Badanie krzywych chronometrycznych w kontekscie hipotezy zegara.

Paweł Rzońca

16 czerwca 2018

Spis treści

$$\xi = -\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} \tag{1}$$

Więz $k \cdot k = 0$ uwzględniamy w Lagragianie metodą mnożników Lagranga

$$L = m\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} f(\xi) + \lambda(k \cdot k) \tag{2}$$

Rozważymy ogólniejszy Lagrangian postaci

$$L = \frac{1}{2}\left(\eta \dot{x} \cdot \dot{x} + \eta^{-1} f(\xi)\right) + \lambda(k \cdot k) \tag{3}$$

Równanie Eulera-Lagranga dla η daje dwie możliwości

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\dot{x} \cdot \dot{x} - \eta^{-2} f(\xi)\right). \tag{4}$$

Zakładając, że η jest zależna od prędkości dostajemy więz

$$\eta = \frac{f(\xi)}{\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}}}.$$

Wtedy lagrangian sprowadza się do postaci ... (z dokładnością do stałej). Gdy założymy, że η jest niezależne otrzymujemy więzy

$$\dot{x} \cdot \dot{x} = 0, \quad f(\xi) = 0 \tag{5}$$

1 Konstrukcja zegara

1.1 Transport Fermiego-Walkera

Konstrukcję zegara przeprowadzimy w lokalnie nierotującej bazie. W tej części pracy przedstawimy koncepcje potrzebne do konstrukcji takiej bazy. Dokładne omówienie prezentowanych zagadnień można znaleźć np. tu [1, 2] Zauważmy, że dla transport równoległy wzdłuż linii geodezyjnej przekształca wektory styczne w wektory styczne. Własność tę tracimy, gdy linia śwaita nie jest linią geodezyjną, czyli gdy $A = \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{d}s} = 0$. Transportem, który zachowuje styczność wektorów do linii świata jest transport Fermiego-Walkera (FW). Doświadczenie wskazuje, że taki transport odpowiada fizycznemu transportowi wektorów [3, 4]. Do jego zdefiniowania posłużą nam odwzorowania P i R. Niech u będzie jednostkowym wektorem stycznym do linii świata y. Dowolny wektor v możemy w punkcie $p \in y$ rozłożyć na składowe styczną $R(v)$ i prostopadłą $P(v)$ do y (6). Przestrzeń wektorów p rozpada się w ten sposób na sumę prostą przestrzeni $\{P(v)\}$ i $\{R(v)\}$.

$$v = \underbrace{v - (v \cdot u)u}_{P(v)} + \underbrace{(v \cdot u)u}_{R(v)} = P(v) + R(v). \tag{6}$$

Definicja 1. Mówimy, że wektor v spełnia prawo **transportu Fermiego-Walkera** (FW) wzdłuż linii świata y jeżeli

$$\frac{\mathrm{D}_{FW}(v)}{\mathrm{d}s} := P\left(\frac{\mathrm{D}P(v)}{\mathrm{d}s}\right) + R\left(\frac{\mathrm{D}R(v)}{\mathrm{d}s}\right) = 0 \tag{FW}$$

Wyrażenie $\frac{\mathrm{D}_{FW}}{\mathrm{d}s}$ nazywamy **pochodną Fermiego-Walkera**.

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że $u = \dot{y}$ oraz $A = \frac{Du}{ds}$ to odpowiednio czterowektory prędkości i przyspieszenia stowarzyszone z linią świata y. Wtedy pochodną Fermiego-Walkera możemy zapisać w postaci*

$$\frac{D_{FW} v}{ds} = \frac{Dv}{ds} + (A \cdot v)u - (u \cdot v)A. \tag{7}$$

Powyższa równość może służyć za definicję pochodnej Fermiego-Walkera [1] równoważną do tutaj przyjętej.

Dowód. Obliczmy pochodne absolutne rzutów $P(v)$ oraz $R(v)$

$$\frac{\mathrm{D}P(v)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - (u\cdot v)A - \frac{\mathrm{d}(u\cdot v)}{\mathrm{d}s}u, \quad \frac{\mathrm{D}R(v)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}(u\cdot v)}{\mathrm{d}s}u + (u\cdot v)A.$$

Pamiętając, że $u \perp A$ mamy

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\mathrm{D}P(v)}{\mathrm{d}s}\right) &= \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - (u\cdot v)A - \frac{\mathrm{d}(u\cdot v)}{\mathrm{d}s}u - \left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s}\cdot u\right)u + \frac{\mathrm{d}(u\cdot v)}{\mathrm{d}s}u = \\ &= \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - (u\cdot v)A - \left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s}\cdot u\right)u, \\ R\left(\frac{\mathrm{D}R(v)}{\mathrm{d}s}\right) &= \frac{\mathrm{d}(u\cdot v)}{\mathrm{d}s}u = \left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s}\cdot u\right)u + (A\cdot v)u. \end{aligned}$$

Zatem pochodna FW jest równa

$$\frac{\mathrm{D}_{FW}(v)}{\mathrm{d}s} = P\left(\frac{\mathrm{D}P(v)}{\mathrm{d}s}\right) + R\left(\frac{\mathrm{D}R(v)}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} + (A\cdot v)u - (u\cdot v)A. \tag{8}$$

□

W przypadku zerowego przyspieszenia ($A \equiv 0$) linia świata jest linią geodezyjną, pochodna (FW) sprowadza się do pochodnej absolutnej, a transport (FW) sprowadza się do transportu równoległego.

Dla dowonych wektorów v_1 i v_2 mamy $P(v_1) \perp R(v_2)$, a więc warunek transportu (FW) sprowadza się zerowania się każdego ze składników

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\mathrm{D}P(v)}{\mathrm{d}s}\right) &= 0, \\ R\left(\frac{\mathrm{D}R(v)}{\mathrm{d}s}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Definicja 2. Reperem lokalnie nierotującym nazywamy reper ruchomy poruszający się wraz z ciałem wzdłuż jego linii świata, którego wersor czasowy jest styczny do linii świata (co odpowiada czteroprędkości) i którego wersory spełniają prawo transportu (FW).

Reper lokalnie nierotujący jest szczególnie dogodny do opisu zjawisk fizycznych. W granicy nierelatywistycznej odpowiada on Newtonowskiej koncepcji nierotującego reperu [1]. Przeprowadzimy teraz konstrukcję takiego reperu, co sprowadza się do konstrukcji odpowiedniej bazy E.

Za wersor czasowy takiej bazy możemy zawsze obrać prędkość u, gdyż jest ona unowmowanym wektorem czasowym spełniającym prawo transportu (FW)

$$e := u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}.$$

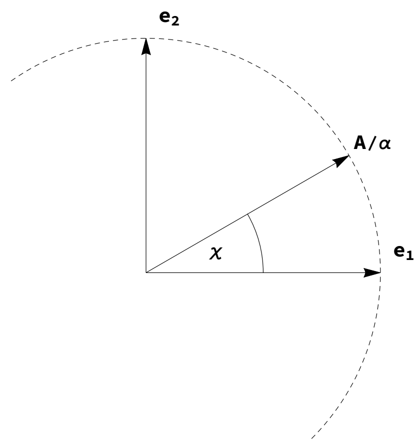
Dobieramy do niego wersory przestrzenne e_i, $i = 1{,}2{,}3$ tak, aby otrzymana baza $E = \{e_\mu\}$ była ortogonalna. Warunek $e_i \perp e$ zapewnia, że $R(e_i) = 0$. Zatem dodatkowym warunkiem jaki trzeba nałożyć na wersory przestrzenne e_i jest

$$P\left(\frac{\mathrm{D}P(v)}{\mathrm{d}s}\right) = 0.$$

Uwzględniając, że $e = u$ oraz $P(e_i) = e_i$ możemy powyższy warunek zapisać w postaci

$$\frac{\mathrm{D}e_i}{\mathrm{d}s} = \left(\left(\frac{\mathrm{D}e_i}{\mathrm{d}s}\right)\cdot e\right)e, \tag{9}$$

Przydatną własnością bazy E jest, że dany wektor ma w tej bazie stałe współrzędne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia prawo transportu (FW). Aby to pokazać wystarczy rozłożyć dany wektor w bazie E i skorzystać z definicji transportu (FW).



Rys. 1: Schemat obrazujący obrót $\mathcal{O}$ wykonany na wersorze czteroprzyspieszenia A/α w bazie E.

1.2 Czwórka symetryczna kierunków zerowych

Będziemy od teraz zakładać, że jeden z wersorów bazy E (e_3) jest prostopadły do hiperpłaszczyzny ruchu, tak, że

$$A \cdot e_3 = 0.$$

Nie jest to duże ograniczenie i, jak się później przekonamy, pozwala na zastosowanie modelu w wielu przypadkach. Zauważmy, że wektor A leży wtedy w płaszczyźnie rozpinanej przez wektory e_1 i e_2. Licząc przyspieszenie właściwe dostajemy

$$\alpha^2 = (A \cdot e_1)^2 + (A \cdot e_2)^2$$

Interpretując powyższą równość jako trójke pitagorejską możemy wprowadzić następujące oznaczenia

$$\cos\chi = \frac{A \cdot e_1}{\alpha},$$
$$\sin\chi = \frac{A \cdot e_2}{\alpha}.$$

Z wersorów e i e_3 tworzymy dwa zerowe wektory skierowane w przyszłość k_+ i k_-, które uważamy za wektory własne pewnej transformacji Lorenza.

$$k_+ = \frac{e + e_3}{\sqrt{2}} \tag{10}$$
$$k_- = \frac{e - e_3}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

$$k_+ \cdot k_- = 1 \qquad k_\pm \cdot k_\pm = 0.$$

$$\mathcal{O}(k_\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{O}(e \pm e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{O}e \pm \mathcal{O}e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e \pm e_3) = k_\pm.$$

Wektory te są wektorami własnymi pewnego obrotu $\mathcal{O}$. Łatwo sprawdzić, że jest to obrót w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory e_1 i e_2, czyli eliptyczne przekształcenie Lorenza. Obrót ten pozwala nam zinterpretować kąt χ. Zauważmy, że możemy za pomocą obrotu $\mathcal{O}$ obrócić, wersor czterowektora przyspieszenia o kąt $-\chi$, tak aby spełniał prawo transportu (FW). Schematycznie przedstawiono to na rysunku 1.

Rozważamy trzeci wektor zerowy skierowany w przyszłość k taki, że $k \cdot e_3 \equiv 0$ oraz $k(0) \cdot e_1(0) = 0$. Wektor ten rozkładamy w bazie E

$$k = k^0 e + k^i e_i, \qquad k^1(0) = 0, k^3 = 0$$

$$k(0) = k^0(0)e(0) + k^2(0)e_2(0)$$

Rozkładając k w bazie E stwierdzamy, że jego współrzędne formują trójkę pitagorejską

$$(k \cdot e)^2 = (k \cdot e_1)^2 + (k \cdot e_2)^2 \tag{12}$$

Wprowadzamy **fazę zegara** φ równością (13)

$$\cos\varphi = \frac{k \cdot e_1}{k \cdot e} \tag{13}$$

$$k = (k \cdot e)(e - \cos\varphi e_1 - \sin\varphi e_2)$$

Z wektora $k(0)$ tworzymy wektor zerowy $k_0(s)$ tak aby spełniał prawo transportu (FW). Wiemy, że wtedy jego współrzędne w bazie E są stałe. Wektor k_0 ustalamy więc jako (15). Warunek początkowy na fazę φ ustalamy na (14), aby dla $s = 0$ wektory k i k_0 reprezentowały ten sam kierunek zerowy.

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{2} \tag{14}$$

$$k_0(s) = \sqrt{2}(e + e_2). \tag{15}$$

Każdemu kierunkowi zerowemu możemy przyporządkować punkt na sferze, a następnie każdemu punktowi sfery możemy przyporządkować, przez rzut stereograficzny, punkt z płaszczyzny zespolonej (odpowiednio uzwarconej) [**?**]. Skonstruujemy teraz czwarty wektor zerowy k_3, który razem z wektorami k_+, k_0, k_- utworzy czwórkę symetryczną. Mówimy, że wektory zerowe tworzą czwórkę symetryczną, kiedy dwustosunek odpowiadających im liczb zespolonych wynosi $e^{\pm i\pi/3}$. Dwustosunek liczb zespolonych z_0, z_1, z_2, z_3 przyjmujemy w postaci (17) [5]. Liczby zespolone odpowiadające wektorom własnym k_ν oznaczamy przez κ_ν gdzie $\nu \in \{+, 0, -, 3\}$. W zależności od kolejności wektorów i przyjętego znaku w (18) otrzymujemy dwie liczby κ_3 różniące się znakiem części rzeczywistej (19). Wektorowi zerowemu k odpowiada liczba κ_φ (16).

$$\kappa = -\cos\varphi - i\sin\varphi \tag{16}$$

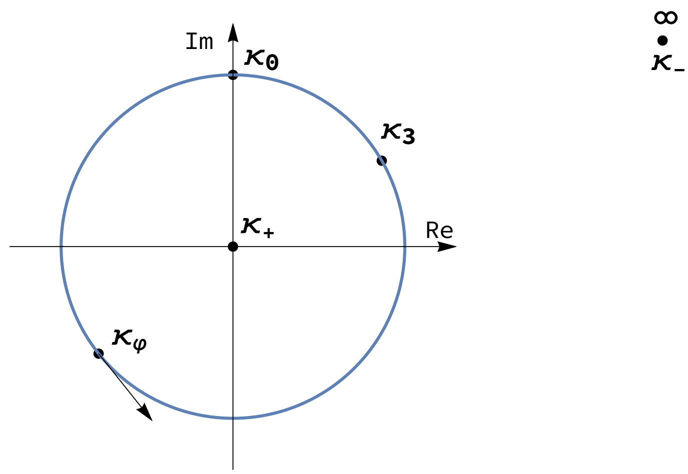
Na rysunkach 2 oraz 3 prezentujemy wzajemne położenie uzyskanej czwórki symetrycznej (dla $\mathrm{Re}(\kappa_3) > 0$) oraz obrazu wektora k. Uzyskane wektory wektory są liniowo niezależne i tworzą bazę kierunków zerowych, która dodatkowo spełnia prawa transportu (FW).

$$(z_0 z_1 z_2 z_3) = \frac{(z_0 - z_1)}{(z_0 - z_3)} \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)}. \tag{17}$$

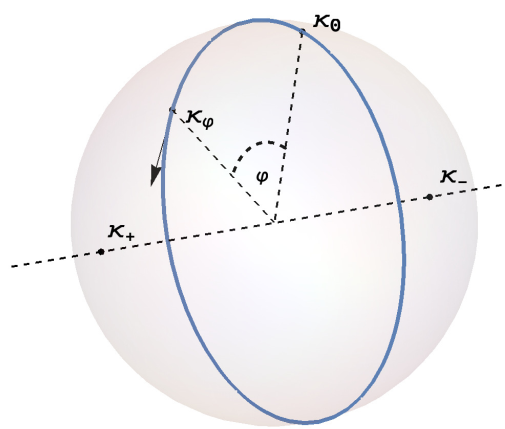
$$\kappa_0 = i,\ \kappa_+ = 0,\ \kappa_- = \infty, \qquad (\kappa_0 \kappa_+ \kappa_- \kappa_3) = e^{\pm i\pi/3} \tag{18}$$

$$\kappa_3 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \qquad k_3 = \sqrt{2}e \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \tag{19}$$

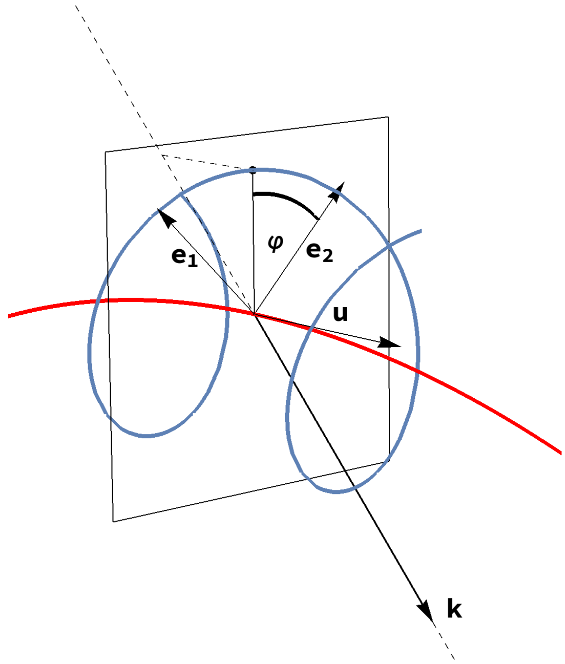
$$k_\mu \cdot k_\nu = 1, \quad k_\nu \cdot k_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu,\ \mu,\nu \in \{0,\ +,\ -,\ 3\}$$



Rys. 2: Obraz czwórki symetrycznej oraz kierunku k na płaszczyźnie zespolonej. Punkt κ_- utożsamiamy z punktem ∞. Punkt κ_ϕ porusza się po zaznaczonym okręgu jednostkowym wraz ze wzrostem ϕ. Wektorem stycznym do okręgu zaznaczono kierunek ruchu.



Rys. 3: Obraz kierunków zerowych k_0, k_+, k_- wraz z kierunkiem k na sferze jednostkowej. Punkt κ_ϕ porusza się po zaznaczonym okręgu jednostkowym wraz ze wzrostem ϕ. Wektorem stycznym do okręgu zaznaczono kierunek ruchu. Płaszczyzna zawierająca okrąg jest prostopadła do prostej zawierającej κ_+ i κ_-



Rys. 4: Schemat działania zegara (kolor niebieski) wzdłuż lini świata (kolor czerwony).

1.3 Konstrukcja zegara

Zakładamy, że podczas ruchu mamy spełniony więz (**??**). Założymy dodatkowo, że wektor zerowy $\dot{x}$ można przedstawić jako kombinację liniową e oraz k, taką, że $e \cdot \dot{x} = 1$. Rozkładając $\dot{x}$ w bazie E dostajemy

$$\dot{x} = e - C(k \cdot e_1)e_1 - C(k \cdot e_2)e_2,$$

Korzystając z faktu, że $\dot{x}$ jest zerowy możemy wyznaczyć współczynniki kombonacji liniowej.

$$0 = \dot{x} \cdot \dot{x} = 1 - C^2(k \cdot e_1)^2 - C^2(k \cdot e_2)^2 = 1 - C^2(k \cdot e)^2$$

$$C = \pm 1/(k \cdot e).$$

Wybieramy znak minus, gdyż w przeciwnym przypadku $\dot{x} = k/(k \cdot e)$ oraz $\dot{x} \cdot k = 0$. Zatem

$$\boxed{\dot{x} = 2e - k/(k \cdot e) = e + \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2, \quad \dot{x} \cdot k = 2k \cdot e,} \tag{20}$$

Sytuację tę obrazujemy na schematycznym rysunku (4)

Następnie obliczamy pochodną absolutną wektora k

$$\dot{k} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}e - \frac{\mathrm{d}(k \cdot e_1)}{\mathrm{d}s}e_1 - \frac{\mathrm{d}(k \cdot e_2)}{\mathrm{d}s}e_2}_{K_p} + \underbrace{(k \cdot e)\dot{e} - (k \cdot e_1)\dot{e_1} - (k \cdot e_2)\dot{e_2}}_{K}$$

$$\dot{k} \cdot \dot{k} = K_p \cdot K_p + K \cdot K + 2K_p \cdot K$$

Obliczymy oddzielnie każdy ze składników powyższej sumy. Zaczynamy od przedstawienia pochodnych wersorów bazy w bardziej użytecznej postaci

$$\dot{e_0} = \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{d}s} = A,$$

$$\dot{e_1} = \frac{\mathrm{D}e_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{D}(e_1)_\perp}{\mathrm{d}s} \overset{(\mathbf{??})}{=} \left(\frac{\mathrm{D}(e_1)_\perp}{\mathrm{d}s} \cdot e_0\right) e = \left(\frac{\mathrm{D}e_1}{\mathrm{d}s} \cdot e\right) e \overset{(\mathbf{??})}{=} -\left(\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{d}s} \cdot e_1\right) e = -\left(A \cdot e_1\right) e,$$

$$\dot{e_2} = \frac{\mathrm{D}e_2}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{D}(e_2)_\perp}{\mathrm{d}s} \overset{(\mathbf{??})}{=} \left(\frac{\mathrm{D}(e_2)_\perp}{\mathrm{d}s} \cdot e\right) e = \left(\frac{\mathrm{D}e_2}{\mathrm{d}s} \cdot e\right) e \overset{(\mathbf{??})}{=} -\left(\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{d}s} \cdot e_2\right) e = -\left(A \cdot e_2\right) e.$$

Zgodnie z powyższym zachodzą równości

$$K = (k \cdot e)(A + (A \cdot e_1)\cos\varphi\; e + (A \cdot e_2)\sin\varphi\; e)$$

$$K_p = (k \cdot e)\dot{\varphi}(\sin\varphi\; e_1 - \cos\varphi\; e_2) + \frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}(e - \cos\varphi\; e_1 - \sin\varphi\; e_2).$$

$$\begin{aligned}
K_p \cdot K_p &= \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e_1)}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e_2)}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)\cos\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)\sin\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}\right)^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - (k \cdot e)^2(\dot{\varphi})^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\
&= -(k \cdot e)^2(\dot{\varphi})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2K_p \cdot K &= 2(k \cdot e_0)\dot{\varphi}\left((A \cdot e_1)\sin\varphi - (A \cdot e_2)\cos\varphi\right) - \frac{\mathrm{d}(k \cdot e_0)}{\mathrm{d}s}\left((A \cdot e_1)\cos\varphi + (A \cdot e_2)\sin\varphi\right) + \\
&+ \frac{\mathrm{d}(k \cdot e_0)}{\mathrm{d}s}(A \cdot e_1)\cos\varphi + \frac{\mathrm{d}(k \cdot e_0)}{\mathrm{d}s}(A \cdot e_2)\sin\varphi \\
&= 2(k \cdot e_0)\dot{\varphi}\left((A \cdot e_1)\sin\varphi - (A \cdot e_2)\cos\varphi\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K \cdot K &= (k \cdot e)^2((A \cdot A) + ((A \cdot e_1)\cos\varphi + (A \cdot e_2)\sin\varphi)^2) = \\
&= -(k \cdot e)^2((A \cdot e_1)^2 + (A \cdot e_2)^2 - (A \cdot e_1)^2\cos^2\varphi - (A \cdot e_2)^2\sin^2\varphi - 2(A \cdot e_1)(A \cdot e_2)\sin\varphi\cos\varphi) \\
&= -(k \cdot e)^2\left((A \cdot e_1)\sin\varphi - (A \cdot e_2)\cos\varphi\right)^2
\end{aligned}$$

Sumę powyższych składników możemy zwinąć do kwadratu i ostatecznie

$$1 = -\frac{\ell^2 \dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} = \frac{\ell^2}{4}(\dot{\varphi} - (A \cdot e_1)\sin\varphi + (A \cdot e_2)\cos\varphi)^2$$

$$\dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + (A \cdot e_1)\sin\varphi - (A \cdot e_2)\cos\varphi$$

Stosując oznaczenie **??** możemy zapisać owo równanie w zgrabnej postaci

$$\dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + \alpha\cos\chi\sin\varphi - \alpha\sin\chi\cos\varphi$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + \alpha\sin(\varphi - \chi)} \tag{21}$$

W przypadku braku przyspieszenia $\alpha = 0$, wprowadzony model zegara mierzy czas własny.

$$\dot{\varphi} = \frac{2}{\ell}, \quad \varphi = \pm\frac{2}{\ell}s + \varphi_0. \tag{22}$$

2 Aplikacje

2.1 Ruch hiperboliczny

Jako pierwszy chcemy zbadać relatywistyczny odpowiednik ruchu jednostajnie przyspieszonego. W układzie obserwatora inercjalnego $\mathcal{I}$ posługującego się kartezjańskim układem współrzędnych rozważamy linię świata $y = y(s)$ obserwatora $\mathcal{Z}$ parametruzowaną czasem własnym s. Poniższe wyprowadzenie postaci y można znaleźć w [6, 4] Ruch ten będzie odbywał się w jednym wymiarze przestrzennym. W takim przypadku ogólna postać czteroprędkości, po uwzględnieniu warunku unormowania, ma postać (23).

$$(u^\mu) = (\cosh\beta(s),\ \sinh\beta(s),\ 0,\ 0), \tag{23}$$

gdzie $\beta(s)$ jest pewną funkcją parametryzowaną czasem własnym s. Rządamy, aby przyspieszenie właściwe było stałe.

$$(A^\mu) = (\dot\beta(s)\sinh\beta(s),\ \dot\beta(s)\cosh\beta(s),\ 0,\ 0).$$

$$\alpha = \sqrt{-A^\mu A_\mu} = \dot\beta(s)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe na funkcję $\beta(s)$. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $\beta(0) = 0$. Wtedy

$$\beta(s) = \alpha s,$$

$$(u^\mu) = (\cosh\alpha s,\ \sinh\alpha s,\ 0,\ 0),$$

$$(A^\mu) = (\alpha\sinh\alpha s,\ \alpha\cosh\alpha s,\ 0,\ 0).$$

A zatem odpowiednik ruchu jednostajnie przyspieszonego w czasoprzestrzeni Minkowskiego to ruch opisany przez hiperbolę. Łatwo sprawdzić, że dla małych prędkości ruch ten przechodzi w ruch jednostajnie przyspieszony. Ciało w takim ruchu porusza się po linii świata (24).

$$(y^\mu) = \left(\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha s,\ \frac{1}{\alpha}\cosh\alpha s,\ 0,\ 0\right). \tag{24}$$

Chcemy skonstruować reper współporuszający się z $\mathcal{Z}$. W tym celu wersor czasowy obieramy prędkość $e_0 = u$, a za pierwszy z wersorów przestrzennych unormowane przyspieszenie $e_1 = A/\alpha$. Wersory te uzupełniamy do bazy za pomocą wersorów kanonicznych. Otrzymaną bazę możemy zapisać zgrabnie w postaci macierzy (25). Łatwo sprawdzić, że tak skonstruowany reper spełnia prawo transportu Fermiego-Walkera.

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha s & \sinh\alpha s & 0 & 0 \\ \sinh\alpha s & \cosh\alpha s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Możemy teraz podać równanie na kąt ϕ zegara

$$\chi = \pi, \quad \alpha = \mathrm{const} \tag{26}$$

$$\dot\varphi = \pm\frac{2}{\ell} + \alpha\sin(\varphi - \pi) = \pm\frac{2}{\ell} - \alpha\sin(\varphi) \tag{27}$$

2.2 Ruch po okręgu

W układzie obserwatora inercjalnego $\mathcal{I}$ z kartezjańskim układem współrzędnych rozważamy linię świata obserwatora $\mathcal{Z}$ w ruchu jednostajnym po okręgu. Zagadnienie rozpatrujemy w czasoprzestrzeni Minkowskiego. Rozpatrzmy punkt poruszający się po okręgu o promieniu R i częstości ω. W układzie obserwatora inercjalnego $\mathcal{I}$ porusza się on po trajektorii $y = y(s)$. Współrzędne tej trajektorii mają, w kartezjańskim układzie współrzędnych, postać

$$(y^\mu) = (\gamma s,\ R\cos\omega\gamma s,\ R\sin\omega\gamma s,\ 0). \tag{28}$$

Wtedy czterowektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$(u^\mu) = \left(\frac{\mathrm{d}y^\mu}{\mathrm{d}s}\right) = (\gamma,\ -R\omega\gamma\sin\omega\gamma s,\ R\omega\gamma\cos\omega\gamma s,\ 0), \tag{29}$$

$$(A^\mu) = \left(\frac{\mathrm{D}u^\mu}{\mathrm{d}s}\right) = (0,\ -R\omega^2\gamma^2\cos\omega s,\ -R\omega^2\gamma^2\sin\omega\gamma s,\ 0). \tag{30}$$

Właściwe przyspieszenie jest wtedy zachowane podczas ruchu

$$\alpha = \sqrt{-A\cdot A} = R\omega^2\gamma^2. \tag{31}$$

Teraz zajmiemy się znalezieniem reperu lokalnie nierotującego poruszającego się po rozpatrywanej linii świata. Jako wersor czasowy e wybieramy prędkość u. Pierwszy z wersorów przestrzennych e_1' wybieramy wersor przeciwny do przyspieszenia. Jako wersor e_3 wybieramy unormowany wektor prostopadły do płaszczyzny ruchu. Wersor e_2' wybieramy tak, aby był ortogonalny do pozostałych. Uzyskaną bazę zapisujemy w postaci macierzowej (**??**).

$$E' = \begin{pmatrix} e \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma\sin\omega\gamma s & R\omega\gamma\cos\omega\gamma s & 0 \\ 0 & \cos\omega\gamma s & \sin\omega\gamma s & 0 \\ R\omega\gamma & -\gamma\sin\omega\gamma s & \gamma\cos\omega\gamma s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Chcemy, aby obrana baza spełniała prawo transportu (FW). Z racji ortonormalności wersory tej bazy spełniają warunek (**??**). Łatwo sprawdzić, że wersory e i e_3 spełniają również warunek (**??**), w przeciwieństwie do wersorów e_1' oraz e_2'. Aby tę drobną usterkę naprawić dokonamy obrotu bazy o kąt $\psi = \psi(s)$ w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory e_1' i e_2'. Odpowiedni obrót w bazie kanonicznej jest dany przez (33) [5]. Właściwie obrócone wersory obliczamy za pomocą (34).

$$(\mathcal{O}^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= \mathcal{O}^\mu_1 E'_\mu, \\ e_2 &= \mathcal{O}^\mu_2 E'_\mu. \end{aligned} \tag{34}$$

Wstawiając obrócone wersory to warunku (**??**) otrzymujemy sześć równań różniczkowych na kąt ψ, które (przyjmując bez straty ogólności $\psi(0) = 0$) mają wspólne rozwiązane postaci (35). Otrzymana ortonormalna baza (36) spełnia prawo transportu (FW).

$$\psi(s) = -\omega\gamma^2 s \tag{35}$$

$$\begin{aligned} E = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma\sin\omega\gamma s & R\omega\gamma\cos\omega\gamma s & 0 \\ R\omega\gamma\sin\psi & \cos\omega\gamma s\cos\psi - \gamma\sin\omega\gamma s\sin\psi & \sin\omega\gamma s\cos\psi + \gamma\cos\omega\gamma s\sin\psi & 0 \\ R\omega\gamma\cos\psi & -\cos\omega\gamma s\sin\psi - \gamma\sin\omega\gamma s\cos\psi & -\sin\omega\gamma s\sin\psi + \gamma\cos\omega\gamma s\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma\sin\omega\gamma s & R\omega\gamma\cos\omega\gamma s & 0 \\ -R\omega\gamma\sin\omega\gamma^2 s & \cos\omega\gamma^2 s\cos\omega\gamma s + \gamma\sin\omega\gamma s\sin\omega\gamma^2 s & \sin\omega\gamma s\cos\omega\gamma^2 s - \gamma\cos\omega\gamma s\sin\omega\gamma^2 s & 0 \\ R\omega\gamma\cos\omega\gamma^2 s & \cos\omega\gamma s\sin\omega\gamma^2 s - \gamma\sin\omega\gamma s\cos\omega\gamma^2 s & \sin\omega\gamma s\sin\omega\gamma^2 s + \gamma\cos\omega\gamma s\cos\omega\gamma^2 s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{36}$$

Mając odpowiendni reper możemy podać równanie na kąt φ

$$\begin{aligned} &\chi = \omega\gamma^2 s = -\psi, \quad \alpha = R\omega\gamma^2 \\ &\dot\varphi = \pm\frac{2}{\ell} + R\omega^2\gamma^2\sin(\varphi - \omega\gamma^2 s) = \pm\frac{2}{\ell} + \alpha\sin(\varphi - \alpha s/R\omega) \end{aligned} \tag{37}$$

2.3 Ruch po okręgu względem galaktyk

Rozważymy teraz ponownie ruch po okręgu z tą różnicą, że wiążemy obserwatora $\mathcal{I}$ z pyłem (galaktykami) w ekspandującym wszechświecie. Sytuacji tej odpowiada metryka Friedmana-Lemaître'a-Robertsona-Walkera (FLRW). Dla uproszczenia zakładamy zerową krzywizną przestrzenną. Tensor metryczny dany jest przez (38)

$$(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,\ -a(t)^2,\ -a(t)^2,\ -a(t)^2). \tag{38}$$

Warto zauważyć, że dla $a(t) \equiv 1$ metryka ta przechodzi w zwykłą metrykę czasoprzestrzeni Minkowskiego, a zatem można łatwo weryfikować poprawność wyników sprawdzając, czy dla przy przejściu $a(t) \to 1$ pokrywają się one z otrzymanymi w poprzednim podrozdziale. W dalszej części przyjmujemy następujące oznaczenia

$$a := a(t), \quad a' := \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Dla tej metryki symbole Chrostofella Γ^k_{ij} przedstawiam poniżej w tablicach odpowiednio dla $k = 0,1,2,3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aa' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aa' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & aa' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{a'}{a} & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a'}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a'}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozważamy więc linie świata cząstki w ruchu po okręgu

$$y^\mu(s) = (t,x,y,z) = (t(s),\ R\cos\omega t(s),\ R\sin\omega t(s),\ 0),$$

gdzie $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s = \gamma = (1 - a^2R^2\omega^2)^{-1/2}$. Wtedy czterowektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$u^\mu = \dot{y}^\mu = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = (\gamma,\ -R\omega\gamma\sin\omega t,\ R\omega\gamma\cos\omega t,\ 0),$$

$$\begin{aligned}(A^\mu) &= \left(\frac{\mathrm{D}u^\mu}{\mathrm{d}s}\right) = \\ &= \left(a'aR^2\omega^2\gamma^2(\gamma^2+1),\ -\frac{a'}{a}R\omega\gamma^2(\gamma^2+1)\sin\omega t - R\omega^2\gamma^2\cos\omega t,\ \frac{a'}{a}R\omega\gamma^2(\gamma^2+1)\cos\omega t - R\omega^2\gamma^2\sin\omega t,\ 0\right)\end{aligned} \tag{39}$$

Właściwe przyspieszenie wynosi

$$\alpha = \sqrt{-A_\mu A^\mu},$$

$$A^\mu A_\mu = -\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(\gamma^2 - 1\right)\left(\gamma^2+1\right)^2 - a^2R^2\omega^4\gamma^4$$

Konstruując w tym przypadku reper E którego wersory będą spełniać prawo transortu (FW) można konstrukcję przeprowadzić analogicznie do przedstawionej w poprzednim przypadku - czasoprzestrzeni Minkowskiego. Jednakże rachunki można znacząco uprościć wykonując konstrukcję w inny sposób. Mianowicie można stosunkowo łatwo uogólnić wersory uzyskanej wcześniej bazy (36), tak aby tworzyły bazę ortonormalną w metryce (38). Odpowiednia baza jest postaci (40). Jak poprzednio wersory e i e_3 są transportowane wzdłuż linii świata zgodnie z prawem (FW). Wersory e_1 i e_2 zależą od kąta obrotu ψ. Jak metryka FLRW przy $a \to 1$ przechodzi w metrykę Minkowskiego tak szukany kąt obrotu ψ powinien w granicy $a \to 1$ przechodzić w kąt znaleziony dla ciała poruszającego się po okręgu w czasoprzestrzeni Minkowskiego. Traktujemy tę granicę jako test poprawności wyników. Wartość ψ można znaleźć żądając, aby wersory e_1 i e_2 spełniały prawo transportu (FW). Wspólne rozwiązanie dla otrzymanych równań różniczkowych można wyrazić przez (41).

$$E_{FLRW} = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma\sin\omega t & R\omega\gamma\cos\omega t & 0 \\ aR\omega\gamma\sin\psi & \frac{1}{a}\cos\omega t\cos\psi - \frac{1}{a}\gamma\sin\omega t\sin\psi & \frac{1}{a}\sin\omega t\cos\psi + \frac{1}{a}\gamma\cos\omega t\sin\psi & 0 \\ aR\omega\gamma\cos\psi & -\frac{1}{a}\cos\omega t\sin\psi - \frac{1}{a}\gamma\sin\omega t\cos\psi & -\frac{1}{a}\sin\omega t\sin\psi + \frac{1}{a}\gamma\cos\omega t\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

$$\psi(s) = \int_0^s -\omega\gamma(s_1)^2 \mathrm{d}s_1, \quad \text{gdzie } \gamma(s) = (1 - a(t(s))^2 R^2 \omega^2)^{-1/2}. \tag{41}$$

Mając znaleziony odpowiedni reper możemy obliczyć wielkości potrzebne do równania na fazę zegara φ.

$$\begin{aligned} A \cdot e_1 &= -a' R\omega\gamma \left(\gamma^2 + 1\right) \sin\psi + aR\omega^2\gamma^2 \cos\psi \\ A \cdot e_2 &= -a' R\omega\gamma \left(\gamma^2 + 1\right) \cos\psi - aR\omega^2\gamma^2 \sin\psi \\ \alpha &= aR\omega\gamma \sqrt{a'^2 \left(\gamma^2 + 1\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \end{aligned}$$

2.4 Ruch po okręgu wokół czarnej dziury

W układzie obserwatora inercjalnego $\mathcal{I}$ z sferycznym układem współrzędnych (t,r,ϕ,θ) rozważamy linię świata obserwatora $\mathcal{Z}$ w ruchu jednostajnym po okręgu wokół czarnej dziury. Będziemy używać metryki Schwarzschilda, która odpowiada czasoprzestrzeni w pobliżu nierotującej sferycznie symetrycznej masie nieobdarzonej ładunkiem [7]. Element liniowy oraz macierz tensora metrycznego mają postać

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2. \tag{42}$$

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Dla metryki [?] symbole Chrostofella Γ^k_{ij} przedstawiam poniżej w tablicach odpowiednio dla $k = 0,1,2,3$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) r\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ 0 & 0 & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & -\cos\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jak poprzednio rozważamy ruch po okręgu o promieniu R i częstości ω. W rozważanym układzie współrzędnych linię świata można zapisać następująco

$$(y^\mu) = \left(t,\, R,\, \omega t,\, \frac{\pi}{2}\right). \tag{44}$$

Wtedy czterowektor prędkości ma postać

$$(u^\mu) = \left(\frac{\mathrm{d}y^\mu}{\mathrm{d}s}\right) = (\gamma,\, 0,\, \omega\gamma,\, 0),$$

gdzie $\gamma = \mathrm{d}t/\mathrm{d}s$. Z danego elementu liniowego (42), po uwzględnieniu (44), możemy odczytać

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \sqrt{1 - \frac{2M}{R} - R^2\omega^2}$$

Wyznaczamy czteroprzespieszenie oraz przyspieszenie właściwe

$$(A^\mu) = \left(0,\ -\frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2},\, 0,\, 0\right)$$

$$\alpha = \sqrt{-A \cdot A} = \frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}$$

Ponownie skorzystamy z bazy wyznaczonej wcześniej dla przypadku czasoprzestrzeni Minkowskiego i uogólnimy ją w ten sposób, aby była unormowana i spełniała prawo trznsportu (FW). Takie postępowanie daje nam łatwy sposób sprawdzania poprawności obliczeń, gdyż dla $M = 0$ wyniki powinny przechodzić w przypadek bez grawitacji, czyli czasoprzestrzeń Minkowskiego. W pierwszym kroku musimy przetransformować wektory bazy (36) do współrzędnych sferycznych. Na potrzeby tej transformacji współrzędne kartezjańskie oznaczymy przez x^i, natomiast współrzędne sferyczne przez $\tilde{x}^i$. Współrzędne wektorów transformują się kontrawariantnie [8] co można zapisać jako

$$\tilde{v}^i = \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial v^j} v^j.$$

Współrzynniki tej transformacji obliczamy w punkcie należącym do rozważanej tu linii świata. Baza (36) we współrzędnych sferycznych ma zatem postać

$$\widetilde{E} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\omega & 0 \\ R\omega\gamma \sin\psi & \cos\psi & \frac{\gamma}{R}\sin\psi & 0 \\ R\omega\gamma\cos\psi & -\sin\psi & \frac{\gamma}{R}\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Powyższa baza, rozważana w czasoprzestrzeni z metryką Schwarzschilda, nie jest ortonormalna. Można jednak stosunkowo łatwo uogólnić ją w ten sposób aby ortonormalna była

$$\widetilde{E} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\omega & 0 \\ R\omega\gamma \sin\psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} & \cos\psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & \frac{\gamma}{R}\sin\psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & 0 \\ R\omega\gamma\cos\psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} & -\sin\psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & \frac{\gamma}{R}\cos\psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Odpowiedni kąt obrotu ψ znajdujemy za pomocą prawa transportu (FW). Dają one równania różniczkowe (jak poprzednio zakładamy $\psi(0) = 0$), które mają wspólne rozwiązanie dane przez (46).

$$\psi = -\omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right). \tag{45}$$

Mając odpowiedni reper ruchomy znajdujemy równanie na fazę zegara (??)

$$\chi = -\psi = \omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right), \quad \alpha = \frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}$$
$$\dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + \frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \sin\left(\varphi - \omega\gamma^2 s\left(1 - \frac{3M}{R}\right)\right) \tag{46}$$

3 Analiza równania fazy zegara

W tej części przeprowadzimy analizę równania na fazę zegara wyprowadzonego w poprzedniej części. Interesującym nas parametrem jest przybliżenie właściwe, będące miarą przyspieszenia jakie działa na obiekt.

3.1 Zegar w przypadku stałego przyspieszenia

Zakładamy stałe przspieszenie właściwe α. Wtedy czterowektor przyspieszenia określony jest przez parametr χ
Załóżmy szczególną postać $\chi(s) = ps + q$, gdzie p,q = $const(s)$. Do rozwiązania równania stosujemy wtedy podstawienie (47)

$$\Phi = \varphi - \chi, \tag{47}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} - p \tag{48}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} = \pm\frac{2}{\ell} - p + \alpha\sin(\Phi)$$

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\pm\frac{2}{\ell} - p + \alpha\sin(\Phi)}$$

Całkując prawą stronę powyższej równości stosujemy podstawienie $x = \mathrm{tg}(\Phi/2)$. Dla uproszczenia stosujemy oznaczenia $B = \pm\frac{2}{\ell} - p$, $C = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{B^2}}$

$$s + s_0 = \frac{2}{BC}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}(\Phi/2)}{C} + \frac{\alpha}{BC}\right),$$

$$\varphi = ps + q + 2\mathrm{arctg}\left(C\mathrm{tg}\left(BC(s+s_0)/2\right) - \frac{\alpha}{B}\right)$$

Zauważmy, że dla $\alpha \to 0$ rozwiązanie jest postaci (49). To znaczy, że w przypadku ruchu bez przyspieszeń nasz model zegara mierzy czas własny s.

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s + const. \tag{49}$$

Zakładając warunek początkowy postaci $\varphi(0) = -\pi/2$, czyli $\Phi(0) = -\pi/2 - q$ możemy wyznaczyć stałą całkowania s_0.

$$s_0 = \frac{2}{BC}\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{C}\mathrm{tg}(q/2 + \pi/4) + \frac{\alpha}{BC}\right), \tag{50}$$

3.1.1 Rozwiązanie przybliżone

Interesuje nas jak rozwiązanie zachowuje się dla małych przyspieszeń. Rozwiążemy równanie (21) stosując rachunek zaburzeń ze względu na parametr α. W tym celu zapisujemy ϕ oraz χ w postaci szeregów (51) (52). W równaniu (21) zapisujemy sinus w postaci szeregu (53). Następnie wstawiamy rozwinięcia ϕ i χ do uzyskanego równania i porządkujemy wyrazy ze względu na α, odrzucając wyrazy $O(\alpha^2)$. Separujemy równanie ze względu na α dostając równania (54), których rozwiązania wyglądają następująco (55). Ostatecznie szukane przez nas rozwiązanie ma postać (56).

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\varphi_n, \tag{51}$$

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\chi_n \tag{52}$$

$$\dot{\varphi} \mp \frac{2}{\ell} - \alpha\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\phi-\chi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \tag{53}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_0 = \pm\frac{2}{\ell}, & \varphi_0(0) = -\frac{\pi}{2}, \\ \dot{\varphi}_1 = \sin(\varphi_0 - \chi_0), & \varphi_1(0) = 0. \end{cases} \tag{54}$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2}, \\ \varphi_1 = -\alpha\int_0^s \cos(2s_1/\ell - \chi_0(s_1))\mathrm{d}s_1. \end{cases} \tag{55}$$

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2} + \alpha\int_0^s \cos(\pm 2s_1/\ell - \chi_0(s_1))\mathrm{d}s_1 + O(\alpha^2). \tag{56}$$

Z rozwiązania przybliżonego (56) wiemy, że dla małych przyspieszeń nasz model zegara dobrze mierzy czas własny s. Przyspieszenie charakterysytczne dla którego efekto powinien mieć istotny wpływ to (57). Wpływ zaburzenia φ_1 na działanie zegara jest rzędu (58).

$$\alpha_c = \frac{2}{\ell} \tag{57}$$

$$\epsilon = \frac{\alpha}{\alpha_c} \tag{58}$$

3.1.2 Ruch jednostajnie przyspieszony

W przypadku relatywistycznego odpowiednika ruchu jednostajnie przyspieszonego mamy $\chi = \pi$ oraz $\alpha = const$. W takim przypadku faza φ jest równa (59), a przybliżenie dla małych przyspieszeń dane przez (60).

$$\varphi = \pi + 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2\ell^2}{4}}\mathrm{tg}\left(\pm\sqrt{1 - \frac{\alpha^2\ell^2}{4}}(s+s_0)/\ell\right) \mp \frac{\alpha\ell}{2}\right) \tag{59}$$

$$s_0 = \pm\ell\mathrm{arctg}\left(\left(1 \pm \frac{\alpha\ell}{2}\right)\Big/\sqrt{1 - \frac{\alpha^2\ell^2}{4}}\right)\Big/\sqrt{1 - \frac{\alpha^2\ell^2}{4}}$$

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\ell}{2}\sin(2s/\ell) + O(\alpha^2). \tag{60}$$

3.1.3 Ruch po okręgu

W przypadku ruchu po okręgu o promieniu R z częstością ω mamy $\chi = \omega\gamma^2 s$ oraz $\alpha = R\omega^2\gamma^2$. W takim przypadku faza φ jest równa (61), a przybliżenie dla małych przyspieszeń dane przez (62).

$$\varphi = \omega\gamma^2 s + 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{\left(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2\right)^2}}\mathrm{tg}\left(\left(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2\right)\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{\left(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2\right)^2}}(s+s_0)/2\right) - \frac{\alpha}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2}\right) \tag{61}$$

$$s_0 = \frac{2}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2}\mathrm{arctg}\left(\left(\frac{\alpha}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2} - 1\right)\Big/\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{\left(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2\right)^2}}\right)\Big/\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{\left(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2\right)^2}},$$

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2} + \frac{R\omega^2\gamma^2}{\pm 2/\ell - \omega\gamma^2}\sin((\pm 2/\ell - \omega\gamma^2)s) + O(\alpha^2). \tag{62}$$

3.2 Analiza modelu pod kątem pomiaru

Najprostszym obiektem, dla którego można użyć tego modelu wydaje się być elektron. Wiemy, że dla małych przyspieszeń hipoteza zegara wydaje się być spełniona []. W tej części oszacujemy rząd wielkości przyspieszenia dla którego spodziewamy się obserwowalnych odstępstw od hipotezy zegara. Za ℓ możemy podstawić wielkość o wymiarze metra charakterystyczną dla elektronu - długość komptonowską (63). Wtedy przyspieszenie charakterystyczne dla elektronu wynosi (64). Dla porównania energie elektronów otrzymywane w akceleratorach liniowych są rzędu kilku-kilkunastu GeV. Dla szacowania przyjmiemy gradient przyspieszenia rzędu kilku GeV/m [9]. Rząd wielkości przyspieszenia szacujemy jako (65). Porównując rzędy wielkości stwierdzamy, że efekty raczej nie będą obserwowalne.

$$\lambda_e =\approx 2{,}426 \cdot 10^{-10}\mathrm{cm} \tag{63}$$

$$\alpha_c \approx 8{,}244 \cdot 10^9 \mathrm{cm}^{-1} \tag{64}$$

$$\alpha \approx 10^2 \mathrm{cm}^{-1} \tag{65}$$

Komptonowska długość protonu wnosi (66). Przyspieszenie charakterystyczne dla protonu wynosi wynosi (67). Energie protonów osiągane w CERN są rzędu 7TeV [10]. proton doświadczy wtedy przyspieszenia rzędu (68). Porównując rzędy wielkości przyspieszeń stwierdzamy, że jesteśmy daleko od możliwych obserwacji

$$\lambda_p =\approx 1{,}321 \cdot 10^{-13} \mathrm{cm} \tag{66}$$

$$\alpha_c \approx 7{,}57 \cdot 10^{12} \mathrm{cm}^{-1} \tag{67}$$

$$\alpha \approx 124 \mathrm{cm}^{-1} \tag{68}$$

Załączniki

A Dodatek matematyczny

A.1 Równoważność dwóch postaci warunków na transport Fermiego-Walkera

Pokażemy, że następujące warinki są równoważne:

1.

$$\frac{\widetilde{\mathrm{D}}v}{\mathrm{d}s} := \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} + (v \cdot A)u - (v \cdot u)A = 0, \tag{69}$$

2.

$$\frac{\mathrm{d}(v \cdot u)}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{70}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}(v_\perp)}{\mathrm{d}s}\right)_\perp = 0, \text{ gdzie } v_\perp = v - (v \cdot u)u \tag{71}$$

Dowód. 1. $\Longrightarrow$ 2.
Pierwszą z równości udowodnimy mnożąc skalarnie obustronnie równość 1. przez u

$$0 = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} \cdot u + (v \cdot A)(u \cdot u) - (v \cdot u)(A \cdot u) = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} \cdot u + v \cdot \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}(v \cdot u)}{\mathrm{d}s} \tag{72}$$

Teraz pakżemy drugą równość

$$\frac{\mathrm{D}(v)_\perp}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{d}s}(v \cdot u) - \frac{\mathrm{d}(v \cdot u)}{\mathrm{d}s}u = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - A(v \cdot u) \overset{1.}{=} -(v \cdot A)u, \tag{73}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}(v)_\perp}{\mathrm{d}s}\right)_\perp = -(v \cdot A)u + (v \cdot A)(u \cdot u)u = 0. \tag{74}$$

2. $\Longrightarrow$ 1.
Z pierwszej równości w 2. mamy

$$\frac{\mathrm{D}(v)_\perp}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}(v \cdot u)}{\mathrm{d}s} - A(v \cdot u) = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - A(v \cdot u) \tag{75}$$

oraz

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} \cdot u = -\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{d}s} \cdot v. \tag{76}$$

Teraz rozpisujemy drugą równość w 2.

$$0 = \left(\frac{\mathrm{D}(v_\perp)}{\mathrm{d}s}\right)_\perp = \frac{\mathrm{D}(v_\perp)}{\mathrm{d}s} - \left(\frac{\mathrm{D}(v_\perp)}{\mathrm{d}s} \cdot u\right) u \overset{(75)}{=} \tag{77}$$

$$\overset{(75)}{=} \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - (v \cdot u)A + \left(\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - (v \cdot u)A\right) \cdot u\right) u \overset{(76)}{=} \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - (v \cdot u)A + (v \cdot A)u = \frac{\widetilde{\mathrm{D}}v}{\mathrm{d}s}. \tag{78}$$

□

Literatura

[1] J. Synge, *Relativity: the general theory.* Series in physics, North-Holland, 1960.

[2] J. Maluf and F. Faria, "On the construction of fermi–walker transported frames," *Ann. Phys. (Berlin)*, vol. 17, pp. 326–335, 2008.

[3] L. Costa and J. Natário, "Inertial forces in general relativity," vol. 600, 2015. cited By 1.

[4] A. Ashtekar and V. Petkov, *Springer handbook of spacetime.* 2014. cited By 8.

[5] A. Staruszkiewicz, *Algebra i geometria.* Wykłady dla fizyków, Wydaw. Miniatura, 1993.

[6] *Czasoprzestrzeń i grawitacja.*

[7] J. Hartle, *Grawitacja: Wprowadzenie do ogolnej teorii wzglednosci Einsteina.* Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, 2016.

[8] R. Ingarden and A. Jamiołkowski, *Elektrodynamika klasyczna.* PWN, 1980.

[9] H. S. Ghotra and N. Kant, "Electron acceleration by a chirped laser pulse in vacuum under the influence of magnetic field," *Optical Review*, vol. 22, pp. 539–543, Aug 2015.

[10] "The accelerator complex." `https://home.cern/about/accelerators`. Dostęp: 2018-05-15.