

# Badanie krzywych chronometrycznych w kontekście hipotezy zegara.

Paweł Rzońca

5 lipca 2018

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Pojęcia wstępne</b>	<b>2</b>
2.1	Wstępne pojęcia i konwencje . . . . .	2
2.2	Krzywe w czasoprzestrzeni. . . . .	3
2.3	Czas własny. Hipoteza zegara. . . . .	4
2.4	Pochodna kowariantna i absolutna . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Konstrukcja zegara</b>	<b>5</b>
3.1	Fundamentalny relatywistyczny rotator . . . . .	5
3.2	Model uogólniony . . . . .	7
3.3	Transport Fermiego-Walkera . . . . .	8
3.4	Czwórka symetryczna kierunków zerowych . . . . .	10
3.5	Konstrukcja zegara . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Aplikacje</b>	<b>15</b>
4.1	Ruch hiperboliczny . . . . .	15
4.2	Ruch po okręgu . . . . .	15
4.3	Ruch po okręgu względem galaktyk . . . . .	17
4.4	Ruch po okręgu wokół czarnej dziury . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Analiza równania fazy zegara</b>	<b>19</b>
5.1	Zegar w przypadku stałego przyspieszenia . . . . .	19
5.1.1	Rozwiązanie przybliżone . . . . .	21
5.1.2	Ruch jednostajnie przyspieszony . . . . .	21
5.1.3	Ruch po okręgu . . . . .	22
5.2	Analiza modelu pod kątem pomiaru . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>22</b>
<b>A</b>	<b>Dodatek matematyczny</b>	<b>22</b>
A.1	Rozwiązanie układu równań na $f(\xi)$ w modelu Staruszkiewicza . . . . .	22
A.2	Równoważność warunków transportu Fermiego-Walkera . . . . .	24

## 1 Wstęp

Od czasów starożytnych czas wyobrażano sobie jako jednowymiarową rozmaitość różniczkową. Oczywiście pojęcie rozmaitości różniczkowej jeszcze wtedy nie istniało, lecz ówczesne wyobrażenia dobrze pasują do jej definicji [heller]. Można powiedzieć, że rozmaitości różniczkowe wymiaru 1 są dwie: okrąg i prosta. Pozostałe jednowymiarowe rozmaitości różniczkowe można uzyskać poprzez rozciąganie i zginanie (dokładniej homeomorficzne przekształcenie) tychże. Cykliczność obserwowanych zjawisk takich jak pory roku, cykl faz Księżyca, dały początek pierwszym miarom czasu. Prowadzi to do koncepcji czasu periodycznego, który możemy utożsamiać z okręgiem. Okrąg taki zostaje rozcięty

przez zdarzenie, które występuje jednokrotnie. Takim zdarzeniem może być na przykład przyjście na świat Jezusa, co obserwujemy w postaci powszechnie używanego kalendarza. Wyobrażenie prostej wiąże się również z porządkiem, kolejnością zdarzeń. Dostatecznie mały fragment okręgu jest bardzo zbliżony do prostej. Więc przypadku okręgu również można myśleć o porządku lecz tylko w sensie lokalnym. W istocie wyobrażenie czasu w postaci porządek zdarzeń pojawiło się naturalnie wcześniej niż wyobrażenie jako prosta w sensie ścisłym, które to zaczęło się pojawiać wraz z pojawieniem się ilościowego opisu przyrody [?].

Istotna zmiana wyobrażenia czasu nastąpiła wraz z wprowadzeniem przez Einsteina w 1905 r. szczególnej teorii względności. Pojawiło się mieszanie współrzędnych przestrzennych i czasu do transformacji inercjalnych układów odniesienia. Geometryczna postać nadal jej w 1907 Minkowski. Czasoprzestrzeń Minkowskiego nazywamy zorientowaną czasowo czterowymiarową rozmaitością różniczkową wraz z pseudoeuklidesowym iloczynem skalarnym. Czas interpretowany jako współrzędna czasowa płynie różnie w różnych wkładach odniesienia. Sprawa dodatkowo komplikuje się w OTW, gdzie zakładamy że czasoprzestrzeń może być zakrzywiona. Chcielibyśmy mierzyć czas niezależnie od wybranego układu odniesienia. Odpowiednim parametrem porządkującym zdarzenia wzdłuż czterowymiarowej krzywej po której porusza się obserwator może być jej długość  $s$ . Czas ten nazywamy czasem własnym, gdyż czas współrzędnościowy ciała spoczywającego w tym układzie odniesienia pokrywa się z  $s$  (z dokładnością do wyboru jednostek i punktu startowego). Hipoteza zegara mówi, że istnieje zegar idealny, który odmierza czas własny wzdłuż swojej linii świata niezależnie od przyspieszeń jakim podlega. Dokładniejszy opis hipotezy zegara znajduje się w rozdziale 2. W rozdziale 3 wprowadzamy pojęcie fundamentalnego relatywistycznego rotatora oraz używamy go do konstrukcji fundamentalnego zegara. Wskazówka takiego zegara zakreśla krzywą chronometryczną. W następnych rozdziałach badamy otrzymany model zegara dla różnych ruchów.

## 2 Pojęcia wstępne

### 2.1 Wstępne pojęcia i konwencje

Będziemy stosować konwencję sumacyjną Einsteina. Indeksy oznaczane literami greckimi zmieniają się w zakresie od 0 do 3, natomiast indeksy oznaczane literami arabskimi w zakresie od 1 do 3. Jednoski wybieramy tak, aby  $c = 1$ .

Modelem ogólnej teorii względności jest czterowymiarowa Lorenzowska rozmaitość różniczkowa. Rozmaitość tę budujemy na zbiorze, nazywanym czasoprzestrzenią, punktów nazywanych zdarzeniami. Zakładamy, że zbiór ten ma strukturę rozmaitości różniczkowej. Niech  $M$  będzie niepustą przestrzenią Hausdorffa (czyli taką, że dla każdych dwóch punktów  $p, q \in M$  istnieją rozłączne otoczenia  $U_p, U_q$  odpowiednio punktów  $p, q$ .) Mapą w otoczeniu  $U$  punktu  $p \in M$  nazywamy parę  $(U, \xi)$ , gdzie  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest homeomorfizmem (ciągłą bijekcją, której odwrotność jest ciągła). Homeomorfizm  $\xi$  nazywamy układem współrzędnych w otoczeniu  $p$ . Mówimy, że mapy dwie mapy są zgodne, jeżeli  $\xi_1 \circ \xi_2$  (tam gdzie ma sens) jest dyfeomorfizmem klasy  $C^k$  (homeomorfizm z ciągłymi pochodnymi stopnia  $k$ ) Zbiór  $A$  map parami zgodnych (o zgodności klasy  $C^k$ ) takich że pokrywają cały zbiór  $M$  nazywamy atlasem klasy  $C^k$ . Atlasem maksymalnym nazywamy atlas do którego nie można dodać kolejnej mapy bez złamania zgodności. Rozmaitością różniczkową klasy  $C^k$  nazywamy zbiór  $M$  z atlasem maksymalnym klasy  $C^k$ . Wymiarem rozmaitości nazywamy wymiar przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , na której modelujemy rozmaitość. Od teraz przyjmujemy, że rozmaitość jest klasy  $C^\infty$  oraz  $n = 4$ .

Mając mapę w punkcie  $p$  możemy określić bazę w danym punkcie za pomocą wektorów stycznych do linii układu współrzędnych. Taką bazę należy rozumieć jako bazę lokalną (bazę w punkcie  $p$ ).

Rozmaitość jest Lorenzowska jeśli określona na niej tensor metryczny  $g$  ma sygnaturę  $(+, -, -, -)$ . W bazie ortonormalnej macierz tensora metrycznego przybiera postać

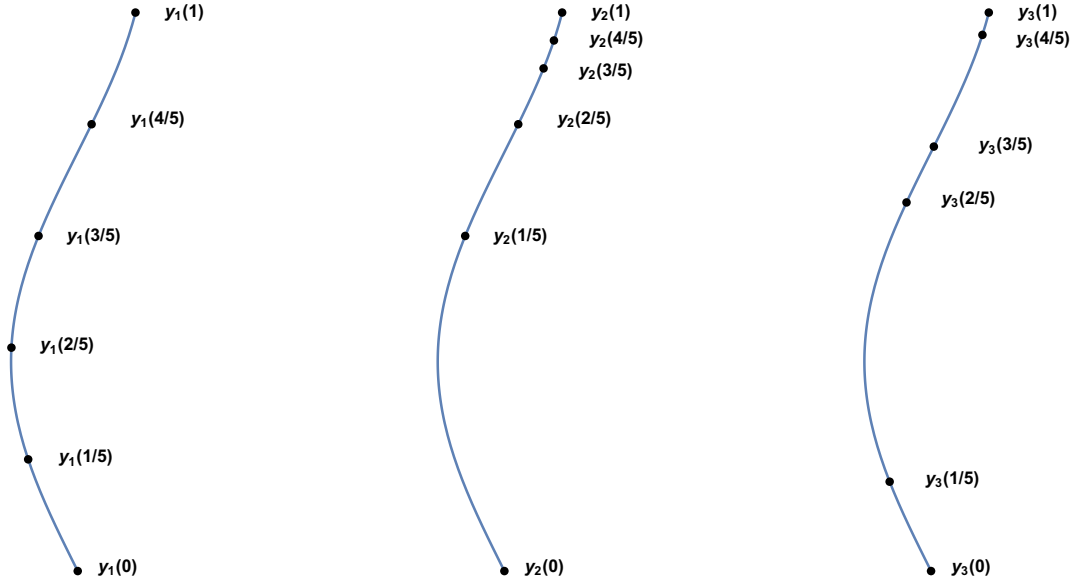
$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Tensor metryczny określa następujący podział wektorów

$$g(u, u) > 0 \implies u - \text{wektor czasowy} \quad (2)$$

$$g(u, u) = 0 \implies u - \text{wektor zerowy} \quad (3)$$

$$g(u, u) < 0 \implies u - \text{wektor przestrzenny} \quad (4)$$



Rys. 1: Różne parametryzacje krzywej  $y$ .

## 2.2 Krzywe w czasoprzestrzeni.

W tej części wprowadzimy pojęcie krzywej w czasoprzestrzeni  $M$ .

**Definicja 1.** Krzywą sparametryzowaną (lub parametryzacją krzywej) nazywamy odwzorowanie  $y_1 : I \ni \tau \rightarrow y_1(\tau) \in M$  klasy  $C^\infty$ , gdzie  $I \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem otwartym (niekoniecznie skończonym).

**Definicja 2.** Parametrem dla krzywej sparametryzowanej  $y_1$  nazywamy funkcję  $\tau_1 : y_1(I) \ni p \rightarrow \tau_1(p) = y_1^{-1}(p) \in I$ . Będziemy pisać  $\tau_1$  zamiast  $\tau_1(p)$ , wszędzie gdzie punkt  $p$  wynika z kontekstu.

**Definicja 3.** Niech  $y_1 : I \rightarrow M$  i  $y_2 : J \rightarrow M$  będą parametryzacjami. Reparametryzacją krzywej będziemy nazywać dyfeomorfizm  $f : I \rightarrow J$  klasy  $C^\infty$  taki, że  $y_1 = y_2 \circ f$ .

Jeśli dla dwóch parametryzacji istnieje reparametryzacja to mówimy, że są one równoważne. Można łatwo pokazać, że jest to relacja równoważności. Możliwość różnego parametryzowania tej samej krzywej możemy rozumieć tak, że możemy podróżować wzdłuż krzywej w różny sposób.

**Definicja 4.** Krzywą (lub krzywą niesparametryzowaną) nazywamy klasę równoważności parametryzacji ze względu powyższą relację równoważności. Jeżeli  $y$  jest krzywą,  $y_1$  jej parametryzacją z parametrem  $\tau_1$  to wprowadzamy oznaczenie  $y_1 =: y(\tau_1)$ .

**Definicja 5.** Niech  $(U, \xi)$  będzie mapą w  $M$  oraz  $p \in U$ . W tej mapie przez  $y^\mu$  oznaczamy współrzędne krzywej  $y$ . Wektorem stycznym do krzywej  $y$  w punkcie  $p$  (lub wektorem prędkości w parametrze  $\tau$ ) nazywamy wektor  $y'(\tau)$  taki, że

$$y'(\tau) = \frac{dy_1^\mu}{d\tau}$$

Podział wektorów wprowadzony przez tensor metryczny  $g$  wyróżnia trzy rodzaje krzywych.

**Definicja 6.** Krzywą  $y$  nazywamy krzywą czasową (zerową, przestrzenną) jeżeli w każdym punkcie  $p \in y$  wektor  $y'$  jest wektorem czasowym (zerowym, przestrzennym). Linia świata cząstki jest krzywa czasowa.

Długość  $S(y(\tau))$  krzywej czasowej  $y$  liczymy korzystając z tensora metrycznego  $g$ . Kwadrat długości elementu liniowego wyraża się przez

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (5)$$

Stąd długość krzywej liczymy wzorem

$$S(y(\tau)) = \int_{\tau(p_0)}^{\tau(p_1)} \sqrt{g(y'(\tau), y'(\tau))} d\tau. \quad (6)$$

Oczywiście długość krzywej nie powinna zależeć od wyboru parametryzacji. Istotnie, długość dana wzorem (6) jest niezmiennicza ze względu na reparametryzację. Niech  $\tau_1, \tau_2$  będą parametrami powiązanymi reparametryzacją  $\tau_2 = f(\tau_1)$ , taką że  $f'(\tau_1) > 0$  (gdy  $f'(\tau_1) < 0$  rozumowanie przebiega analogicznie). Wtedy stosując zmianę zmiennych całkowania dostajemy

$$S(y(\tau_2)) = \int_{\tau_2(p_0)}^{\tau_2(p_1)} \sqrt{g(y'(\tau_2), y'(\tau_2))} d\tau_2 = \int_{\tau_1(p_0)}^{\tau_1(p_1)} \sqrt{g\left(\frac{y'(\tau_1)}{f'(\tau_1)}, \frac{y'(\tau_1)}{f'(\tau_1)}\right)} f'(\tau_1) d\tau_1 = \int_{\tau_1(p_0)}^{\tau_1(p_1)} \sqrt{g(y'(\tau_1), y'(\tau_1))} d\tau_1 = S(y(\tau_1)). \quad (7)$$

Stosując ten sam wzór do krzywej zerowej otrzymujemy zerową długość.

### 2.3 Czas własny. Hipoteza zegara.

Spośród parametryzacji krzywych czasowych możemy wyróżnić tak zwaną parametryzację łukową. Jest to parametryzacja dla której długość wektora stycznego jest stała i równa jedności. Wyróżniony w ten sposób parametr będziemy oznaczać przez  $s$  i nazywać czasem własnym. Czas własny jest równy długości krzywej

$$s = \int ds \quad (8)$$

Dla cząstki spoczywającej w danym układzie odniesienia jej prędkość ma wyłącznie składową czasową i jest ona równa czasowi własnemu (z dokładnością do stałej addytywnej i multiplikatywnej). Uzasadnia to nazwę parametru  $s$ .

**Definicja 7.** Parametrem afinicznym nazywamy parametr dla którego prędkość w każdym punkcie krzywej ma tę samą długość.

Wynika z tego natychmiast, że czas własny jest parametrem afinicznym. Łatwo pokazać, że jeśli  $s$  jest parametrem afinicznym, to każdy parametr afiniczny jest postaci  $as + b$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ . Wektor prędkości wzdłuż krzywej  $y$  parametryzowanej czasem własnym będziemy oznaczać przez  $\dot{y}$ .

**Definicja 8.** Zegarem nazywamy dowolny układ fizyczny, w którym możemy wyodrębnić pewien mechanizm oscylacji. Oscylacje te nazywamy częstotnością zegara. Czas mierzymy ilością oscylacji.

Mierząc czas własny nie wyrozniamy obserwatorem więc postępujemy zgodnie z zasadą względności Einsteina. Mianem zegara idealnego określa się więc zegar mierzący czas własny niezależnie od krzywizny krzywej po jakiej się porusza. Ciężko wyobrazić sobie fizyczną realizację takiego zegara. Hipoteza zegara głosi, że nawet jeśli nie da się fizycznie zrealizować zegara idealnego, to można konstruować coraz lepsze zegary, tak że w granicy doskonałości otrzymamy zegar mierzący czas własny. Dla ruchów odbywających się bez przyspieszeń tj po liniach geodezyjnych hipoteza zegara jest spełniona, a realizacją takiego zegara może być zegar świetlny lub inaczej zegar geometrodynamiczny (ang. geometrodynamical clock [1]) W najprostrzym wydaniu składa się on z ustawionych *vis a vis* luster poruszających się po równoległych torach. Odbijający się między nimi promień świetlny określa częstotliwość pracy zegara. Hipoteza zegara została eksperymentalnie sprawdzona dla przyspieszeń rzędu  $10^{19} \text{m/s}^2$  [2].

Jest to hipoteza, która leży u podstaw zarówno szczególnej jak i ogólnej teorii względności. W części trzeciej przedstawimy fundamentalny relatywistyczny rotator, który może posłużyć do konstrukcji zegara fundamentalnego. Abstrahujemy od realizacji fizycznej. Nie jest ona istotna, gdyż interesuje nas granica doskonałości, czyli zegar, który może być zegarem czysto matematycznym.

### 2.4 Pochodna kowariantna i absolutna

**Definicja 9.** Pochodną kowariantną nazywamy ... transport wektora wzdłuż krzywej  $\gamma$  dla którego .... nazywamy transportem równoległym.

**Definicja 10.** Pochodną absolutną wektora  $v$  nazywamy pochodną kowariantną w kierunku krzywej  $y$  o wektorze stycznym  $y'$  parametryzowanym parametrem  $\tau$  i oznaczamy przez

$$\frac{Dv^\mu}{d\tau} = \frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu v^\nu u^\rho. \quad (9)$$

Pochodną absolutną wektora  $v$  wzdłuż krzywej  $y$  parametryzowanej czasem własnym  $s$  przez będziemy oznaczać przez  $\dot{v}$ .

$$0 = \frac{d(\dot{y} \cdot \dot{y})}{ds} = 2 \frac{D\dot{y}}{ds} \cdot \dot{y} \quad (10)$$

**Definicja 11.** Linia geodezyjną (lub krzywą swobodnego spadku) nazywamy krzywą  $y$ , dla której

$$\frac{Dy'}{d\tau} = by' \quad (11)$$

Gdy  $\tau$  jest parametrem afinicznym to  $b = 0$ .

Będziemy w dalszej części pracy przez  $u$  oraz  $A$  będziemy rozumieć prędkość oraz przyspieszenie definiowane jak następuje

$$u^\mu = \dot{y}^\mu = \frac{dy^\mu}{ds}, \quad A = \dot{u}^\mu = \frac{Du^\mu}{ds}. \quad (12)$$

## 3 Konstrukcja zegara

### 3.1 Fundamentalny relatywistyczny rotator

Przez nierelatywistyczny rotator rozumiemy układ dwóch mas punktowych  $m_1, m_2$  połączonych nieważkim prętem długości  $\ell$  (rys. 2). Lagrangian takiego układu w układzie środka masy ma postać [3]

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2, \quad m = m_1 + m_2, r = r_2 - r_1 \quad (13)$$

gdzie  $r_1, r_2$  to odpowiednio położenia mas  $m_1, m_2$ . Zauważmy, że  $\|r\| = \ell = \text{const}$ , a zatem interesuje nas jedynie kierunek wyznaczony przez  $r$ . Wersor  $\hat{r} = r/\ell$  możemy przedstawić za pomocą współrzędnych sferycznych

$$\hat{r} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \quad (14)$$

Obracamy układ odniesienia tak, aby  $\theta = \pi/2$ . Lagrangian przyjmuje wtedy postać

$$L = \frac{m\ell^2}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (15)$$

Z równania Eulera-Lagranga dla  $\phi$  wynika, że

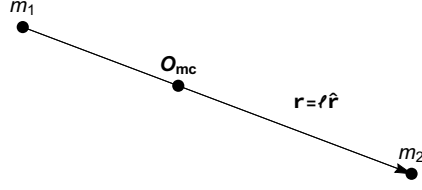
$$\ddot{\phi} = 0 \quad (16)$$

A zatem  $\phi \sim t$ , to znaczy, że nierelatywistyczny rotator mierzy Newtonowski czas absolutny  $t$ . Skłania nas to do refleksji nad możliwością wykorzystania relatywistycznego rotatora do pomiarów czasu. Prostota układu sugeruje, że może on być odpowiedni do testowania hipotezy zegara.

Przeniesienie tego układu na grunt relatywistyczny wprowadził profesor Staruszkiewicz [4] proponując następującą definicję:

**Definicja 12.** Relatywistyczny rotator to układ dynamiczny opisany przez położenie  $x$  i kierunek zerowy  $k$  oraz dodatkowo dwa parametry: masę  $m$  i długość  $\ell$ .

**Definicja 13.** Układ dynamiczny nazywamy fenomenologicznym jeżeli jego niezmienniki Casimira są całkami ruchu. Układ dynamiczny nazywamy fundamentalnym jeżeli jego niezmienniki Casimira są parametrami (m. in. nie zależą od warunków początkowych).



Rys. 2: Klasyczny rotator składający się z dwóch mas  $m_1, m_2$  połączonych nieważkim prętem długości  $\ell$ .

Powtórzmy teraz konstrukcję przedstawioną we wspomnianej pracy oraz w [5, 6]. W oparciu o powyższe definicje można skonstruować fundamentalny relatywistyczny rotator. Z wielkości zawartych w definicji relatywistycznego rotatora możemy utworzyć bezwymiarową wielkość

$$\xi = -\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2}. \quad (17)$$

Możemy wtedy utworzyć Lagrangian postaci

$$L = m\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} f(\xi). \quad (18)$$

Działanie związane z powyższym Lagrangianem jest niezmiennicze ze względu na reparametryzację, Lorenzowsko niezmiennicze. Dodatkowo  $k$  wskazuje kierunek zerowy, a zatem układ fizyczny nie zmienia się po przeskalowaniu  $k \rightarrow ak$ . Nie jest to najogólniejszy relatywistyczny rotator jaki można wziąć pod uwagę, gdyż  $\xi$  nie jest jedyną możliwą bezwymiarową kombinacją wielkości charakterystycznych dla relatywistycznego rotatora [6].

Oznaczamy przez  $P_\mu$  i  $\Pi_\mu$  pędy kanoniczne związane odpowiednio z  $x$  i  $k$  oraz przez  $M_{\mu\nu}$  całkowity moment pędu.

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \quad \Pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{k}^\mu} \quad (19)$$

$$M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - P_\mu x_\nu + k_\mu \Pi_\nu - \Pi_\mu k_\nu. \quad (20)$$

Dla Lagrangianu 18 mamy

$$P_\mu = \frac{m}{\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}}} f(\xi) \dot{x}_\mu - 2 \frac{m}{k \cdot \dot{x}} \sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} f'(\xi) \xi k_\mu \quad (21)$$

$$\Pi_\mu = 2 \frac{m}{\dot{k} \cdot \dot{k}} \sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} f'(\xi) \xi \dot{k}_\mu \quad (22)$$

Niezmiennikami Casimira będą w tym przypadku  $P_\mu P^\mu$  oraz  $W_\mu W^\mu$  gdzie  $W$  jest pseudowektorem Pauliego-Lubańskiego danym przez

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^\sigma \quad (23)$$

Kontrakcja tensora antysymetrycznego  $A_{\mu\nu}$  z tensorem symetrycznym  $S_{\mu\nu}$  jest równa zero. Korzystając z tego i antysymetrii tensora  $\varepsilon$  dostajemy

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (x^\mu P^\nu - P^\mu x^\nu + k^\mu \Pi^\nu - \Pi^\mu k^\nu) P^\sigma = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (k^\mu \Pi^\nu - \Pi^\mu k^\nu) P^\sigma = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Pi^\mu k^\nu P^\sigma \quad (24)$$

Dla Lagrangianu 18 możemy zapisać  $W_\mu$  w postaci

$$W_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Pi^\mu k^\nu P^\sigma = 2 \frac{m^2}{\dot{k} \cdot \dot{k}} f(\xi) f'(\xi) \xi \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \dot{k}^\mu k^\nu \dot{x}^\sigma \quad (25)$$

Pozwala to zapisać  $W_\mu W^\mu$  w postaci wyznacznika Gramma

$$W_\mu W^\mu = 4 \frac{m^4}{(\dot{k} \cdot \dot{k})^2} f(\xi)^2 f'(\xi)^2 \xi^2 \begin{vmatrix} \dot{k} \cdot \dot{k} & \dot{k} \cdot k & \dot{k} \cdot \dot{x} \\ k \cdot \dot{k} & k \cdot k & k \cdot \dot{x} \\ \dot{x} \cdot \dot{k} & \dot{x} \cdot k & \dot{x} \cdot \dot{x} \end{vmatrix} \quad (26)$$

Inwestując równości  $k \cdot k = 0$ ,  $\dot{x} \cdot \dot{x}$  oraz  $\dot{k} \cdot k = 0$  dostajemy

$$P_\mu P^\mu = m^2(f(\xi)^2 - 4f(\xi)f'(\xi)\xi)W_\mu W^\mu = -4m^4\ell^2 f(\xi)^2 f'(\xi)^2 \xi \quad (27)$$

Zakładamy, że rotator jest fundamentalny, a więc niezmienniki Casimira powinny być parametrami, co można zapisać w postaci równości

$$P_\mu P^\mu = m^2 \quad (C1)$$

$$W_\mu W^\mu = -\frac{1}{4}m^4\ell^2 \quad (C2)$$

$$f(\xi)^2 - 4f(\xi)f'(\xi)\xi \stackrel{C1}{=} 1 \stackrel{C2}{=} 16f(\xi)^2 f'(\xi)^2 \xi \quad (28)$$

Powyższe rozwiązanie mają wspólnie rozwiązanie postaci (zobacz dod. A)

$$f(\xi) = \sqrt{1 \pm \sqrt{\xi}} \quad (29)$$

To że dwa równania różniczkowe miały wspólne rozwiązanie wydaje się być szczęśliwym zbiegiem okoliczności. Niestety otrzymany Lagrangian ma defekt i ruch takiego rotatora nie jest deterministyczny [7]. Przedstawimy teraz uogólnienie takiego rotatora, które możemy znaleźć w [8].Bratek2015wiele.

### 3.2 Model uogólniony

W tej części będziemy rozważać układ w którym zakładamy więź postaci  $\dot{x} \cdot \dot{x} = 0$ , to jest cząstkę poruszającą się po krzywej zerowej. Lagrangian postaci

$$L = \sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}} \quad (30)$$

nie jest odpowiedni do opisu takiej cząstki, gdyż wtedy pęd  $P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}$  nie jest skończony. W zastępstwie możemy użyć Lagrangianu postaci []

$$L = w(\dot{x} \cdot \dot{x}). \quad (31)$$

Wtedy równanie Eulera-Lagrange dla zmiennej  $w$  jest postaci

$$0 = \frac{\partial L}{\partial w} = \dot{x} \cdot \dot{x} \quad (32)$$

i zapewnia zerowość linii świata  $x$ . Wtedy pęd kanoniczny związany z  $x$  jest zachowany podczas ruchu i równy

$$P_\mu = 2w\dot{x}_\mu, \quad P_\mu P^\mu = 0. \quad (33)$$

Wtedy w układzie odniesienia, w którym  $e$  jest wersorem czasowym takim, że

$$e \cdot \dot{x} = 1 \quad (34)$$

mamy

$$p = U\dot{x}, \quad (35)$$

gdzie  $U$  jest energią fotonu.

Uogólnienie biorące pod uwagę czątki poruszające się po krzywych zerowych możemy zapisać w postaci [9]

$$L = \frac{1}{2}(\eta^{-1}\dot{x} \cdot \dot{x} + \eta m^2 f(\xi)) + \lambda(k \cdot k) \quad (36)$$

Równanie Eulera-Lagranga dla  $\eta$  daje dwie możliwości

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (mf(\xi) - \eta^{-2}(\dot{x} \cdot \dot{x})). \quad (37)$$

Zakładając, że  $\eta$  jest zależna od prędkości dostajemy więc

$$\eta = \frac{\sqrt{\dot{x} \cdot \dot{x}}}{mf(\xi)}.$$

Wtedy lagrangian sprowadza się do postaci wyjściowej dla rotatora relatywistycznego 18. Gdy założymy, że  $\eta$  jest niezależne otrzymujemy więzy

$$\dot{x} \cdot \dot{x} = 0, \quad f(\xi) = 0 \quad (38)$$

Przyjęcie  $m = 0$  daje automatycznie spełnione warunki  $P_\mu P^\mu = 0$  oraz  $W_\mu W^\mu = 0$  i sprowadza Lagrangian do postaci 31, czyli dla swobodnej cząstki poruszającej się po krzywej zerowej. Będziemy zatem traktować  $m$  jako parametr w ogólności niezerowy, co implikuje więc  $f(\xi) = 0$ . Obliczamy  $P_\mu$  oraz  $W_\mu$

$$P_\mu = \eta^{-1} \dot{x}_\mu - \frac{\eta m^2}{k \cdot \dot{x}} \xi f'(\xi) k_\mu, \quad (39)$$

$$\Pi_\mu = \frac{\eta m^2}{\dot{k} \cdot \dot{k}} \xi f'(\xi) \dot{k}_\mu, \quad (40)$$

$$(41)$$

$$P_\mu = -2m^2 \xi f'(\xi), \quad (42)$$

$$W_\mu W^\mu = \frac{m^4}{(\dot{k} \cdot \dot{k})^2} f'(\xi)^2 \xi^2 \begin{vmatrix} \dot{k} \cdot \dot{k} & \dot{k} \cdot k & \dot{k} \cdot \dot{x} \\ k \cdot \dot{k} & k \cdot k & k \cdot \dot{x} \\ \dot{x} \cdot \dot{k} & \dot{x} \cdot k & \dot{x} \cdot \dot{x} \end{vmatrix} = -m^4 \ell^2 \xi f'(\xi)^2 \quad (43)$$

Ponownie zakładamy że niezmienniki Casimira  $P_\mu P^\mu$  i  $W_\mu W^\mu$  są parametrami. Daje się je zapisać w postaci C1 i C2.

$$-2\xi f'(\xi) \stackrel{C1}{=} 1 \stackrel{C2}{=} 4\xi f'(\xi)^2 \quad (44)$$

Uzyskaliśmy w ten sposób odpowiednie więzy

$$f(\xi) = 0, \quad f'(\xi) = -\frac{1}{2}, \quad \xi = 1. \quad (45)$$

$$-\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} = 1. \quad (46)$$

Więzy te pozwolą nam określić ruch zegara. Będziemy go opisywać w reperze który porusza się wraz z posiadaczem zegara.

### 3.3 Transport Fermiego-Walkera

Konstrukcję zegara przeprowadzimy w lokalnie nierotującej bazie. W tej części pracy przedstawimy koncepcje potrzebne do konstrukcji takiej bazy. Dokładne omówienie prezentowanych zagadnień można znaleźć np. tu [10, 11] Zauważmy, że dla transport równoległy wzdłuż linii geodezyjnej przekształca wektory styczne w wektory styczne. Własność tę tracimy, gdy linia świata nie jest linią geodezyjną, czyli gdy  $A = \frac{Du}{ds} = 0$ . Transportem, który zachowuje styczność wektorów do linii świata jest transport Fermiego-Walkera (FW). Doświadczenie wskazuje, że taki transport odpowiada fizycznemu transportowi wektorów [12, 13]. Do jego zdefiniowania posłużą nam odwzorowania  $P$  i  $R$ . Niech  $u$  będzie jednostkowym wektorem stycznym do linii świata  $y$ . Dowolny wektor  $v$  możemy w punkcie  $p \in y$  rozłożyć na składowe styczną  $R(v)$  i prostopadłą  $P(v)$  do  $y$  (47). Przestrzeń wektorów  $p$  rozpada się w ten sposób na sumę prostą przestrzeni  $\{P(v)\}$  i  $\{R(v)\}$ .

$$v = \underbrace{v - (v \cdot u)u}_{P(v)} + \underbrace{(v \cdot u)u}_{R(v)} = P(v) + R(v). \quad (47)$$



**Definicja 14.** Mówimy, że wektor  $v$  spełnia prawo **transportu Fermiego-Walkera** (FW) wzdłuż linii świata  $y$  jeżeli

$$\frac{D_{FW}(v)}{ds} := P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) + R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) = 0 \quad (\text{FW})$$

Wyrażenie  $\frac{D_{FW}}{ds}$  nazywamy **po pochodną Fermiego-Walkera**.

**Twierdzenie 1.** Załóżmy, że  $u = \dot{y}$  oraz  $A = \frac{Du}{ds}$  to odpowiednio czterowektory prędkości i przyspieszenia stoważyszone z linią świata  $y$ . Wtedy pochodną Fermiego-Walkera możemy zapisać w postaci

$$\frac{D_{FW}v}{ds} = \frac{Dv}{ds} + (A \cdot v)u - (u \cdot v)A. \quad (48)$$

Powyższa równość może służyć za definicję pochodnej Fermiego-Walkera [10] równoważną do tutaj przyjętej.

*Dowód.* Obliczmy pochodne absolutne rzutów  $P(v)$  oraz  $R(v)$

$$\frac{DP(v)}{ds} = \frac{Dv}{ds} - (u \cdot v)A - \frac{d(u \cdot v)}{ds}u, \quad \frac{DR(v)}{ds} = \frac{d(u \cdot v)}{ds}u + (u \cdot v)A.$$

Pamiętając, że  $u \perp A$  mamy

$$\begin{aligned} P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) &= \frac{Dv}{ds} - (u \cdot v)A - \frac{d(u \cdot v)}{ds}u - \left(\frac{Dv}{ds} \cdot u\right)u + \frac{d(u \cdot v)}{ds}u = \\ &= \frac{Dv}{ds} - (u \cdot v)A - \left(\frac{Dv}{ds} \cdot u\right)u, \\ R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) &= \frac{d(u \cdot v)}{ds}u = \left(\frac{Dv}{ds} \cdot u\right)u + (A \cdot v)u. \end{aligned}$$

Zatem pochodna FW jest równa

$$\frac{D_{FW}(v)}{ds} = P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) + R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) = \frac{Dv}{ds} + (A \cdot v)u - (u \cdot v)A. \quad (49)$$

□

W przypadku zerowego przyspieszenia ( $A \equiv 0$ ) linia świata jest linią geodezyjną, pochodna (FW) sprowadza się do pochodnej absolutnej, a transport (FW) sprowadza się do transportu równoległego.

Dla dowolnych wektorów  $v_1$  i  $v_2$  mamy  $P(v_1) \perp R(v_2)$ , a więc warunek transportu (FW) sprowadza się zerowania się każdego ze składników

$$\begin{aligned} P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) &= 0, \\ R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) &= 0. \end{aligned}$$

**Definicja 15. Reperem lokalnie nierotującym** nazywamy reper ruchomy poruszający się wraz z ciałem wzdłuż jego linii świata, którego wersor czasowy jest styczny do linii świata (co odpowiada czteroprędkości) i którego wersory spełniają prawo transportu (FW).

Reper lokalnie nierotujący jest szczególnie dogodny do opisu zjawisk fizycznych. W granicy nierelatywistycznej odpowiada on Newtonowskiej koncepcji nierotującego reperu [10]. Przeprowadzimy teraz konstrukcję takiego reperu, co sprowadza się do konstrukcji odpowiedniej bazy  $E$ .

Za wersor czasowy takiej bazy możemy zawsze obrać prędkość  $u$ , gdyż jest ona unormowanym wektorem czasowym spełniającym prawo transportu (FW)

$$e := u = \frac{dy}{ds}.$$

Dobieramy do niego wersory przestrzenne  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  tak, aby otrzymana baza  $E = \{e_\mu\}$  była ortogonalna. Warunek  $e_i \perp e$  zapewnia, że  $R(e_i) = 0$ . Zatem dodatkowym warunkiem jaki trzeba nałożyć na wersory przestrzenne  $e_i$  jest

$$P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) = 0.$$

Uwzględniając, że  $e = u$  oraz  $P(e_i) = e_i$  możemy powyższy warunek zapisać w postaci

$$\frac{De_i}{ds} = \left(\left(\frac{De_i}{ds}\right) \cdot e\right) e, \quad (50)$$

Przydatną własnością bazy  $E$  jest, że dany wektor ma w tej bazie stałe współrzędne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia prawo transportu (FW). Aby to pokazać wystarczy rozłożyć dany wektor w bazie  $E$  i skorzystać z definicji transportu (FW).

### 3.4 Czwórka symetryczna kierunków zerowych

Będziemy od teraz zakładać, że jeden z wersorów bazy  $E$  ( $e_3$ ) jest prostopadły do hiperpłaszczyzny ruchu, tak, że

$$A \cdot e_3 = 0.$$

Nie jest to duże ograniczenie i, jak się później przekonamy, pozwala na zastosowanie modelu w wielu przypadkach. Zauważmy, że wektor  $A$  leży wtedy w płaszczyźnie rozpinanej przez wektory  $e_1$  i  $e_2$ . Licząc przyspieszenie właściwe dostajemy

$$\alpha^2 = (A \cdot e_1)^2 + (A \cdot e_2)^2$$

Interpretując powyższą równość jako trójkę pitagorejską możemy wprowadzić następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \frac{A \cdot e_1}{\alpha}, \\ \sin \chi &= \frac{A \cdot e_2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Z wersorów  $e$  i  $e_3$  tworzymy dwa zerowe wektory skierowane w przyszłość  $k_+$  i  $k_-$ , które uważamy za wektory własne pewnej transformacji Lorentza.

$$k_+ = \frac{e + e_3}{\sqrt{2}} \quad (51)$$

$$k_- = \frac{e - e_3}{\sqrt{2}} \quad (52)$$

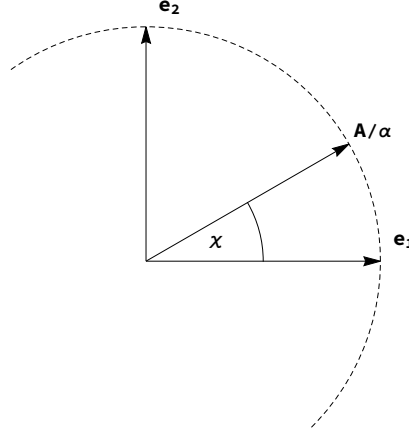
$$k_+ \cdot k_- = 1 \quad k_\pm \cdot k_\pm = 0.$$

$$\mathcal{O}(k_\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{O}(e \pm e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{O}e \pm \mathcal{O}e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e \pm e_3) = k_\pm.$$

Wektory te są wektorami własnymi pewnego obrotu  $\mathcal{O}$ . Łatwo sprawdzić, że jest to obrót w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory  $e_1$  i  $e_2$ , czyli eliptyczne przekształcenie Lorentza. Obrót ten pozwala nam zinterpretować kąt  $\chi$ . Zauważmy, że możemy za pomocą obrotu  $\mathcal{O}$  obrócić, wersor czterowektora przyspieszenia o kąt  $-\chi$ , tak aby spełniał prawo transportu (FW). Schematycznie przedstawiono to na rysunku 3.

Rozważamy trzeci wektor zerowy skierowany w przyszłość  $k$  taki, że  $k \cdot e_3 \equiv 0$  oraz  $k(0) \cdot e_1(0) = 0$ . Wektor ten rozkładamy w bazie  $E$

$$k = k^0 e + k^i e_i, \quad k^1(0) = 0, k^3 = 0$$



Rys. 3: Schemat obrazujący obrót  $\mathcal{O}$  wykonany na wersorze czteroprzyspieszenia  $A/\alpha$  w bazie  $E$ .

$$k(0) = k^0(0)e(0) + k^2(0)e_2(0)$$

Rozkładając  $k$  w bazie  $E$  stwierdzamy, że jego współrzędne formują trójkę pitagorejską

$$(k \cdot e)^2 = (k \cdot e_1)^2 + (k \cdot e_2)^2 \quad (53)$$

Wprowadzamy **fazę zegara**  $\varphi$  równością (54)

$$\cos \varphi = \frac{k \cdot e_1}{k \cdot e} \quad (54)$$

$$k = (k \cdot e)(e - \cos \varphi e_1 - \sin \varphi e_2)$$

Z wektora  $k(0)$  tworzymy wektor zerowy  $k_0(s)$  tak aby spełniał prawo transportu (FW). Wiemy, że wtedy jego współrzędne w bazie  $E$  są stałe. Wektor  $k_0$  ustalamy więc jako (56). Warunek początkowy na fazę  $\varphi$  ustalamy na (55), aby dla  $s = 0$  wektory  $k$  i  $k_0$  reprezentowały ten sam kierunek zerowy.

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{2} \quad (55)$$

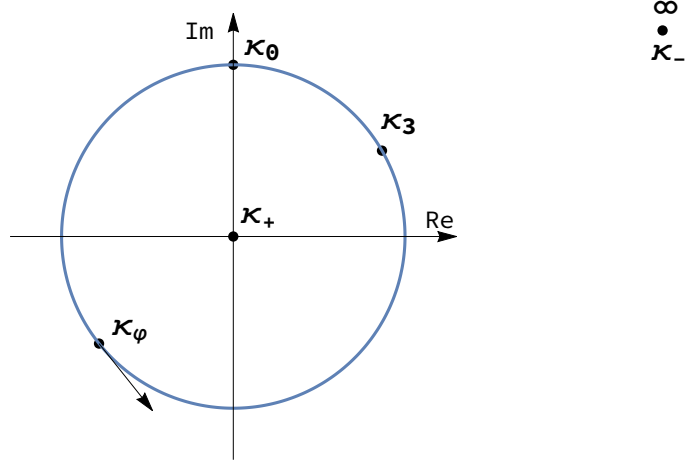
$$k_0(s) = \sqrt{2}(e + e_2). \quad (56)$$

Każdemu kierunkowi zerowemu możemy przyporządkować punkt na sferze, a następnie każdemu punktowi sfery możemy przyporządkować, przez rzut stereograficzny, punkt z płaszczyzny zespolonej (odpowiednio uzwarconej) [?]. Skonstruujemy teraz czwarty wektor zerowy  $k_3$ , który razem z wektorami  $k_+$ ,  $k_0$ ,  $k_-$  utworzy czwórkę symetryczną. Mówimy, że wektory zerowe tworzą czwórkę symetryczną, kiedy dwustosunek odpowiadających im liczb zespolonych wynosi  $e^{\pm i\pi/3}$ . Dwustosunek liczb zespolonych  $z_0, z_1, z_2, z_3$  przyjmujemy w postaci (58) [14]. Liczby zespolone odpowiadające wektorom własnym  $k_\nu$  oznaczamy przez  $\kappa_\nu$  gdzie  $\nu \in \{+, 0, -, 3\}$ . W zależności od kolejności wektorów i przyjętego znaku w (59) otrzymujemy dwie liczby  $\kappa_3$  różniące się znakiem części rzeczywistej (60). Wektorowi zerowemu  $k$  odpowiada liczba  $\kappa_\varphi$  (57).

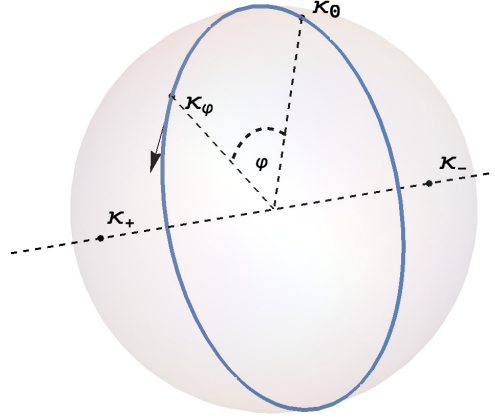
$$\kappa = -\cos \varphi - i \sin \varphi \quad (57)$$

Na rysunkach 4 oraz 5 prezentujemy wzajemne położenie uzyskanej czwórki symetrycznej (dla  $\text{Re}(\kappa_3) > 0$ ) oraz obrazu wektora  $k$ . Uzyskane wektory są liniowo niezależne i tworzą bazę kierunków zerowych, która dodatkowo spełnia prawa transportu (FW).

$$(z_0 z_1 z_2 z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)}. \quad (58)$$



Rys. 4: Obraz czwórki symetrycznej oraz kierunku  $k$  na płaszczyźnie zespolonej. Punkt  $\kappa_-$  utożsamiamy z punktem  $\infty$ . Punkt  $\kappa_\phi$  porusza się po zaznaczonym okręgu jednostkowym wraz ze wzrostem  $\phi$ . Wektorem stycznym do okręgu zaznaczono kierunek ruchu.

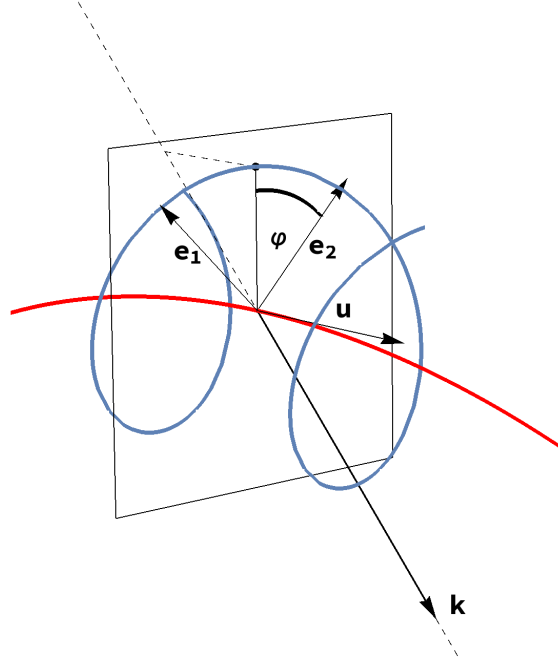


Rys. 5: Obraz kierunków zerowych  $k_0, k_+, k_-$  wraz z kierunkiem  $k$  na sferze jednostkowej. Punkt  $\kappa_\phi$  porusza się po zaznaczonym okręgu jednostkowym wraz ze wzrostem  $\phi$ . Wektorem stycznym do okręgu zaznaczono kierunek ruchu. Płaszczyzna zawierająca okrąg jest prostopadła do prostej zawierającej  $\kappa_+$  i  $\kappa_-$

$$\kappa_0 = i, \kappa_+ = 0, \kappa_- = \infty, \quad (\kappa_0 \kappa_+ \kappa_- \kappa_3) = e^{\pm i\pi/3} \quad (59)$$

$$\kappa_3 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad k_3 = \sqrt{2}e \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \quad (60)$$

$$k_\mu \cdot k_\nu = 1, \quad k_\nu \cdot k_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu, \mu, \nu \in \{0, +, -, 3\}$$



Rys. 6: Schemat działania zegara (kolor niebieski) wzdłuż lini świata (kolor czerwony).

### 3.5 Konstrukcja zegara

Zakładamy, że podczas ruchu mamy spełniony więz (46). Założymy dodatkowo, że wektor zerowy  $\dot{x}$  można przedstawić jako kombinację liniową  $e$  oraz  $k$ , taką, że  $e \cdot \dot{x} = 1$ . Rozkładając  $\dot{x}$  w bazie  $E$  dostajemy

$$\dot{x} = e - C(k \cdot e_1)e_1 - C(k \cdot e_2)e_2,$$

Korzystając z faktu, że  $\dot{x}$  jest zerowy możemy wyznaczyć współczynniki kombinacji liniowej.

$$0 = \dot{x} \cdot \dot{x} = 1 - C^2(k \cdot e_1)^2 - C^2(k \cdot e_2)^2 = 1 - C^2(k \cdot e)^2$$

$$C = \pm 1/(k \cdot e).$$

Wybieramy znak minus, gdyż w przeciwnym przypadku  $\dot{x} = k/(k \cdot e)$  oraz  $\dot{x} \cdot k = 0$ . Zatem

$$\boxed{\dot{x} = 2e - k/(k \cdot e) = e + \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2, \quad \dot{x} \cdot k = 2k \cdot e,} \quad (61)$$

Sytuację tę obrazujemy na schematycznym rysunku (6)

Następnie obliczamy pochodną absolutną wektora  $k$

$$\dot{k} = \underbrace{\frac{d(k \cdot e)}{ds}e - \frac{d(k \cdot e_1)}{ds}e_1 - \frac{d(k \cdot e_2)}{ds}e_2}_{K_p} + \underbrace{(k \cdot e)\dot{e} - (k \cdot e_1)\dot{e}_1 - (k \cdot e_2)\dot{e}_2}_K$$

$$\dot{k} \cdot k = K_p \cdot K_p + K \cdot K + 2K_p \cdot K$$

Obliczymy oddzielnie każdy ze składników powyższej sumy. Zaczynamy od przedstawienia pochodnych wektorów bazy w bardziej użytecznej postaci

$$\dot{e}_0 = \frac{De}{ds} = A,$$

$$\dot{e}_1 = \frac{De_1}{ds} = \frac{D(e_1)_\perp}{ds} \stackrel{??}{=} \left( \frac{D(e_1)_\perp}{ds} \cdot e_0 \right) e = \left( \frac{De_1}{ds} \cdot e \right) e \stackrel{??}{=} - \left( \frac{De}{ds} \cdot e_1 \right) e = - (A \cdot e_1) e,$$

$$\dot{e}_2 = \frac{De_2}{ds} = \frac{D(e_2)_\perp}{ds} \stackrel{??}{=} \left( \frac{D(e_2)_\perp}{ds} \cdot e \right) e = \left( \frac{De_2}{ds} \cdot e \right) e \stackrel{??}{=} - \left( \frac{De}{ds} \cdot e_2 \right) e = - (A \cdot e_2) e.$$

Zgodnie z powyższym zachodzą równości

$$K = (k \cdot e)(A + (A \cdot e_1) \cos \varphi e + (A \cdot e_2) \sin \varphi e)$$

$$K_p = (k \cdot e) \dot{\varphi} (\sin \varphi e_1 - \cos \varphi e_2) + \frac{d(k \cdot e)}{ds} (e - \cos \varphi e_1 - \sin \varphi e_2).$$

$$\begin{aligned} K_p \cdot K_p &= \left( \frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 - \left( \frac{d(k \cdot e_1)}{ds} \right)^2 - \left( \frac{d(k \cdot e_2)}{ds} \right)^2 = \left( \frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 - \left( \frac{d(k \cdot e) \cos \varphi}{ds} \right)^2 - \left( \frac{d(k \cdot e) \sin \varphi}{ds} \right)^2 \\ &= \left( \frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 - \left( \frac{d(k \cdot e)}{ds} \right)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - (k \cdot e)^2 (\dot{\varphi})^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ &= -(k \cdot e)^2 (\dot{\varphi})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2K_p \cdot K &= 2(k \cdot e_0) \dot{\varphi} ((A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi) - \frac{d(k \cdot e_0)}{ds} ((A \cdot e_1) \cos \varphi + (A \cdot e_2) \sin \varphi) + \\ &+ \frac{d(k \cdot e_0)}{ds} (A \cdot e_1) \cos \varphi + \frac{d(k \cdot e_0)}{ds} (A \cdot e_2) \sin \varphi \\ &= 2(k \cdot e_0) \dot{\varphi} ((A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K \cdot K &= (k \cdot e)^2 ((A \cdot A) + ((A \cdot e_1) \cos \varphi + (A \cdot e_2) \sin \varphi)^2) = \\ &= -(k \cdot e)^2 ((A \cdot e_1)^2 + (A \cdot e_2)^2 - (A \cdot e_1)^2 \cos^2 \varphi - (A \cdot e_2)^2 \sin^2 \varphi - 2(A \cdot e_1)(A \cdot e_2) \sin \varphi \cos \varphi) \\ &= -(k \cdot e)^2 ((A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi)^2 \end{aligned}$$

Sumę powyższych składników możemy zwinąć do kwadratu i ostatecznie

$$1 = -\frac{\ell^2 \dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} = \frac{\ell^2}{4} (\dot{\varphi} - (A \cdot e_1) \sin \varphi + (A \cdot e_2) \cos \varphi)^2$$

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + (A \cdot e_1) \sin \varphi - (A \cdot e_2) \cos \varphi$$

Stosując oznaczenie ?? możemy zapisać owo równanie w zgrabnej postaci

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \cos \chi \sin \varphi - \alpha \sin \chi \cos \varphi$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \chi)} \quad (62)$$

W przypadku braku przyspieszenia  $\alpha = 0$ , wprowadzony model zegara mierzy czas własny.

$$\dot{\varphi} = \frac{2}{\ell}, \quad \varphi = \pm \frac{2}{\ell} s + \varphi_0. \quad (63)$$

## 4 Aplikacje

### 4.1 Ruch hiperboliczny

Jako pierwszy chcemy zbadać relatywistyczny odpowiednik ruchu jednostajnie przyspieszonego. W układzie obserwatora inercyjnego  $\mathcal{I}$  posługującego się kartezjańskim układem współrzędnych rozważamy linię świata  $y = y(s)$  obserwatora  $\mathcal{Z}$  parametryzowaną czasem własnym  $s$ . Poniższe wyprowadzenie postaci  $y$  można znaleźć w [15, 13] Ruch ten będzie odbywał się w jednym wymiarze przestrzennym. W takim przypadku ogólna postać czteroprędkości, po uwzględnieniu warunku unormowania, ma postać (64).

$$(u^\mu) = (\cosh \beta(s), \sinh \beta(s), 0, 0), \quad (64)$$

gdzie  $\beta(s)$  jest pewną funkcją parametryzowaną czasem własnym  $s$ . Rządamy, aby przyspieszenie właściwe było stałe.

$$(A^\mu) = (\dot{\beta}(s) \sinh \beta(s), \dot{\beta}(s) \cosh \beta(s), 0, 0).$$

$$\alpha = \sqrt{-A^\mu A_\mu} = \dot{\beta}(s)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe na funkcję  $\beta(s)$ . Możemy bez straty ogólności przyjąć, że  $\beta(0) = 0$ . Wtedy

$$\beta(s) = \alpha s,$$

$$(u^\mu) = (\cosh \alpha s, \sinh \alpha s, 0, 0),$$

$$(A^\mu) = (\alpha \sinh \alpha s, \alpha \cosh \alpha s, 0, 0).$$

A zatem odpowiednik ruchu jednostajnie przyspieszonego w czasoprzestrzeni Minkowskiego to ruch opisany przez hiperbolę. Łatwo sprawdzić, że dla małych prędkości ruch ten przechodzi w ruch jednostajnie przyspieszony. Ciało w takim ruchu porusza się po linii świata (65).

$$(y^\mu) = \left( \frac{1}{\alpha} \sinh \alpha s, \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha s, 0, 0 \right). \quad (65)$$

Chcemy skonstruować reper współporuszający się z  $\mathcal{Z}$ . W tym celu wersor czasowy obieramy prędkość  $e_0 = u$ , a za pierwszy z wersorów przestrzennych unormowane przyspieszenie  $e_1 = A/\alpha$ . Wersory te uzupełniamy do bazy za pomocą wersorów kanonicznych. Otrzymaoną bazę możemy zapisać zgrabnie w postaci macierzy (66). Łatwo sprawdzić, że tak skonstruowany reper spełnia prawo transportu Fermiego-Walkera.

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha s & \sinh \alpha s & 0 & 0 \\ \sinh \alpha s & \cosh \alpha s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Możemy teraz podać równanie na kąt  $\phi$  zegara

$$\chi = \pi, \quad \alpha = \text{const} \quad (67)$$

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \pi) = \pm \frac{2}{\ell} - \alpha \sin(\varphi) \quad (68)$$

### 4.2 Ruch po okręgu

W układzie obserwatora inercyjnego  $\mathcal{I}$  z kartezjańskim układem współrzędnych rozważamy linię świata obserwatora  $\mathcal{Z}$  w ruchu jednostajnym po okręgu. Zagadnienie rozpatrujemy w czasoprzestrzeni Minkowskiego. Rozpatrzmy punkt poruszający się po okręgu o promieniu  $R$  i częstości  $\omega$ . W układzie obserwatora inercyjnego  $\mathcal{I}$  porusza się on po trajektorii  $y = y(s)$ . Współrzędne tej trajektorii mają, w kartezjańskim układzie współrzędnych, postać

$$(y^\mu) = (\gamma s, R \cos \omega \gamma s, R \sin \omega \gamma s, 0). \quad (69)$$

Wtedy czterowektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$(u^\mu) = \left( \frac{dy^\mu}{ds} \right) = (\gamma, -R\omega\gamma \sin \omega\gamma s, R\omega\gamma \cos \omega\gamma s, 0), \quad (70)$$

$$(A^\mu) = \left( \frac{Du^\mu}{ds} \right) = (0, -R\omega^2\gamma^2 \cos \omega s, -R\omega^2\gamma^2 \sin \omega\gamma s, 0). \quad (71)$$

Właściwe przyspieszenie jest wtedy zachowane podczas ruchu

$$\alpha = \sqrt{-A \cdot A} = R\omega^2\gamma^2. \quad (72)$$

Teraz zajmijmy się znalezieniem reperu lokalnie nierotującego poruszającego się po rozpatrywanej linii świata. Jako wersor czasowy  $e$  wybieramy prędkość  $u$ . Pierwszy z wersorów przestrzennych  $e'_1$  wybieramy wersor przeciwny do przyspieszenia. Jako wersor  $e_3$  wybieramy unormowany wektor prostopadły do płaszczyzny ruchu. Wersor  $e'_2$  wybieramy tak, aby był ortogonalny do pozostałych. Uzyskaną bazę zapisujemy w postaci macierzowej (??).

$$E' = \begin{pmatrix} e \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega\gamma s & R\omega\gamma \cos \omega\gamma s & 0 \\ 0 & \cos \omega\gamma s & \sin \omega\gamma s & 0 \\ R\omega\gamma & -\gamma \sin \omega\gamma s & \gamma \cos \omega\gamma s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Chcemy, aby obrona baza spełniała prawo transportu (FW). Z racji ortonormalności wersory tej bazy spełniają warunek (??). Łatwo sprawdzić, że wersory  $e$  i  $e_3$  spełniają również warunek (??), w przeciwieństwie do wersorów  $e'_1$  oraz  $e'_2$ . Aby tę drobną usterkę naprawić dokonamy obrotu bazy o kąt  $\psi = \psi(s)$  w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory  $e'_1$  i  $e'_2$ . Odpowiedni obrót w bazie kanonicznej jest dany przez (74) [14]. Właściwie obrócone wersory obliczamy za pomocą (75).

$$(\mathcal{O}^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (74)$$

$$\begin{aligned} e_1 &= \mathcal{O}^\mu_1 E'_\mu, \\ e_2 &= \mathcal{O}^\mu_2 E'_\mu. \end{aligned} \quad (75)$$

Wstawiając obrócone wersory to warunku (??) otrzymujemy sześć równań różniczkowych na kąt  $\psi$ , które (przyjmując bez straty ogólności  $\psi(0) = 0$ ) mają wspólne rozwiązanie postaci (76). Otrzymana ortonormalna baza (77) spełnia prawo transportu (FW).

$$\psi(s) = -\omega\gamma^2 s \quad (76)$$

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega\gamma s & R\omega\gamma \cos \omega\gamma s & 0 \\ R\omega\gamma \sin \psi & \cos \omega\gamma s \cos \psi - \gamma \sin \omega\gamma s \sin \psi & \sin \omega\gamma s \cos \psi + \gamma \cos \omega\gamma s \sin \psi & 0 \\ R\omega\gamma \cos \psi & -\cos \omega\gamma s \sin \psi - \gamma \sin \omega\gamma s \cos \psi & -\sin \omega\gamma s \sin \psi + \gamma \cos \omega\gamma s \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega\gamma s & R\omega\gamma \cos \omega\gamma s & 0 \\ -R\omega\gamma \sin \omega\gamma^2 s & \cos \omega\gamma^2 s \cos \omega\gamma s + \gamma \sin \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s & \sin \omega\gamma s \cos \omega\gamma^2 s - \gamma \cos \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s & 0 \\ R\omega\gamma \cos \omega\gamma^2 s & \cos \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s - \gamma \sin \omega\gamma s \cos \omega\gamma^2 s & \sin \omega\gamma s \sin \omega\gamma^2 s + \gamma \cos \omega\gamma s \cos \omega\gamma^2 s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (77)$$

Mając odpowiedni reper możemy podać równanie na kąt  $\varphi$

$$\begin{aligned} \chi &= \omega\gamma^2 s = -\psi, \quad \alpha = R\omega\gamma^2 \\ \dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + R\omega^2\gamma^2 \sin(\varphi - \omega\gamma^2 s) = \pm \frac{2}{\ell} + \alpha \sin(\varphi - \alpha s/R\omega) \end{aligned} \quad (78)$$



### 4.3 Ruch po okręgu względem galaktyk

Rozważmy teraz ponownie ruch po okręgu z tą różnicą, że wiążemy obserwatora  $\mathcal{I}$  z pyłem (galaktykami) w ekspandującym wszechświecie. Sytuacji tej odpowiada metryka Friedmana-Lemaître'a-Robertsona-Walkera (FLRW). Dla uproszczenia zakładamy zerową krzywizną przestrzenną. Tensor metryczny dany jest przez (79)

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -a(t)^2, -a(t)^2, -a(t)^2). \quad (79)$$

Warto zauważyć, że dla  $a(t) \equiv 1$  metryka ta przechodzi w zwykłą metrykę czasoprzestrzeni Minkowskiego, a zatem można łatwo weryfikować poprawność wyników sprawdzając, czy dla przy przejściu  $a(t) \rightarrow 1$  pokrywają się one z otrzymanymi w poprzednim podrozdziale. W dalszej części przyjmujemy następujące oznaczenia

$$a := a(t), \quad a' := \frac{da(t)}{dt}.$$

Dla tej metryki symbole Chrostofella  $\Gamma_{ij}^k$  przedstawiam poniżej w tablicach odpowiednio dla  $k = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aa' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aa' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & aa' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{a'}{a} & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a'}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a'}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozważamy więc linie świata cząstki w ruchu po okręgu

$$y^\mu(s) = (t, x, y, z) = (t(s), R \cos \omega t(s), R \sin \omega t(s), 0),$$

gdzie  $dt/ds = \gamma = (1 - a^2 R^2 \omega^2)^{-1/2}$ . Wtedy czterowektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$u^\mu = \dot{y}^\mu = \frac{dy}{ds} = (\gamma, -R\omega\gamma \sin \omega t, R\omega\gamma \cos \omega t, 0),$$

$$\begin{aligned} (A^\mu) &= \left( \frac{Du^\mu}{ds} \right) = \\ &= (a'aR^2\omega^2\gamma^2(\gamma^2 + 1), -\frac{a'}{a}R\omega\gamma^2(\gamma^2 + 1)\sin \omega t - R\omega^2\gamma^2 \cos \omega t, \frac{a'}{a}R\omega\gamma^2(\gamma^2 + 1)\cos \omega t - R\omega^2\gamma^2 \sin \omega t, 0) \end{aligned} \quad (80)$$

Właściwe przyspieszenie wynosi

$$\alpha = \sqrt{-A_\mu A^\mu},$$

$$A^\mu A_\mu = -\left(\frac{a'}{a}\right)^2 (\gamma^2 - 1) (\gamma^2 + 1)^2 - a^2 R^2 \omega^4 \gamma^4$$

Konstruując w tym przypadku reper  $E$  którego wersory będą spełniać prawo transportu (FW) można konstrukcję przeprowadzić analogicznie do przedstawionej w poprzednim przypadku - czasoprzestrzeni Minkowskiego. Jednakże rachunki można znacząco uprościć wykonując konstrukcję w inny sposób. Mianowicie można stosunkowo łatwo uogólnić wersory uzyskanej wcześniej bazy (77), tak aby tworzyły bazę ortonormalną w metryce (79). Odpowiednia baza jest postaci (81). Jak poprzednio wersory  $e_1$  i  $e_3$  są transportowane wzdłuż linii świata zgodnie z prawem (FW). Wersory  $e_1$  i  $e_2$  zależą od kąta obrotu  $\psi$ . Jak metryka FLRW przy  $a \rightarrow 1$  przechodzi w metrykę Minkowskiego tak szukany kąt obrotu  $\psi$  powinien w granicy  $a \rightarrow 1$  przechodzić w kąt znaleziony dla ciała poruszającego się po okręgu w czasoprzestrzeni Minkowskiego. Traktujemy tę granicę jako test poprawności wyników. Wartość  $\psi$  można znaleźć żądając, aby wersory  $e_1$  i  $e_2$  spełniały prawo transportu (FW). Wspólne rozwiązanie dla otrzymanych równań różniczkowych można wyrazić przez (82).

$$E_{FLRW} = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma \sin \omega t & R\omega\gamma \cos \omega t & 0 \\ aR\omega\gamma \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \omega t \cos \psi - \frac{1}{a}\gamma \sin \omega t \sin \psi & \frac{1}{a} \sin \omega t \cos \psi + \frac{1}{a}\gamma \cos \omega t \sin \psi & 0 \\ aR\omega\gamma \cos \psi & -\frac{1}{a} \cos \omega t \sin \psi - \frac{1}{a}\gamma \sin \omega t \cos \psi & -\frac{1}{a} \sin \omega t \sin \psi + \frac{1}{a}\gamma \cos \omega t \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \quad (81)$$

$$\psi(s) = \int_0^s -\omega\gamma(s_1)^2 ds_1, \quad \text{gdzie } \gamma(s) = (1 - a(t(s))^2 R^2 \omega^2)^{-1/2}. \quad (82)$$

Mając znaleziony odpowiedni reper możemy obliczyć wielkości potrzebne do równania na fazę zegara  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} A \cdot e_1 &= -a' R \omega \gamma (\gamma^2 + 1) \sin \psi + a R \omega^2 \gamma^2 \cos \psi \\ A \cdot e_2 &= -a' R \omega \gamma (\gamma^2 + 1) \cos \psi - a R \omega^2 \gamma^2 \sin \psi \\ \alpha &= a R \omega \gamma \sqrt{a'^2 (\gamma^2 + 1)^2 + \omega^2 \gamma^2} \end{aligned}$$

#### 4.4 Ruch po okręgu wokół czarnej dziury

W układzie obserwatora inercyjnego  $\mathcal{I}$  z sferycznym układem współrzędnych  $(t, r, \phi, \theta)$  rozważamy linię świata obserwatora  $\mathcal{Z}$  w ruchu jednostajnym po okręgu wokół czarnej dziury. Będziemy używać metryki Schwarzschilda, która odpowiada czasoprzestrzeni w pobliżu nierotującej sferycznie symetrycznej masy nieobdarzonej ładunkiem [16]. Element liniowy oraz macierz tensora metrycznego mają postać

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - r^2 d\theta^2. \quad (83)$$

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Dla metryki [?] symbole Chrostofella  $\Gamma_{ij}^k$  przedstawiam poniżej w tablicach odpowiednio dla  $k = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) r \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{\sin \theta} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & -\cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jak poprzednio rozważamy ruch po okręgu o promieniu  $R$  i częstości  $\omega$ . W rozważanym układzie współrzędnych linię świata można zapisać następująco

$$(y^\mu) = \left(t, R, \omega t, \frac{\pi}{2}\right). \quad (85)$$

Wtedy czterowektor prędkości ma postać

$$(u^\mu) = \left(\frac{dy^\mu}{ds}\right) = (\gamma, 0, \omega\gamma, 0),$$

gdzie  $\gamma = dt/ds$ . Z danego elementu liniowego (83), po uwzględnieniu (85), możemy odczytać

$$\gamma = \frac{dt}{ds} = \sqrt{1 - \frac{2M}{R} - R^2 \omega^2}$$

Wyznaczamy czteroprzyspieszenie oraz przyspieszenie właściwe

$$(A^\mu) = \left(0, -\frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2}, 0, 0\right)$$

$$\alpha = \sqrt{-A \cdot A} = \frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}$$

Ponownie skorzystamy z bazy wyznaczonej wcześniej dla przypadku czasoprzestrzeni Minkowskiego i uogólnimy ją w ten sposób, aby była unormowana i spełniała prawo transportu (FW). Takie postępowanie daje nam łatwy sposób sprawdzania poprawności obliczeń, gdyż dla  $M = 0$  wyniki powinny przechodzić w przypadek bez grawitacji, czyli czasoprzestrzeń Minkowskiego. W pierwszym kroku musimy przetransformować wektory bazy (77) do współrzędnych sferycznych. Na potrzeby tej transformacji współrzędne kartezjańskie oznaczmy przez  $x^i$ , natomiast współrzędne sferyczne przez  $\tilde{x}^i$ . Współrzędne wektorów transformują się kontrawariantnie [17] co można zapisać jako

$$\tilde{v}^i = \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial v^j} v^j.$$

Współczynniki tej transformacji obliczamy w punkcie należącym do rozważanej tu linii świata. Baza (77) we współrzędnych sferycznych ma zatem postać

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\omega & 0 \\ R\omega\gamma \sin \psi & \cos \psi & \frac{\gamma}{R} \sin \psi & 0 \\ R\omega\gamma \cos \psi & -\sin \psi & \frac{\gamma}{R} \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Powyższa baza, rozważana w czasoprzestrzeni z metryką Schwarzschilda, nie jest ortonormalna. Można jednak stosunkowo łatwo uogólnić ją w ten sposób aby ortonormalna była

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\omega & 0 \\ R\omega\gamma \sin \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} & \cos \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & \frac{\gamma}{R} \sin \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & 0 \\ R\omega\gamma \cos \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} & -\sin \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & \frac{\gamma}{R} \cos \psi \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Odpowiedni kąt obrotu  $\psi$  znajdujemy za pomocą prawa transportu (FW). Dają one równania różniczkowe (jak poprzednio zakładamy  $\psi(0) = 0$ ), które mają wspólnie rozwiązanie dane przez (87).

$$\psi = -\omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right). \quad (86)$$

Mając odpowiedni reper ruchomy znajdujemy równanie na fazę zegara (??)

$$\begin{aligned} \chi = -\psi &= \omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right), \quad \alpha = \frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \\ \dot{\varphi} &= \pm \frac{2}{\ell} + \frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \sin \left(\varphi - \omega\gamma^2 s \left(1 - \frac{3M}{R}\right)\right) \end{aligned} \quad (87)$$

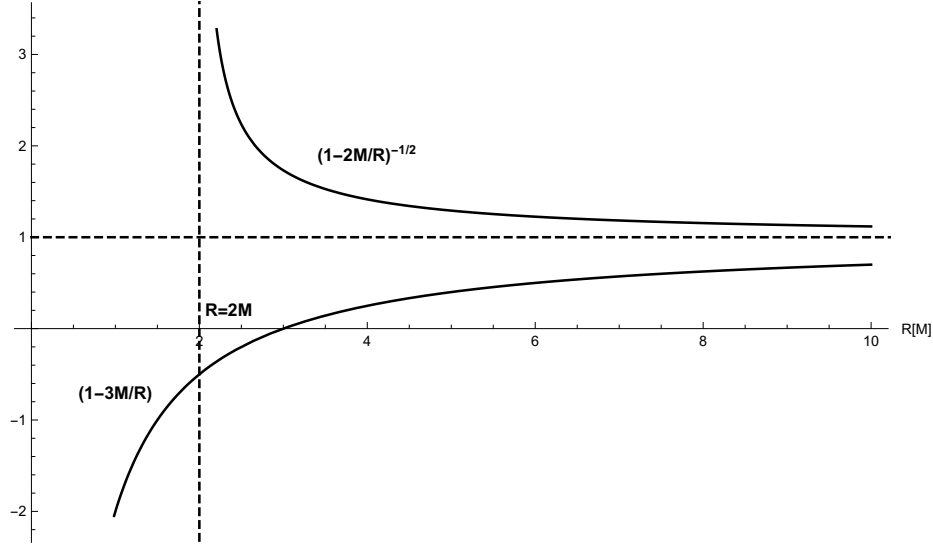
Zauważmy, że uzyskane równanie różni się od rozwiązania w ruchu po okręgu w płaskiej metryce Minkowskiego czynnikami  $(1 - 2M/R)^{-1/2}$  i  $(1 - 3M/R)$ . Na wykresie 7 wykreślamy ich wartości w zależności od  $R$ . Dla  $R$  dużych w porównaniu z  $2M$  wpływ masy  $M$  na działanie zegara jest niewielki, przy czym silniej wpływa na  $\chi$  niż na  $\alpha$ .

## 5 Analiza równania fazy zegara

W tej części przeprowadzimy analizę równania na fazę zegara wyprowadzonego w poprzedniej części. Interesującym nas parametrem jest przybliżenie właściwe, będące miarą przyspieszenia jakie działa na obiekt.

### 5.1 Zegar w przypadku stałego przyspieszenia

Zakładamy stałe przyspieszenie właściwe  $\alpha$ . Wtedy czterowektor przyspieszenia określony jest przez parametr  $\chi$



Rys. 7: Wykres czynników wpływających na działanie zegara pochodzących od  $M$  w zależności od  $R$ .

Założmy szczególną postać  $\chi(s) = ps + q$ , gdzie  $p, q = \text{const}(s)$ . Do rozwiązania równania stosujemy wtedy podstawienie (88)

$$\Phi = \varphi - \chi, \quad (88)$$

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} - p \quad (89)$$

$$\frac{d\Phi}{ds} = \pm \frac{2}{\ell} - p + \alpha \sin(\Phi)$$

$$ds = \frac{d\Phi}{\pm \frac{2}{\ell} - p + \alpha \sin(\Phi)}$$

Całkując prawą stronę powyższej równości stosujemy podstawienie  $x = \text{tg}(\Phi/2)$ . Dla uproszczenia stosujemy oznaczenia  $B = \pm \frac{2}{\ell} - p$ ,  $C = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{B^2}}$

$$s + s_0 = \frac{2}{BC} \arctg \left( \frac{\text{tg}(\Phi/2)}{C} + \frac{\alpha}{BC} \right),$$

$$\varphi = ps + q + 2 \arctg \left( C \text{tg}(BC(s + s_0)/2) - \frac{\alpha}{B} \right)$$

Zauważmy, że dla  $\alpha \rightarrow 0$  rozwiązanie jest postaci (90). To znaczy, że w przypadku ruchu bez przyspieszeń nasz model zegara mierzy czas własny  $s$ .

$$\varphi = \pm \frac{2}{\ell} s + \text{const}. \quad (90)$$

Zakładając warunek początkowy postaci  $\varphi(0) = -\pi/2$ , czyli  $\Phi(0) = -\pi/2 - q$  możemy wyznaczyć stałą całkowania  $s_0$ .

$$s_0 = \frac{2}{BC} \arctg \left( -\frac{1}{C} \text{tg}(q/2 + \pi/4) + \frac{\alpha}{BC} \right), \quad (91)$$

### 5.1.1 Rozwiązanie przybliżone

Interesuje nas jak rozwiązanie zachowuje się dla małych przyspieszeń. Rozwiążemy równanie (62) stosując rachunek zaburzeń ze względu na parametr  $\alpha$ . W tym celu zapisujemy  $\phi$  oraz  $\chi$  w postaci szeregów (92) (93). W równaniu (62) zapisujemy sinus w postaci szeregu (94). Następnie wstawiamy rozwinięcia  $\phi$  i  $\chi$  do uzyskanego równania i porządkujemy wyrazy ze względu na  $\alpha$ , odrzucając wyrazy  $O(\alpha^2)$ . Separujemy równanie ze względu na  $\alpha$  dostając równania (95), których rozwiązania wyglądają następująco (96). Ostatecznie szukane przez nas rozwiązanie ma postać (97).

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \varphi_n, \quad (92)$$

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \chi_n \quad (93)$$

$$\dot{\varphi} \mp \frac{2}{\ell} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\phi - \chi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \quad (94)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_0 = \pm \frac{2}{\ell}, & \varphi_0(0) = -\frac{\pi}{2}, \\ \dot{\varphi}_1 = \sin(\varphi_0 - \chi_0), & \varphi_1(0) = 0. \end{cases} \quad (95)$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = \pm \frac{2}{\ell} s - \frac{\pi}{2}, \\ \varphi_1 = -\alpha \int_0^s \cos(2s_1/\ell - \chi_0(s_1)) ds_1. \end{cases} \quad (96)$$

$$\varphi = \pm \frac{2}{\ell} s - \frac{\pi}{2} + \alpha \int_0^s \cos(\pm 2s_1/\ell - \chi_0(s_1)) ds_1 + O(\alpha^2). \quad (97)$$

Z rozwiązania przybliżonego (97) wiemy, że dla małych przyspieszeń nasz model zegara dobrze mierzy czas własny  $s$ . Przyspieszenie charakterystyczne dla którego efekto powinien mieć istotny wpływ to (98). Wpływ zaburzenia  $\varphi_1$  na działanie zegara jest rzędu (99).

$$\alpha_c = \frac{2}{\ell} \quad (98)$$

$$\epsilon = \frac{\alpha}{\alpha_c} \quad (99)$$

### 5.1.2 Ruch jednostajnie przyspieszony

W przypadku relatywistycznego odpowiednika ruchu jednostajnie przyspieszonego mamy  $\chi = \pi$  oraz  $\alpha = \text{const.}$  W takim przypadku faza  $\varphi$  jest równa (100), a przybliżenie dla małych przyspieszeń dane przez (101).

$$\varphi = \pi + 2 \arctg \left( \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}} \operatorname{tg} \left( \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}} (s + s_0) / \ell \right) \mp \frac{\alpha \ell}{2} \right) \quad (100)$$

$$s_0 = \pm \ell \arctg \left( \left( 1 \pm \frac{\alpha \ell}{2} \right) / \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}} \right) / \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \ell^2}{4}}$$

$$\varphi = \pm \frac{2}{\ell} s - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha \ell}{2} \sin(2s/\ell) + O(\alpha^2). \quad (101)$$

### 5.1.3 Ruch po okręgu

W przypadku ruchu po okręgu o promieniu  $R$  z częstotliwością  $\omega$  mamy  $\chi = \omega\gamma^2 s$  oraz  $\alpha = R\omega^2\gamma^2$ . W takim przypadku faza  $\varphi$  jest równa (102), a przybliżenie dla małych przyspieszeń dane przez (103).

$$\varphi = \omega\gamma^2 s + 2\arctg\left(\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}} \operatorname{tg}\left(\left(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2\right)\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}}(s + s_0)/2\right) - \frac{\alpha}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2}\right) \quad (102)$$

$$s_0 = \frac{2}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2} \arctg\left(\left(\frac{\alpha}{\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2} - 1\right) / \sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}}\right) / \sqrt{1 - \frac{R^2\omega^4\gamma^4}{(\pm\frac{2}{\ell} - \omega\gamma^2)^2}},$$

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2} + \frac{R\omega^2\gamma^2}{\pm 2/\ell - \omega\gamma^2} \sin((\pm 2/\ell - \omega\gamma^2)s) + O(\alpha^2). \quad (103)$$

## 5.2 Analiza modelu pod kątem pomiaru

Najprostszym obiektem, dla którego można użyć tego modelu wydaje się być elektron. Wiemy, że dla małych przyspieszeń hipoteza zegara wydaje się być spełniona [1]. W tej części oszacujemy rząd wielkości przyspieszenia dla którego spodziewamy się obserwowalnych odstępstw od hipotezy zegara. Za  $\ell$  możemy podstawić wielkość o wymiarze metra charakterystyczną dla elektronu - długość komptonowską (104). Wtedy przyspieszenie charakterystyczne dla elektronu wynosi (105). Dla porównania energie elektronów otrzymywane w akceleratorach liniowych są rzędu kilku-kilkunastu GeV. Dla szacowania przyjmijmy gradient przyspieszenia rzędu kilku GeV/m [18]. Rząd wielkości przyspieszenia szacujemy jako (106). Porównując rzędy wielkości stwierdzamy, że efekty raczej nie będą obserwowalne.

$$\lambda_e \approx 2,426 \cdot 10^{-10} \text{cm} \quad (104)$$

$$\alpha_c \approx 8,244 \cdot 10^9 \text{cm}^{-1} \quad (105)$$

$$\alpha \approx 10^2 \text{cm}^{-1} \quad (106)$$

Komptonowska długość protonu wnosi (107). Przyspieszenie charakterystyczne dla protonu wynosi (108). Energie protonów osiągane w CERN są rzędu 7TeV [19]. proton doświadczy wtedy przyspieszenia rzędu (109). Porównując rzędy wielkości przyspieszeń stwierdzamy, że jesteśmy daleko od możliwych obserwacji

$$\lambda_p \approx 1,321 \cdot 10^{-13} \text{cm} \quad (107)$$

$$\alpha_c \approx 7,57 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-1} \quad (108)$$

$$\alpha \approx 124 \text{cm}^{-1} \quad (109)$$

## 6 Podsumowanie

### Załączniki

#### A Dodatek matematyczny

##### A.1 Rozwiązanie układu równań na $f(\xi)$ w modelu Staruszkiewicza

Dany jest układ równań postaci

$$f(\xi)^2 - 4f(\xi)f'(\xi)\xi = 1 = 16f(\xi)^2f'(\xi)^2\xi.$$

Zauważmy przy tym, że

$$\xi = -\ell^2 \frac{\dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} > 0.$$

Rozwiążemy teraz pierwsze z równań, to jest

$$f(\xi)^2 - 4f(\xi)f'(\xi)\xi = 1$$

Można je przekształcić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{1}{\xi} = \frac{4f(\xi)}{f(\xi)^2 - 1} f'(\xi)$$

$$\ln \xi = \int \frac{4f}{f^2 - 1} df$$

$$\ln \xi = \int \frac{2}{f^2 - 1} df^2$$

$$\ln C_1 \xi = 2 \ln |f^2 - 1|, \quad C_1 > 0$$

$$C_1 \xi = (f^2 - 1)^2$$

$$\sqrt{C_1 \xi} = |f^2 - 1|$$

$$|f(\xi)| = \sqrt{1 \pm C \sqrt{\xi}}$$

Rozwiążemy teraz równanie

$$16f(\xi)^2 f'(\xi)^2 \xi = 1$$

Ponownie równanie to da się zapisać jako równanie o zmiennych rozdzielonych

$$4f(\xi)f'(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

$$2f^2 = \pm 2\sqrt{\xi} + 2C_2$$

$$f^2 = \pm \sqrt{\xi} + C_2$$

$$|f| = \sqrt{\pm \sqrt{\xi} + C_2}$$

Oba rozwiązanie uzgadniamy wybierając stałe całkowania  $C_1 = 1$  oraz  $C_2 = 1$ .

## A.2 Równoważność warunków transportu Fermiego-Walkera

Zakładamy, że  $y$  - linia świata wzdłuż której wykonujemy transport oraz

$$u = \frac{dy}{ds}, \quad A = \dot{u} = \frac{Du}{ds}, \quad u \cdot A = 0, \\ R(v) = (u \cdot v)u, \quad P(v) = v - R(v).$$

Niech  $v$  będzie wektorem zdefiniowanym wzdłuż  $y$ . Pokażemy, że następujące warunki transportu Fermiego-Walkera są równoważne

1.

$$P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) + R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) = 0,$$

2.

$$\dot{v} + (v \cdot A)u - (v \cdot u)A = 0.$$

*Dowód.* Obliczamy składniki lewej strony równości 1.

$$\frac{DR(v)}{ds} = \frac{D((v \cdot u)u)}{ds} = \frac{d(v \cdot u)}{ds}u + (v \cdot u)A = (\dot{v} \cdot u)u + (v \cdot A)u + (v \cdot u)A.$$

$$\frac{DP(v)}{ds} = \dot{v} - (\dot{v} \cdot u)u - (v \cdot A)u - (v \cdot u)A.$$

$$R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) = (\dot{v} \cdot u)u + (v \cdot A)u.$$

$$P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) = \dot{v} - (\dot{v} \cdot u)u - (v \cdot A)u - (v \cdot u)A - (\dot{v} \cdot u - (\dot{v} \cdot u) - (v \cdot A))u = \\ = \dot{v} - (\dot{v} \cdot u)u - (v \cdot A)u - (v \cdot u)A + (v \cdot A)u = \dot{v} - (\dot{v} \cdot u)u - (v \cdot u)A.$$

Korzystając z powyższych obliczeń otrzymujemy ciąg równości

$$P\left(\frac{DP(v)}{ds}\right) + R\left(\frac{DR(v)}{ds}\right) = \dot{v} - (\dot{v} \cdot u)u - (v \cdot u)A + (\dot{v} \cdot u)u + (v \cdot A)u = \dot{v} - (v \cdot u)A + (v \cdot A)u.$$

□

## Literatura

- [1] H. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*. Cambridge University Press, 2013.
- [2] J. Bailey, K. Borer, F. Combley, H. Drumm, F. Krienen, F. Lange, E. Picasso, W. von Ruden, F. J. M. Farley, J. H. Field, W. Flegel, and P. M. Hattersley, "Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit," *Nature*, vol. 268, pp. 301 EP –, Jul 1977.
- [3] L. Landau, E. Liřic, and S. Bażański, *Krótki kurs fizyki teoretycznej: Mechanika, Elektrodynamika*. No. t. 1, Państwowe Wydaw. Naukowe, 1978.
- [4] A. Staruszkiewicz, "Fundamental relativistic rotator," *Acta Phys. Pol. B*, pp. 18–20, 01 2008.
- [5] V. Kassandrov, N. Markova, G. Schäfer, and A. Wipf, "On a model of a classical relativistic particle of constant and universal mass and spin," *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 42, p. 315204, Aug. 2009.



- [6] Ł. Bratek, “On the nonuniqueness of free motion of the fundamental relativistic rotator,” *ArXiv e-prints*, Feb. 2009.
- [7] L. Bratek, “Spinor particle. an indeterminacy in the motion of relativistic dynamical systems with separately fixed mass and spin,” vol. 343, p. 012017, 02 2012.
- [8] Ł. Bratek, “Relativistic Ideal Clock,” *ArXiv e-prints*, Nov. 2015.
- [9] J. Polchinski, *String Theory*, vol. 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1998.
- [10] J. Synge, *Relativity: the general theory*. Series in physics, North-Holland, 1960.
- [11] J. Maluf and F. Faria, “On the construction of fermi–walker transported frames,” *Ann. Phys. (Berlin)*, vol. 17, pp. 326–335, 2008.
- [12] L. Costa and J. Natário, “Inertial forces in general relativity,” vol. 600, 2015. cited By 1.
- [13] A. Ashtekar and V. Petkov, *Springer handbook of spacetime*. 2014. cited By 8.
- [14] A. Staruszkiewicz, *Algebra i geometria*. Wykłady dla fizyków, Wydaw. Miniatura, 1993.
- [15] *Czasoprzestrzeń i grawitacja*.
- [16] J. Hartle, *Grawitacja: Wprowadzenie do ogólnej teorii względności Einsteina*. Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, 2016.
- [17] R. Ingarden and A. Jamiołkowski, *Elektrodynamika klasyczna*. PWN, 1980.
- [18] H. S. Ghotra and N. Kant, “Electron acceleration by a chirped laser pulse in vacuum under the influence of magnetic field,” *Optical Review*, vol. 22, pp. 539–543, Aug 2015.
- [19] “The accelerator complex.” <https://home.cern/about/accelerators>. Dostęp: 2018-05-15.