

Cálculo Multivariable

Luis Eduardo Galindo Amaya

8 de diciembre de 2021

Índice

1. Preámbulo	2
1.1. Sistema Algebraico Computacional	2
1.2. Especificaciones	2
2. Interpretar un plano	2
2.1. Eje coordenado	2
2.2. Cuadrante	2
2.3. Octante	2
3. Representación de punto en el plano	3
3.1. Rectangular ó Cartesianas	3
3.2. Polar ó Cilíndrica	3
3.3. Esférica	4
4. Conversión Entre Sistemas De Coordenadas	4
4.1. Rectangulares a Polares	4
4.2. Rectangulares a Cilíndricas	5
4.3. Rectangulares a Esféricas	5
4.4. Polares a rectangulares	5
4.5. Polares a cilíndricas	5
4.6. Cilíndricas a Rectangulares	6
4.7. Cilíndricas a Esféricas	6
4.8. Esféricas a Rectangulares	6
4.9. Esféricas a Cilíndricas	6
5. Vectores	6
5.1. Representación	7
5.2. Notación	7
5.3. Suma y Resta de Vectores	7
5.4. Modulo ó magnitud del Vector	7
5.5. Vector Unitario	8
5.6. Producto Punto Y Ángulos Directores	8
5.7. Producto Cruz	10

1. Preámbulo

Este es un trabajo en proceso, todavía no ha sido finalizado y todavía no ha sido revisado. Si tienes alguna idea para alguna corrección puedes mandarme un correo a mi correo egalindo54@uabc.edu.mx.

1.1. Sistema Algebraico Computacional

Estos apuntes están hechos para usarse en conjunto con el software CAS de George Weigt, Eigenmath, intentare pasar los apuntes a

1.2. Especificaciones

- Todos los ángulos son en radianes.
- Utilizare la notación de subíndices al derivar, por ejemplo F_x es derivada de la variable 'x' y F_{xy} es la derivada de 'x' y luego la derivada de 'y'.
- Cuando escriba un vector usare la notación $\vec{}$, prefiero usar las negritas a modo de énfasis.
- Los diagramas que aparecen aqui son meramente orientativos, por lo tanto pueden ó pueden no representar los nombres de las variables que uso para las explicaciones.

2. Interpretar un plano

2.1. Eje coordenado

Un eje coordenado es una secciona en la que dividimos una región del plano para despumes numerarla, usualmente los llamamos 'x', 'y' y 'z'.

2.2. Cuadrante

En Geometría euclidiana plana recibe el nombre de cuadrante cada una de las cuatro regiones infinitas en que los ejes del Sistema Cartesiano bidimensional dividen al plano. Estos cuadrantes están numerados de 1 al 4 (empezando en el superior derecho, en sentido anti-reloj) y denotados por números Romanos.

Origen

2.3. Octante

Un octante en geometría del espacio es cada una de las ocho divisiones coordenadas cartesianas tridimensionales dividen al espacio euclidiano definidos por los signos de las coordenadas. Es similar al cuadrante bidimensional y al semi eje mono-dimensional.

Origen

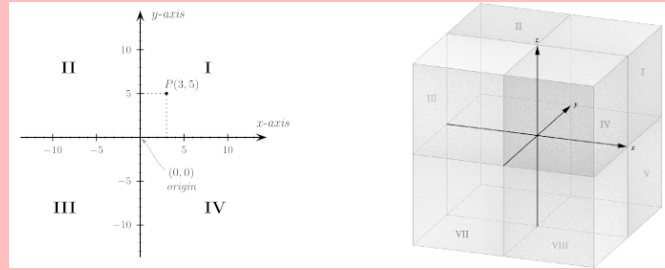


Figura 1: A la derecha cuadrantes y a la izquierda los octantes.

3. Representación de punto en el plano

Cuando trabajamos con planos cartesianos podemos marcar puntos indicando el número de su coordenada en cada respectivo eje, esta es una forma muy rápida de interpretar un punto en el espacio, sin embargo no es la única y sobre todo cuando trabajamos con funciones circulares las representaciones rectangulares terminan complicando nuestro trabajo.

3.1. Rectangular ó Cartesianas

Las coordenadas rectangulares, son las coordenadas con las que hemos trabajado todo este tiempo, se representa con un número en cada eje coordenado y para extenderlo simplemente agregamos un número extra para cada valor que deseamos representar.

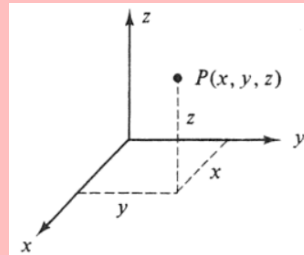


Figura 2: Coordenadas Rectangulares.

3.2. Polar ó Cilíndrica

Una coordenada polar tiene dos partes principales, una longitud ó radio (r) y un ángulo (θ), como cabe imaginar podemos representar figuras circulares con mucha facilidad, también es la notación más común para vectores en física.

Podemos extender esta representación en el espacio añadiendo el eje z , el cual nos indicará la altura hacia donde apunta el vector.

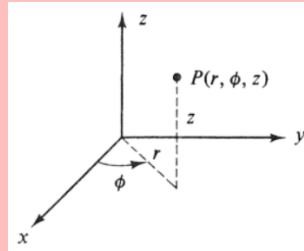


Figura 3: Coordenadas Cilíndricas.

3.3. Esférica

La representación esférica solo existe en el espacio, y como lo indica su nombre solo representa un valor en el un volumen esférico, esta representación utiliza un radio que abarca los tres ejes (ρ) dos ángulos para indicar la dirección del punto que deseamos representar, uno para los ejes 'x' y 'y' (θ) y uno para el eje 'z' (ϕ).

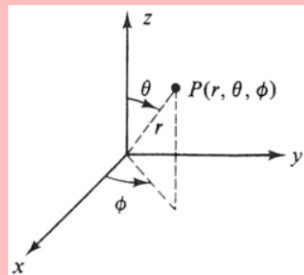


Figura 4: Coordenadas esféricas.

4. Conversión Entre Sistemas De Coordenadas

Ocasionalmente tenemos que hacer conversiones entre dos ó más sistemas de coordenadas, para hacer estas conversiones es necesario tomar en cuenta las propiedades geométricas de cada sistemas.

4.1. Rectangulares a Polares

Las Coordenadas polares están compuestas de dos partes, un radio y un ángulo, tenemos dos formulas para calcular cada uno de los componentes:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctg(y/x)$$

Importante Estamos despejando un triangulo y dependiendo el cuadrante donde se encuentre el punto tenemos que sumar los ángulos que nos faltan:

Cuadrante	Grados	Radianes
I	0°	0
II	180°	π
III	180°	π
IV	360°	2π

4.2. Rectangulares a Cilíndricas

las coordenadas cilíndricas son una extensión al espacio de las coordenadas polares por lo tanto solo convertimos las coordenadas de los ejes 'x' y 'y' a polares y añadimos el eje de las 'z' sin hacer ningún cambio.

Origen

4.3. Rectangulares a Esféricas

Las coordenadas cilíndricas son otra forma de representar las coordenadas polares en el espacio, pero a comparación de las coordenadas cilíndricas ahora usamos dos ángulos para representar la dirección hacia la que apunta el vector:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \arctg(y/x) \quad \phi = \arccos(z/\rho)$$

Importante I: el ángulo ϕ (phi) **NO** necesita corrección.

Importante II: el ángulo θ (theta) **Si** ocupa corrección.

4.4. Polares a rectangulares

La conversión de polares a rectangulares se puede hacer directamente con las siguientes formulas:

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

Cada una corresponde a un eje coordenado, recordemos que las coordenadas polares solo sirven para representar puntos en el plano, por lo tanto si queremos representar puntos en el espacio tendremos que usar coordenadas cilíndricas.

4.5. Polares a cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son la extensión directa de las coordenadas polares en el espacio, por lo tanto simplemente tendremos que tomar el valor rectangular de nuestra coordenada en el eje 'z' y añadirla a nuestra representación polar.

4.6. Cilíndricas a Rectangulares

Para esta conversión simplemente tenemos que hacer las siguientes sustituciones:

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad z = z$$

Origen

4.7. Cilíndricas a Esféricas

Para hacer esta conversión es necesario extender el radio a tres dimensiones y calcular el ángulo faltante, como ya tenemos el ángulo θ (theta) no tenemos que hacer correcciones.

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} \quad \theta = \theta \quad \phi = \arccos(z/\rho)$$

Origen - 1 | Origen - 2

4.8. Esféricas a Rectangulares

Para esta conversión simplemente tenemos que hacer las siguientes sustituciones:

$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \quad y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \quad z = \rho \cos(\phi)$$

Origen

4.9. Esféricas a Cilíndricas

para convertir las coordenadas esféricas a cilíndricas tendremos que convertir el ángulo ϕ (phi) a su coordenada cartesiana 'z':

$$r = \rho \sin(\phi) \quad \theta = \theta \quad z = \rho \cos(\phi)$$

Origen

5. Vectores

Un vector es la representación matemática y gráfica de una magnitud vectorial. Consiste básicamente en una flecha o segmento rectilíneo orientado, es decir, con una determinada longitud, dirección y sentido, y que contiene toda la información de la magnitud que se está midiendo. Ejemplos de vectores:

$$(x, y, z) \quad (r, \theta) \quad (\rho, \theta, \phi)$$

Origen

5.1. Representación

En física usualmente se representan los vectores de forma polar ó cilíndrica, con una magnitud y un ángulo, pero esto no tiene por que ser siempre así, en calculo multivariable con mucha frecuencia se utiliza la la notación cartesiana (tres números dentro de un paréntesis representando cada eje coordenado) ó también la compleja (donde cada uno componentes es una variable 'i' es x 'j' es 'y' y 'z' es 'k'), ejemplo el vector (1,3,4) se puede representar de manera compleja como el punto 'i + 3j + 4k'.

5.2. Notación

Para identificar que un valor es un vector hay dos formas principales añadiendo una flecha en la parte superior de la variable (\vec{A}) o resaltando el nombre de la variable con negritas.

5.3. Suma y Resta de Vectores

Sumar vectores no representa mas que la suma de independiente de cada uno de sus componentes.

$$\vec{A} + \vec{B} = (\vec{A}_x + \vec{B}_x, \vec{A}_y + \vec{B}_y, \vec{A}_z + \vec{B}_z)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (\vec{A}_x - \vec{B}_x, \vec{A}_y - \vec{B}_y, \vec{A}_z - \vec{B}_z)$$

Importante: esto es solo para coordenadas cartesianas, si tenemos nuestro vector en coordenadas cilíndricas ó esféricas tendremos que hacer la conversión correspondiente.

5.4. Modulo ó magnitud del Vector

El módulo de un vector es la longitud entre el inicio y el final del vector, podemos calcular la distancia desde el origen con la formula de distancia:

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Modulo del Vector Fuera Del Origen

Hay ocasiones en las que tenemos un vector que no parte desde el origen de nuestra gráfica, para eso simplemente tenemos que restar al vector el punto de origen, por ejemplo sí tenemos un vector $\vec{A} = (3, 5, 6)$ con origen en $g = (5, 6, 3)$ simplemente las restamos:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (3 - 5, 5 - 6, 6 - 3) \\ &= (-2, -1, 3)\end{aligned}$$

De este modo podemos calcular la magnitud del vector independientemente de su origen:

$$\vec{A} = (-2, -1, 3)$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{14}$$

5.5. Vector Unitario

La característica fundamental del vector unitario es que su longitud siempre es igual a '1', no importa la dirección o el cuadrante, un vector es unitario si el valor de su modulo es igual a uno. Para calcularlo simplemente dividimos los valores de nuestro vector entre el modulo.

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Para verificar que el vector resultante es unitario simplemente volvemos a calcular el valor de su modulo, si el valor resultante es '1' entonces hemos calculado correctamente el vector.

5.6. Producto Punto Y Ángulos Directores

El producto punto, producto escalar ó producto interno es una operacion que toma dos vectores y nos devuelve el area que se forma paralelogramo entre esto (ó el volumen de un Paralelepípedo si es en \mathbb{R}^3) ¹.

Formula Del Producto Punto

Para representar el producto punto usamos el operador $\vec{A} \cdot \vec{B}$. El producto punto se puede calcular de multiples maneras, la forma directa de calcularla es con la siguiente fomrula²:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}_x \vec{B}_x + \vec{A}_y \vec{B}_y + \vec{A}_z \vec{B}_z$$

Una cosa muy importante que debemos tomar en cuenta es la siguiente igualdad ya que mas adelante nos servira para calcular el ángulo entre vectores³:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta)$$

¹El producto punto representa mucho mas que el área de el paralelogramo, si se desea indagar mas en el tema recomiendo el vídeo de '3 blue 1 brown': <https://youtu.be/2u1Ye0yGuAc>.

²transpuesta de B por A, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \vec{B}^T$.

³ θ (theta) es el ángulo entre los dos vectores.

Angulo Entre Vectores

como sabemos que $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos(\theta)$ donde θ (theta) es igual a el ángulo entre vectores, nos basta con despejar la formula:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

Ángulos Directores

Si en la formula de angulos entre dos vectores sustituimos uno de los vectores por un vector unitario sobre uno de los ejes coordenados podemos determinar el angulo entre ese eje y el vector:

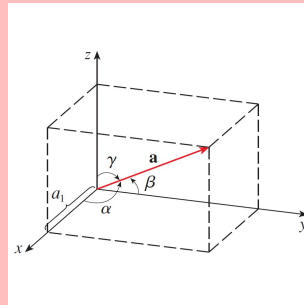


Figura 5: γ, β, α

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|a|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|a|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|a|}$$

Área De Un Paralelogramo

Recuperando un poco lo que aprendimos en geometría, un paralelogramo es un rectángulo con dos triángulos rectángulos en los lados ó también puede ser un rectángulo cuyas aristas se han inclinado en la misma dirección.

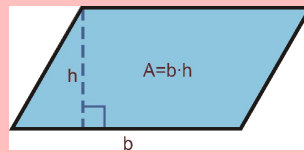


Figura 6: Formula del paralelogramo.

Es bastante fácil calcularla cuando tenemos la altura, sin embargo a comparación de un rectángulo cualquiera las aristas a la derecha y a la izquierda están inclinadas, por lo tanto la longitud de las aristas laterales **NO** representa la altura de nuestro paralelogramo.

Extendiendo La Formula Del Área De Un Paralelogramo

Viendo la figura del paralelogramo es facil deducir que podemos obtener el valor de 'h' usando ley de senos y cosenos, haciendo el despeje obtendriamos que 'h' es igual a el cosen de θ (theta) por la hipotenusa:

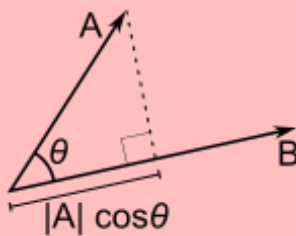


Figura 7: $h = A \cos(\theta)$

Si hacemos la sustitucion obtenemos que $A \cos(\theta) \cdot B$ es igual al área del paralelogramo, ahora con esta formula conocemos la relacion entre el area, el cateto adyacente, cateto opuesto y el angulo.

Con esta información podemos tener la idea de sustituir las aristas 'A' y 'B' y ahora con nuestra formula $A \cos(\theta) \cdot B$ podemos despejar el angulo entre los dos vectores, entonces podemos resumir que el producto punto es como calcular el area del paralelogramo.

5.7. Producto Cruz