Vectores

Apuntes

Galindo

[2021-08-11 mié]

Contents

1 Definiciones

1.1 Magnitud

Atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente. También se entiende como cantidad física formada por un número y la unidad de medida respectiva.

1.2 Escalares

Cantidad física que solo tiene magnitud. Son ejemplo de escalares: distancia, masa, tiempo, rapidez, temperatura, área, volumen, densidad, trabajo, energía, potencia y frecuencia. Los escalares pueden ser manipulados por las reglas del álgebra ordinaria.

```
Ejemplos:

4 m, 5 kg, 60 s, 20 m/s, 37 °C...
```

1.3 Vectores

Cantidad física que tiene magnitud, dirección y sentido. Son ejemplo de vectores: la velocidad, la aceleración, la fuerza, el peso, la cantidad de movimiento, el desplazamiento, campo eléctrico y el campo magnético.(la palabra vector significa portador en latín).

```
Ejemplos:

-4 m/s, +9.8 m/s^2, 500 N 30°...
```

Origen | Más información

2 Notacion

2.1 Representación

Para representar un vector usamos la notación $\vec{A}$ o también podemos usar negritas $\mathbf{A}$.

2.2 Magnitud

Es como se le llama a la **longitud** del vector, para representar la magnitud del vector usamos dos líneas paralelas $|\vec{A}|$, posee unidades y siempre es positiva. Cuando dos vectores tienen la misma magnitud y la misma longitud se dice que son iguales independientemente si el punto de origen es otro.

$$V_r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

3 Sistemas de coordenadas

3.1 Rectangulares

Es el sistema de coordenadas con el que estamos más familiarizados, donde un punto en el espacio se representa con un número en su respectivo eje, por ejemplo $(1, 43, 5)$ corresponde a un punto ubicado en X:1, Y:43 y Z:5. Esta representación es muy fácil de operar debido a que sus componentes se pueden manipular individualmente.

3.2 Polares

La representación que más se asemeja a la definición matemática de vector, ya que cuenta con un valor escalar que representa su magnitud o longitud y con un ángulo que representa su inclinación, ejemplo $(10, 160)$ corresponde a una línea de radio 10 a 160° grados respecto al origen. Una característica muy importante de esta representación es que **NO** se pueden sumar directamente, requiere algún tipo de manipulación algebraica.

4 Vectores notables

4.1 Vector unitario

Es un vector cuya magnitud es igual a uno, pero con la misma dirección que un vector dado, se denota frecuentemente con un acento circunflejo $\hat{r}$. Para determinar el vector tenemos que dividir nuestro vector entre el valor de su módulo (o magnitud).

```
Ejemplo:

 A  = <32,43,32>
|A| = 62.43
```

```
    = <32/62.43, 43/62.43, 32/62.43>

Resultado: <0.51,0.68,0.51>
```

4.2 Vectores deslizantes

Son aquellos vectores que pueden moverse sobre su línea de acción sin cambiar su magnitud y dirección.

4.3 Negativo de un vector

Se define el negativo de un vector como aquel que sumado con el vector original, da como resultante cero. El negativo de un vector posee la misma magnitud que el vector original, pero apunta en dirección opuesta (+180°).

Ejemplos: El negativo del vector (10, 50°) es (10, 230°)

5 Convercion de sistemas de cordenadas

5.1 Polares a rectangulares

No hay mucho misterio para la conversión de polares a rectangulares, simplemente sustituimos nuestros valores en las fórmulas [1].

$$V_x = r\sin(\theta) \quad V_y = r\cos(\theta) \quad V_z = z$$

5.2 Rectangulares a Polares

Primero para obtener el radio de nuestra coordenada:

$$V_r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La segunda parte es más complicada, ya que debemos encontrar el ángulo que forma el eje x y nuestro radio la función para determinarla es la siguiente:

$$V_\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Pero esta función solo funciona para números mayores a 0 en el primer cuadrante del plano, sin embargo podemos manipular la ecuación para ajustarla a nuestro cuadrante adecuado. Otra cosa importante es que la función

[1] Para convertir polares a rectangulares con la fx-82MS puedes utilizar la función "rec" así "rec(10, 10):f" y de polares a rectangulares "pol(10, 10):f".

es discontinua eso significa que sí $x = 0$ no podemos realizar la evolución de la función, sin embargo en estos casos podemos utilizar la lógica para encontrar el ángulo [1].

condicion	grados	radianes
x>0, y≥0	arctg(y/x)	arctg(y/x)
x=0, y>0	90°	$\pi/2$
x<0	arctg(y/x) + 180°	arctg(y/x) + π
x=0, y<0	270°	$3\pi/2$
x>0, y<0	arctg(y/x) + 360	arctg(y/x) + 2π

Sí X=0 y Y>0 eso nos indica que el radio se encuentra exactamente sobre el eje Y apuntando hacia arriba (90°); Sí X=0 y Y<0 eso significa que el radio se encuentra exactamente sobre el eje Y pero apuntando hacia abajo (270°).

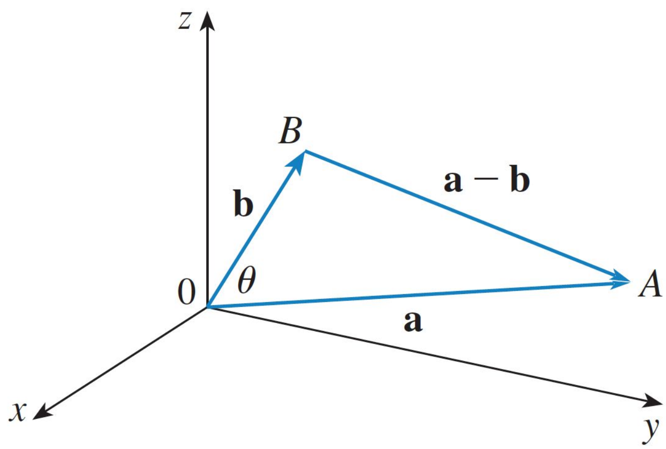
Más Información

6 Operaciones con vectores

6.1 Producto punto

También conocido como producto escalar o producto interno, es una operación que convierte dos vectores de igual dimensión y retorna un solo número:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |a||b| \cos(\theta)$$



Más Información

6.1.1 Propiedades

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= |a|^2 \\
a \cdot b &= b \cdot a \\
a \cdot (b \cdot c) &= a \cdot b + a \cdot c \\
(\mathbf{c}a) \cdot b &= \mathbf{c}(a \cdot b) = a \cdot (\mathbf{c}b) \\
0 \cdot a &= 0
\end{aligned}
$$

6.1.2 Aplicaciones

Una de las propiedades del producto punto es ayudarnos a calcular los ángulos directores; Los cosenos directores son aquellos ángulos que forma el vector con los ejes coordenados. Partiendo de que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \left|a\right|\left|b\right| \cos(\theta)$ eso significa que podemos despejar el ángulo entre dos vectores:

$$cos(\alpha) = \frac{a \cdot i}{|a||i|}$$

Sí sustituimos i con un vector unitario sobre uno de los ejes coordenados podemos determinar los ángulos con respecto a cada uno de los ejes:

Eje x:

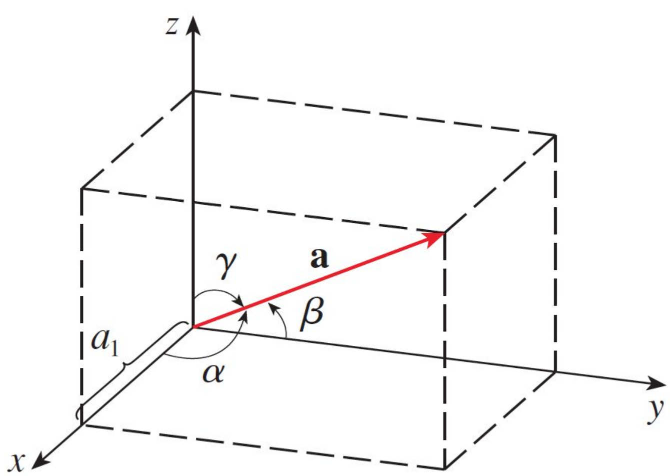
$$cos(\alpha) = \frac{a_x}{|a|}$$

Eje y:

$$cos(\beta) = \frac{a_y}{|a|}$$

Eje z:

$$cos(\gamma) = \frac{a_z}{|a|}$$



Más información

6.2 Producto cruz

Producto vectorial o producto vectorial de Gibbs, Es una operación entre dos vectores y da como resultado un vector perpendicular a los vectores que se multiplican:

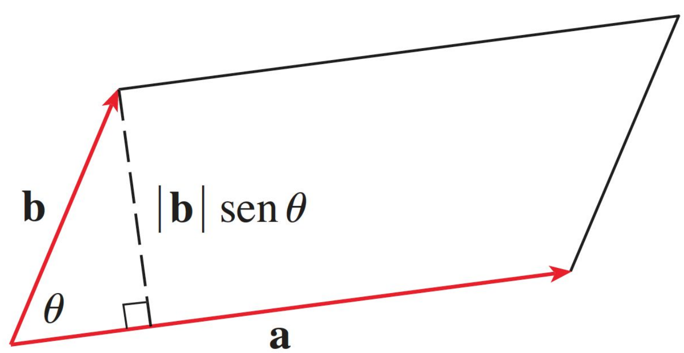
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{cases} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{cases}$$

Más información

6.2.1 Aplicaciones

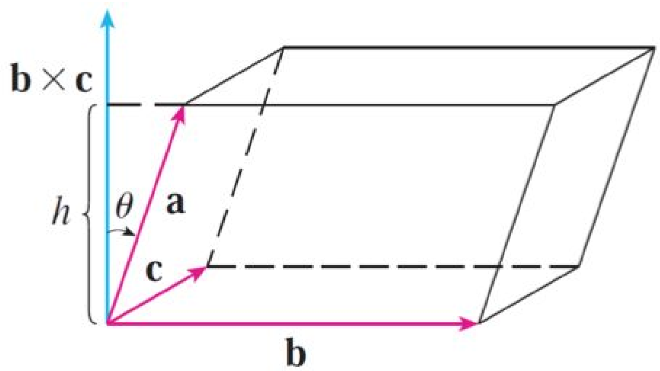
Área de un paralelogramo: La extensión del producto cruz es igual al área del paralelogramo determinado por **a** y **b**.

$$|a|(|b|sen(\theta)) = |a \times b|$$



Volumen de un paralelepípedo: Se puede determinar el volumen de un paralelepípedo calculando la magnitud de su triple producto escalar:

$$V = |a \cdot (b \times c)|$$



6.3 Suma de vectores

La forma más sencilla de sumar vectores es sin duda aprovecharnos de las propiedades del sistema de coordenadas rectangulares, hay que recordar que las coordenadas polares **NO** se pueden sumar directamente pero las rectangulares si.

```
Ejemplo:

<100, 50°>
    X: 100 * sin(50°) = 64.28
    Y: 100 * cos(50°) = 76.60

<70, 0°>
    X: 70 * sin(0°) = 70
    Y: 70 * cos(0°) = 0

<50, 120°>
    X: 50 * sin(120°) = -25.00
    Y: 50 * cos(120°) = 43.30
```

```
<35, 200°>
    X: 50 * sin(120°) = -32.89
    Y: 50 * cos(120°) = -11.97

-----

    X: 64.28 + 70 - 25 - 32.09 = 77.28
    Y: 76.60 + 43.3 - 11.97    = 107.93

Resultado (Escalar): <76.39, 107.93>
```

por último podemos cambiar su representación nuevamente a polar, sí el ejercicio lo requiere.

Más información

6.4 Resta de vectores

La resta de vectores es simplemente la suma de un vector más otro vector opuesto $A + (-B)$.x