Teoría de grafos

Apuntes

Galindo

[2021-11-09 mar]

Contents

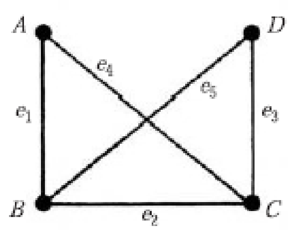
Contents

1 Grafos y Multigrafos

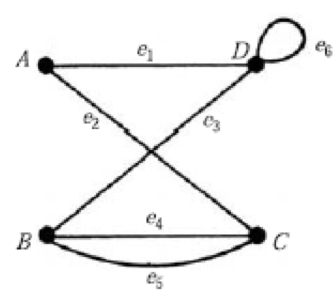
Un grafo G consta de dos partes: Un conjunto V cuyos elementos se denominan vértices y un conjunto E de pares no ordenados de vértices distintos llamados aristas de G.

La definición formal de un grafo no permite aristas multiples ni lazos, por lo tanto un grafo se define como un multigrafo sin aristas multiples ni lazos. Ejemplos:

Si G1(V,E) es el grafo del inciso a), entonces:
V={A,B,C,D} y E={{A,B},{B,C},{C,D},{A,C},{B,D}}
Si G2(V,E) es el multigrafo del inciso b), entonces:
V={A,B,C,D} y E={{A,C},{B,D},{A,D},{B,C},{B,C} ,{D,D}}



a) Grafo



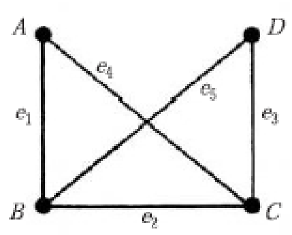
b) Multigrafo

2 Grado de un véritce

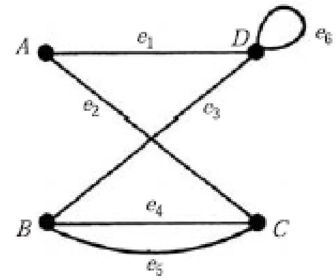
El grado de un vértice v en un grafo G, se escribe grd(v), es igual al número de aristas en G que contienen a v. Teorema: La suma de los grados de los vertices de un graf G es igual el doble del número de aristas n en G. Ejemplos:

Si G1(V,E) es el grafo del inciso a), n=5:
V={A,B,C,D} y E={{A,B},{B,C},{C,D},{A,C},{B,D}}
grd(A)=2, grd(B)=3, grd(C)=3, grd(D)=2
2+3+3+2=10

Si G2(V,E) es el multigrafo del inciso b), n=6:
V={A,B,C,D} y E={{A,C},{B,D},{A,D},{B,C},{B,C} ,{D,D}}
grd(A)=2, grd(B)=3, grd(C)=3, grd(D)=4
2+3+3+4=12



a) Grafo

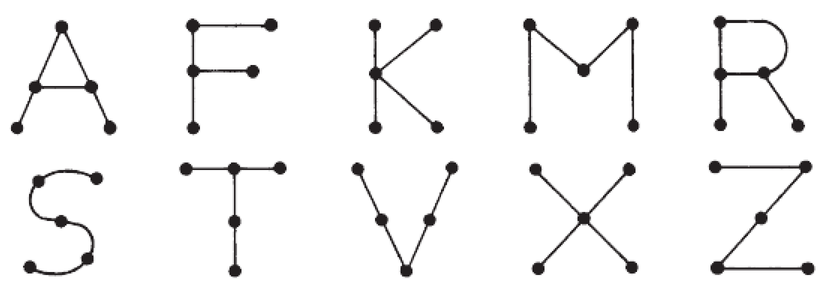


b) Multigrafo

3 Grafos isomorfos

Los grafos G y G* son isomorfos si existe una correspondencia f:V->V* tal que {u,v} es una arista de G si y solo si {f(u),f(v)} es una arista de G*.

Ejemplos: Si llamamos a cada uno de los grafos siguientes A, F, K, ... podemos encontrar varios pares de grados isomorfos.



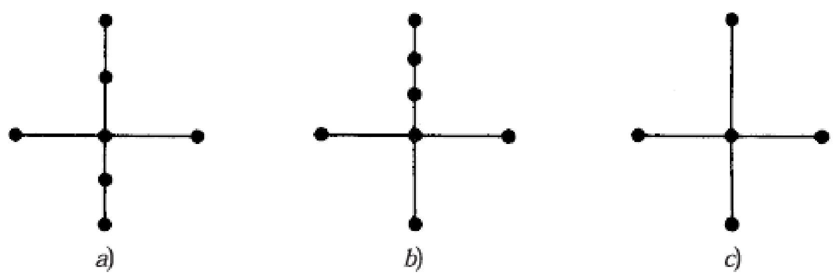
- A y R son isomorfos
- K y X son isomorfos

- M, V, S y Z son isomorfos

4 Grafos homeomorfos

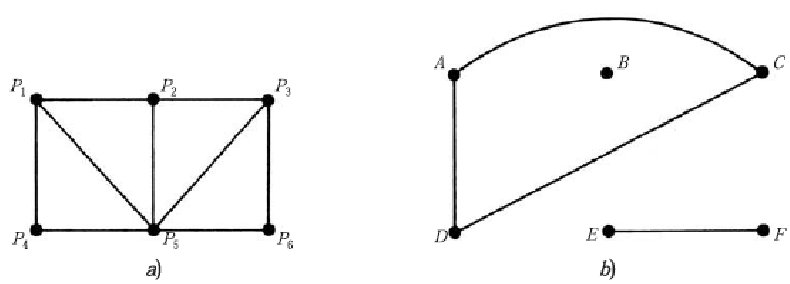
Dado cualquier grafo G, es posible obtener un Nuevo grafo al dividir una arista de G con vertices adicionales. Dos grafos son homeomorfos si es posible obtenerlos a partir del mismo grafo o grafos isomorfos al aplicar este método.

Ejemplos: Los grafos de los incisos a) y b) son homeomorfos puesto que pueden obtenerse a partir del grafo c) al agregar vertices adicionales



5 Caminos y conectividad

Un camino en un mutigrafo G consta de una secuencia alternada de vertices y aristas de la forma:



Recorrido es un camino sin aristas repetidas.

Cerrado es un camino cuyo vértice inicial y final coinciden.

Abierto es un camino cuyo vértice inicial y final no coinciden.

Ciclo es un camino simple que además es un camino cerrado.

Simple es un camino sin vértices repetidos, salvo quizás el primero y el último.

ciclo hamiltoniano es un ciclo que pasa por todos los vértices del grafo una única vez (en caso que el vértice inicial y final no coinciden, se suele hablar también de camino hamiltoniano).

Ciclo Euleriano es un ciclo que pasa por todas las aristas del grafo una única vez.

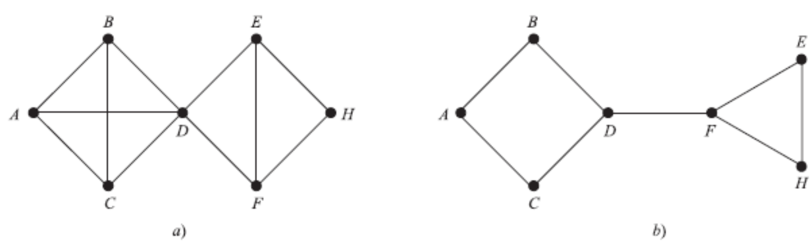
6 Distancia y diámetro

Considere un grafo conexo G, la distancia entre los vertices u y v en G, que se es escribe d(u,v), es la longitude de la ruta más corta entre u y v.

El diámetro de G diam(G) es la distancia máxima entre dos puntos cualesquiera de G.

7 Grafos completos

Un grafo G es completo si cualquier vértice G está unido a todos los demás vértices en G. Por tanto, un grafo completo G debe ser conexo. El grafo completo con n vértices se denomina K_n.



8 Grafos Hamiltonianos en grafos completos

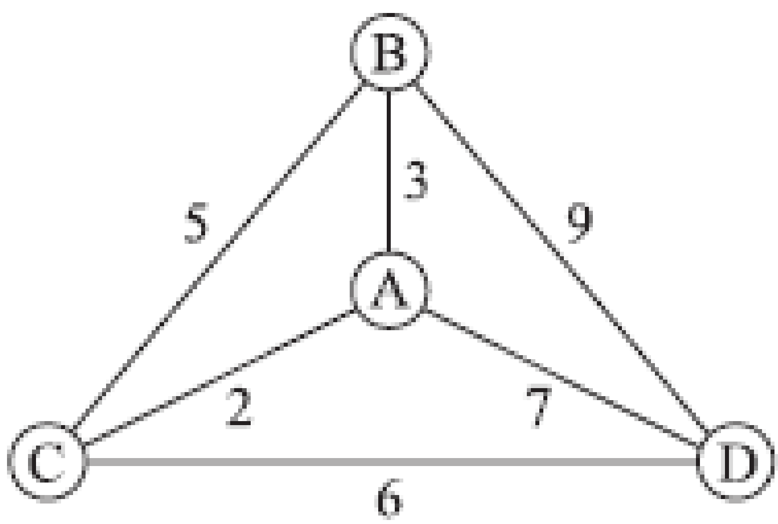
Si un grafo G admite un circuito hamiltoniano, entonces G se denomina grafo hamiltoniano. Un circuito hamiltoniano en un grafo G es un camino cerrado que visita todos los vértices en G exactamente una vez aunque puede repetir aristas.

8.1 Teorema:

Un grafo completo K n con n>=3 vértices tiene $H = (n-1)!/2$ circuitos hamiltonianos, donde n es el número de vértices del grafo K y no se distingue entre un circuito y su opuesto (es decir, si se invierte el sentido del circuito es el mismo).

9 Representación de grafos ponderados con matrices de adyadencia

- Las matrices de adyacencia representan las conexiones entre nodos de un grafo G.
- Si un grafo es **no ponderado**, cada elemento de la matriz tendrá un 1 si la conexión entre nodos existe y un 0 en caso contrario.
- Si un grafo es **ponderado**, cada elemento de la matriz tendrá el peso de la arista si la conexión existe, y se deja vacío si la conexión no existe. Ejemplo:



#	A	B	C	D
A		3	2	7
B	3		5	9
C	2	5		6
D	7	9	6	

10 Ejecución del algoritmo del vecino más próximo

Este método genera rápidamente un camino Hamiltoniano de peso minimo pero no ideal.

1. elección de un vértice arbitrario respecto al vértice actual.
2. descubra la arista de menor peso que ya este conectada al vértice actual y a un vértice no visitado V.
3. convierta el vértice actual en V.
4. marque V como visitado.
5. si todos los vértices del dominio estuvieran visitados, cierre el algoritmo.
6. vaya al paso 2.

11 Árboles

El árbol es un grafo no dirigido conectado con circuitos no simples; además, no contiene arcos múltiples, con la propiedad de que hay un único camino simple entre cada par de vértices, teniendo el siguiente teorema:

> "Un grafo no dirigido es un árbol si y solo si hay un camino simple único entre cualesquiera dos de sus vértices".

Si se observan los siguientes grafos, se concluye que el grafo G_1 no es un árbol porque se observa un circuito simple, pero los grafos G_2 Y G_3 son de árboles, porque están conectados con circuitos no simples.

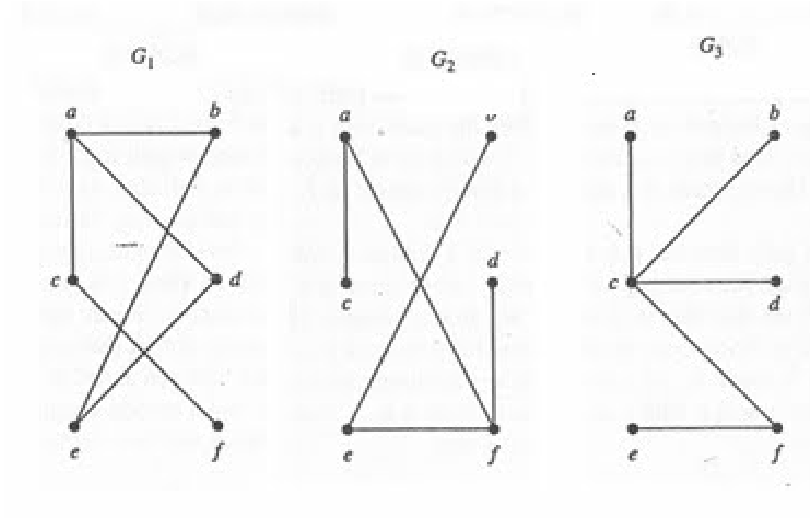


Figure 1: Grafo 1, 2 y 3.

12 Bosques

existen grafos que no tienen conexión y podría existir confusión el pensar que un árbol es un grafo conectado que tiene circuitos no simples, pero es importante mencionar que existen árboles del tipo que contienen circuitos no simples que no necesariamente están conectados, y esos árboles reciben el nombre de bosques, cuya característica es que cada uno de sus componentes conectados es un árbol.

Más informacion sobre arboles

13 Árbol de expansión

un subgrafo se le concidera un arbol de expancion (T) de un grafo (G) si T incluye todos los vertices de G.

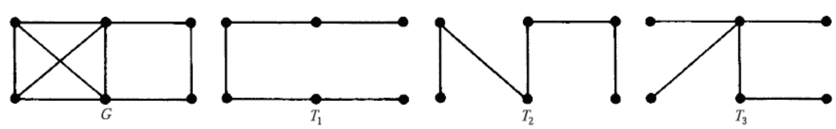


Figura 8-18

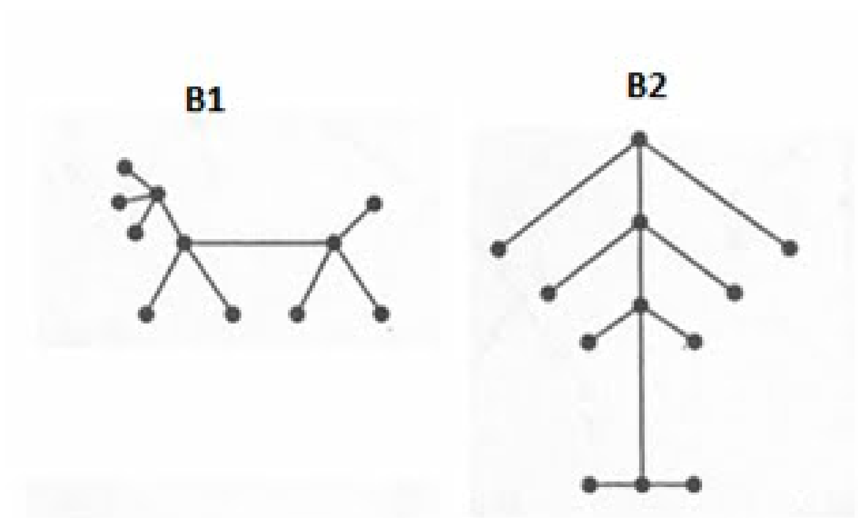


Figure 2: Bosques 1 y 2.

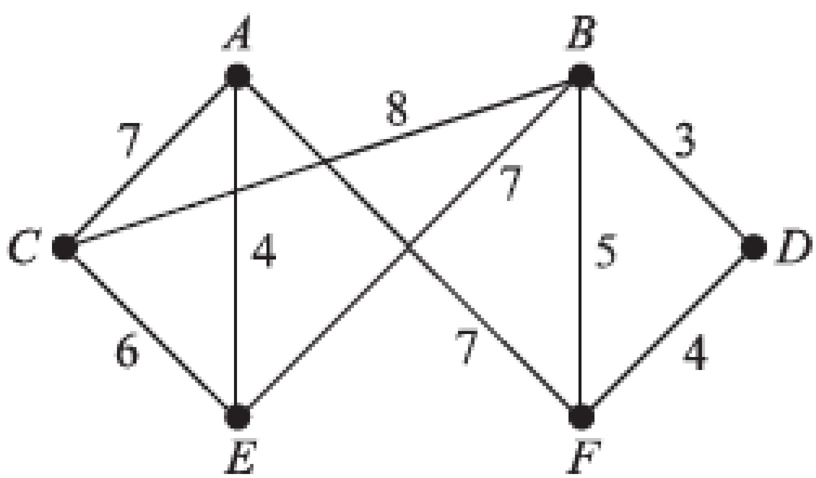
14 Algoritmo de expancion minima (Kruskal)

1. Las aristas de G se disponen en orden creciente de peso.
2. Se empieza sślo como los vértices de G y en forma secuencial se agrega cada artista que no origine un ciclo hasta que se haya agregado n-1.
3. Salir.

15 Algoritmo de Kurskal inverso

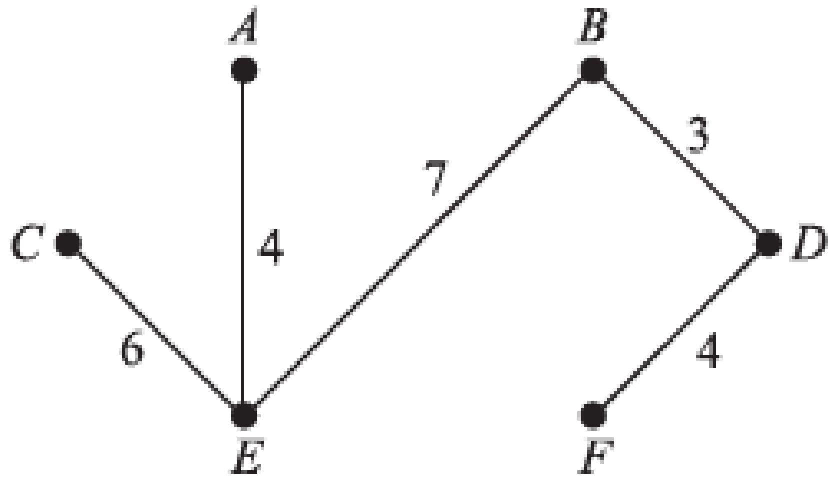
1. Las aristas de G se disponen en orden decreciente de peso.
2. Se procede secuecialmente para eliminar cada arista que no haga inconexo al grafo, hasta que queden n-1 aristas.
3. Salir.

16 Ejemplo de la ejecución del algoritmo Kurskal inverso

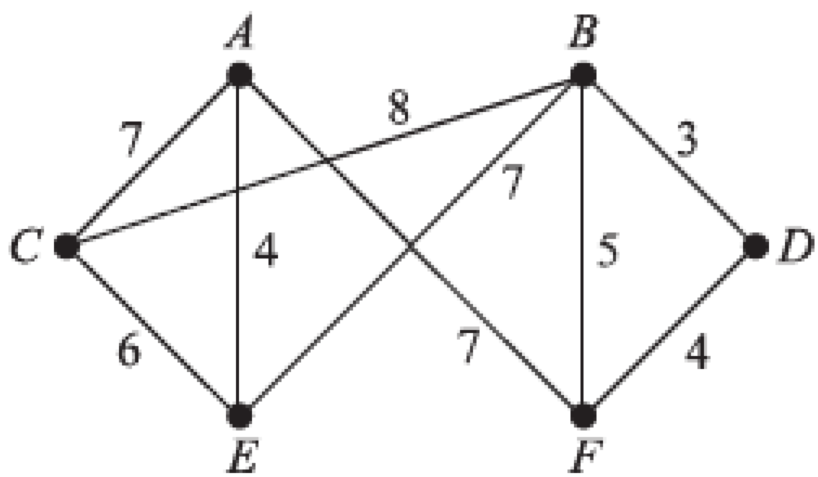


Aquí se aplica el algoritmo 82. Primero se ordenen las aristas en orden decreciente de peso y luego en forma consecutiva se eliminan las aristas sin hacer inco-nexo a Q hasta que queden cinco aristas. Así se obtienen los datos siguientes:

Aristas	BC	AF	AC	BE	CE	BF	AE	DF	BD
Peso	8	7	7	7	6	5	4	4	3
Eliminar	si	si	si	no	no	si	nil	nil	nil



17 Ejemplo de la ejecución del algoritmo Kurskal



Aquí se aplica el algoritmo de kurskal Primero se ordenan las aristas en orden creciente de peso y enseguida se agregan las aristas sin formar ningún ciclo hasta que se incluyen cinco aristas. Asi se obtienen los datos siguientes.

Aristas	BD	AE	DF	BF	CE	AC	Af	BE	BC
Peso	3	4	4	5	6	7	7	7	8
Eliminar	si	si	si	no	si	no	si	nil	nil