Cálculo Multivariable

Luis Eduardo Galindo Amaya

17 de diciembre de 2021

Índice

1. Preámbulo

Este es un trabajo en proceso, todavía no ha sido finalizado y todavía no ha sido revisado. Sí tienes alguna idea para alguna corrección puedes mandarme un correo a mi correo egalindo54@uabc.edu.mx.

1.1. Sistema Algebraico Computacional

Estos apuntes están hechos para usarse en conjunto con el software CAS de George Weigt, Eigenmath, intentare pasar los apuntes a Maxima en el futuro por si algo llegara a pasar.

1.2. Especificaciones

- Todos los ángulos son en radianes.

- Utilizare la notación de subíndices al derivar, por ejemplo F_x es derivada de la variable 'x' y F_{xy} es la derivada de 'x' y luego la derivada de 'y'.
- Cuando escriba un vector usare la notación , prefiero usar las negritas a modo de énfasis.
- Los diagramas que aparecen aqui son meramente orientativos, por lo tanto pueden ó pueden no representar los nombres de las variables que uso para las explicaciones.

2. Interpretar un plano

2.1. Eje coordenado

Un eje coordenado es una secciona en la que dividimos una región del plano para despumes numerarla, usualmente los llamamos 'x', 'y' y 'z'.

2.2. Cuadrante

En Geometría euclidiana plana recibe el nombre de cuadrante cada una de las cuatro regiones infinitas en que los ejes del Sistema Cartesiano bidimensional dividen al plano. Estos cuadrantes están numerados de 1 al 4 (empezando en el superior derecho, en sentido anti-reloj) y denotados por números Romanos.

2.3. Octante

Un octante en geometría del espacio es cada una de las ocho divisiones coordenadas cartesianas tridimensionales dividen al espacio euclidiano definidos por los signos de las coordenadas. Es similar al cuadrante bidimensional y al semi eje mono-dimensional.

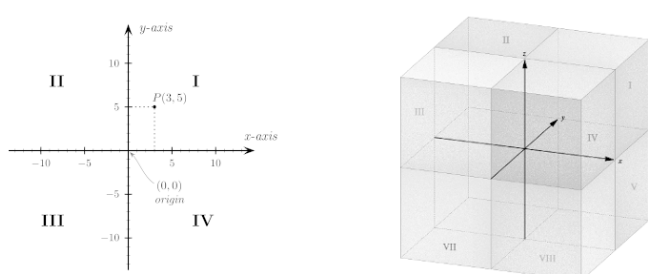


Figura 1: A la derecha cuadrantes y a la izquierda los octantes.

3. Representación De Punto En El Plano

Cuando trabajamos con planos cartesianos podemos marcar puntos indicando el numero de su coordenada en cada respectivo eje, esta una forma muy rápida de interpretar un punto en el espacio, sin embargo no es la única y sobre todo cuando trabajamos con funciones circulares las representaciones rectangulares terminan complicando nuestro trabajo.

3.1. Rectangular ó Cartesianas

Las coordenadas rectangulares, son las coordenadas con las que hemos trabajado todo este tiempo, se representa con un numero en cada eje coordenado y para extenderlo simplemente agregamos un numero extra para cada valor que deseamos representar.

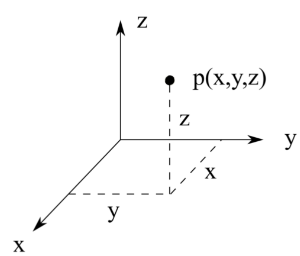


Figura 2: Coordenadas Rectangulares.

3.2. Polar ó Cilíndrica

Una coordenada polar tiene dos partes principales, una longitud ó radio (r) y un ángulo (θ), como cabe imaginar podemos representar figuras circulares con mucha facilidad, también es la notación mas común para vectores en física.

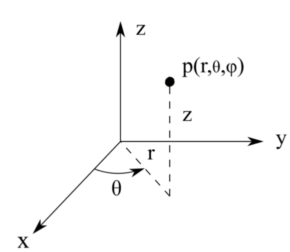


Figura 3: Coordenadas Cilíndricas.

Podemos extender esta representación en el espacio añadiendo el eje z, el cual nos indicara la altura hacia donde apunta el vector.

3.3. Esférica

La representación esférica solo existe en el espacio, y como lo indica su nombre solo representa un valor en el un volumen esférico, esta representación utiliza un radio que abarca los tres ejes (ρ) dos ángulos para indicar la dirección del punto que deseamos representar, uno para los ejes 'x' y 'y' (θ) y uno para el eje 'z' (ϕ).

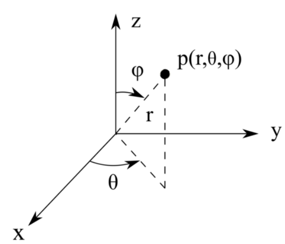


Figura 4: Coordenadas esféricas.

4. Conversión Entre Sistemas De Coordenadas

Ocasionalmente tenemos que hacer conversiones entre dos ó más sistemas de coordenadas, para hacer estas conversiones es necesario tomar en cuenta las propiedades geométricas de cada sistemas.

4.1. Rectangulares A Polares

Las Coordenadas polares están compuestas de dos partes, un radio y un ángulo, tenemos dos formulas para calcular cada uno de los componentes:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = arctg\,(y/x)$$

Importante: Estamos despejando un triangulo y dependiendo el cuadrante donde se encuentre el punto tenemos que sumar los ángulos que nos faltan:

Cuadrante	Grados	Radianes
I	0°	0
II	180°	π
III	180°	π
IV	360°	2π

4.2. Rectangulares A Cilíndricas

las coordenadas cilíndricas son una extencion al espacio de las coordenadas polares por lo tanto solo convertimos las coordenadas de los ejes 'x' y 'y' a polares y añadimos el eje de las 'z' sin hacer ningún cambio.

4.3. Rectangulares A Esféricas

Las coordenadas cilíndricas son otra forma de representar las coordenadas polares en el espacio, pero a comparación de las coordenadas cilíndricas ahora usamos dos ángulos para representar la dirección hacia la que apunta el vector:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = arctg\,(y/x) \quad \phi = arccos\,(z/\rho)$$

- **Importante**
  1. El ángulo ϕ (phi) **NO** necesita corrección.
  2. El ángulo θ (theta) **Si** ocupa corrección.

4.4. Polares A Rectangulares

La conversión de polares a rectangulares se puede hacer directamente con las siguientes formulas:

$$x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta)$$

Cada una corresponde a un eje coordenado, recordemos que las coordenadas polares solo sirven para representar puntos en el plano, por lo tanto si queremos representar puntos en el espacio tendremos que usar coordenadas cilíndricas.

4.5. Polares A Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son la extencion directa de las coordenadas polares en el espacio, por lo tanto simplemente tendremos que tomar el valor rectangular de nuestra coordenada en el eje 'z' y añadirla a nuestra representación polar.

4.6. Cilindricas A Rectangulares

Para esta conversión simplemente tenemos que hacer las siguientes sustituciones:

$$x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta) \quad z = z$$

4.7. Cilíndricas A Esféricas

Para hacer esta conversión es necesario extender el radio a tres dimensiones y calcular el ángulo faltante, como ya tenemos el ángulo θ (theta) no tenemos que hacer correcciones.

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} \quad \theta = \theta \quad \phi = arccos\,(z/\rho)$$

4.8. Esféricas A Rectangulares

Para esta conversión simplemente tenemos que hacer las siguientes sustituciones:

$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \quad y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \quad z = \rho \cos(\phi)$$

4.9. Esféricas A Cilíndricas

para convertir las coordenadas esféricas a cilíndricas tendremos que convertir el ángulo ϕ (phi) a su coordenada cartesiana 'z':

$$r = \rho \sin(\phi) \quad \theta = \theta \quad z = \rho \cos(\phi)$$

---

5. Vectores

Un vector es la representación matemática y gráfica de una magnitud vectorial. Consiste básicamente en una flecha o segmento rectilíneo orientado, es decir, con una determinada longitud, dirección y sentido, y que contiene toda la información de la magnitud que se está midiendo. Ejemplos de vectores:

$$(x, y, z) \quad (r, \theta) \quad (\rho, \theta, \phi)$$

5.1. Representación

En física usualmente se representan los vectores de forma polar ó cilíndrica, con una magnitud y un ángulo, pero esto no tiene por que ser siempre así, en calculo multivariable con mucha frecuencia se utiliza la la notación cartesiana (tres números dentro de un paréntesis representando cada eje coordenado) ó también la compleja (donde cada uno componentes es una variable 'i' es x 'j' es 'y' y 'z' es 'k'), ejemplo el vector (1,3,4) se puede representar de manera compleja como el punto 'i + 3j + 4k'.

5.2. Notación

Para identificar que un valor es un vector hay dos formas principales añadiendo una flecha en la parte superior de la variable ($\vec{A}$) o resaltando el nombre de la variable con negritas.

5.3. Vector Negativo

Si un vector tiene el simbolo negativo, todos sus componentes cambian su signo:

$$-\vec{A} = (-\vec{A}_1, -\vec{A}_2, ..., -\vec{A}_n)$$

Esto si el vector esta en coordenadas rectangulares, cuando el vector esta en polar añadimos 180° grados al ángulo:

$$\vec{A} = (3, 75°) \quad -\vec{A} = (3, -75°) = (3, 255°)$$

5.4. Suma y Resta de Vectores

Sumar vectores no representa mas que la suma de independiente de cada uno de sus componentes.

$$\vec{A} + \vec{B} = (\vec{A}_x + \vec{B}_x, \vec{A}_y + \vec{B}_y, \vec{A}_z + \vec{B}_z)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (\vec{A}_x - \vec{B}_x, \vec{A}_y - \vec{B}_y, \vec{A}_z - \vec{B}_z)$$

Importante: Esto es solo para coordenadas cartesianas, si tenermos nuestro vector en coordenadas cilíndricas ó esféricas tendremos que hacer la conversión correspondiente.

5.5. Multiplicación Escalar

Podemos multiplicar un vector por un valor fijo para aumentar su tamaño, simplemente multiplicamos cada componente por la constante de nuestro interés:

$$k \cdot \vec{A} = (k \cdot \vec{A}_x, k \cdot \vec{A}_y, k \cdot \vec{A}_z)$$

5.6. Modulo ó magnitud del Vector

El módulo de un vector es la longitud entre el inicio y el final del vector, podemos calcular la distancia desde el origen con la formula de distancia:

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Modulo del Vector Fuera Del Origen

Hay ocaciones en las que tenemos un vector que no parte desde el origen de nuestra gráfica, para eso simplemente tenemos que restar al vector el punto de origen, por ejemplo sí tenemos un vector $\vec{A} = (3, 5, 6)$ con origen en $g = (5, 6, 3)$ simplemente las restamos:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (3 - 5, 5 - 6, 6 - 3) \\ &= (-2, -1, 3) \end{aligned}$$

De este modo podemos calcular la magnitud del vector independientemente de su origen:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (-2, -1, 3) \\ |\vec{A}| &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

5.7. Producto Punto

Para representar el producto punto usamos el operador $\cdot$. Al producto punto también se le llama comúnmente producto escalar ya que el resultado siempre es una escalar. Es producto punto en palabras sencillas es la suma de la multiplicación componente por componente:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}\vec{B}^T$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}_1\vec{B}_1 + \vec{A}_2\vec{B}_2 + ... + \vec{A}_n\vec{B}_n$$

Una propiedad muy importante que debemos tener en cuenta es su relacion con los ángulos de los vectores, esto es muy útil para determinar los ángulos directores más adelante:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos(\theta)$$

5.8. Producto Cruz

El producto cruz al igual que el producto punto representa una operacion que raciona dos vectores y sus maginitudes, su operador es $\times$, a comparacion del producto punto el resultado No es un escalar, el producto cruz siempre devuelve otro vector:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \vec{A}_x & \vec{A}_y & \vec{A}_z \\ \vec{B}_x & \vec{B}_y & \vec{B}_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{A}_y\vec{B}_z - \vec{A}_z\vec{A}_y)i + (\vec{A}_z\vec{B}_x - \vec{A}_x\vec{A}_z)j + (\vec{A}_x\vec{B}_y - \vec{A}_y\vec{A}_x)k$$

Al igual que el producto punto el producto cruz representa la relación geométrica, la formula es muy parecida mas sin embargo ahora usamos el seno en vez del coseno, entre dos vectores:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin(\theta)$$

5.9. Producto Mixto

Se le conoce tambien como triple producto escalar, es la operacion que combina el producto punto y el rpoducto cruz. el resultado es un escalar:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \det \begin{pmatrix} \vec{A}_x & \vec{A}_y & \vec{A}_z \\ \vec{B}_x & \vec{B}_y & \vec{B}_z \\ \vec{C}_x & \vec{C}_y & \vec{C}_z \end{pmatrix}$$

6. Aplicaciones De Vectores

6.1. Vector Unitario

La característica fundamental del vector unitario es que su longitud siempre es igual a '1', no importa la dirección o el cuadrante mientras el modulo es igual a '1' entonces es unitario. El vector unitario es muy util para determinar la direccion de un vector sin tener que tomar en cuenta su magnitud. Para calcularlo simplemente dividimos los valores de nuestro vector entre el modulo.

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

6.2. Ángulos Entre Vectores

Si recordamos una de las propiedades de el producto punto y el producto cruz es que representan la relación entre el ángulo y las magnitudes de los vectores:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos(\theta) \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin(\theta)$$

Entonces si despejamos los vectores obtenemos las siguientes formulas:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \quad \sin(\theta) = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

6.3. Ángulos Directores

Es aquel angulo entre un vector y uno de los ejes (ya sea 'x', 'y' ó 'z'), para calcularlo solo tenemos que medir el ángulo entre nuestro vector y el eje que nos interesa conocer:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

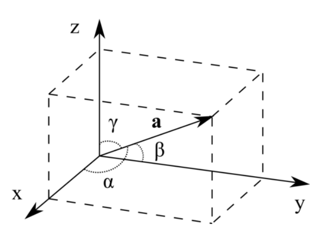


Figura 5: Ángulos directores de $\vec{a}$.

Despeje Del Los Ángulos Directores:

Estas formulas se despejan de la formula del producto punto, como es un vector unitario sobre cada eje los valorse que no usamos se anulan automáticamente[1]:

$$
\begin{aligned}
cos(\alpha) &= \frac{a_x \cdot 1 + \cancel{a_y \cdot 0} + \cancel{a_z \cdot 0}}{|\vec{a}| \cdot \sqrt{1^2 + \cancel{0^2} + \cancel{0^2}}} \\
cos(\alpha) &= \frac{a_x \cdot 1}{|\vec{a}| \cdot 1} \\
cos(\alpha) &= \frac{a_x}{|\vec{a}|}
\end{aligned}
$$

6.4. Área De Un Paralelogramo

Si tenemos dos vectores podemos calcular el area del del paralelogramo que se forma simplemente usando el producto cruz, Esto lo podemos verificar son el siguiente diagrama:

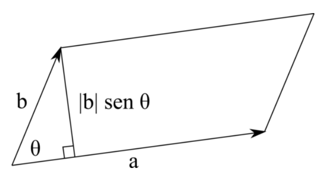


Figura 6: Paralelogramo

En primaria aprendimos que el área del paralelogramo es base por altura, sin embargo la altura del paralelogramo no se puede obtener midiendo sus lados ya que esta inclinado, si aplicamos trigonometría podemos saber que el valor del cateto opuesto (la altura) es igual al seno del angulo, entonces la formula quedaria:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \sin(\theta)$$

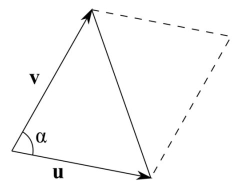
Y esto es exactamente a el valor de el producto cruz de dos vectores:

$$|a \times b| = |a||b| \sin(\theta)$$

6.5. Área Del Triangulo

Sabemos que el área del triangulo es igual al área de un rectángulo entre '2' también sabemos que el área del paralelogramo es su producto cruz, entonces para encontrar el área solo basta con divir el producto cruz entre '2':

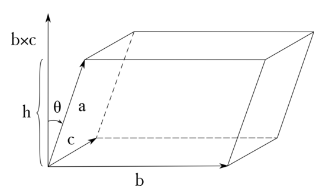
[1] También es posible usar el producto cruz para este procedimiento, pero por simplicidad se prefiere el producto punto.



$$A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$

6.6. Volumen De Un Paralelepípedo

Si queremos extender el paralelogramo a R^3 obtendremos un paralelepípedo que, al igual que el paralelogramo, podemos formarlo simplemente con vectores y como conocemos sus propiedades es fácil determinar su volumen aplicando el producto mixto:



$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$$

6.7. Volumen De Un Tetraedro

Al igual que con el paralelepípedo el tetraedro es una forma de extender una figura del plano al espacio, en este caso el triangulo, el volumen del tetraedro es igual a una sexta parte del producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\left(\vec{a} \cdot \left[\vec{b} \times \vec{c}\right]\right)$$

6.8. Determinar Sí Dos Vectores Son Ortogonales

Dos vectores son ortogonales (perpendiculares), si su producto escalar equivale a cero.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

7. Parametrizacion De Curvas Planas

La parametrizacion es una forma que tenemos en matemáticas de representar una función en con una tercera variable 't' de la cual dependen 'x' y 'y'.

7.1. Parametrizando Una Recta

Una de las ventajas que tenernos con la parametrizacion es que podemos definir una función si conocemos algunos de los puntos, por ejemplo si queremos parametrizar una recta de la cual desconocemos su función pero de la cual tenemos dos puntos podemos usar la siguiente formula:

$$P_0 + t(p_1 - p_0)$$

en donde 'P_0' y 'P_1' son los puntos que conocemos y 't' es una variable continua, Ejemplo si tenemos los puntos $P_0 =< 1, 2 >$ y $P_1 =< 3, 4 >$ sustituimos en la formula:

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} x : 1 + t(3-1) \\ y : 2 + t(4-2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x : 1 + 2t \\ y : 2 + 2t \end{cases} \end{aligned}$$

Una de las cosas que tenemos que notar es como tenemos una función para cada eje coordenado[2], si lo graficamos notaremos que si 't' es igual a '0' el valor que obtendremos es igual a P_0, pero si el valor de 't' es '1' el valor que obtenmos sera igual a P_1.

7.2. Curvas Planas Más Comunes

Nombre	Parametrizacion	Ecuación	Rango
Rectas	$\binom{x}{y} = P_0(1-t) + P_1 t$ $\binom{x}{y} = P_0 + t(P_1 - P_0)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$	$0 \leq t \leq 1$
Elipse	$\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + \binom{a\cos t}{b\sin t}$	$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1$	$0 \leq t \leq 2\pi$
Parábola	$\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + \binom{t}{t^2}$	$y - y_1 = m(x - x_1)^2$	—

Continúa en la siguiente página

[2]La formula anterior se puede extender a R^3.

Continúa de la página anterior

Nombre	Parametrizacion	Ecuación	Rango
Hipérbola	$\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + \binom{a \sec t}{b \tan t}$	$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} - \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1$	$0 \leq t \leq 2\pi$
Hipérbola (una hoja)	$\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + \binom{a \cosh t}{b \sinh t}$	—	$-2\pi \leq t \leq 2\pi$

8. Funciones y funciones De Dos Ó Mas Variables

Anterior mente solo hemos trabajado con funciones de una sola variable, las cuales tiene una variable de entrada y otra de salida, las funciones multivariable son similares pero ahora toman dos numeros y retornan solo uno.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

8.1. Ecuacion Del Plano

Un plano es un objeto ideal que solo posee dos dimensiones, y contiene infinitos puntos y rectas; es un concepto fundamental de la geometría junto con el punto y la recta. Cuando se habla de un plano de polina, se está hablando del objeto geométrico que no posee volumen, es decir bidimensional, y que contiene un número infinito de rectas y puntos.

$$ax + by + cz + d = 0$$

8.2. Recta En El Espacio

Para representar una recta es necesario hacer una ecuacion que represente los ejes de nuestro espacio coordenado:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

8.3. Dominio De Una Función

El dominio de la función es el conjunto de valores que se le puede dar a las variables independientes en una función, por ejemplo:

$$f(x) = \sqrt{2x + 4}$$

sabemos que la función de raíz cuadrada existe para todos los valores que son igual ó mayor a '0' (en números reales), entonces el dominio de la función seria[3]:

[3] Ambas formas de expresarlas son correctas.

$$\{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 \geq 0\} \quad \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$$

Ahora bien, encontrar el dominio cuando tenemos múltiples variables no es muy diferente pero dependiendo la función tendremos mas condiciones, ejemplo:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

al igual que en el ejemplo anterior tenemos una raíz, por lo que sabemos que $x + y + 1 \geq 0$, pero además tenemos una división por lo tanto tampoco la funcion existe en donde el denominador es '0', por lo tanto el dominio quedaría:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 \geq 0 \wedge x \neq 1\}$$

quizá ver el dominio asi es un poco intimidante, así que la voy a explicar parte por parte:

- $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la funcion existe en ($\in$) los numeros reales cuando...
- $x + y + 1 \geq 0$, la suma de $x + y + 1$ es mayor ó igual ($\geq$) que 0...
- $\wedge$, y...
- $x \neq 1$, x **NO** es igual a 1.

Es recomendable conocer las funciones discontinuas y en donde son discontinuas para encontrar el rango de manera mas rapida.

8.4. Rango De Una Función

El Rango ó imagen es el conjunto de números que dependen de la sustitución (tabulación) de los valores que puede tomar 'x' y 'y' en el dominio, en palabras mas sencillas es todos los valores que puede retornar las función:

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Es recomendable que antes de buscar el rango de la función determinemos el dominio, esto nos permite separar la función en varias funciones mas pequeñas de las cuales podemos encontrar el valor máximo con mas facilidad:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

como los valores de 'x' y 'y' se están restando[4] y la raiz no puede ser menor a '0' entonces determinamos que el maximo valor maximo de $9 - x^2 - y^2$ es '9' y como la funcion es raiz $\sqrt{9} = 3$.

Ahora para el valor minimo no hay mucho misterio, la funcion es raiz y en los reales no hay raices negativas, entonces el minimo valor es 0. Entonces el rango quedaria:

$$\{f(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x, y) \leq 3\}$$

[4]Al ser cuadrados los valores que obtenemos siempre son positivos.

8.5. Planos Más Comunes

Nombre	Ecuación
Plano	$ax + by + cz + d = 0$
Cilindro elíptico	$x^2 + y^2 = 1$
Cilindro hiperbólico	$x^2 - y^2 = 1$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Paraboloide elíptico	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
Paraboloide hiperbólico	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
Hipérbole de una hoja	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$
Hipérbole de dos hojas	$x^2 - y^2 - z^2 = 1$
Cono	$z^2 = x^2 + y^2$

9. Paginas De Consulta Y Recursos Utiles

9.1. Calculadoras

- Calculadora De Cartecianas A Clindricas, `https://tinyurl.com/y2ljx8fp`
- Calculadora De Cilindricas A Esfericas, `https://tinyurl.com/y5dzufw9`
- Maximos y minimos

9.2. Paginas

- `https://es.wikipedia.org/wiki/Cuadrante_(geometr%C3%ADa)`

- https://es.wikipedia.org/wiki/Octante_(geometr%C3%ADa)
- Coordenadas Cilindricas A Cartesianas, https://tinyurl.com/y3s49cv3
- Coordenadas Cilidnricas Y Esféricas, https://tinyurl.com/y3kdl2jc
- Coordenadas Cilindricas Y Esféricas, https://tinyurl.com/yxu823uh
- Definición De Vector, https://tinyurl.com/y675y7lb
- Producto Mixto, https://tinyurl.com/y5jzwdy2
- Ángulos Directores, https://tinyurl.com/yxvvlh7f
- Volumenes Y Área, https://tinyurl.com/y5s4udhp
- Representar superficies en tres dimensiones
- Ecuación de la recta en el espacio
- Parametrizacion
- Rango de una funcion

9.3. Videos

- Producto Punto Por Zach Star, https://tinyurl.com/y2x8dj88