Universidad Autonoma
de Baja California

Ingeniería en computación

Cálculo Multivariable

Ayudantias Cálculo

Autor:
Luis E. Galindo Amaya

22 de enero de 2022

Índice

1. Preámbulo

Este es un trabajo en proceso, todavía no ha sido finalizado y todavía no ha sido revisado. Sí tienes alguna idea para alguna corrección puedes mandarme un correo a mi correo egalindo54@uabc.edu.mx.

1.1. Sistema Algebraico Computacional

Estos apuntes están hechos para usarse en conjunto con el software CAS de George Weigt, Eigenmath, intentaré pasar los apuntes a Maxima en el futuro por si algo llegara a pasar.

1.2. Especificaciones

- Todos los ángulos son en radianes.
- Utilizaré la notación de subíndices al derivar, por ejemplo F_x es derivada de la variable 'x' y F_{xy} es la derivada de 'x' y luego la derivada de 'y'.
- Cuando escriba un vector empleará la notación , prefiero emplear las negritas a modo de énfasis.
- Los diagramas que aparecen aquí son meramente orientativos, por lo tanto, pueden o pueden no representar los nombres de las variables que empleo para las explicaciones.

2. Interpretar Un Plano

2.1. Eje coordenado

Un eje coordenado es una sección en la que dividimos una región del plano para después numerarla, usualmente los llamamos 'x', 'y' y 'z'.

2.2. Cuadrante

En Geometría euclidiana plana recibe el nombre de cuadrante cada una de las cuatro regiones infinitas en que los ejes del Sistema Cartesiano bidimensional dividen al plano. Estos cuadrantes están numerados de 1 al 4 (empezando en el superior derecho, en sentido anti-reloj) y denotados por números Romanos.

2.3. Octante

Un octante en geometría del espacio es cada una de las ocho divisiones coordenadas cartesianas tridimensionales dividen al espacio euclidiano definido por los signos de las coordenadas. Es similar al cuadrante bidimensional y al semi eje mono-dimensional.

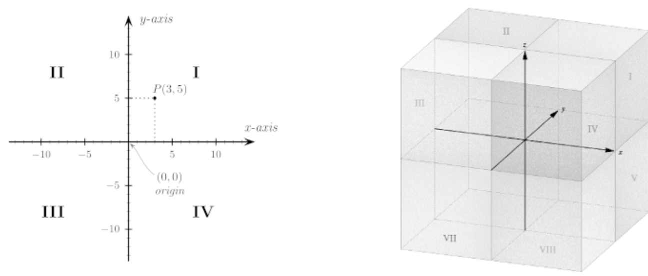


Figura 1: A la derecha cuadrantes y a la izquierda los octantes.

3. Representación De Punto En El Plano

Cuando trabajamos con planos cartesianos podemos marcar puntos indicando el número de su coordenada en cada respectivo eje, esTá una forma muy rápida de interpretar un punto en el espacio más no es la única y sobre todo cuando trabajamos con funciones circulares las representaciones rectangulares terminan complicando nuestro trabajo.

3.1. Rectangular o Cartesianas

Las coordenadas rectangulares son las coordenadas con las que hemos trabajado todo este tiempo, se representa con un número en cada eje coordenado y para extenderlo simplemente agregamos un número extra para cada valor que deseamos representar.

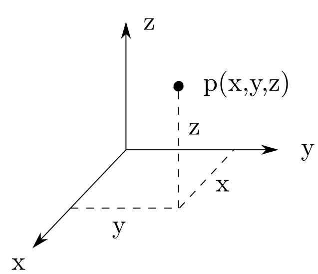


Figura 2: Coordenadas Rectangulares.

3.2. Polar o Cilíndrica

Una coordenada polar tiene dos partes principales, una longitud o radio (r) y un ángulo (θ), como cabe imaginar podemos representar figuras circulares con mucha facilidad, también es la notación más común para vectores en física.

Podemos extender esta representación en el espacio añadiendo el eje 'z', el cual nos indicara la altura hacia donde apunta el vector.

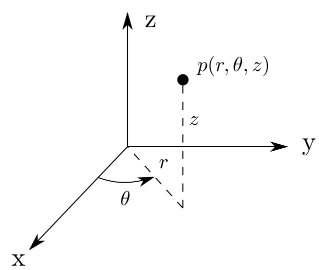


Figura 3: Coordenadas Cilíndricas.

3.3. Esférica

La representación esférica solo existe en el espacio, y como lo indica su nombre solo representa un valor en un volumen esférico, esta representación utiliza un radio que abarca los tres ejes (ρ [1]) dos ángulos para indicar la dirección del punto que deseamos representar, uno para los ejes 'x' y 'y' (θ) y uno para el eje 'z' (ϕ).

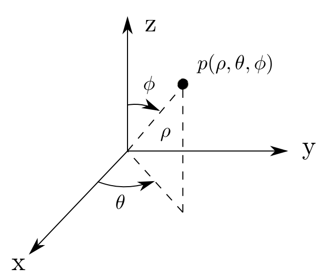


Figura 4: Coordenadas esféricas.

4. Conversión Entre Sistemas De Coordenadas

Ocasionalmente, tenemos que hacer conversiones entre dos o más sistemas de coordenadas, para hacer estas conversiones es necesario tomar en cuenta las propiedades geométricas de cada sistema.

4.1. Rectangulares A Polares

Las Coordenadas polares están compuestas de dos partes, un radio y un ángulo, tenemos dos fórmulas para calcular cada uno de los componentes:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = arctg\,(y/x)$$

[1] Esta letra se lee como rho, no confundir con p.

Importante: Estamos despejando un triángulo y dependiendo el cuadrante donde se encuentre el punto tenemos que sumar los ángulos que nos faltan:

Cuadrante	Grados	Radianes
I	0°	0
II	180°	π
III	180°	π
IV	360°	2π

4.2. Rectangulares A Cilíndricas

las coordenadas cilíndricas son una extensión al espacio de las coordenadas polares, por lo tanto, solo convertimos las coordenadas de los ejes 'x' y 'y' a polares y añadimos el eje de las 'z' sin hacer ningún cambio.

4.3. Rectangulares A Esféricas

Las coordenadas cilíndricas son otra forma de representar las coordenadas polares en el espacio, pero a comparación de las coordenadas cilíndricas ahora usamos dos ángulos para representar la dirección hacia la que apunta el vector:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = arctg\,(y/x) \quad \phi = arccos\,(z/\rho)$$

- **Importante**
  1. El ángulo ϕ (phi) **NO** necesita corrección.
  2. El ángulo θ (theta) **Si** ocupa corrección.

4.4. Polares A Rectangulares

La conversión de polares a rectangulares se puede hacer directamente con las siguientes fórmulas:

$$x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta)$$

Cada una corresponde a un eje coordenado, recordemos que las coordenadas polares únicamente sirven para representar puntos en el plano, por lo tanto, si queremos representar puntos en el espacio tendremos que usar coordenadas cilíndricas.

4.5. Polares A Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son la extensión directa de las coordenadas polares en el espacio, por lo tanto, tendremos que tomar el valor rectangular de nuestra coordenada en el eje 'z' y añadirla a nuestra representación polar.

4.6. Cilíndricas A Rectangulares

Para esta conversión simplemente tenemos que hacer las siguientes sustituciones:

$$x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta) \quad z = z$$

4.7. Cilíndricas A Esféricas

Para hacer esta conversión es necesario extender el radio a tres dimensiones y calcular el ángulo faltante, como ya tenemos el ángulo θ (theta) no tenemos que hacer correcciones al ángulo.

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} \quad \theta = \theta \quad \phi = arccos\,(z/\rho)$$

4.8. Esféricas A Rectangulares

Para esta conversión simplemente tenemos que hacer las siguientes sustituciones:

$$x = \rho\sin(\phi)\cos(\theta) \quad y = \rho\sin(\phi)\sin(\theta) \quad z = \rho\cos(\phi)$$

4.9. Esféricas A Cilíndricas

para convertir las coordenadas esféricas a cilíndricas tendremos que convertir el ángulo ϕ (phi) a su coordenada cartesiana 'z':

$$r = \rho\sin(\phi) \quad \theta = \theta \quad z = \rho\cos(\phi)$$

5. Vectores

Un vector es la representación matemática y gráfica de una magnitud vectorial. Consiste básicamente en una flecha o segmento rectilíneo orientado, es decir, con una determinada longitud, dirección y sentido, y que contiene toda la información de la magnitud que se está midiendo. Ejemplos de vectores:

$$(x, y, z) \quad (r, \theta) \quad (\rho, \theta, \phi)$$

5.1. Representación

En física usualmente se representan los vectores de forma polar ó cilíndrica, con una magnitud y un ángulo, pero esto no tiene por que ser siempre así, en calculo multivariable con mucha frecuencia se utiliza la la notación cartesiana (tres números dentro de un paréntesis representando cada eje coordenado) ó también la compleja (donde cada uno componentes es una variable 'i' es x 'j' es 'y' y 'z' es 'k'), ejemplo el vector (1,3,4) se puede representar de manera compleja como el punto 'i + 3j + 4k'.

5.2. Notación

Para identificar que un valor es un vector hay dos formas principales añadiendo una flecha en la parte superior de la variable ($\vec{A}$) o resaltando el nombre de la variable con negritas.

5.3. Vector Negativo

Si un vector tiene el símbolo negativo, todos sus componentes cambian su signo:

$$-\vec{A} = (-\vec{A}_1, -\vec{A}_2, ..., -\vec{A}_n)$$

Esto si el vector está en coordenadas rectangulares, cuando el vector está en polar añadimos 180° grados al ángulo:

$$\vec{A} = (3, 75°) \quad -\vec{A} = (3, -75°) = (3, 255°)$$

5.4. Suma y Resta de Vectores Rectangulares

Sumar vectores no representa más que la suma de independiente de cada uno de sus componentes.

$$\vec{A} + \vec{B} = (\vec{A}_x + \vec{B}_x, \vec{A}_y + \vec{B}_y, \vec{A}_z + \vec{B}_z)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (\vec{A}_x - \vec{B}_x, \vec{A}_y - \vec{B}_y, \vec{A}_z - \vec{B}_z)$$

Importante: Esto es solo para coordenadas cartesianas, si tenemos nuestro vector en coordenadas cilíndricas o esféricas tendremos que hacer la conversión correspondiente.

5.5. Multiplicación Escalar

Podemos multiplicar un vector por un valor fijo para aumentar su tamaño, simplemente multiplicamos cada componente por la constante de nuestro interés:

$$k \cdot \vec{A} = (k \cdot \vec{A}_x, k \cdot \vec{A}_y, k \cdot \vec{A}_z)$$

5.6. Módulo O Magnitud del Vector

El módulo de un vector es la longitud entre el inicio y el final del vector, podemos calcular la distancia desde el origen con la fórmula de distancia:

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Módulo del Vector Fuera Del Origen

Hay ocasiones en las que tenemos un vector que no parte desde el origen de nuestra gráfica, para eso simplemente tenemos que restar al vector el punto de origen, por ejemplo sí tenemos un vector $\vec{A} = (3, 5, 6)$ con origen en $g = (5, 6, 3)$ simplemente las restamos:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (3-5, 5-6, 6-3) \\ &= (-2, -1, 3) \end{aligned}$$

De este modo podemos calcular la magnitud del vector independientemente de su origen:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (-2, -1, 3) \\ |\vec{A}| &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

5.7. Producto Punto

Para representar el producto punto usamos el operador $\cdot$. Al producto punto también se le llama comúnmente producto escalar, ya que el resultado siempre es una escalar. Es producto punto en palabras sencillas es la suma de la multiplicación componente por componente:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}\vec{B}^T$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}_1\vec{B}_1 + \vec{A}_2\vec{B}_2 + ... + \vec{A}_n\vec{B}_n$$

Una propiedad muy importante que debemos tener en cuenta es su relación con los ángulos de los vectores, esto es muy útil para determinar los ángulos directores más adelante:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)$$

5.8. Producto Cruz

El producto cruz al igual que el producto punto representa una operación que raciona dos vectores y sus magnitudes, su operador es $\times$, a comparación del producto punto el resultado No es un escalar, el producto cruz siempre devuelve otro vector:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \vec{A}_x & \vec{A}_y & \vec{A}_z \\ \vec{B}_x & \vec{B}_y & \vec{B}_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{A}_y\vec{B}_z - \vec{A}_z\vec{A}_y)i + (\vec{A}_z\vec{B}_x - \vec{A}_x\vec{A}_z)j + (\vec{A}_x\vec{B}_y - \vec{A}_y\vec{A}_x)k$$

Al igual que el producto punto el producto cruz representa la relación geométrica, la fórmula es muy parecida más, sin embargo, ahora usamos el seno en vez del coseno, entre dos vectores:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin(\theta)$$

5.9. Producto Mixto

Se le conoce también como triple producto escalar, es la operación que combina el producto punto y el producto cruz[2]:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \det \begin{pmatrix} \vec{A}_x & \vec{A}_y & \vec{A}_z \\ \vec{B}_x & \vec{B}_y & \vec{B}_z \\ \vec{C}_x & \vec{C}_y & \vec{C}_z \end{pmatrix}$$

6. Aplicaciones De Vectores

6.1. Vector Unitario

La característica fundamental del vector unitario es que su longitud siempre es igual a '1', no importa la dirección o el cuadrante mientras el módulo es igual a '1' entonces es unitario. El vector unitario es muy útil para determinar la dirección de un vector sin tener que tomar en cuenta su magnitud. Para calcularlo simplemente dividimos los valores de nuestro vector entre el módulo.

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

6.2. Ángulos Entre Vectores

Si recordamos una de las propiedades del producto punto y el producto cruz es que representan la relación entre el ángulo y las magnitudes de los vectores:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos(\theta) \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin(\theta)$$

Entonces si despejamos los vectores obtenemos las siguientes fórmulas:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \quad \sin(\theta) = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

[2]El resultado es un escalar.

6.3. Ángulos Directores

Es aquel ángulo entre un vector y uno de los ejes (ya sea 'x', 'y' o 'z'), para calcularlo solo tenemos que medir el ángulo entre nuestro vector y el eje que nos interesa conocer:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

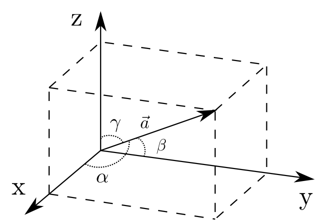


Figura 5: Ángulos directores de $\vec{a}$.

Despeje Del Los Ángulos Directores:

Estas fórmulas se despejan de la fórmula del producto punto, como es un vector unitario el eje los valores que no usamos se anulan automáticamente[3]:

$$cos(\alpha) = \frac{a_x \cdot 1 + a_y \cdot 0 \ + a_z \cdot 0}{|\vec{a}| \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}}$$
$$cos(\alpha) = \frac{a_x \cdot 1}{|\vec{a}| \cdot 1}$$
$$cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

6.4. Área De Un Paralelogramo

Si tenemos dos vectores podemos calcular el área del paralelogramo que se forma simplemente usando el producto cruz, Esto lo podemos verificar son el siguiente diagrama:

En primaria aprendimos que el área del paralelogramo es base por altura, sin embargo, la altura del paralelogramo no se puede obtener midiendo sus lados, ya que está inclinado, si aplicamos trigonometría podemos saber que el valor del cateto opuesto (la altura) es igual al seno del ángulo, entonces la fórmula quedaría:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \sin(\theta)$$

[3]También es posible usar el producto cruz para este procedimiento, pero por simplicidad se prefiere el producto punto.

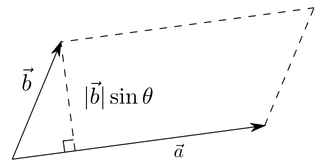


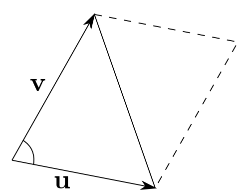
Figura 6: Paralelogramo.

Y esto es exactamente al valor del producto cruz de dos vectores:

$$|a \times b| = |a||b|\sin(\theta)$$

6.5. Área Del Triángulo

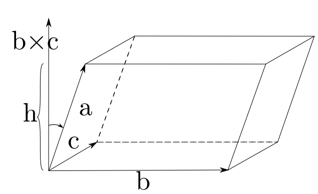
Sabemos que el área del triángulo es igual al área de un rectángulo entre '2' también sabemos que el área del paralelogramo es su producto cruz, entonces para encontrar el área solo basta con divir el producto cruz entre '2':



$$A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$

6.6. Volumen De Un Paralelepípedo

Si queremos extender el paralelogramo a R^3 obtendremos un paralelepípedo que, al igual que el paralelogramo, podemos formarlo simplemente con vectores y como conocemos sus propiedades es fácil determinar su volumen aplicando el producto mixto:



$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$$

6.7. Volumen De Un Tetraedro

Al igual que con el paralelepípedo el tetraedro es una forma de extender una figura del plano al espacio, en este caso el triángulo, el volumen del tetraedro es igual a una sexta parte del producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\left(\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right)$$

6.8. Determinar Sí Dos Vectores Son Ortogonales

Dos vectores son ortogonales (perpendiculares), si su producto escalar equivale a cero.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

7. Representacion De La Recta Plana

La recta es una entidad matematica fundamental, junto al punto y al plano, la recta o la línea recta es una línea que se extiende en una misma dirección y existen diversas maneras de representarla

7.1. Ecuacion De La Recta

En el pasado ya hemos trabajado con la ecuacion de la recta, donde la recta es representada como la relacion de igualdad entre dos o mas variables:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B}$$

7.2. Ecuacion Escalar De La Recta

Tambien conocida como implícita o general es la forma mas común de representar la recta, es una igualdad de sus variables con '0':

$$Ax + By + C = 0$$

7.3. Ecuacion Simetrica De La Recta

La ecuacion simetrica o canonica es muy parecida a la ecuacion escalar, en el sentido de que ambas son el resultado de una igualdad, la cosa que las hace fundamentalmente diferentes es que a comparación de la ecuacion escalar, la ecuacion simetrica es igual a '1':

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$$

7.4. Ecuacion Vectorial De La Recta

Un vector tiene varios compoenentes los cuales en conjunto forman una direccion, entonces si contamos con un vector que indique exactamente a la direccion de la funcion podemos usarlo para representarla:

$$(x, y) = P_0 + \lambda\vec{V}$$

Ejemplo De Ecuacion Vectorial

Una recta pasa por el punto $P_0 = (1, 2)$ y tiene un vector director $\vec{V} = (2, 2)$. El vector tiene su origen en el centro.

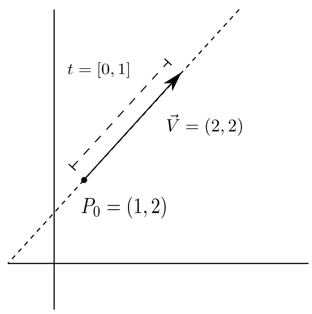


Figura 7: $(x, y) = (1, 2) + \lambda(2, 2)$

Es importante notar que el valor de 'λ' es un rango entre [0,1], donde '0' es el valor de el punto 'P_0', y '1' es el extremo de $\vec{V}$.

7.5. Parametrizacion De Una Recta

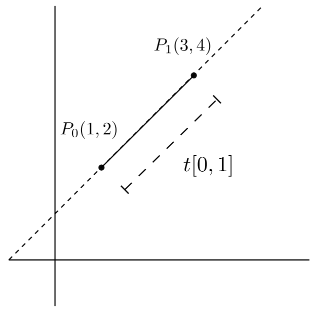
Ahora bien si conocemos dos puntos pertenecientes a la regla podemos calcular la pendiente y con ello la direccion de la recta:

$$(x, y) = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

Ejemplo De Parametrizacion De Una Recta

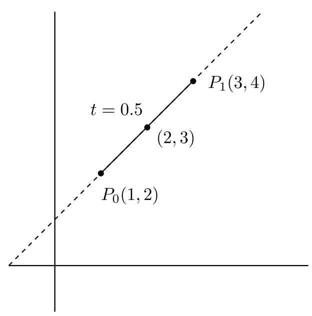
Tenemos los punto $P_0 = (1, 2)$ y $P_1 = (3, 4)$.

$$f(t) = \begin{cases} x : 1 + t(3 - 1) \\ y : 2 + t(4 - 2) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x : 1 + 2t \\ y : 2 + 2t \end{cases}$$



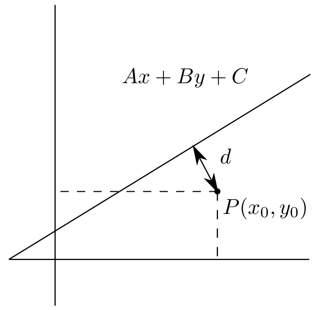
Es importante notar que el resultado son dos ecuaciones, una para cada eje. El valor 't' se puede entender como un porcentaje, donde '0' es el valor 'P$_0$' y '1' es el valor de 'P$_1$' si por ejemplo queremos conocer exactamente el punto intermedio entre 'P$_0$' y 'P$_1$' solo evaluamos el punto '0.5':

$$f(t) = \begin{cases} x : 1 + 2(0{,}5) \\ y : 2 + 2(0{,}5) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x : 2 \\ y : 3 \end{cases}$$



7.6. Distancia De Un Punto A Una Recta En El Plano

La distancia de un punto a una recta es la longitud de un segmento que, partiendo del punto del plano, sea perpendicular a la recta. Para que la longitud de ese segmento sea la mínima, el segmento y la recta deben de ser perpendiculares.



$$d = \frac{|\pi(P)|}{|\vec{\pi}|} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo De La Distancia

Calcular la distacia entre la funcion de $\frac{-12}{5}x + y - 4 = 0$ y el punto $M : (2,1)$:

$$\frac{|(-12/5)(2) + 1(1) - 4|}{\sqrt{(-12/5)^2 + 1^2}}$$
$$\frac{|-24/5 + 1 - 4|}{\sqrt{144/25 + 1}}$$
$$\frac{39/5}{13/5} = \boxed{3}$$

7.7. Curvas Planas Más Comunes

Nombre	Parametrizacion	Ecuación	Rango
Recta	$\binom{x}{y} = P_0(1-t) + P_1 t$ $\binom{x}{y} = P_0 + t(P_1 - P_0)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$	$0 \leq t \leq 1$
Elipse	$\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + \binom{a\cos t}{b\sin t}$	$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1$	$0 \leq t \leq 2\pi$
Parábola	$\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + \binom{t}{t^2}$	$y - y_1 = m(x - x_1)^2$	—
Hipérbola	$\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + \binom{a\sec t}{b\tan t}$	$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} - \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1$	$0 \leq t \leq 2\pi$
Hipérbola (una hoja)	$\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + \binom{a\cosh t}{b\sinh t}$	—	$-2\pi \leq t \leq 2\pi$

8. Ecuaciones De Dos O Mas Variables

Anterior mente solo hemos trabajado con funciones de una sola variable, las cuales tiene una variable de entrada y otra de salida, las funciones multivariable son similares, pero ahora toman dos números y retornan solo uno.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

8.1. Ecuación Del Plano

Un plano es un objeto ideal que únicamente posee dos dimensiones, y contiene infinitos puntos y rectas; es un concepto fundamental de la geometría junto con el punto y la recta. Cuando se habla de un plano, se está hablando del objeto geométrico que no posee volumen, es decir bidimensional, y que contiene un número infinito de rectas y puntos.

Implícita O General Del Plano

$$Ax + By + Cz + d = 0$$

Ecuación Vectorial Del Plano

$$(x, y, z) = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

8.2. Recta En El Espacio

Para representar una recta es necesario hacer una ecuación que represente los ejes de nuestro espacio coordenado:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

8.3. Dominio De Una Función

El dominio de la función es el conjunto de valores que se le puede dar a las variables independientes en una función, por ejemplo:

$$f(x) = \sqrt{2x + 4}$$

sabemos que la función de raíz cuadrada existe para todos los valores que son igual o mayor a '0' (en números reales), entonces el dominio de la función seria[4]:

$$\{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 \geq 0\} \quad \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$$

[4] Ambas formas de expresarlas son correctas.

Ahora bien, encontrar el dominio cuando tenemos múltiples variables no es muy diferente, pero dependiendo la función tendremos más condiciones, ejemplo:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

al igual que en el ejemplo anterior tenemos una raíz, por lo que sabemos que $x + y + 1 \geq 0$, pero además tenemos una división, por lo tanto, tampoco la función existe en donde el denominador es '0', como resultado, el dominio seria:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 \geq 0 \land x \neq 1\}$$

quizá ver el dominio así es un poco intimidante, así que la voy a explicar parte por parte:

- $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la funcion existe en ($\in$) los numeros reales cuando...
- $x + y + 1 \geq 0$, la suma de $x + y + 1$ es mayor o igual ($\geq$) que 0...
- $\land$, y...
- $x \neq 1$, x **NO** es igual a 1.

Es recomendable conocer las funciones discontinuas y en donde son discontinuas para encontrar el rango de manera más rápida.

8.4. Rango De Una Función

El Rango ó imagen es el conjunto de números que dependen de la sustitución (tabulación) de los valores que puede tomar 'x' y 'y' en el dominio, en palabras más sencillas es todos los valores que puede retornar la función:

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Es recomendable que antes de buscar el rango de la función determinemos el dominio, esto nos permite separar la función en varias funciones más pequeñas de las cuales podemos encontrar el valor máximo:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Como los valores de 'x' y 'y' se están restando[5] y la raíz no puede ser menor a '0' entonces determinamos que el <u>máximo valor máximo</u> de $9 - x^2 - y^2$ es '9' y como la función es raíz $\sqrt{9} = 3$.

Ahora para el <u>valor mínimo</u> no hay mucho misterio, la función es raíz y en los reales no hay raíces negativas, entonces el mínimo valor es 0. Entonces el rango quedaría:

$$\{f(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x, y) \leq 3\}$$

[5] Al ser cuadrados los valores que obtenemos siempre son positivos.

8.5. Puntos Críticos De Una Función

Para encontrar los puntos críticos de la función tendremos que calcular la derivada parcial de cada variable y resolverla como un sistema de ecuaciones:

$$f = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$$

$$f_x = -2 - 2x \quad f_y = 4y - 8y$$

$$\boxed{x = \frac{2}{-2}} \quad \boxed{y = \frac{-4}{-8}}$$

8.6. Clasificar Puntos Críticos (máximos, mínimos y sillas)

Evaluamos los puntos críticos de la función en el discriminante, el valor que obtendremos será la variación de la función, entonces solo aplicamos la lógica para encontrar el tipo de punto que tenemos.

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

Condiciones	Significado
$D > 0; f_{xx} > 0$	Es un mínimo
$D > 0; f_{xx} < 0$	Es un máximo
$D < 0$	Es un punto silla
$D = 0$	Intentar otro punto

clasificar los puntos criticos en la función

$$f = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$$

Sus derivadas parciales

$$f_{xx} = -2 \ ; \ f_{yy} = -8 \ ; \ f_{xy} = 0$$

puntos críticos

$$x = -1 \ ; \ y = \frac{1}{2}$$

sustituimos los valores de la formula de el diferencial:

$$D = (-2)(-8) - [0]^2 = 16$$

Entonces D es mayor a 0 y f_{xx} es menor a 0, por lo tanto el valor <u>es un maximo</u>.

8.7. Multiplicadores de Lagrange. Máximos y Mínimos Restringidos

Los multiplicadores de lagrange nos permiten encontrar valores maximos y minimos de f(x,y) sujeta a una restriccion g(x,y,z) = k, suponiendo que $\nabla g \neq 0$ se encuentre en la superficie g(x,y,z) = k,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Determianr los extremos de la funcion $f(x, y) = x^3 + 3xy^2$ restringida por la circunferencia $g : x^2 + y^2 = 4$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 3x^2 + 3y^2 \\ 6xy \end{bmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x^2 + 3y^2 \\ 6xy \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Para completar el sistema de ecuaciones usamos las restricciones como las ecuaciones que nos faltan, (en mas información esta el vídeo donde de explica este ejercicio).

$$\begin{bmatrix} 3x^2 - 2\lambda x = 0 \\ 6xy - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{bmatrix} = P\left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right)$$

Por ultimo evaluamos los puntos en la función inicial

$$p_1 : f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$$
$$p_2 : f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$$
$$p_3 : f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8\sqrt{2}$$
$$p_4 : f\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -8\sqrt{2}$$

Entonces podemos concluir que p_1 y p_2 son máximos absolutos y p_3 y p_4 son mínimos absolutos.

8.8. Plano Entre Tres Puntos

Anteriormente parametrizamos una funcion gracias a que conociamos dos puntos que tertenecian a la funcion, en R^3 es posible aplicar este mismo metodo pero ahora son necesarios tres punto.

$$Det \begin{pmatrix} x - a_x & y - a_y & z - a_z \\ b_x - a_x & b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_y - a_y & c_z - a_z \end{pmatrix}$$

Ejemplo De Plano Entre Tres Puntos

Enontrar el plano entre los puntos $A(3,2,1)$, $B(-4,-1,1)$ y $C(-5,-3,-1)$.

$$Det\begin{pmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -4-3 & -1-2 & 1-1 \\ -5-3 & -3-2 & -1-1 \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -7 & -3 & 0 \\ -8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinate

$$\begin{aligned} &(x-3)(-3\cdot(-2)-(0)\cdot -5)+ \\ &(y-2)(-7\cdot(-2)-(0)\cdot -8)+ \\ &(z-1)(-7\cdot(-5)-(-3)\cdot -8)=0 \end{aligned}$$

$$(6)(x-3)+(-14)(y-2)+11(z-1)=0$$

$$\boxed{6x-14y+11-1=0}$$

8.9. Plano Que Pasa Por Un Punto Y Es Perpendicular Otro

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P=(1,2,2) y es perpendicular al plano de $r: x-y+z=1$

encontramos el producto cruz:

$$\begin{aligned} \vec{r}\times\vec{P} &= (-2-2)i+(1-2)j+(2+1)k \\ &= -4i-j+3k \end{aligned}$$

lo convertimos en vector:

$$-4i-j+3k=(-4,-1,3)$$

y formamos la ecuación de la recta con los valore obtenidos:

$$\begin{aligned} P &= (x_0,y_0,z_0) \\ r\times P &= (x_1,y_1,z_1) \end{aligned}$$

sustituimos:

$$\begin{aligned} &x_1(x-x_0)+y_1(y-y_0)+z_1(z-z_0)=0 \\ &-4(x-1)+(-1)(y-2)+3(z-2)=0 \\ &-4x+4-y+2+3z-6=0 \\ &\boxed{-4x-y+3z=0} \end{aligned}$$

8.10. Ángulos Entre Planos

Encontrar el angulo entre dos planos es una tarea bastante trivial que se puede resolver con una simple formula:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{A}\cdot\vec{B}|}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$$

Ejemplo de Ángulo Entre Planos

Calcular el angulo entre los planos A y B:

$$A : 2x - y + z - 1 = 0$$
$$B : x + z + 3 = 0$$

Separamos la ecuacion en sus partes y calculamos los componentes:

$$|\vec{A}\cdot\vec{B}| = |2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 1| = 3$$
$$|A| = |\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}| = \sqrt{6}$$
$$|B| = |\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}| = \sqrt{2}$$

sustituimos la formula:

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{6}\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y por ultimo despejamos el coseno:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{30^\circ}$$

8.11. Distancia De Un Punto A Una Recta En El Espacio

La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada desde el punto.

$$d = \frac{|\overrightarrow{QP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|(\vec{Q}-\vec{P})\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Ejercicio de Distancia

La formula se compone de tres partes principales, el vector director de la recta ($\vec{v}$), un punto que esta en la recta (Q) y el punto respecto al cual podemos medir (P).
Podemos extraer estos valores facilmente de las representaciones de la recta:

Ecuación Canónica

$$\pi(t) : \frac{x-7}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{1}$$

$$\vec{Q} = (7,4,3) \quad \vec{v} = (2,3,1)$$

Ecuación Parimétrica

$$\pi(t) : \begin{cases} x = & 2t+7 \\ y = & 3t+4 \\ z = & t+3 \end{cases}$$

$$\vec{Q} = (7,4,3) \quad \vec{v} = (2,3,1)$$

Aplicación De La Fórmula

Encontrar la distancia Aplicando la formula:

$$P = (1,5,3) \quad \vec{Q} = (7,4,3) \quad \vec{v} = (2,3,1)$$

Con los vectores obtenidos calculamos los valores faltantes:

$$\overrightarrow{QP} = (7-1, 4-5, 3-3) = (6,-1,0)$$

$$\overrightarrow{QP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 6 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i(-1\cdot 1 - 0\cdot 3) + j(6\cdot 1 - 0\cdot 2) + k(6\cdot 3 - (-1)\cdot 2)$$
$$i(-1) + j(-6) + k(20) = (-1,-6,20)$$

y sustituimos en la formula:

$$d = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-6)^2 + 20^2}}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{437}{14}} = \boxed{5{,}5869...}$$

8.12. Distancia De Un Punto A Un Plano

Podemos extender la formula de 'Distancia De Un Punto A Una Recta En El Plano' a R^3 facilemente:

$$d = \frac{|\pi(P)|}{|\vec{\pi}|} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo De Distancia

Encontrar la distancia entre:

$$P(1, 3, -2) \quad \pi : 2x + 5y - 4z + 7 = 0$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{|2(1) + 5(3) - 4(-2) + 7|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{|2 + 15 + 8 + 7|}{\sqrt{4 + 25 + 16}} \\ &= \boxed{\frac{32}{\sqrt{45}}} \end{aligned}$$

8.13. Distancia Entre Rectas

La primera cosa que debemos tomar en cuenta cuando deseamos encontrar la distancia es que tipo de funcion estamos midiendo, hay cuatro tipos principales de rectas

Concidentes

Si dos rectas se encunetrar una encima de la otra entonces se dicen que las rectas son 'Concidentes' y su distancia minima es 0.

Secantes

Cuando Las rectas se tocan en algun punto comun con otra recta, son lo poesto a las paralelas, al igual que las concidentes su distancia minima es 0.

Distancia Entre Rectas Paralelas

Las rectas paralelas no se tocan en ningun punto, para dentificar si una recta es paralela a otra tenemos que obtener el vector de direccion si con iguales y no se encuentran la una sobre la otra podemos decir que son paralelas.

$$d = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|(\vec{Q} - \vec{P}) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Ejemplo de distancia con Rectas paralelas

Encontrar la distancia entre las rectas:

$$\pi : \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1} \quad \alpha : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{1}$$

Identificamos el vector de direccion, de ambas rectas:

$$\vec{\pi} : (1,3,1) \quad \vec{\alpha} : (1,3,1)$$

Por lo tanto:

$$\vec{v} = (1,3,1)$$

Como son iguales podemos determinar que ambas funciones son paralelas entonces vamos a aplicar la fomula de distancia al punto, el valor de los puntos se obtumo igualando a '0' el denominador de la divicion en la ecuacion:

$$\vec{P} = (1,-2,0) \quad Q = (-2,1,-4)$$

obtenemos los componentes:

$$\overrightarrow{QP} = (-2-1, 1-(-2), -4-0) = (-3,3,-4)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2+3^2+1^2} = \sqrt{11}$$

Formamos la matriz para el producto punto:

$$\begin{aligned}(\vec{Q}-\vec{P}) \times \vec{v} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ -3 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (15,-1,-12)\end{aligned}$$

y calculamos el valor absoluto:

$$\begin{aligned}|(\vec{Q}-\vec{P}) \times \vec{v}| &= \sqrt{15^2+(-1)^2+(-12)^2} \\ &= \sqrt{370}\end{aligned}$$

Ahora sustituimos:

$$\frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \boxed{\sqrt{\frac{370}{11}} u}$$

Distancia Entre Rectras No Paralelas (Oblicuas)

Por ultimo Las Rectas Oblicuas, La formula es parecida pero ahora tenemos dos vectores por lo que debemos relacionarlos con el producto punto:

$$d = \frac{|(\vec{B} - \vec{A}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Ejmplo De Ditancia Con Rectas Oblicuas
Encontrar la distancia entre las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{-1} \quad s : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-2}$$

Primero tenemos que extraer los vectores de direccion y sus puntos:

$$r : \begin{cases} \vec{u} = (2, 4, -1) \\ A(1, 2, -2) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \vec{v} = (1, 3, -2) \\ B(3, -1, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (3-1, -2-1, 1-2) = (2, -3, 3)$$

Aplicamos el punto mixto:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| &= det \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= |-13| \\ &= 13 \end{aligned}$$

Producto cruz:

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}| &= |-5i + 3j + 2k| \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (3)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{25 + 9 + 4} \\ &= \sqrt{38} \end{aligned}$$

y sustituimos:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \\ &= \frac{13}{\sqrt{38}} \\ &= \boxed{2{,}11u} \end{aligned}$$

8.14. Planos Más Comunes

Nombre	Ecuación
Plano	$ax + by + cz + d = 0$
Cilindro elíptico	$x^2 + y^2 = 1$
Cilindro hiperbólico	$x^2 - y^2 = 1$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Paraboloide elíptico	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
Paraboloide hiperbólico	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
Hipérbole de una hoja	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$
Hipérbole de dos hojas	$x^2 - y^2 - z^2 = 1$
Cono	$z^2 = x^2 + y^2$

9. Derivadas Multivariables

9.1. Derivadas Parciales

Una derivada parcial (∂) es igual que la derivada normal, solamente que si tiene otra variable diferente la tomaremos como si fuera una constante, esta operación se puede realizar para cada variable ejemplo $f(x,y) = 2xy$ tiene dos derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} 2xy = \underbrace{2y}_{f_x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} 2xy = \underbrace{2x}_{f_y}$$

9.2. Derivadas Parciales De Orden Superior

Cuando derivamos parcialmente obtenemos otra funcion, que igualmente podemos derivar respecto a otra variable, por ejemplo si tenemos la funcion $f(x,y) = x^2y^3$ podemos derivarla respecto a 'x' o 'y':

$$\frac{\partial}{\partial x} x^2y^3 = 2xy^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y} x^2y^3 = 3xy^2$$

Ahora si tambien deseamos conocer la segunda derivada tambien podemos derivar con respecto a ambas variables[6]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) x^2y^3 = 2y^3$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial xy}\right) x^2y^3 = 6xy^2$$

Árbol De Derivadas Parciales

$$\begin{tikzcd}
& & & \sin(x)y^2 \arrow[dll, "\frac{\partial}{\partial x}"'] \arrow[drr, "\frac{\partial}{\partial y}"] & & & \\
& \cos(x)y^2 \arrow[dl, "\frac{\partial}{\partial x}"'] \arrow[dr, "\frac{\partial}{\partial y}"] & & & & 2\sin(x)y \arrow[dl, "\frac{\partial}{\partial x}"'] \arrow[dr, "\frac{\partial}{\partial y}"] & \\
\sin(x)y^2 & & 2\cos(x)y & & 2\cos(x)y & & 2\sin(x)
\end{tikzcd}$$

[6]Cuando trabajamos derivadas parciales es mas común usar la notación de sufijo para representar la derivada $\mathrm{f_{xy}}$ $\mathrm{f_{xx}}$.

9.3. Regla De La Cadena

La regla de la cadena es una formula que nos permite obtener la derivada de funciones compuestas de dos funciones, esta es muy común de usarla en problemas de derivación básicos pero también se puede extender a problemas de múltiples variables:

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ejercicio De Regla De La Cadena

Para resolver este tipo de ejercicio primero tenemos que conocer la función, la variable respecto a la que queremos derivar, y los valores de nuestras variables:

$$u = x^2 \quad v = x\sin y \quad w = x + y$$

$$f(u,v,w) = u^2v^4w$$

Ahora ya que conocemos nuestras variables y la función, es recomendable armar la expresión correspondiente a la cadena, esto nos permitirá realizar las sustituciones con mayor facilidad. Para armar nuestra ecuacion tenemos que derivar parcialemente con respecto a cada variable y multiplicar el valor de la derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

Ahora viendo la expresión resultante es solo cuestión de sustituir con las derivadas que pide la expresión:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{(2uv^4w)}_{f_u}\underbrace{(2x)}_{u_x} + \underbrace{(4u^2v^3w)}_{f_v}\underbrace{(\sin y)}_{v_x} + \underbrace{(u^2v^4)}_{f_w}\underbrace{(1)}_{w_x}$$

Por ultimo solo queda hacer la sustituciones de u,v,w y tratar de hacer las simplificaciones correspondientes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \underbrace{4x^7\sin^4 y}_{f_u u_x} + \underbrace{4x^8\sin^4 y + 4x^7 y\sin^4 y}_{f_v v_x} + \underbrace{x^8\sin^4 y}_{f_w w_x}\\ &= 5x^8\sin^4 y + 4x^7 y\sin^4 y + 4x^7\sin^4 y\\ &= \boxed{\sin^4 y(5x^8 + 4x^7) + 4x^7 y\sin^4 y}\end{aligned}$$

9.4. Gradiente

El gradiente (∇) de una funcion es simplemente un vector que contiene todas las derivadas parciales de una funcion:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

Ejercicio Gradiente

Encontrar el gradiente de $3x^4 - y^3 + x^2y^2 + 5$:

$$\nabla f(x,y) = \boxed{\begin{bmatrix} 12x^3 + 2xy^2 \\ 2x^2y - 3y^2 \end{bmatrix}}$$

9.5. Matriz Jacobiana

La matriz Jacobiana de una función vectorial de varias variables es la matriz cuyos elementos son las derivadas parciales de primer orden de dicha función.

$$\mathbf{J}\begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1x} & \dots & f_{nz} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1x} & \dots & f_{nz} \end{bmatrix}$$

Ejercicio Matriz Jacobiana

Encontrar la matriz jacobiana de f:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} a: & 12x^3 + 2xy^2 \\ b: & 2x^2y - 3y^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}f &= \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{bmatrix} \\ &= \boxed{\begin{bmatrix} 36x^2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 6y \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

9.6. Matriz Hessiana

Es la matriz cuadrada de tamaño n $\times$ n, de las segundas derivadas parciales.

$$\mathbf{H}f(x_n) = \mathbf{J}(\nabla f(x_n))$$

9.7. Calcular Divergencia

La divergencia mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control:

$$\nabla \cdot f = diag(\mathbf{J}f)$$

Ejercicio Divergencia

Para encontrar la divergencia ($\nabla \cdot f$) basta calcular la matriz Jacobiana de nuestro vector y extraer la diagonal:

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2z^2 \\ -2y^2z^2 \\ xy^2z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}f = \begin{bmatrix} 2xz^2 & 0 & 2x^2z \\ 0 & -4yz^2 & -4y^2z \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{bmatrix}$$

Ahora que tenemos la matriz jacobiana extrameos la diagonal, y la expresión resultante es el valor de la divergente:

$$diag(\mathbf{J}f) = \begin{bmatrix} 2xz^2 & & \\ & -4yz^2 & \\ & & xy^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot f = \boxed{2xz^2 - 4yz^2 + xy^2}$$

9.8. Calcular El Rotacional

el rotacional o rotor es un operador vectorial sobre campos vectoriales definidos en un abierto de R^3 que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(a) & Q(a) & R(a) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k \end{aligned}$$

Ejercicio De Rotacional

Calcular el rotacional de F:

$$F = \begin{bmatrix} y^3 - 9y \\ x^3 - 9z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times F &= (0-(-9))\, i + (0-0)j + \left(3x^2 - (3y^2 - 9)\right) k \\
&= \boxed{9i + \left(3x^2 - 3y^2 + 9\right) k}
\end{aligned}
$$

9.9. Derivada Direccional

La derivada direccional de una función multivariable, representa la tasa de cambio de la función en la dirección de dicho vector[7]:

$$
D_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v} \tag{1}
$$

$$
D_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \frac{d}{dt} f(\vec{x} + t\vec{u})|_{t=0} \tag{2}
$$

En el curso de calculo diferencial aprendimos que la derivada puede representar la pendiente de la función, ahora la derivada direccional nos permite conocer la pendiente en funciones multivariables como ahora estamos trabajando sobre tres ejes es necesario saer la direccion hacia la que estamos midiendo la pendiente.

Razón De Cambio Derivada Direccional (Formula 1)

Razón de cambio de la funcion $f = x^2y^3 - 4y$, en el punto $x = (1, 2)$ sobre el vector $\vec{v} = (2, 5)$[8].

$$
\begin{aligned}
\nabla f \cdot \vec{v} &= \begin{bmatrix} 2xy^3 \\ -4 + 3x^2y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\
&= 15x^2y^2 + 4xy^3 - 20 \\
&= 15(1)^2(2)^2 + 4(1)(2)^3 - 20 \\
&= \boxed{72}
\end{aligned}
$$

Razón De Cambio Derivada Direccional (Formula 2)

Razón de cambio de la funcion $f = x^2y^3 - 4y$, en el punto $x = (1, 2)$ sobre el vector $\vec{v} = (2, 5)$[8].

Primero tenemos que parametrizar la direccion de la que vamos a calcular:

$$
\begin{aligned}
x + t\vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x : 1 + 2t \\ y : 2 + 5t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

[7]La formula 1 solo funciona para funciones diferenciable en el punto, mientras que 2 es valida para cualquier punto.

[8]Podemos simplificar los calculos utilizando el vector unitario.

ahora que las variables 'x' y 'y' se pueden representar con una variable común evaluamos la funcion sustituyedo 'x' y 'y' por su correspondiente parametrizacion

$$
\begin{aligned}
f &= x^2y^3 - 4y \\
&= (1+2t)^2(2+5t)^3 - 4(2+5t) \\
&= 500t^5 + 1100t^4 + 965t^3 + 422t^2 + 72t
\end{aligned}
$$

el resultado que obtuvimos es, por decirlo de algún modo, la parametrizacion de 'f', y como ahora ya tenemos una función de una sola variable podemos derivar sin ningun problema:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(500t^5 + 1100t^4 + 965t^3 + 422t^2 + 72t\right)|_{t=0} \\
&(2500t^4 + 4400 + t^3 + 2895t^2 + 844t + 72)|_{t=0} \\
&= \boxed{72}
\end{aligned}
$$

10. Integrales De Multiples Variables O Iteradas

10.1. Integrales Dobles

Las integrales dobles son una manera de integrar sobre una región bidimensional. Entre otras cosas, nos permiten calcular el volumen bajo una superficie.

Las integrales múltiples se realzan exactamente igual que si solo tuviera una variable, pero si al momento de integrar hay otra variable simplemente la tomamos como una constante, es muy importante tomar en cuenta el orden de las derivadas al final de la expresión primero resolveremos la integral más cercana a la función.

$$
\underbrace{\int \overbrace{\int f(x,y)\,dy}^{\text{Primera Integral}}\,dx}_{\text{Segunda Integral}}
$$

Ejemplo De Integral Doble

Una integral doble definida, el resultado es el volumen sobre el área que va del cero al uno en el eje 'x' y 'y'.

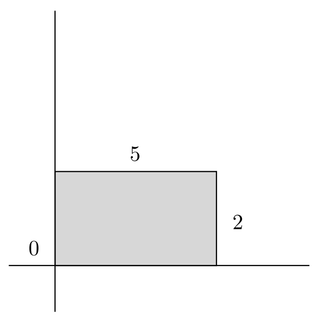
$$\int_0^1 \int_0^1 x + y \, dx \, dy$$
$$\int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}x^2 \right)\Big|_0^1 dy$$
$$\int_0^1 (1)y + \frac{1}{2}(1)^2 \, dy$$
$$\int_0^1 y + \frac{1}{2} \, dy$$
$$\left(y^2 + \frac{1}{2}y \right)\Big|_0^1 = \boxed{1u^3}$$

10.2. Área De Integración Rectangular

Integrar algunas funciones nos permiten determinar algunas de las características del rango de integración, por ejemplo la si integramos '1' podemos determinar el área de la región de integración.

Ejemplo de integración de un área

Área de un rectángulo de 2 de altura y 5 de anchura.



$$\int_0^2 \int_0^5 1 \, dx \, dy = \boxed{10u^2}$$

Podemos verificar que la integral es correcta calculando el área de un rectángulo:

$$5 \times 2 = 10u^2$$

10.3. Integrales Triples

Las integrales triples son iguales a las integrales dobles, pero añadimos una variable extra 'z', y al ser el triple nos sirve para calcular volúmenes en regiones el espacio.

10.4. Volumen De Integración Rectangular

Si recorremos cada derivada ya podemos imaginar cuál es la aplicación de la integral triple, integración en un volumen, el procedimiento es exactamente igual que las derivadas dobles.

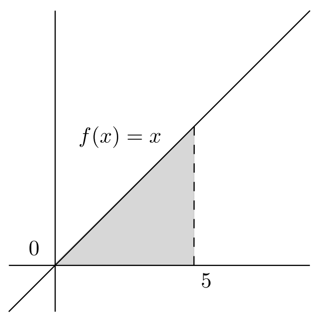
$$\int\int\int 1 \; dz\,dy\,dx$$

10.5. Variables En Los Limites

Algunas veces tenemos funciones que son dependientes de otras, resolverlas no es un problema, ya que la integral definida nos permite utilizar valores variables. Es importante ordenar correctamente cuál variable vamos a integrar primero, la integral definida es la última que integraremos:

$$f(x) > f(x,y) > f(x,y,z)$$

Integral Con Una Función Dependiente De X



$$\int_0^5 \underbrace{\int_0^x 1\,dy}_{x} \; dx$$

$$\int_0^5 x\,dx = \boxed{12{,}5u^2}$$

Aquí tenemos una integral donde 'y' es igual a 'x' y 'x' va del 0 hasta el 5, entonces la primera integral será la integral de 'y'.

Integral Con Una Función Dependiente De Y

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} 1\,dx\,dy = \boxed{\frac{8}{3}u^2}$$

10.6. Integrales Polares Y Cilíndricas

Importante: Al cambiar la integral de rectangular a Polar es necesario multiplicar la función por el radio, esto se tiene que hacer siempre que integramos en coordenadas polares.

$$\iiint f(r,\theta,z)\ \underline{\ r\ }\ dV$$

Muchas veces el tema de integrales con otros sistemas de coordenadas es un poco de entender intuitivamente, así que primero me gustaría explicar por qué son útiles, ya que usualmente tendremos que identificar por nuestra cuenta cuando tenemos que usarlas y una vez entendidas sus propiedades es muy fácil emplearlas a aplicarlas.

Simplificar funciones

La primera cosa que nos facilitan las integrales circulares es reducir algunas expresiones, sobre todo las que están relacionadas con los círculos, por ejemplo:

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\ dy\, dx$$

la función que estamos integrando tiene como grafica un círculo, integrar esta función sería bastante complicado en coordenadas rectangulares, pero si revisamos las sustituciones podremos notar rápidamente que podemos sustituir x^2+y^2 por 'r':

Rectangulares	Polares	Esféricas
x	$r\cos(\theta)$	$\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta)$
y	$r\,\mathrm{sen}(\theta)$	$\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta)$
z	z	$\rho\cos(\varphi)$
$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$	r^2	—
y / x	$\tan(\theta)$	$\tan(\theta)$
—	r	$\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)$
—	θ	θ

ahora que tenemos la función en polares tenemos que multiplicar por la variable de radio:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2}\cdot r\ dr\, d\theta$$

Ahora la integral resultante es muy sencilla de resolver, no aplica para todas las funciones, pero es ejemplo muy sencillo.

Rango

Las funciones rectangulares tienen cuentan con tres componentes para representar los ejes coordenados 'x', 'y' y 'z' , las coordenadas polares también tienen tres componentes 'θ', 'r' y 'z', 'z' es igual para ambas:

- θ es el ángulo el eje 'x'.
- r es el radio o distancia de un punto al centro.

El valor que tiene propiedades más interesantes es sin duda θ, ya que al ser en grados podemos saber que su valor va del '0' hasta '2π', y para limitar el área de integración solo basta con conocer el cuadrante de nuestro interés.

Ejemplo de integral en coordenadas polares

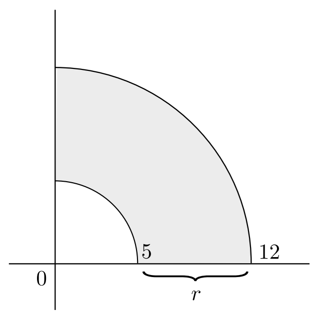


Figura 8: área de un disco

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_5^{12} r\, dr\, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \underbrace{\int_5^{12} r\, dr}_{\frac{1}{2}r^2}\ d\theta$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{119}{2}\, d\theta = \boxed{\frac{119\pi}{4} u^2}$$

10.7. Volumen En Integrales Cilíndricas

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{5} \int_0^{8} r\ \ dz\, dr\, d\theta$$

Ya conocemos como integrar múltiples variables, en este caso mejor me limitaré a dar una interpretación de la integral.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^5 \underbrace{\int_0^8 r \; dz}_{\text{Variable de barrido}} \; dr\, d\theta$$

Anteriormente, calculamos el volumen de integración de una integral rectangular para esto utilizamos la función $f(x, y, z) = 1$ podemos entender esta función como 'medir el volumen de integración en segmentos de $1 \times 1 \times 1$', bien entonces si estamos midiendo nuestro espacio en ángulos en forma de radianes vamos a 'medir' el volumen de integración 'radián a radián'.

10.8. Integracion Esferica

Importante: Al cambiar la integral de rectangular a Esferica es necesario multiplicar la función por $\rho^2 \operatorname{sen}(\phi)$, esto se tiene que hacer siempre que integramos en coordenadas esfericas.

$$\iiint f(\rho, \theta, \varphi) \; \underline{\rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)} \; dV$$

Otro sistema que podemos utilizar para calcular integrales es el sistema de coordenadas esféricas, que tiene como ventaja que cuenta con dos ángulos

- ρ es la longitud radial.
- θ es el angulo entre los ejes 'x' y 'y'.
- φ es el angulo que se forma con el eje 'z'.

Rectangulares	Polares	Esféricas
x	$r\cos(\theta)$	$\rho \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta)$
y	$r\operatorname{sen}(\theta)$	$\rho \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta)$
z	z	$\rho\cos(\varphi)$
$x^2 + y^2$	r^2	—
y / x	$\tan(\theta)$	$\tan(\theta)$
—	r	$\rho\operatorname{sen}(\varphi)$
—	θ	θ

10.9. Momentos y Centros De Masa

El centro de masas de un sistema discreto o continuo es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema.

Volumen O Masa De La Figura

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA$$

Primeros Momentos De Inercia

$$M_x = \iint_D y\ \rho(x,y)\,dA \qquad M_y = \iint_D x\ \rho(x,y)\,dA$$

Centros de masa

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\ \rho(x,y)\,dA \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\ \rho(x,y)\,dA$$

Segundos Momentos De Inercia

$$I_x = \iint y^2 f(x,y)\,dA \qquad I_y = \iint x^2 f(x,y)\,dA$$

Momento De Inercia Con Respecto Al Origen

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2+y^2)\ f(x,y)\,dA$$

Radios De Giro

$$\bar{\bar{x}} = \sqrt{\frac{I_y}{m}} \qquad \bar{\bar{y}} = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad \bar{\bar{r}} = \sqrt{\frac{I_0}{m}}$$

10.10. Momentos Y Centros De Masa Con Integrales Triples

Volumen O Masa

$$m = \iiint_R f(x,y,z)\,dV$$

Momentosde Masa

$$M_{yz} = \iiint_R x\ f(x,y,z)\,dV$$

$$M_{xz} = \iiint_R y\ f(x,y,z)\,dV \qquad M_{xy} = \iiint_R z\ f(x,y,z)\,dV$$

10.11. Teorema De Fubini Para Integrales Dobles

$$\iint_B f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

10.12. Teorema De Fubini Para Integrales Triples

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

11. Funciones Vectoriales

11.1. Aplicaciones de funciones vectoriales

Una función vectorial es una funcion que trnaforma un numero real a un vector $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definida como $F(t) = (x(t), y(t), z(t))$, las funciones vectoriales son muy utiles para describir movimientos en el espacio o para parametrizar algunas figuras.

11.2. Graficar Una Funcion Vectorial

Una funcion vectorial graficada se suele ver como un conjunto de flechas que apuntan en alguna direccion, por lo general es muy complicado graficar la funcion de manera continua por lo que normalente se evalua a intervalos regulares.

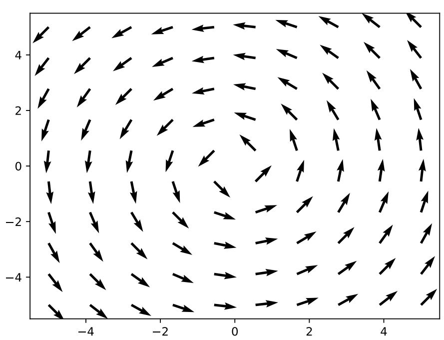


Figura 9: Ejemplo de una función vectorial.

11.3. Movimiento De Una Particula (Velocidad, Rapidez, Aceleracion)

Una de las aplicaciones mas conocidas de las derivadas es describir los componentes de su movimiento, en calculo multivariable no es muy diferente, es posible describir el movimento de una particula en R^3 simplememnte conociendo las funciones de su movimiento:

Componente	Descripción
Velocidad	Es la derivada de la posicion $v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.
Rapidez	Es el valor absoluto de la Velocidad $\|v\|$.
Aceleracion	Es la segunda derivada de la velocidad $a = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.
Sobreaceleracion	La tercera derivada de la velocidad $J = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}$.
Direccion	Del movimiento en el tiempo es el vector unitario $\hat{r}$.

Ejemplo De Movimento De Una Particula

Calcular Velocidad, Rapidez, Aceleracion y Sobreaceleracion de r(t):

$$r(t) = \begin{pmatrix} 40t^2 + 8t \\ 2cos(3t) \\ 2sen(3t) \end{pmatrix}$$

Velocidad

$$r'(t) = \begin{pmatrix} 80t + 8 \\ -6sen(3t) \\ 6cos(3t) \end{pmatrix}$$

Rapidez

$$\begin{aligned} |r'(t)| &= \sqrt{(80t+8)^2 + (-6sen(3t))^2 + (6cos(3t))^2} \\ &= \sqrt{1600t^2 + 1280t + 100} \end{aligned}$$

Aceleracion

$$r''(t) = \begin{pmatrix} 80 \\ -18cos(3t) \\ -18sen(3t) \end{pmatrix}$$

Sobreaceleración

$$r'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 54sin(3t) \\ -54cos(3t) \end{pmatrix}$$

12. Recursos Útiles

12.1. Calculadoras

- Calculadora De Cartesianas A Cilíndricas, `https://tinyurl.com/y2ljx8fp`
- Calculadora De Cilíndricas A Esféricas, `https://tinyurl.com/y5dzufw9`
- Máximos Y Mínimos, `https://tinyurl.com/y3lku7y8`
- Rango De Una Función, `https://tinyurl.com/yf9cnh26`
- Ángulo Entre Planos, `https://tinyurl.com/ybraww5h`
- Ángulo Entre Planos, `https://tinyurl.com/ybraww5h`

12.2. Páginas

- Coordenadas Cilíndricas A Cartesianas, `https://tinyurl.com/y3s49cv3`
- Coordenadas Cilíndricas Y Esféricas, `https://tinyurl.com/y3kdl2jc`
- Coordenadas Cilíndricas Y Esféricas, `https://tinyurl.com/yxu823uh`
- Definición De Vector, `https://tinyurl.com/y675y7lb`
- Producto Mixto, `https://tinyurl.com/y5jzwdy2`
- Ángulos Directores, `https://tinyurl.com/yxvvlh7f`
- Volúmenes Y Área, `https://tinyurl.com/y5s4udhp`
- Representar Superficies En Tres Dimensiones, `https://tinyurl.com/y6owjzp`
- Ecuación De La Recta En El Espacio, `https://tinyurl.com/y68tsc7w`
- Parametrización, `https://tinyurl.com/y24nhnmv`
- Rango De Una Función, `https://tinyurl.com/yf9cnh26`
- Regla De La Cadena, `https://tinyurl.com/yb3ewrno`
- Gradiente, Divergencia Y Rotacional, `https://tinyurl.com/yaz9vknn`
- Ecuación Vectorial De La Recta, `https://tinyurl.com/y9fxz2su`
- Integrales Esféricas, `https://tinyurl.com/y9buex8u`
- Funciones Vectoriales De Una Variable Real, `https://tinyurl.com/y8osgges`
- Plano Que Pasa Por Tres Puntos, `https://tinyurl.com/yazp3ay3`
- Distancia De Un Punto A Una Recta, `https://tinyurl.com/y8a4l3yn`

- Ángulo De Dos Planos, https://tinyurl.com/y8skgoas
- Distancia Entre Dos Rectas En El Espacio, https://tinyurl.com/yd7x7o2h
- Teorema De Fubini, https://tinyurl.com/yc8dpltq

12.3. Videos

- Producto Punto Por Zach Star, https://youtu.be/TBpDMLCC2uY
- Regla De La Cadena, https://youtu.be/DFn9wUEBnbU
- Distancia Entre Dos Rectas Paralelas, https://youtu.be/zu2-Hrn-qKU
- Plano Perpendicular En Un Punto, https://youtu.be/KrPYYW_504U