

Métodos Numéricos

F. Galileo Cappella Lewi

1c2022

1 Introducción

En general vamos a estar trabajando con $m + 1$ radios, y n ángulos.

2 Formulación del Sistema

Partimos de la ecuación de Laplace

$$0 = \frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial \theta^2}$$

Y la discretizamos

$$0 = \frac{t_{j-1,k} - 2t_{j,k} + t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} + \frac{t_{j,k} - t_{j-1,k}}{r \Delta r} + \frac{t_{j,k-1} - 2t_{j,k} + t_{j,k+1}}{r^2 (\Delta \Theta)^2}$$

Podemos reescribir la ecuación como una combinación lineal de cinco temperaturas

$$0 = t_{j-1,k} \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{-1}{r \Delta r} \right) + t_{j,k} \left(\frac{-2}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r \Delta r} + \frac{-2}{(r \Delta \Theta)^2} \right) + t_{j+1,k} \frac{1}{(\Delta r)^2} + t_{j,k-1} \frac{1}{(r \Delta \Theta)^2} + t_{j,k+1} \frac{1}{(r \Delta \Theta)^2} \quad (1)$$

Para simplificar la notación vamos a nombrar cada coeficiente

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{-1}{r \Delta r} \\ \beta_r &= \frac{-2}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r \Delta r} + \frac{-2}{(r \Delta \Theta)^2} \\ \gamma_r &= \frac{1}{(\Delta r)^2} \\ \chi_r &= \frac{1}{(r \Delta \Theta)^2} \end{aligned}$$

Resaltamos cuatro formas diferentes de escribir la ecuación

$$\alpha t_{j-1,k} + \beta t_{j,k} + \gamma t_{j+1,k} + \chi t_{j,k-1} + \chi t_{j,k+1} = 0 \quad (2)$$

$$\beta t_{j,k} + \gamma t_{j+1,k} + \chi t_{j,k-1} + \chi t_{j,k+1} = -\alpha t_{j-1,k} \quad (3)$$

$$\alpha t_{j-1,k} + \beta t_{j,k} + \chi t_{j,k-1} + \chi t_{j,k+1} = -\gamma t_{j+1,k} \quad (4)$$

$$\beta t_{j,k} + \chi t_{j,k-1} + \chi t_{j,k+1} = -\alpha t_{j-1,k} - \gamma t_{j+1,k} \quad (5)$$

Por lo que podemos armar un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = b$ donde cada fila del sistema se corresponde a una instancia de la ecuación de Laplace discretizada.

Pero qué forma tiene cada instancia depende de si la temperatura del radio anterior o la del siguiente también son incógnitas (por lo que tienen su coeficiente en la matriz), o si son datos medidos (por lo que cambian al resultado):

El primer y último radios ($t_{1,k}$ y $t_{m+1,k}$) son datos medidos, por lo que no hace falta estimarlos con una ecuación.

Como las temperaturas del radio anterior las conocemos (porque son las temperaturas internas medidas), las primeras n filas (que se corresponden con el radio $t_{2,k}$) van a tener la forma de la ecuación (3).

Luego, las siguientes $(m-2)n$ filas (que son todos los otros radios excepto el $t_{m,k}$) tienen tanto al radio anterior como el siguiente incógnitas, por lo que tienen la forma de la ecuación (2).

Y las últimas n filas (radio $t_{m,k}$) tienen la forma de la ecuación (4). Entonces nos queda una matriz $A \in \mathbb{R}^{((m-1)n \times (m-1)n)}$ armada de la forma explicada recién, el vector de incógnitas $x \in \mathbb{R}^{(m-1)n}$ con los radios "estirados" uno arriba del otro, y el vector de resultados $b \in \mathbb{R}^{(m-1)n}$ que tiene las temperaturas medidas en las primeras y últimas n filas, y el resto 0's.

El caso de un sistema con 3 radios es especial, ya que para el radio $t_{2,k}$ (que es el vector de incógnitas completo) conocemos tanto las temperaturas del radio anterior como del siguiente. Sólo en este caso tenemos la ecuación (5).

2.1 Justificación no-pivoteo

2.2 Ejemplos

3 radios y 4 ángulos:

$$\begin{pmatrix} \beta & \chi & 0 & \chi \\ \chi & \beta & \chi & 0 \\ 0 & \chi & \beta & \chi \\ \chi & 0 & \chi & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{2,1} \\ t_{2,2} \\ t_{2,3} \\ t_{2,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha t_{1,1} - \gamma t_{3,1} \\ -\alpha t_{1,2} - \gamma t_{3,2} \\ -\alpha t_{1,3} - \gamma t_{3,3} \\ -\alpha t_{1,4} - \gamma t_{3,4} \end{pmatrix}$$

4 radios y 4 ángulos:

$$\begin{pmatrix} \beta & \chi & 0 & \chi & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \chi & \beta & \chi & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \chi & \beta & \chi & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ \chi & 0 & \chi & \beta & 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & \chi & 0 & \chi \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & \chi & \beta & \chi & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \chi & \beta & \chi \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & \chi & 0 & \chi & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{2,1} \\ t_{2,2} \\ t_{2,3} \\ t_{2,4} \\ t_{3,1} \\ t_{3,2} \\ t_{3,3} \\ t_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha t_{1,1} \\ -\alpha t_{1,2} \\ -\alpha t_{1,3} \\ -\alpha t_{1,4} \\ -\gamma t_{4,1} \\ -\gamma t_{4,2} \\ -\gamma t_{4,3} \\ -\gamma t_{4,4} \end{pmatrix}$$

5 radios y 4 ángulos:

$$\begin{pmatrix} \beta & \chi & 0 & \chi & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi & \beta & \chi & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi & \beta & \chi & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi & 0 & \chi & \beta & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & \chi & 0 & \chi & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & \chi & \beta & \chi & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \chi & \beta & \chi & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & \chi & 0 & \chi & \beta & 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & \chi & 0 & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \chi & \beta & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \chi & \beta & \chi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & \chi & 0 & \chi & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{2,1} \\ t_{2,2} \\ t_{2,3} \\ t_{2,4} \\ t_{3,1} \\ t_{3,2} \\ t_{3,3} \\ t_{3,4} \\ t_{4,1} \\ t_{4,2} \\ t_{4,3} \\ t_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha t_{1,1} \\ -\alpha t_{1,2} \\ -\alpha t_{1,3} \\ -\alpha t_{1,4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma t_{5,1} \\ -\gamma t_{5,2} \\ -\gamma t_{5,3} \\ -\gamma t_{5,4} \end{pmatrix}$$

3 Estimando la isoterma

Un dato importante que nos interesa es encontrar la posición de la isoterma de 500°C. Esta es un círculo dentro de la pared del horno todo a la misma temperatura. Queremos poder calcularla porque si está "muy cerca" (ver sección 2.2.1) la estructura del horno estaría en riesgo.

Para encontrarla buscamos dos puntos dentro de un mismo ángulo que "rodeen" la temperatura buscada, y luego aproximamos linealmente la posición donde se encuentra entre estos dos puntos.

3.1 Midiendo la Peligrosidad

Una vez encontrada la isoterma, es importante decidir si el horno está en un estado peligroso o seguro. Para ello

4 Resultados

5 Conclusión