Badanie krzywych chronometrycznych w kontekscie hipotezy zegara.

Paweł Rzońca

24 maja 2018

Spis treści

0.1 Transport Fermiego-Walkera

Konstrukcję zegara przeprowadzimy w lokalnie nierotującej bazie. W tej części pracy przedstawimy koncepcje potrzebne do konstrukcji takiej bazy. Dokładne omówienie prezentowanych zagadnień można znaleźć np. tu [1, 2]

Definicja 1. Mówimy, że wektor v spełnia prawo **transportu Fermiego-Walkera** (FW) wzdłuż linii świata y jeżeli

$$\frac{\widetilde{\mathrm{D}}v}{\mathrm{d}s} := \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} + (v \cdot A)u - (v \cdot u)A = 0, \tag{FW}$$

gdzie $u = \dot{y}$ oraz $A = \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{d}s}$ to odpowiednio czterowektory prędkości i przyspieszenia stoważyszone z linią świata y. Wyrażenie $\frac{\widetilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}s}$ nazywamy **pochodną Fermiego-Walkera**. Zauważmy, że w przypadku zerowego przyspieszenia ($A = 0$) pochodna Fermiego-Walkera sprowadza się do pochodnej absolutnej, więc dla linii będące geodezyjną transport (FW) sprowadza się się do transportu równoległego. Niestety w ogólności transport równoległy nie przekształca wektorów stycznych w wektory styczne. Transport taki realizuje się przez prawa transportu (FW).

Łatwo pokazać, że warunek (FW) możemy zapisać w równoważnej postaci (zob. dodatek A).

$$\frac{\mathrm{d}(v \cdot u)}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{FW1}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}(v_\perp)}{\mathrm{d}s}\right)_\perp = 0, \text{ gdzie } v_\perp = v - (v \cdot u)u \tag{FW2}$$

Równoważna postać transportu (FW), to znaczy warunki (FW1) i (FW2), pozwala w łatwy sposób skonstuować bazę, której wersory będą w owy sposób transportowane wzdłuż pewnej linii świata. Za wersor czasowy takiej bazy możemy zawsze obrać czterowektor prędkości

$$e = u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}. \tag{1}$$

Dobieramy do niego wzajemnie ortogonalne i odpowiednio unormowane wersory przestrzenne e_i, $i = 1{,}2{,}3$. Wersory takiej bazy, z racji otrogonalności, spełniają warunek (FW1). Wersor e spełnia również warunek (FW2), gdyż

$$e_\perp = e - e = 0. \tag{2}$$

Dla wersorów przestrzennych zachodzi

$$e_{i\perp} = e_i - (e_i \cdot e)e = e_i. \tag{3}$$

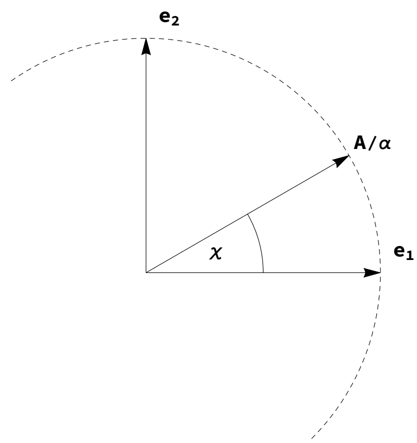
Wstawiając powyższą równość do warunku (FW2) otrzymujemy równość (4).

$$\frac{\mathrm{D}e_i}{\mathrm{d}s} = \left(\left(\frac{\mathrm{D}e_i}{\mathrm{d}s}\right) \cdot e\right) e, \tag{4}$$

Powyższą bazę, tj. $\{e{,}e_1{,}e_2{,}e_3\}$ będziemy oznaczać przez E. Przydatną własnością bazy E jest, że dany wektor ma w tej bazie stałe współrzędne wtedy i tylko spełnia prawo transportu (FW).Aby to pokazać wystarczy rozłożyć dany wektor w bazie E i skorzystać z warunków (FW1) i (FW2).

Definicja 2. **Reperem lokalnie nierotującym** nazywamy reper ruchomy poruszający się wraz z ciałem wzdłuż jego linii świata, którego wersor czasowy jest styczny do linii świata (co odpowiada czteroprędkości) i którego wersory spełniają prawo transportu (FW).

Reper lokalnie nierotujący jest szczególnie dogodny do opisu zjawisk fizycznych. W granicy nierelatywistycznej odpowiada on Newtonowskiej koncepcji nierotującego reperu [1].



Rys. 1: Schemat obrazujący obrót $\mathcal{O}$ wykonany na wersorze czteroprzyspieszenia A/α w bazie E.

0.2 Czwórka symetryczna kierunków zerowych

Będziemy od teraz zakładać, że jeden z wersorów bazy E (e_3) jest prostopadły do hiperpłaszczyzny ruchu, tak, że

$$A \cdot e_3 = 0.$$

Nie jest to duże ograniczenie i, jak się później przekonamy, pozwala na zastosowanie modelu w wielu przypadkach. Zauważmy, że wektor A leży wtedy w płaszczyźnie rozpinanej przez wektory e_1 i e_2. Licząc przyspieszenie właściwe dostajemy

$$\alpha^2 = (A \cdot e_1)^2 + (A \cdot e_2)^2$$

Interpretując powyższą równość jako trójke pitagorejską możemy wprowadzić następujące oznaczenia

$$\cos\chi = \frac{A \cdot e_1}{\alpha},$$
$$\sin\chi = \frac{A \cdot e_2}{\alpha}.$$

Z wersorów e i e_3 tworzymy dwa zerowe wektory skierowane w przyszłość k_+ i k_-, które uważamy za wektory własne pewnej transformacji Lorenza.

$$k_+ = \frac{e + e_3}{\sqrt{2}} \tag{5}$$
$$k_- = \frac{e - e_3}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

$$k_+ \cdot k_- = 1 \qquad k_\pm \cdot k_\pm = 0.$$

$$\mathcal{O}(k_\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{O}(e \pm e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{O}e \pm \mathcal{O}e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e \pm e_3) = k_\pm.$$

Wektory te są wektorami własnymi pewnego obrotu $\mathcal{O}$. Łatwo sprawdzić, że jest to obrót w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory e_1 i e_2, czyli eliptyczne przekształcenie Lorenza. Obrót ten pozwala nam zinterpretować kąt χ. Zauważmy, że możemy za pomocą obrotu $\mathcal{O}$ obrócić, wersor czterowektora przyspieszenia o kąt $-\chi$, tak aby spełniał prawo transportu (FW). Schematycznie przedstawiono to na rysunku 1.

Rozważamy trzeci wektor zerowy skierowany w przyszłość k taki, że $k \cdot e_3 \equiv 0$ oraz $k(0) \cdot e_1(0) = 0$. Wektor ten rozkładamy w bazie E

$$k = k^0 e + k^i e_i, \qquad k^1(0) = 0, k^3 = 0$$

$$k(0) = k^0(0)e(0) + k^2(0)e_2(0)$$

Rozkładając k w bazie E stwierdzamy, że jego współrzędne formują trójkę pitagorejską

$$(k \cdot e)^2 = (k \cdot e_1)^2 + (k \cdot e_2)^2 \tag{7}$$

Wprowadzamy **fazę zegara** φ równością (8)

$$\cos\varphi = \frac{k \cdot e_1}{k \cdot e} \tag{8}$$

$$k = (k \cdot e)(e - \cos\varphi e_1 - \sin\varphi e_2)$$

Z wektora $k(0)$ tworzymy wektor zerowy $k_0(s)$ tak aby spełniał prawo transportu (FW). Wiemy, że wtedy jego współrzędne w bazie E są stałe. Wektor k_0 ustalamy więc jako (10). Warunek początkowy na fazę φ ustalamy na (9), aby dla $s = 0$ wektory k i k_0 reprezentowały ten sam kierunek zerowy.

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{2} \tag{9}$$

$$k_0(s) = \sqrt{2}(e + e_2). \tag{10}$$

Każdemu kierunkowi zerowemu możemy przyporządkować punkt na sferze, a następnie każdemu punktowi sfery możemy przyporządkować, przez rzut stereograficzny, punkt z płaszczyzny zespolonej (odpowiednio uzwarconej) [**?**]. Skonstruujemy teraz czwarty wektor zerowy k_3, który razem z wektorami k_+, k_0, k_- utworzy czwórkę symetryczną. Mówimy, że wektory zerowe tworzą czwórkę symetryczną, kiedy dwustosunek odpowiadających im liczb zespolonych wynosi $e^{\pm i\pi/3}$. Dwustosunek liczb zespolonych z_0, z_1, z_2, z_3 przyjmujemy w postaci (12) [3]. Liczby zespolone odpowiadające wektorom własnym k_ν oznaczamy przez κ_ν gdzie $\nu \in \{+, 0, -, 3\}$. W zależności od kolejności wektorów i przyjętego znaku w (13) otrzymujemy dwie liczby κ_3 różniące się znakiem części rzeczywistej (14). Wektorowi zerowemu k odpowiada liczba κ_φ (11).

$$\kappa = -\cos\varphi - i\sin\varphi \tag{11}$$

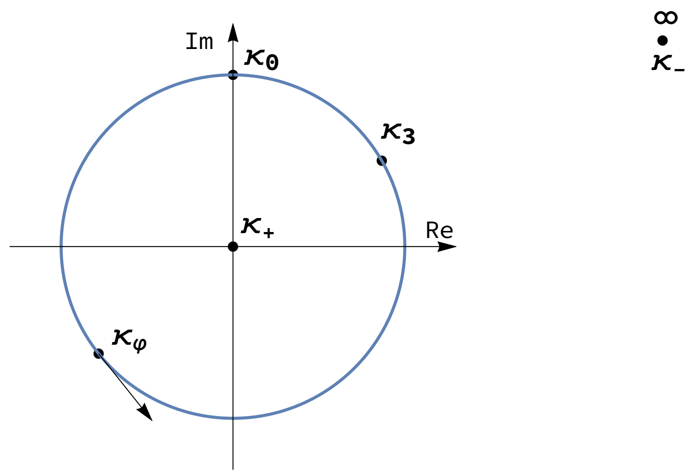
Na rysunkach 2 oraz 3 prezentujemy wzajemne położenie uzyskanej czwórki symetrycznej (dla $\mathrm{Re}(\kappa_3) > 0$) oraz obrazu wektora k. Uzyskane wektory wektory są liniowo niezależne i tworzą bazę kierunków zerowych, która dodatkowo spełnia prawa transportu (FW).

$$(z_0 z_1 z_2 z_3) = \frac{(z_0 - z_1)}{(z_0 - z_3)}\frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)}. \tag{12}$$

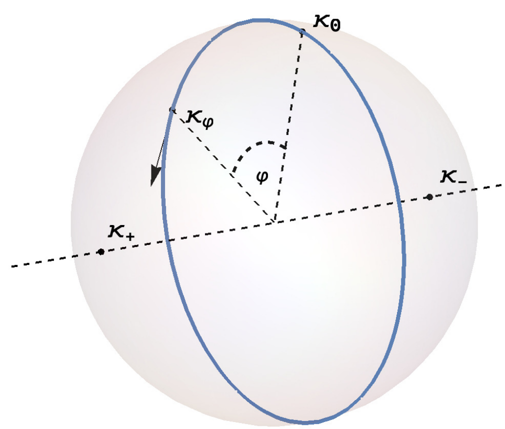
$$\kappa_0 = i,\ \kappa_+ = 0,\ \kappa_- = \infty, \qquad (\kappa_0\kappa_+\kappa_-\kappa_3) = e^{\pm i\pi/3} \tag{13}$$

$$\kappa_3 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \qquad k_3 = \sqrt{2}e \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \tag{14}$$

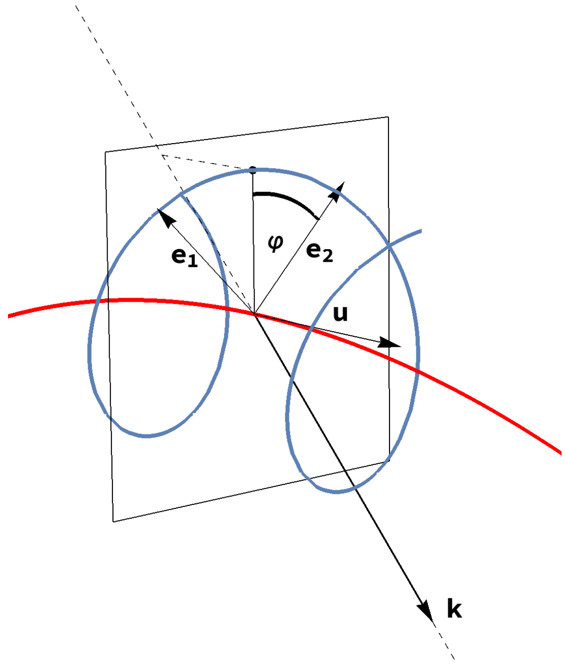
$$k_\mu \cdot k_\nu = 1, \quad k_\nu \cdot k_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu,\ \mu,\nu \in \{0, +, -, 3\}$$



Rys. 2: Obraz czwórki symetrycznej oraz kierunku k na płaszczyźnie zespolonej. Punkt κ_- utożsamiamy z punktem ∞. Punkt κ_ϕ porusza się po zaznaczonym okręgu jednostkowym wraz ze wzrostem ϕ. Wektorem stycznym do okręgu zaznaczono kierunek ruchu.



Rys. 3: Obraz kierunków zerowych k_0, k_+, k_- wraz z kierunkiem k na sferze jednostkowej. Punkt κ_ϕ porusza się po zaznaczonym okręgu jednostkowym wraz ze wzrostem ϕ. Wektorem stycznym do okręgu zaznaczono kierunek ruchu. Płaszczyzna zawierająca okrąg jest prostopadła do prostej zawierającej κ_+ i κ_-



Rys. 4: Schemat działania zegara (kolor niebieski) wzdłuż lini świata (kolor czerwony).

0.3 Konstrukcja zegara

Zakładamy, że podczas ruchu mamy spełniony więz (**??**). Założymy dodatkowo, że wektor zerowy $\dot{x}$ można przedstawić jako kombinację liniową e oraz k, taką, że $e \cdot \dot{x} = 1$. Rozkładając $\dot{x}$ w bazie E dostajemy

$$\dot{x} = e - C(k \cdot e_1)e_1 - C(k \cdot e_2)e_2,$$

Korzystając z faktu, że $\dot{x}$ jest zerowy możemy wyznaczyć współczynniki kombonacji liniowej.

$$0 = \dot{x} \cdot \dot{x} = 1 - C^2(k \cdot e_1)^2 - C^2(k \cdot e_2)^2 = 1 - C^2(k \cdot e)^2$$

$$C = \pm 1/(k \cdot e).$$

Wybieramy znak minus, gdyż w przeciwnym przypadku $\dot{x} = k/(k \cdot e)$ oraz $\dot{x} \cdot k = 0$. Zatem

$$\boxed{\dot{x} = 2e - k/(k \cdot e) = e + \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2, \quad \dot{x} \cdot k = 2k \cdot e,} \tag{15}$$

Sytuację tę obrazujemy na schematycznym rysunku (4)

Następnie obliczamy pochodną absolutną wektora k

$$\dot{k} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}e - \frac{\mathrm{d}(k \cdot e_1)}{\mathrm{d}s}e_1 - \frac{\mathrm{d}(k \cdot e_2)}{\mathrm{d}s}e_2}_{K_p} + \underbrace{(k \cdot e)\dot{e} - (k \cdot e_1)\dot{e_1} - (k \cdot e_2)\dot{e_2}}_{K}$$

$$\dot{k} \cdot \dot{k} = K_p \cdot K_p + K \cdot K + 2K_p \cdot K$$

Obliczymy oddzielnie każdy ze składników powyższej sumy. Zaczynamy od przedstawienia pochodnych wersorów bazy w bardziej użytecznej postaci

$$\dot{e_0} = \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{d}s} = A,$$

$$\dot{e_1} = \frac{\mathrm{D}e_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{D}(e_1)_\perp}{\mathrm{d}s} \overset{(\mathrm{FW2})}{=} \left(\frac{\mathrm{D}(e_1)_\perp}{\mathrm{d}s} \cdot e_0\right) e = \left(\frac{\mathrm{D}e_1}{\mathrm{d}s} \cdot e\right) e \overset{(\mathrm{FW1})}{=} -\left(\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{d}s} \cdot e_1\right) e = -\left(A \cdot e_1\right) e,$$

$$\dot{e_2} = \frac{\mathrm{D}e_2}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{D}(e_2)_\perp}{\mathrm{d}s} \overset{(\mathrm{FW2})}{=} \left(\frac{\mathrm{D}(e_2)_\perp}{\mathrm{d}s} \cdot e\right) e = \left(\frac{\mathrm{D}e_2}{\mathrm{d}s} \cdot e\right) e \overset{(\mathrm{FW1})}{=} -\left(\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{d}s} \cdot e_2\right) e = -\left(A \cdot e_2\right) e.$$

Zgodnie z powyższym zachodzą równości

$$K = (k \cdot e)(A + (A \cdot e_1)\cos\varphi\ e + (A \cdot e_2)\sin\varphi\ e)$$

$$K_p = (k \cdot e)\dot{\varphi}(\sin\varphi\ e_1 - \cos\varphi\ e_2) + \frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}(e - \cos\varphi\ e_1 - \sin\varphi\ e_2).$$

$$\begin{aligned}
K_p \cdot K_p &= \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e_1)}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e_2)}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)\cos\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)\sin\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}(k \cdot e)}{\mathrm{d}s}\right)^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - (k \cdot e)^2(\dot{\varphi})^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\
&= -(k \cdot e)^2(\dot{\varphi})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2K_p \cdot K &= 2(k \cdot e_0)\dot{\varphi}\left((A \cdot e_1)\sin\varphi - (A \cdot e_2)\cos\varphi\right) - \frac{\mathrm{d}(k \cdot e_0)}{\mathrm{d}s}\left((A \cdot e_1)\cos\varphi + (A \cdot e_2)\sin\varphi\right) + \\
&+ \frac{\mathrm{d}(k \cdot e_0)}{\mathrm{d}s}(A \cdot e_1)\cos\varphi + \frac{\mathrm{d}(k \cdot e_0)}{\mathrm{d}s}(A \cdot e_2)\sin\varphi \\
&= 2(k \cdot e_0)\dot{\varphi}\left((A \cdot e_1)\sin\varphi - (A \cdot e_2)\cos\varphi\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K \cdot K &= (k \cdot e)^2((A \cdot A) + ((A \cdot e_1)\cos\varphi + (A \cdot e_2)\sin\varphi)^2) = \\
&= -(k \cdot e)^2((A \cdot e_1)^2 + (A \cdot e_2)^2 - (A \cdot e_1)^2\cos^2\varphi - (A \cdot e_2)^2\sin^2\varphi - 2(A \cdot e_1)(A \cdot e_2)\sin\varphi\cos\varphi) \\
&= -(k \cdot e)^2\left((A \cdot e_1)\sin\varphi - (A \cdot e_2)\cos\varphi\right)^2
\end{aligned}$$

Sumę powyższych składników możemy zwinąć do kwadratu i ostatecznie

$$1 = -\frac{\ell^2 \dot{k} \cdot \dot{k}}{(k \cdot \dot{x})^2} = \frac{\ell^2}{4}(\dot{\varphi} - (A \cdot e_1)\sin\varphi + (A \cdot e_2)\cos\varphi)^2$$

$$\dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + (A \cdot e_1)\sin\varphi - (A \cdot e_2)\cos\varphi$$

Stosując oznaczenie **??** możemy zapisać owo równanie w zgrabnej postaci

$$\dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + \alpha\cos\chi\sin\varphi - \alpha\sin\chi\cos\varphi$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + \alpha\sin(\varphi - \chi)} \tag{16}$$

W przypadku braku przyspieszenia $\alpha = 0$, wprowadzony model zegara mierzy czas własny.

$$\dot{\varphi} = \frac{2}{\ell}, \quad \varphi = \pm\frac{2}{\ell}s + \varphi_0. \tag{17}$$

1 Aplikacje

1.1 Ruch hiperboliczny

Jako pierwszy chcemy zbadać relatywistyczny odpowiednik ruchu jednostajnie przyspieszonego. W układzie obserwatora inercjalnego $\mathcal{I}$ posługującego się kartezjańskim układem współrzędnych rozważamy linię świata $y(s)$ obzerwatora $\mathcal{Z}$ parametruzowaną czasem własnym s. Ruch ten będzie odbywał się w jednym wymiarze przestrzennym. W takim przypadku ogólna postać czteroprędkości, po uwzględnieniu warunku unormowania, ma postać (18).

$$(u^\mu) = (\cosh\beta(s),\ \sinh\beta(s),\, 0,\, 0), \tag{18}$$

gdzie $\beta(s)$ jest pewną funkcją parametryzowaną czasem własnym s. Rządamy, aby przyspieszenie właściwe było stałe.

$$(A^\mu) = (\dot\beta(s)\sinh\beta(s),\, \dot\beta(s)\cosh\beta(s),\, 0,\, 0).$$

$$\alpha = \sqrt{-A^\mu A_\mu} = \dot\beta(s)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe na funkcję $\beta(s)$. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $\beta(0) = 0$. Wtedy

$$\beta(s) = \alpha s,$$

$$(u^\mu) = (\cosh\alpha s,\ \sinh\alpha s,\, 0,\, 0),$$

$$(A^\mu) = (\alpha\sinh\alpha s,\, \alpha\cosh\alpha s,\, 0,\, 0).$$

A zatem odpowiednik ruchu jednostajnie przyspieszonego w czasoprzestrzeni Minkowskiego to ruch opisany przez hiperbolę. Łatwo sprawdzić, że dla małych prędkości ruch ten przechodzi w ruch jednostajnie przyspieszony. Ciało w takim ruchu porusza się po linii świata (19).

$$(y^\mu) = \left(\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha s,\, \frac{1}{\alpha}\cosh\alpha s,\, 0,\, 0\right). \tag{19}$$

Chcemy skonstruować reper współporuszający się z $\mathcal{Z}$. W tym celu wersor czasowy obieramy prędkość $e_0 = u$, a za pierwszy z wersorów przestrzennych unormowane przyspieszenie $e_1 = A/\alpha$. Wersory te uzupełniamy do bazy za pomocą wersorów kanonicznych. Otrzymaną bazę możemy zapisać zgrabnie w postaci macierzy (20). Łatwo sprawdzić, że tak skonstruowany reper spełnia prawo transportu Fermiego-Walkera.

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha s & \sinh\alpha s & 0 & 0 \\ \sinh\alpha s & \cosh\alpha s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Możemy teraz podać równanie na kąt ϕ zegara

$$\chi = \pi, \quad \alpha = \text{const} \tag{21}$$

$$\dot\varphi = \pm\frac{2}{\ell} + \alpha\sin(\varphi - \pi) = \pm\frac{2}{\ell} - \alpha\sin(\varphi) \tag{22}$$

1.2 Ruch po okręgu

W układzie obserwatora inercjalnego $\mathcal{I}$ z kartezjańskim układem współrzędnych rozważamy linię świata obserwatora $\mathcal{Z}$ w ruchu jednostajnym po okręgu. Zagadnienie rozpatrujemy w czasoprzestrzeni Minkowskiego. Rozpatrzmy punkt poruszający się po okręgu o promieniu R i częstości ω. W układzie obserwatora inercjalnego $\mathcal{I}$ porusza się on po trajektorii $y = y(s)$. Współrzędne tej trajektorii mają, w kartezjańskim układzie współrzędnych, postać

$$(y^\mu) = (\gamma s,\, R\cos\omega\gamma s,\, R\sin\omega\gamma s,\, 0). \tag{23}$$

Wtedy czterowektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$(u^\mu) = \left(\frac{\mathrm{d}y^\mu}{\mathrm{d}s}\right) = (\gamma,\ -R\omega\gamma\sin\omega\gamma s,\ R\omega\gamma\cos\omega\gamma s,\ 0), \tag{24}$$

$$(A^\mu) = \left(\frac{\mathrm{D}u^\mu}{\mathrm{d}s}\right) = (0,\ -R\omega^2\gamma^2\cos\omega s,\ -R\omega^2\gamma^2\sin\omega\gamma s,\ 0). \tag{25}$$

Właściwe przyspieszenie jest wtedy zachowane podczas ruchu

$$\alpha = \sqrt{-A\cdot A} = R\omega^2\gamma^2. \tag{26}$$

Teraz zajmiemy się znalezieniem reperu lokalnie nierotującego poruszającego się po rozpatrywanej linii świata. Jako wersor czasowy e wybieramy prędkość u. Pierwszy z wersorów przestrzennych e_1' wybieramy wersor przeciwny do przyspieszenia. Jako wersor e_3 wybieramy unormowany wektor prostopadły do płaszczyzny ruchu. Wersor e_2' wybieramy tak, aby był ortogonalny do pozostałych. Uzyskaną bazę zapisujemy w postaci macierzowej (**??**).

$$E' = \begin{pmatrix} e \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma\sin\omega\gamma s & R\omega\gamma\cos\omega\gamma s & 0 \\ 0 & \cos\omega\gamma s & \sin\omega\gamma s & 0 \\ R\omega\gamma & -\gamma\sin\omega\gamma s & \gamma\cos\omega\gamma s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Chcemy, aby obrana baza spełniała prawo transportu (FW). Z racji ortonormalności wersory tej bazy spełniają warunek (FW1). Łatwo sprawdzić, że wersory e i e_3 spełniają również warunek (FW2), w przeciwieństwie do wersorów e_1' oraz e_2'. Aby tę drobną usterkę naprawić dokonamy obrotu bazy o kąt $\psi = \psi(s)$ w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory e_1' i e_2'. Odpowiedni obrót w bazie kanonicznej jest dany przez (28) [3]. Właściwie obrócone wersory obliczamy za pomocą (29).

$$(\mathcal{O}^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= \mathcal{O}^\mu_1 E'_\mu, \\ e_2 &= \mathcal{O}^\mu_2 E'_\mu. \end{aligned} \tag{29}$$

Wstawiając obrócone wersory to warunku (FW2) otrzymujemy sześć równań różniczkowych na kąt ψ, które (przyjmując bez straty ogólności $\psi(0) = 0$) mają wspólne rozwiązane postaci (30). Otrzymana ortonormalna baza (31) spełnia prawo transportu (FW).

$$\psi(s) = -\omega\gamma^2 s \tag{30}$$

$$\begin{aligned} E = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma\sin\omega\gamma s & R\omega\gamma\cos\omega\gamma s & 0 \\ R\omega\gamma\sin\psi & \cos\omega\gamma s\cos\psi - \gamma\sin\omega\gamma s\sin\psi & \sin\omega\gamma s\cos\psi + \gamma\cos\omega\gamma s\sin\psi & 0 \\ R\omega\gamma\cos\psi & -\cos\omega\gamma s\sin\psi - \gamma\sin\omega\gamma s\cos\psi & -\sin\omega\gamma s\sin\psi + \gamma\cos\omega\gamma s\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma\sin\omega\gamma s & R\omega\gamma\cos\omega\gamma s & 0 \\ -R\omega\gamma\sin\omega\gamma^2 s & \cos\omega\gamma^2 s\cos\omega\gamma s + \gamma\sin\omega\gamma s\sin\omega\gamma^2 s & \sin\omega\gamma s\cos\omega\gamma^2 s - \gamma\cos\omega\gamma s\sin\omega\gamma^2 s & 0 \\ R\omega\gamma\cos\omega\gamma^2 s & \cos\omega\gamma s\sin\omega\gamma^2 s - \gamma\sin\omega\gamma s\cos\omega\gamma^2 s & \sin\omega\gamma s\sin\omega\gamma^2 s + \gamma\cos\omega\gamma s\cos\omega\gamma^2 s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{31}$$

Mając odpowiendni reper możemy podać równanie na kąt φ

$$\begin{aligned} &\chi = \omega\gamma^2 s = -\psi, \quad \alpha = R\omega\gamma^2 \\ &\dot\varphi = \pm\frac{2}{\ell} + R\omega^2\gamma^2\sin(\varphi - \omega\gamma^2 s) = \pm\frac{2}{\ell} + \alpha\sin(\varphi - \alpha s/R\omega) \end{aligned} \tag{32}$$

1.3 Ruch po okręgu względem galaktyk

Rozważymy teraz ponownie ruch po okręgu z tą różnicą, że wiążemy obserwatora $\mathcal{I}$ z pyłem (galaktykami) w ekspandującym wszechświecie. Sytuacji tej odpowiada metryka Friedmana-Lemaître'a-Robertsona-Walkera (FLRW). Dla uproszczenia zakładamy zerową krzywiznę przestrzenną. Tensor metryczny dany jest przez (33)

$$(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,\ -a(t)^2,\ -a(t)^2,\ -a(t)^2). \tag{33}$$

Warto zauważyć, że dla $a(t) \equiv 1$ metryka ta przechodzi w zwykłą metrykę czasoprzestrzeni Minkowskiego, a zatem można łatwo weryfikować poprawność wyników sprawdzając, czy dla przy przejściu $a(t) \to 1$ pokrywają się one z otrzymanymi w poprzednim podrozdziale. W dalszej części przyjmujemy następujące oznaczenia

$$a := a(t), \quad a' := \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Dla tej metryki symbole Chrostofella Γ^k_{ij} przedstawiam poniżej w tablicach odpowiednio dla $k = 0,1,2,3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aa' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aa' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & aa' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{a'}{a} & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a'}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a'}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a'}{a} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozważamy więc linie świata cząstki w ruchu po okręgu

$$y^\mu(s) = (t,x,y,z) = (t(s),\ R\cos\omega t(s),\ R\sin\omega t(s),\ 0),$$

gdzie $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s = \gamma = (1 - a^2R^2\omega^2)^{-1/2}$. Wtedy czterowektory prędkości i przyspieszenia mają postać

$$u^\mu = \dot{y}^\mu = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = (\gamma,\ -R\omega\gamma\sin\omega t,\ R\omega\gamma\cos\omega t,\ 0),$$

$$\begin{aligned}(A^\mu) = \left(\frac{\mathrm{D}u^\mu}{\mathrm{d}s}\right) = \\ = \left(a'aR^2\omega^2\gamma^2(\gamma^2+1),\ -\frac{a'}{a}R\omega\gamma^2(\gamma^2+1)\sin\omega t - R\omega^2\gamma^2\cos\omega t,\ \frac{a'}{a}R\omega\gamma^2(\gamma^2+1)\cos\omega t - R\omega^2\gamma^2\sin\omega t,\ 0\right)\end{aligned} \tag{34}$$

Właściwe przyspieszenie wynosi

$$\alpha = \sqrt{-A_\mu A^\mu},$$

$$A^\mu A_\mu = -\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(\gamma^2 - 1\right)\left(\gamma^2+1\right)^2 - a^2R^2\omega^4\gamma^4$$

Konstruując w tym przypadku reper E którego wersory będą spełniać prawo transortu (FW) można konstrukcję przeprowadzić analogicznie do przedstawionej w poprzednim przypadku - czasoprzestrzeni Minkowskiego. Jednakże rachunki można znacząco uprościć wykonując konstrukcję w inny sposób. Mianowicie można stosunkowo łatwo uogólnić wersory uzyskanej wcześniej bazy (31), tak aby tworzyły bazę ortonormalną w metryce (33). Odpowiednia baza jest postaci (35). Jak poprzednio wersory e i e_3 są transportowane wzdłuż linii świata zgodnie z prawem (FW). Wersory e_1 i e_2 zależą od kąta obrotu ψ. Jak metryka FLRW przy $a \to 1$ przechodzi w metrykę Minkowskiego tak szukany kąt obrotu ψ powinien w granicy $a \to 1$ przechodzić w kąt znaleziony dla ciała poruszającego się po okręgu w czasoprzestrzeni Minkowskiego. Traktujemy tę granicę jako test poprawności wyników. Wartość ψ można znaleźć żądając, aby wersory e_1 i e_2 spełniały prawo transportu (FW). Wspólne rozwiązanie dla otrzymanych równań różniczkowych można wyrazić przez (36).

$$E_{FLRW} = \begin{pmatrix} e \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -R\omega\gamma\sin\omega t & R\omega\gamma\cos\omega t & 0 \\ aR\omega\gamma\sin\psi & \frac{1}{a}\cos\omega t\cos\psi - \frac{1}{a}\gamma\sin\omega t\sin\psi & \frac{1}{a}\sin\omega t\cos\psi + \frac{1}{a}\gamma\cos\omega t\sin\psi & 0 \\ aR\omega\gamma\cos\psi & -\frac{1}{a}\cos\omega t\sin\psi - \frac{1}{a}\gamma\sin\omega t\cos\psi & -\frac{1}{a}\sin\omega t\sin\psi + \frac{1}{a}\gamma\cos\omega t\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

$$\psi(s)=\int_0^s -\omega\gamma(s_1)^2\mathrm{d}s_1,\quad \text{gdzie } \gamma(s)=(1-a(t(s))^2R^2\omega^2)^{-1/2}. \tag{36}$$

Mając znaleziony odpowiedni reper możemy obliczyć wielkości potrzebne do równania na fazę zegara φ.

$$A\cdot e_1=-a'R\omega\gamma\left(\gamma^2+1\right)\sin\psi+aR\omega^2\gamma^2\cos\psi$$
$$A\cdot e_2=-a'R\omega\gamma\left(\gamma^2+1\right)\cos\psi-aR\omega^2\gamma^2\sin\psi$$
$$\alpha=aR\omega\gamma\sqrt{a'^2\left(\gamma^2+1\right)^2+\omega^2\gamma^2}$$

1.4 Ruch po okręgu wokół czarnej dziury

W układzie obserwatora inercjalnego $\mathcal{I}$ z sferycznym układem współrzędnych (t,r,ϕ,θ) rozważamy linię świata obserwatora $\mathcal{Z}$ w ruchu jednostajnym po okręgu wokół czarnej dziury. Będziemy używać metryki Schwarzschilda, która odpowiada czasoprzestrzeni w pobliżu nierotującej sferycznie symetrycznej masie nieobdarzonej ładunkiem [4]. Element liniowy oraz macierz tensora metrycznego mają postać

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2-r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2-r^2\mathrm{d}\theta^2. \tag{37}$$

$$(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 1-\frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -r^2\end{pmatrix}. \tag{38}$$

Dla metryki [?] symbole Chrostofella Γ^k_{ij} przedstawiam poniżej w tablicach odpowiednio dla $k=0,1,2,3$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0\\ \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\left(1-\frac{2M}{r}\right)r\sin^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -r\left(1-\frac{2M}{r}\right)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0\\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ 0 & 0 & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r}\\ 0 & 0 & -\cos\theta\sin\theta & 0\\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Jak poprzednio rozważamy ruch po okręgu o promieniu R i częstości ω. W rozważanym układzie współrzędnych linię świata można zapisać następująco

$$(y^\mu)=\left(t,\,R,\,\omega t,\,\frac{\pi}{2}\right). \tag{39}$$

Wtedy czterowektor prędkości ma postać

$$(u^\mu)=\left(\frac{\mathrm{d}y^\mu}{\mathrm{d}s}\right)=(\gamma,\,0,\,\omega\gamma,\,0),$$

gdzie $\gamma=\mathrm{d}t/\mathrm{d}s$. Z danego elementu liniowego (37), po uwzględnieniu (39), możemy odczytać

$$\gamma=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\sqrt{1-\frac{2M}{R}-R^2\omega^2}$$

Wyznaczamy czteroprzespieszenie oraz przyspieszenie właściwe

$$(A^\mu)=\left(0,\,-\frac{R\omega^2}{1-R^2\omega^2},\,0,\,0\right)$$

$$\alpha = \sqrt{-A \cdot A} = \frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}$$

Ponownie skorzystamy z bazy wyznaczonej wcześniej dla przypadku czasoprzestrzeni Minkowskiego i uogólnimy ją w ten sposób, aby była unormowana i spełniała prawo trznsportu (FW). Takie postępowanie daje nam łatwy sposób sprawdzania poprawności obliczeń, gdyż dla $M = 0$ wyniki powinny przechodzić w przypadek bez grawitacji, czyli czasoprzestrzeń Minkowskiego. W pierwszym kroku musimy przetransformować wektory bazy (31) do współrzędnych sferycznych. Na potrzeby tej transformacji współrzędne kartezjańskie oznaczymy przez x^i, natomiast współrzędne sferyczne przez $\tilde{x}^i$. Współrzędne wektorów transformują się kontrawariantnie [5] co można zapisać jako

$$\tilde{v}^i = \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial v^j} v^j.$$

Współrzynniki tej transformacji obliczamy w punkcie należącym do rozważanej tu linii świata. Baza (31) we współrzędnych sferycznych ma zatem postać

$$\widetilde{E} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\omega & 0 \\ R\omega\gamma \sin\psi & \cos\psi & \frac{\gamma}{R}\sin\psi & 0 \\ R\omega\gamma\cos\psi & -\sin\psi & \frac{\gamma}{R}\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Powyższa baza, rozważana w czasoprzestrzeni z metryką Schwarzschilda, nie jest ortonormalna. Można jednak stosunkowo łatwo uogólnić ją w ten sposób aby ortonormalna była

$$\widetilde{E} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\omega & 0 \\ R\omega\gamma\sin\psi\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2} & \cos\psi\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} & \frac{\gamma}{R}\sin\psi\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} & 0 \\ R\omega\gamma\cos\psi\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2} & -\sin\psi\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} & \frac{\gamma}{R}\cos\psi\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Odpowiedni kąt obrotu ψ znajdujemy za pomocą prawa transportu (FW). Dają one równania różniczkowe (jak poprzednio zakładamy $\psi(0) = 0$), które mają wspólne rozwiązanie dane przez (41).

$$\psi = -\omega\gamma^2 s\left(1 - \frac{3M}{R}\right). \tag{40}$$

Mając odpowiedni reper ruchomy znajdujemy równanie na fazę zegara (**??**)

$$\chi = -\psi = \omega\gamma^2 s\left(1 - \frac{3M}{R}\right), \quad \alpha = \frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}$$
$$\dot{\varphi} = \pm\frac{2}{\ell} + \frac{R\omega^2}{1 - R^2\omega^2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}\sin\left(\varphi - \omega\gamma^2 s\left(1 - \frac{3M}{R}\right)\right) \tag{41}$$

2 Analiza równania fazy zegara

W tej części przeprowadzimy analizę równania na fazę zegara wyprowadzonego w poprzedniej części. Interesującym nas parametrem jest przybliżenie właściwe, będące miarą przyspieszenia jakie działa na obiekt.

2.1 Zegar w przypadku stałego przyspieszenia

Zakładamy stałe przspieszenie właściwe α. Wtedy czterowektor przyspieszenia określony jest przez parametr χ
Załóżmy szczególną postać $\chi(s) = ps + q$, gdzie p,$q = const(s)$. Do rozwiązania równania stosujemy wtedy podstawienie (42)

$$\Phi = \varphi - \chi, \tag{42}$$
$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} - p \tag{43}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} = \pm\frac{2}{\ell} - p + \alpha\sin(\Phi)$$

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\pm\frac{2}{\ell} - p + \alpha\sin(\Phi)}$$

Całkując prawą stronę powyższej równości stosujemy podstawienie $x = \mathrm{tg}(\Phi/2)$. Dla uproszczenia stosujemy oznaczenia $B = \pm\frac{2}{\ell} - p$, $C = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{B^2}}$

$$s + s_0 = \frac{2}{BC}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}(\Phi/2)}{C} + \frac{\alpha}{BC}\right),$$

$$\varphi = ps + q + 2\mathrm{arctg}\left(C\mathrm{tg}\left(BC(s+s_0)/2\right) - \frac{\alpha}{B}\right)$$

Zauważmy, że dla $\alpha \to 0$ rozwiązanie jest postaci (44). To znaczy, że w przypadku ruchu bez przyspieszeń nasz model zegara mierzy czas własny s.

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s + const. \tag{44}$$

Zakładając warunek początkowy postaci $\varphi(0) = -\pi/2$, czyli $\Phi(0) = -\pi/2 - q$ możemy wyznaczyć stałą całkowania s_0.

$$s_0 = \frac{2}{BC}\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{C}\mathrm{tg}(q/2 + \pi/4) + \frac{\alpha}{BC}\right), \tag{45}$$

2.1.1 Rozwiązanie przybliżone

Interesuje nas jak rozwiązanie zachowuje się dla małych przyspieszeń. Rozwiążemy równanie (16) stosując rachunek zaburzeń ze względu na parametr α. W tym celu zapisujemy ϕ oraz χ w postaci szeregów (46) (47). W równaniu (16) zapisujemy sinus w postaci szeregu (48). Następnie wstawiamy rozwinięcia ϕ i χ do uzyskanego równania i porządkujemy wyrazy ze względu na α, odrzucając wyrazy $O(\alpha^2)$. Separujemy równanie ze względu na α dostając równania (49), których rozwiązania wyglądają następująco (50). Ostatecznie szukane przez nas rozwiązanie ma postać (51).

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\varphi_n, \tag{46}$$

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\chi_n \tag{47}$$

$$\dot{\varphi} \mp \frac{2}{\ell} - \alpha\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\phi-\chi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \tag{48}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_0 = \pm\frac{2}{\ell}, & \varphi_0(0) = -\frac{\pi}{2}, \\ \dot{\varphi}_1 = \sin(\varphi_0 - \chi_0), & \varphi_1(0) = 0. \end{cases} \tag{49}$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2}, \\ \varphi_1 = -\alpha\int_0^s \cos(2s_1/\ell - \chi_0(s_1))\mathrm{d}s_1. \end{cases} \tag{50}$$

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2} + \alpha\int_0^s \cos(\pm 2s_1/\ell - \chi_0(s_1))\mathrm{d}s_1 + O(\alpha^2). \tag{51}$$

Z rozwiązania przybliżonego (51) wiemy, że dla małych przyspieszeń nasz model zegara dobrze mierzy czas własny s. Przyspieszenie charakterysytczne dla którego efekto powinien mieć istotny wpływ to (52). Wpływ zaburzenia φ_1 na działanie zegara jest rzędu (53).

$$\alpha_c = \frac{2}{\ell} \tag{52}$$

$$\epsilon = \frac{\alpha}{\alpha_c} \tag{53}$$

2.1.2 Ruch jednostajnie przyspieszony

W przypadku relatywistycznego odpowiednika ruchu jednostajnie przyspieszonego mamy $\chi = \pi$ oraz $\alpha = const$. W takim przypadku faza φ jest równa (54), a przybliżenie dla małych przyspieszeń dane przez (55).

$$\varphi = \pi + 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{1-\frac{\alpha^2\ell^2}{4}}\mathrm{tg}\left(\pm\sqrt{1-\frac{\alpha^2\ell^2}{4}}(s+s_0)/\ell\right) \mp \frac{\alpha\ell}{2}\right) \tag{54}$$

$$s_0 = \pm\ell\mathrm{arctg}\left(\left(1 \pm \frac{\alpha\ell}{2}\right)\Big/\sqrt{1-\frac{\alpha^2\ell^2}{4}}\right)\Big/\sqrt{1-\frac{\alpha^2\ell^2}{4}}$$

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\ell}{2}\sin(2s/\ell) + O(\alpha^2). \tag{55}$$

2.1.3 Ruch po okręgu

W przypadku ruchu po okręgu o promieniu R z częstością ω mamy $\chi = \omega\gamma^2 s$ oraz $\alpha = R\omega^2\gamma^2$. W takim przypadku faza φ jest równa (56), a przybliżenie dla małych przyspieszeń dane przez (57).

$$\varphi = \omega\gamma^2 s + 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{1-\frac{R^2\omega^4\gamma^4}{\left(\pm\frac{2}{\ell}-\omega\gamma^2\right)^2}}\mathrm{tg}\left(\left(\pm\frac{2}{\ell}-\omega\gamma^2\right)\sqrt{1-\frac{R^2\omega^4\gamma^4}{\left(\pm\frac{2}{\ell}-\omega\gamma^2\right)^2}}(s+s_0)/2\right) - \frac{\alpha}{\pm\frac{2}{\ell}-\omega\gamma^2}\right) \tag{56}$$

$$s_0 = \frac{2}{\pm\frac{2}{\ell}-\omega\gamma^2}\mathrm{arctg}\left(\left(\frac{\alpha}{\pm\frac{2}{\ell}-\omega\gamma^2}-1\right)\Big/\sqrt{1-\frac{R^2\omega^4\gamma^4}{\left(\pm\frac{2}{\ell}-\omega\gamma^2\right)^2}}\right)\Big/\sqrt{1-\frac{R^2\omega^4\gamma^4}{\left(\pm\frac{2}{\ell}-\omega\gamma^2\right)^2}},$$

$$\varphi = \pm\frac{2}{\ell}s - \frac{\pi}{2} + \frac{R\omega^2\gamma^2}{\pm 2/\ell - \omega\gamma^2}\sin((\pm 2/\ell - \omega\gamma^2)s) + O(\alpha^2). \tag{57}$$

2.2 Analiza modelu pod kątem pomiaru

Najprostszym obiektem, dla którego można użyć tego modelu wydaje się być elektron. Wiemy, że dla małych przyspieszeń hipoteza zegara wydaje się być spełniona []. W tej części oszacujemy rząd wielkości przyspieszenia dla którego spodziewamy się obserwowalnych odstępstw od hipotezy zegara. Za ℓ możemy podstawić wielkość o wymiarze metra charakterystyczną dla elektronu - długość komptonowską (58). Wtedy przyspieszenie charakterystyczne dla elektronu wynosi (59). Dla porównania energie elektronów otrzymywane w akceleratorach liniowych są rzędu kilku-kilkunastu GeV. Dla szacowania przyjmiemy gradient przyspieszenia rzędu kilku GeV/m [6]. Rząd wielkości przyspieszenia szacujemy jako (60). Porównując rzędy wielkości stwierdzamy, że efekty raczej nie będą obserwowalne.

$$\lambda_e =\approx 2{,}426 \cdot 10^{-10}\mathrm{cm} \tag{58}$$

$$\alpha_c \approx 8{,}244 \cdot 10^9 \text{cm}^{-1} \tag{59}$$

$$\alpha \approx 10^2 \text{cm}^{-1} \tag{60}$$

Komptonowska długość protonu wnosi (61). Przyspieszenie charakterystyczne dla protonu wynosi wynosi (62). Energie protonów osiągane w CERN są rzędu 7TeV [7]. proton doświadczy wtedy przyspieszenia rzędu (63). Porównując rzędy wielkości przyspieszeń stwierdzamy, że jesteśmy daleko od możliwych obserwacji

$$\lambda_p =\approx 1{,}321 \cdot 10^{-13} \text{cm} \tag{61}$$

$$\alpha_c \approx 7{,}57 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-1} \tag{62}$$

$$\alpha \approx 124 \text{cm}^{-1} \tag{63}$$

Załączniki

A Dodatek matematyczny

A.1 Równoważność dwóch postaci warunków na transport Fermiego-Walkera

Pokażemy, że następujące warinki są równoważne:

1.

$$\frac{\widetilde{\mathrm{D}}v}{\mathrm{d}s} := \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} + (v \cdot A)u - (v \cdot u)A = 0, \tag{64}$$

2.

$$\frac{\mathrm{d}(v \cdot u)}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{65}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}(v_\perp)}{\mathrm{d}s}\right)_\perp = 0, \text{ gdzie } v_\perp = v - (v \cdot u)u \tag{66}$$

Dowód. 1. $\implies$ 2.
Pierwszą z równości udowodnimy mnożąc skalarnie obustronnie równość 1. przez u

$$0 = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} \cdot u + (v \cdot A)(u \cdot u) - (v \cdot u)(A \cdot u) = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} \cdot u + v \cdot \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}(v \cdot u)}{\mathrm{d}s} \tag{67}$$

Teraz pakżemy drugą równość

$$\frac{\mathrm{D}(v)_\perp}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{d}s}(v \cdot u) - \frac{\mathrm{d}(v \cdot u)}{\mathrm{d}s}u = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - A(v \cdot u) \overset{1.}{=} -(v \cdot A)u, \tag{68}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}(v)_\perp}{\mathrm{d}s}\right)_\perp = -(v \cdot A)u + (v \cdot A)(u \cdot u)u = 0. \tag{69}$$

2. $\implies$ 1.
Z pierwszej równości w 2. mamy

$$\frac{\mathrm{D}(v)_\perp}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}(v \cdot u)}{\mathrm{d}s} - A(v \cdot u) = \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - A(v \cdot u) \tag{70}$$

oraz

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} \cdot u = -\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{d}s} \cdot v. \tag{71}$$

Teraz rozpisujemy drugą równość w 2.

$$0 = \left(\frac{\mathrm{D}(v_\perp)}{\mathrm{d}s}\right)_\perp = \frac{\mathrm{D}(v_\perp)}{\mathrm{d}s} - \left(\frac{\mathrm{D}(v_\perp)}{\mathrm{d}s} \cdot u\right) u \stackrel{(70)}{=} \tag{72}$$

$$\stackrel{(70)}{=} \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - (v \cdot u)A + \left(\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - (v \cdot u)A\right) \cdot u\right) u \stackrel{(71)}{=} \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}s} - (v \cdot u)A + (v \cdot A)u = \frac{\widetilde{\mathrm{D}}v}{\mathrm{d}s}. \tag{73}$$

□

Literatura

[1] J. Synge, *Relativity: the general theory.* Series in physics, North-Holland, 1960.

[2] J. Maluf and F. Faria, "On the construction of fermi–walker transported frames," *Ann. Phys. (Berlin)*, vol. 17, pp. 326–335, 2008.

[3] A. Staruszkiewicz, *Algebra i geometria.* Wykłady dla fizyków, Wydaw. Miniatura, 1993.

[4] J. Hartle, *Grawitacja: Wprowadzenie do ogolnej teorii wzglednosci Einsteina.* Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, 2016.

[5] R. Ingarden and A. Jamiołkowski, *Elektrodynamika klasyczna.* PWN, 1980.

[6] H. S. Ghotra and N. Kant, "Electron acceleration by a chirped laser pulse in vacuum under the influence of magnetic field," *Optical Review*, vol. 22, pp. 539–543, Aug 2015.

[7] "The accelerator complex." `https://home.cern/about/accelerators`. Dostęp: 2018-05-15.