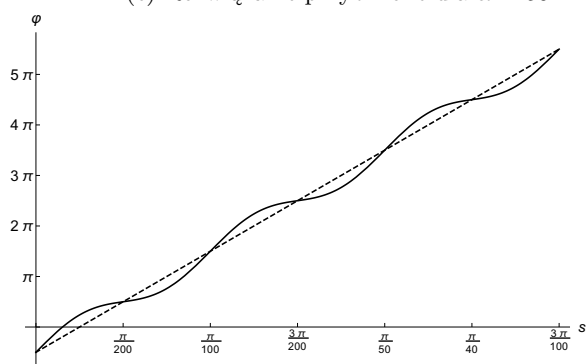
(b) Rozwiązanie pełne dla $\alpha = 25$



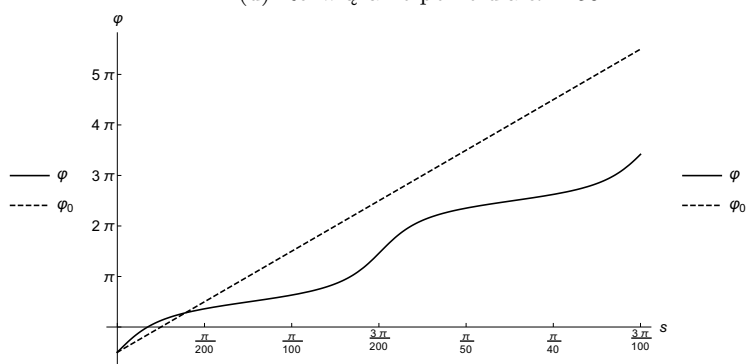
(c) Rozwiązanie przybliżone dla $\alpha = 50$



(d) Rozwiązanie pełne dla $\alpha = 50$



(e) Rozwiązanie przybliżone dla $\alpha = 150$



(f) Rozwiązanie pełne dla $\alpha = 150$

Rysunek 8: Porównanie rozwiązania przybliżonego z rozwiązaniem pełnym dla faza zegara φ w ruchu hiperbolicznym przy $\ell = 0.01$. Linia przerywaną zaznaczono fazę φ_0 w układzie bez przyspieszeń.

5.4 Ruch po okręgu.

W przypadku ruchu po okręgu o promieniu R z częstotliwością ω mamy $\chi = \omega\gamma^2 s$ oraz $\alpha = R\omega^2\gamma^2$. W takim przypadku rozwiązanie równania na fazę zegara dane jest przez

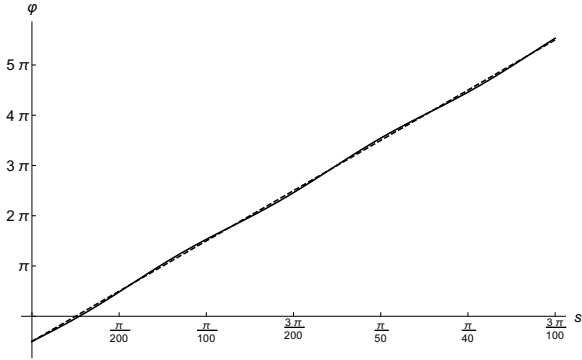
$$\varphi = \omega\gamma^2 s + 2\arctg\left(\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}} \operatorname{tg}\left(\left(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2\right)\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}}(s + s_0)/2\right) - \frac{R\omega^2\gamma^2}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2}\right),$$

$$s_0 = \frac{2}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2} \arctg\left(\left(\frac{R\omega^2\gamma^2}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2} - 1\right) / \sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}}\right) / \sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}},$$

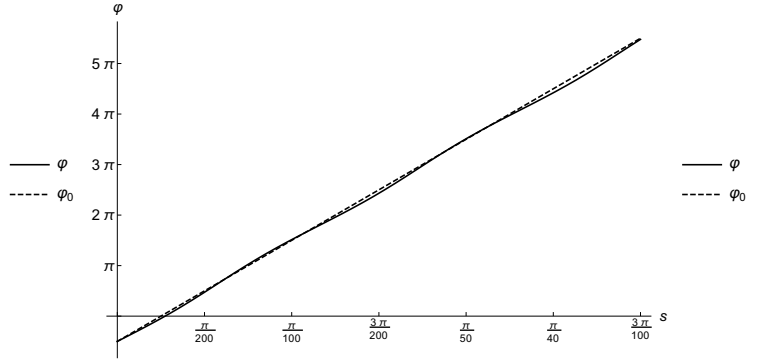
a przybliżenie dla małych przyspieszeń ma postać

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2} + \frac{R\omega^2\gamma^2}{\pm 2/\ell - \omega\gamma^2} \sin((\pm 2/\ell - \omega\gamma^2)s) + O(\alpha^2).$$

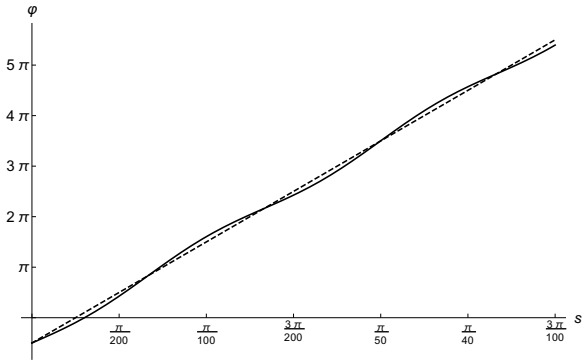
Na rysunkach 9a-9d przedstawiono wykres fazy zegara φ od czasu własnego s w ruchu po okręgu przy parametrach $\ell = 0.01$ i $R = 1$ dla różnych prędkości kątowych ω . Widzimy, że mimo różnic pomiędzy ruchem hiperbolicznym, a ruchem po okręgu charakter zaburzeń wprowadzanych przez obecność przyspieszenia jest bardzo zbliżony. Rozwiązanie przybliżone przestaje być dobre dopiero dla ogromnych prędkości kątowych.



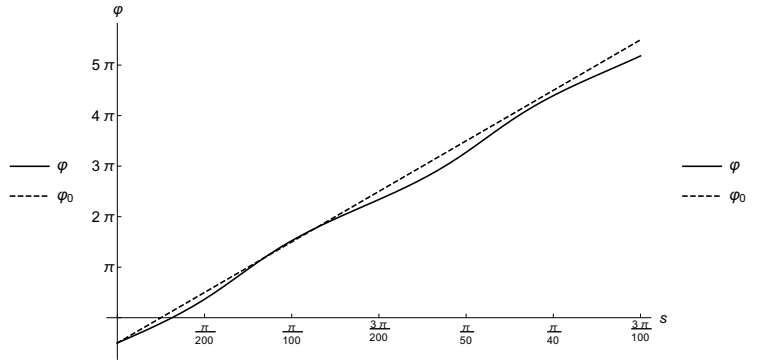
(a) Rozwiązanie przybliżone dla $\omega = 0,98$



(b) Rozwiązanie pełne dla $\omega = 0,98$



(c) Rozwiązanie przybliżone dla $\omega = 0,99$



(d) Rozwiązanie pełne dla $\omega = 0,99$

Rysunek 9: Porównanie rozwiązania przybliżonego z rozwiązaniem pełnym dla fazy zegara φ w ruchu po okręgu przy $\ell = 0.01$ i $R = 1$ dla różnych prędkości ω . Linia przerywaną zaznaczono fazę φ_0 w układzie bez przyspieszeń.

5.5 Analiza modelu pod kątem pomiaru.

Najprostszym obiektem, dla którego można użyć tego modelu wydaje się być elektron. Oszacujemy rząd wielkości przyspieszenia, dla którego spodziewamy się obserwowalnych odstępstw od hipotezy zegara. Za ℓ możemy podstawić wielkość o wymiarze metra charakterystyczną dla elektronu - długość Komptonowską fali (38). Wtedy przyspieszenie charakterystyczne dla elektronu wynosi (39). Dla porównania energie elektronów otrzymywane w akceleratorach liniowych są rzędu kilku-kilkunastu GeV. Dla szacowania przyjmijmy gradient przyspieszenia rzędu kilku GeV/m [GK15]. Rząd wielkości przyspieszenia szacujemy jako (40). Porównując rzędy wielkości stwierdzamy, że efekty raczej nie będą obserwowalne.

$$\lambda_e \approx 2,426 \cdot 10^{-10} \text{cm}, \quad (38)$$

$$\alpha_c \approx 8,244 \cdot 10^9 \text{cm}^{-1}, \quad (39)$$

$$\alpha \approx 10^2 \text{cm}^{-1}. \quad (40)$$

Komptonowska długość fali protonu wnosi (41). Przyspieszenie charakterystyczne dla protonu wynosi (42). Energie protonów osiągnęte w CERN są rzędu 7TeV [Cer]. proton doświadczy wtedy przyspieszenia rzędu (43). Porównując rzędy wielkości przyspieszeń stwierdzamy, że osiągalne w tej chwili przyspieszenia nie są wystarczające do sprawdzenia hipotezy.

$$\lambda_p \approx 1,321 \cdot 10^{-13} \text{cm}, \quad (41)$$

$$\alpha_c \approx 7,57 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-1}, \quad (42)$$

$$\alpha \approx 124 \text{cm}^{-1}. \quad (43)$$

6 Podsumowanie

Badanie hipotezy zegara jest ważne ze względu na jej fundamentalny charakter w teorii względności. W tej pracy wykorzystano fundamentalny relatywistyczny rotator do konstrukcji modelu najprostszego i zarazem podstawowego zegara. Uzyskany model determinuje równanie na fazę zegara φ , która w układach bez przyspieszeń mierzy czas własny. Zbadano ruch hiperboliczny oraz ruch po okręgu w przestrzeni Minkowskiego oraz ruch po okręgu z perspektywy odległych galaktyk oraz wokół czarnej dziury. W układach tych pojawia się przyspieszenie, a wraz z nim pojawia się czynnik zaburzający w działanie zegara. Faza φ przestaje być wtedy odpowiednia do pomiaru czasu własnego. Sugeruje to, że hipoteza zegara może się załamywać, gdy pojawia się przyspieszenie. Zaburzenie fazy zegara wynikające z przyjętego modelu jest zauważalne dopiero dla ogromnych przyspieszeń. Aktualnie przeprowadzane eksperymenty zdają się odbywać w zbyt małych przyspieszeniach. Może to być motywacją do rozwoju w kierunku budowy akceleratorów o większych przyspieszeniach.

Załączniki

A Dodatek matematyczny

A.1 Rozwiązanie układu równań z funkcją f w modelu Staruszkiewicza.

Dany jest układ równań postaci

$$f(\xi)^2 - 4f(\xi)f'(\xi)\xi = 1 = 16f(\xi)^2f'(\xi)^2\xi.$$

Zauważmy przy tym, że

$$\xi = -\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} > 0.$$

Rozwiążemy teraz pierwsze z równań, to jest

$$f(\xi)^2 - 4f(\xi)f'(\xi)\xi = 1.$$

Można je przekształcić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{1}{\xi} = \frac{4f(\xi)}{f(\xi)^2 - 1} f'(\xi)$$

$$\ln \xi = \int \frac{4f}{f^2 - 1} df$$

$$\ln \xi = \int \frac{2}{f^2 - 1} df^2$$

$$\ln C_1 \xi = 2 \ln |f^2 - 1|, \quad C_1 > 0$$

$$C_1 \xi = (f^2 - 1)^2$$

$$\sqrt{C_1 \xi} = |f^2 - 1|$$

$$|f(\xi)| = \sqrt{1 \pm C\sqrt{\xi}}.$$

Rozwiążemy teraz równanie

$$16f(\xi)^2f'(\xi)^2\xi = 1$$

Ponownie równanie to da się zapisać jako równanie o zmiennych rozdzielonych

$$4f(\xi)f'(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

$$2f^2 = \pm 2\sqrt{\xi} + 2C_2$$

$$f^2 = \pm \sqrt{\xi} + C_2$$

$$|f| = \sqrt{\pm \sqrt{\xi} + C_2}.$$

Oba rozwiązanie uzgadniamy wybierając stałe całkowania $C_1 = 1$ oraz $C_2 = 1$.

Bibliografia

- [Hel93] M. Heller. *Fizyka ruchu i czasoprzestrzeni*. PWN, Warszawa, 1993. ISBN: 83-01-11249-2.
- [HM01] M. Heller i J. Mączka. *Czas...* BIBLOS Tarnów & OBI Kraków, 2001. ISBN: 83-7332-019-9.
- [Ein05] A. Einstein. “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”. Deutsch. In: *Annalen der Physik* 322 (1905), S. 891–921. DOI: 10.1002/andp.19053221004.
- [MP12] H. Minkowski and V. Petkov. *Space and Time: Minkowski’s papers on relativity*. English. Minkowski Institute Press, 2012. ISBN: 978-0-9879871-2-9.
- [Sta08] A. Staruszkiewicz. “Fundamental relativistic rotator”. English. In: *Acta Phys. Pol. B* 1 (Jan. 2008), pp. 109–112.
- [KT84] W. Kopczyński i A. Trautmann. *Czasoprzestrzeń i grawitacja*. PWN, Warszawa, 1984. ISBN: 83-01-02266-3.
- [GO03] J. Gancarzewicz i B. Opozda. *Wstęp do geometrii różniczkowej*. Matematyka. Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 2003. ISBN: 83-233-1768-2.
- [OR13] H.C. Ohanian and R. Ruffini. *Gravitation and Spacetime*. English. Cambridge University Press, 2013. ISBN: 9781139003391.
- [Bai+77] J. Bailey et al. “Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit”. English. In: *Nature* 268 (1977), pp. 301–305.
- [LL78] L.D. Landau i E.M. Lifszyc. *Krótki kurs fizyki teoretycznej: Mechanika, Elektrodynamika*. PWN, Warszawa, 1978.
- [Bra09] Ł. Bratek. “On the nonuniqueness of free motion of the fundamental relativistic rotator”. English. In: *ArXiv e-prints* (Feb. 2009). arXiv: 0902.4189 [math-ph].
- [Bra12] Ł. Bratek. “Spinor particle. An indeterminacy in the motion of relativistic dynamical systems with separately fixed mass and spin”. English. In: *J. Phys.: Conf. Ser.* 343, 012017 (Feb. 2012).
- [Bra15] Ł. Bratek. “Relativistic Ideal Clock”. English. In: *ArXiv e-prints* (Nov. 2015). arXiv: 1511.00419 [math-ph].
- [Dir50] P. A. M. Dirac. “Generalized Hamiltonian Dynamics”. W: *Can. J. Math.* 2.1246 (1950), s. 129–148.
- [Dir81] P.A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1981. ISBN: 9780198520115.
- [Syn60] J.L. Synge. *Relativity: The general theory*. English. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
- [CN15] L.F.O. Costa and J. Natário. “Inertial forces in general relativity”. English. In: *J. Phys.: Conf. Ser.* 600.1, 012053 (2015). DOI: 10.1088/1742-6596/600/1/012053.
- [AP14] A. Ashtekar and V. Petkov. *Springer Handbook of Spacetime*. English. Springer, Berlin, 2014. DOI: 10.1007/978-3-642-41992-8.
- [Sta] isbn = 83-7081-086-1 series = Wykłady dla fizyków, tom I year = 1993 publisher = $\langle N|K|F \rangle$, *Krakw,language = polishhyphenation = polish*StaruszkiewiczA.. *Algebra i geometria*.
- [Har16] J.B. Hartle. *Grawitacja: Wprowadzenie do ogólnej teorii względności Einsteina*. Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 2016. ISBN: 978-83-235-0476-4.

- [IJ80] R.S. Ingarden i A. Jamiołkowski. *Elektrodynamika klasyczna*. PWN, Warszawa, 1980. ISBN: 83-01-00464-9.
- [GK15] H. S. Ghotra and N. Kant. “Electron acceleration by a chirped laser pulse in vacuum under the influence of magnetic field”. English. In: *Opt. Rev.* 22.4 (2015), pp. 539–543. ISSN: 1349-9432. DOI: 10.1007/s10043-015-0113-6.
- [Cer] *The accelerator complex*. English. <https://home.cern/about/accelerators>. Dostęp: 2018-05-15.