

# Ma Spec 100p – Linjär Algebra – Kapitel 4.2

Samuel Bayley Eriksson

March 9, 2023

I uppgift 7–14 använd antingen ett lämpligt teorem för att visa att den givna mängden  $W$  är ett vektorrum, eller hitta ett exempel som motbevisar det.

7.  $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : a + b + c = 2 \right\}$

8.  $\left\{ \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} : 5r - 1 = s + 2t \right\}$

9.  $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{array}{l} a - 2b = 4c \\ 2a = c + 3d \end{array} \right\}$

10.  $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{array}{l} a + 3b = c \\ b + c + a = d \end{array} \right\}$

11.  $\left\{ \begin{bmatrix} b - 2d \\ 5 + d \\ b + 3d \\ d \end{bmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$

12.  $\left\{ \begin{bmatrix} b - 5d \\ 2b \\ 2d + 1 \\ d \end{bmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$

13.  $\left\{ \begin{bmatrix} c - 6d \\ d \\ c \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}$

14.  $\left\{ \begin{bmatrix} -a + 2b \\ a - 2b \\ 3a - 6b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

31. Definiera  $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  som  $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}$ .

a) Visa att  $T$  är en linjär transformation. [*Hint:* För godtyckliga polynom  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  i  $\mathbb{P}_2$ , beräkna  $T(\mathbf{p} + \mathbf{q})$  och  $T(c\mathbf{p})$ .]

b) Hitta ett polynom  $\mathbf{p}$  i  $\mathbb{P}_2$  som spänner upp kärnan till  $T$  och beskriv värdemängden till  $T$ .

32. Definiera en linjär transformation  $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  som  $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(0) \end{bmatrix}$ . Hitta polynom  $\mathbf{p}_1$  och  $\mathbf{p}_2$  i  $\mathbb{P}_2$  som spänner upp kärnan till  $T$  och beskriv värdemängden till  $T$ .

33. Låt  $M_{2 \times 2}$  vara vektorrummet av alla  $2 \times 2$  matriser och definiera  $T: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$  som  $T(A) = A + A^T$ .

a) Visa att  $T$  är en linjär transformation.

b) Låt  $B$  vara godtyckligt element ur  $M_{2 \times 2}$  så att  $B^T = B$ . Hitta ett  $A$  i  $M_{2 \times 2}$  så att  $T(A) = B$ .

c) Visa att värdemängden till  $T$  är mängden av alla  $B$  i  $M_{2 \times 2}$  där  $B^T = B$ .

d) Beskriv kärnan till  $T$ .

35. Låt  $V$  och  $W$  vara vektorrum och låt  $T: V \rightarrow W$  vara en linjär transformation. Givet ett delrum  $U$  till  $V$ , låt  $T(U)$  beteckna mängden av alla bilder på formen  $T(\mathbf{x})$  där  $\mathbf{x} \in U$ . Visa att  $T(U)$  är ett delrum till  $W$ .