Cálculo Multivariable

Apuntes

Galindo

[2021-08-06 vie]

Contents

1 Funciones discontinuas más comunes

Funciones Discontinuas Más Comunes:

- Un numero dividido entre 0 es indefinido, por lo tanto una función dividida entre 0 también es indefinida y por lo tanto discontinua.
- A los números negativos no le podemos sacar raíz cuadrada en el dominio de los números reales.
- Tangente, en los puntos $\frac{(2k+1)\pi}{2}$.
- Secante, en los puntos $\frac{(2k+1)\pi}{2}$.
- Cosecante, en los puntos πk.
- logaritmo de 10 en $x \leq 0$

2 Representación del plano

un plano es un objeto ideal que solo posee dos dimensiones, y contiene infinitos puntos y rectas; es un concepto fundamental de la geometría junto con el punto y la recta. Su ecuación es la siguiente:

$$ax + by + cz + d = 0$$

otras formas de representar el plano también podrían ser las siguiente:

3 Ecuación vectorial del plano

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_0$$

4 Ecuación escalar

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

5 Plano Entre Tres Puntos

Para determinar la funcion que se forma con tres puntos en el espacio, sustituimos los valores y calculamos el determinante de la matriz resultante:

$$Det \begin{pmatrix} x - a_x & y - a_y & z - a_z \\ b_x - a_x & b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_y - a_y & c_x - a_z \end{pmatrix}$$

eigenmath | KhiCas

6 Ángulo Entre Planos

para calcular el angulo entre dos planos usamos la siguiente ecuación:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

donde n es un punto en $\mathbb{R}^3$, primero determinamos el valor absoluto de la normal de n_1 y de n_2 y los multiplicamos, ese sera nuestro divisor; Para el denominador calculamos el producto cruz entre n_1 y n_2 y obtenemos su valor de la normal; Y por ultimo calculamos el arco coseno $(cos^{-1}(\theta))$ de nuestra división, ojo que el resultado esta en radianes.

eigenmath | Video

7 Plano que pasa por un punto y es perpendicular a otro plano

Para encontrar un plano perpendicular podemos aplicar una de las operaciones de vectores el producto cruz, pero primero tendremos que encontrar el vector de la función. Y ya con el vector solo tenemos que encontrar el vector perpendicular (producto cruz) y pasamos los valores a la ecuación escalar del plano:

Punto por el que queremos que pasase la función:

$$A = (2, 3, 4)$$

Función y su forma de vector:

$$3x + 2y + z - 6 = 0 \rightarrow B = (3, 2, 1)$$

producto cruz (C):

$$Det \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (5, -10, 5)$$

por ultimo sustituimos en la ecuación del plano:

$$5(x - 2) - 10(y - 3) + 5(z - 4) = 0$$

$$5x - 10y + 5z = 20 + 10 - 30$$

$$\boxed{5x - 10y + 5z = 0}$$

Video

8 Vector de una recta o función

Para obtener el vector de una función simplemente extraemos los valores escalares que están multiplicando a nuestros valores coordenados:

función:

$$\frac{1}{2}x + 7y - 4z - 6 = 0$$

su vector:

$$(\frac{1}{2}, 7, -4)$$

9 Parametrizacion de una recta con dos puntos

Sustituimos los valores en la siguiente formula, P_1 es el punto de origen, P_2 punto final y t es un valor entre 0 y 1

$$P_1 + t \cdot (P_2 - P_1)$$

Calculadora

10 Ecuación paramétrica de la recta a una ecuación simétrica

La ecuación simétrica de la recta nos permite encontrar la ecuación continua de la recta[1] simplemente resolviendo la ecuacion en los términos que necesitemos.

$$L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Para calculara simplemente tenemos que sustituir nuestro punto de paso P_0 y nuestro vector de dirección $\vec{a}$ en los valores en la formula:
Identificamos nuestro punto de paso y nuestro vector de dirección:

$$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = -2 \\ z = -2 + 5t \end{cases}$$

punto de paso $P_0 = (-4, -2, -2)$. vector de dirección $\vec{a} = (2, 0, 5)$.
ahora sustituimos:

$$L: \frac{x - 4}{2} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 2}{5}$$

Cuando nos quede 0 en el denominador de alguna ecuación simplemente sustituimos el valor por su igualación a 0:

$$L: \frac{x - 4}{2} = \frac{z - 2}{5} \wedge y = -2$$

[1]

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Video

11 Coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas

Rect.	Polares	Esféricas
x	$r\cos(\theta)$	$\rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$
y	$r\sin(\theta)$	$\rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$
z	z	$\rho\cos(\varphi)$
x^2+y^2	r^2	
$x^2+y^2+z^2$		ρ^2
y/x	$\tan(\theta)$	$\tan(\theta)$
	r	$\rho\sin(\varphi)$
	θ	θ

12 Coordenadas rectangulares a esfericas

Las coordenadas esféricas requieren dos ángulos, por lo que se parecen mucho a las coordenadas polares. θ funciona exactamente como en coordenadas polares, sí $x=0$ y $y>0$ el ángulo es 90°; sí $x=0$ y $y<0$ el ángulo es 270°.

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \varphi = cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Calculadora

13 Dominio de una función

> Los valores para los cuales la función está definida. Variable independiente

El dominio son los valores de X que puede tomar una función:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

La primera cosa que debemos tomar en cuenta en que puntos la función es discontinua, en este caso la función tiene dos discontinuidades, en el numerador y en el denominador.

En el denominador no puede haber un número cero, entonces solo basta con resolver la ecuación $x - 1 = 0$ para encontrar la discontinuidad. $x = 1$

Como los números negativos no tienen raíces, no hay números reales que multiplicados sean negativos, se puede inferir que la función no existe en ningún punto que donde $x + y + 1 < 0$.

Entonces, con la información que ya conocemos podemos decir que la función existe en todos los puntos donde $x + y + 1$ sea mayor a 0 y donde X sea diferente de 0. En notación matemática el dominio se escribiría así:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 \geq 0 \wedge x \neq 1 \right\}$$

Video

14 Imagen de una función (Rango)

> Conjunto de valores que puede tomar la función. Variable dependiente.

El rango o imagen de una función es todo valor de Y que puede tomar nuestra función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

- Sí la función a la cual queremos calcular su rango solo tiene un parámetro, significa que nos encontramos con una función vectorial $n = 1$.
- Por otro lado sí la función acepta dos parámetros y retorna un tercero entonces estamos ante una superficie. $n = 2$ y $m = 3$.

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Para encontrar el rango es muy recomendable encontrar primero el dominio de la función, así podemos saber donde debemos empezar a evaluar, para nuestro ejemplo el dominio de la función es $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9$.

La primera cosa que podemos notar en la función es que es una raíz, eso significa que no puede ser un valor negativo, por lo tanto el valor mas pequeño al que podemos calcular la raíz en el dominio de los reales es el número 0, este sería el valor mínimo de la imagen.

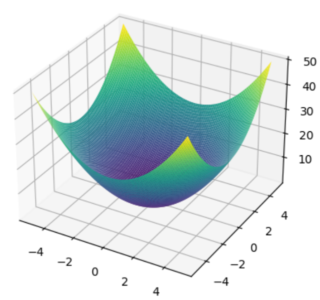
También podemos notar que los valores están elevados al cuadrado (los valores de X^2 y y^2 siempre son positivos) entonces sus valores siempre se le restan a 9 y entonces como siempre se van a restar los valores, podemos inferir que el valor más alto que puede retornar esta función es $\sqrt{9}$, este sería el valor máximo de la imagen.

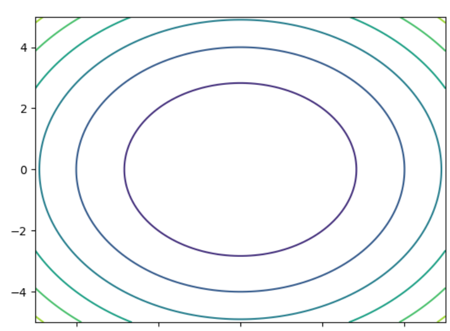
El resultado que obtenemos es que el dominio de la función se extiende continuamente desde $[0, 3]$.

Video

15 Curvas de nivel

Las curavs de nivel son proyecciones bidimencionales de funciones en tres dimenciones, estas nos permiten ver los valores de la proyeccion rapidamente sin nececidad de un graficador.





16 Derivadas parciales

La derivada parcial se denota como $\frac{\partial}{\partial x}$ o tambien como un subindice en el nombre de la funcion $f_x = \frac{\partial}{\partial x}$. Para calcular la derivada parcial de una funcion debemos calcular la derivada de la variable indicada mientras el otro valor lo tomamos como una constante. Si la es la derivada parcial de x, tendriamos algo así:

$$f = x^2 + x^2y^3 + y^2$$
$$f_x = \boxed{2x + 2xy^3}$$

17 Derivadas parciales multiples

Es comun que un procedimiento requiera mas de una derivada parcial, usualmente se denota como f_{xy} donde cada subindice es una derivada parcial:

$$f = x^2 + x^2y^3 + y^2$$
$$f_x = 2x + 2xy^3$$
$$f_{xy} = \boxed{6xy^2}$$

cabe resaltar que el orden si afecta como derivamos, si nuestra funcion nos pide la derivada f_yx primero derivamos y y luego x[2].

18 Derivada de orden superior

Cuando tenemos multiples variables hay varias posibles derivadas, cada una correspondiente a cada variable que podemos tomar:

$$f = x^2 + x^2y^3 + y^2$$
$$f_x = 2x + 2xy^3$$

ya que tenemos nuestra derivada parcial determinamos cuales son las posibles derivadas parciales, en este caso todavia tenemos variables x y y, entonces podemos hacer las derivadas parciales:

$$f_{xx} = 2 + 2y^3 \qquad f_{xy} = 6xy^2$$

[2] Las funciones lineales como en el ejemplo cumplen con la propiedad $f_{xy} = f_{yx}$, sin embargo si nuestra funcion NO es lineal entonces esta propiedad no se cumple.