Ecuaciones Diferenciales

Apuntes

Galindo

[2021-08-19 jue]

Contents

TODO list:

- ☐ Propiedades de transformada de laplace

Contents

1 Definicion

Una ecuacion diferencial, es una ecuacion donde la incognita es una funcion y que contiene una derivada de una o mas variables dependientes con respecto a dos o mas variables independientementes.

2 Variables dependientes e independientes

Variable dependiente Es aquella cuyos valores dependen de los que tomen otra variable. Usualmente se suele representar como **y** en el eje de las ordenadas.

Variable independiente Un símbolo que representa una entrada de datos arbitraria se denomina variable independiente,

En esta ecuacion diferencial podemos saber cual es la variable independiente con solo mirar el denominador, en este caso x, entonces como x es independiente y es la variable independiente[1].

$$\frac{dy}{dx} = 0.2 \cdot x \cdot y$$

Más informacion

3 Orden de una ecuacion

Se dice que una ecuacion es del grado de su derivada mas alta[2]

Ecuaciones de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}xy$$

$$(y')^2 + xy' - y = 0$$

Mientras mas comillas tiene una derivada eso significa que es de mayor grado:

Ecuaciones de segundo orden:

[1] recuerda que $\frac{dy}{dx} = y'$.

[2] Ojo, el exponente en la ecuacion no afecta el grado de la derivada.

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

$$y'' + \frac{a(x)}{a_0(x)})y' + \frac{b(y)}{a_0(x)}y = 0$$

4 Campos de pendientes o direcciones

Un campo de pendientes es un tipo de grafico que funciona como una solucion grafica para ecuaciones diferenciales de primer orden.
Para dibujar un campo de pendientes solo tenemos que evaluar la funcion en cada punto, Sí el numero resultante es positivo dibujamos una linea en diagonal hacia abajo pero sí la linea es negativa dibujamos una lina diagonal hacia arriba .

Video | Graficador

5 Transformada de Laplace

En matemáticas, la transformada de Laplace es una transformada integral que convierte una función de variable real 't' (normalmente el tiempo) a una función de variable compleja 's'. Tiene muchas aplicaciones en ciencia e ingeniería porque es una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales. En particular, transforma ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

Para resolver una transformada de laplace susituimos $f(t)$ con nuestra funcion en base a t:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\ t} f(t)\ dt$$

Fuente | Formulario | formulario completo

6 Propiedades de laplace

`https://www.uv.mx/personal/aherrera/files/2014/04/18.-PROPIEDADES-DE-LA-TRANSFORMADA-D`
`pdf`

7 Aplicaciones de transformada de laplace

Raramente te van a pedir que desarolloes las integrales para llegar a una transformada, por lo general simplemente usamos sus aplicaciones, las aplicaciones de tranformada de Laplace simplemente son sustituciones de funciones comunes, En el formulario puedes encontrar la mayoria de sustituciones.

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^4 \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= 2\mathcal{L}\{t^4\} \\ &= 2\frac{4!}{s^{4+1}} \\ &= \frac{48}{s^5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{24}{s^5}}$$

Como se ve en el ejemplo, simplemente tenemos que desarollar la exprecion y aplicar la formula que se nos indica.

8 Tranformada de Derivadas de Laplace

$$\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2t}; y(0) = 1$$

Calculamos la tranformada de Laplace para cada uno de sus elementos y factorizamos[3]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} - 3\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\left\{e^{t2}\right\} \\ Sy(S) - 1 - 3y(S) &= \frac{1}{S-2} \\ y(s)(s-3) &= \frac{1}{s-2} + 1 \\ y(s)(s-3) &= \frac{s-1}{s-2} \\ y(s) &= \frac{s-1}{s-2}(s-3) \\ y(s) &= \frac{s-1}{(s-2)(s-3)} \end{aligned}$$

[3]La tranformada de laplace de y es siempre $y(s)$

Ahora calculamos la inversa de laplace de $y(s)$, pero para eso tendremos que Resolvemos las fracciones parciales de nuestro resutado ~~Asumire que ya sabes resolver fracciones parciales así que ire directo al resultado~~.

$$\begin{aligned}\frac{s-1}{(s-2)(s-3)} &\Rightarrow + \\ &= -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-3}\end{aligned}$$

ahora calculamos la inversa de la transformada de laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)(s-3)}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-3}\right\}$$

y el resultado final sería:

$$\boxed{-e^{2t} + 2e^{3t}}$$

9 Ecuaciones diferenciales homogeneas

1.Escribir la Ecuacion diferencial en forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

2.Comprobar que sea homogenea, nota: λ^n tiene que ser igual en ambas:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x,y) \text{ y } N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n N(x,y)$$

3.Hacer el cambio $y = ux$ y $x = uy$. para elegir la variable a sustituir recomiendo tomar en cuenta la derivada, por ejemplo si tomamos $y = ux$ entonces la derivada sera $dy = u\,dx + x\,dy$, la derivada tiene más términos por lo que es mas recomendable sustituir el termino menos complicado de la ecuación, ejemplo:

$$(x-y)\,dx + x\,dy = 0$$

En este caso es mas conveniente sustituir y ya que si hacemos la substitución obtenemos:

$$(x-ux)\,dx + x(u\,dx + x\,dy) = 0$$

y es mas fácil multiplicar x que $x - ux$, ojo: se supone que ambas sustituciones son correctas, pero es mas conveniente usar un termino que nos simplifique la ecuación.

4.ahora con la sustituciones realizadas, resolvemos por el metodo de variables separables.

Más informacion

10 Ecuacion Diferencial Homogenea Con Coeficientes Constantes

La forma de este tipo de ecuaciones es la siguiente.

$$an_n y^n + an_{n-1} y^{n-1} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

se propone una solucion particular de la siguiente forma: $y = e^{mx}$. Entonces encontramos su derivadas:

$$y = e^{mx}$$
$$y' = me^{mx} \ ; \ y'' = m^2 e^{mx}$$

sustitumos cada respectiva derivada con la solucion prpuesta:

$$a \cdot m^2 e^{mx} + b \cdot me^{mx} + c \cdot e^{mx} = 0$$

ahora podemos simplificar la expresión:

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

ahora para encontrar nuestras soluciones generales tenemos que factorizar la ecuacion que nos queda, hay tres posibles casos para la factoricion de los polinomios:

- Caso I, factores diferentes:

$$y_g = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}$$

- Caso II, factores repetidos:

$$y_g = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax}$$

- Caso III, raices imaginarias $\alpha + \beta$ i:

$$y_g = c_1 e^{\alpha x} \left[\cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right]$$

Más informacion

11 Ecuacion Diferencial NO Homogenea Con Coeficientes Constantes

La forma de este tipo de ecuaciones es la siguiente.

$$an_n y^n + an_{n-1} y^{n-1} + ... + a_1 y' + a_0 y = Q(x)$$

$$-y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26e^x$$

Es muy parecida a la anterior sin embargo ahora la funcion no esta igualada a 0, si no que el resultado es otra funcion, el resultado es la suma de dos partes:

$$y = y_g + y_p$$

donde y_g es la solucion general de la ecuacion homogenea y y_p es la solucion de la ecuacion $Q(x)$.

$$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-10x}$$

para encontrar y_g simplemente aplicamos el metodo de Ecuacion Diferencial Homogenea Con Coeficientes Constantes y lo expresamos en su forma general. Ahora para encontrar y_p es mas complicado, primero tenemos que identificar el tipo de funcion que tenemos:

No.	$g(x)$	Forma de y_p
1	Una constante	A
2	$2x-3$	$Ax+B$
3	$-3x^2+7x$	$Ax^2 + Bx + C$
4	$2x^3-x^2-4$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
5	$3sen2x$	$Acos2x + Bsen2x$
6	$-4cos3x$	$Acos3x + Bsen3x$
7	e^{4x}	Ae^{4x}
8	$(3x-1)e^{-2x}$	$(Ax+B)e^{-2x}$
9	$(2x^2-1)e^{3x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$
10	$e^{3x}sen2x$	$(Acos2x + Bsen2x)e^{3x}$
11	$2x^2sen4x$	$(Ax^2 + Bx + C)cos4x + (Dx^2 + Ex + F)sen4x$
12	$xe^{2x}sen4x$	$(Ax+B)e^{2x}sen4x + (Cx+D)e^{2x}cos4x$

Ejemplo, si tenemos $100x^2 - 26e^x$ entonces primero tomamos $Ax^2 + Bx + C$, pero como tambien tenemos un exponente tambien debemos tomar Ae^x cada termino tiene que tener variables diferentes aunque en la tabla anteior se repitan debemos cambiarlas, en este caso como ya hay una variable A cambie la A del exponente por una D, y asi es como se obtiene la forma que tendra nuestra y_p:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + De^x$$

ahora tomamos yp y obtenermos las derivadas de y_g, sustituimos las derivadas y resolvemos el sistema de ecuaciones restante

Ejemplo, si tenemos $y_g = -y'' - 8y' + 20y$ tenemos que encontrar sus derivadas $y; y'; y''$, en el ejemplo anterior determinamos que $y_p = Ax^2 + Bx + C + De^x$ entonces derivamos y_p para encontrar las derivadas que nos faltan:

- $y = Ax^2 + Bx + C + De^x$

- $p' = 2Ax + B + De^x + Dxe^x$
- $p'' = 2A + De^x + De^x + Dxe^x$

ahora sustituimos nuestros valores en y_g y resolvemos nuestras incognitas en $y_g = Q(x)$ (no voy a resolver toda la ecuacion debido a la logitud), los resultados de las incognitas son: $A = 5; B = 4; C = \frac{21}{10}; D = -\frac{26}{10}$. Ahora sustituimos en y_p:

$$y_p = 5x^2 + 4x + \frac{21}{10} - \frac{26}{10}e^x$$

y para obtener el resultado final simplemente sumamos y_g con y_p

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-10x} + 5x^2 + 4x + \frac{21}{10} - \frac{26}{10}e^x$$