Ma Spec 100p – Linjär Algebra – Kapitel 4.2

Samuel Bayley Eriksson

March 9, 2023

I uppgift 7–14 använd antingen ett lämpligt teorem för att visa att den givna mängden W är ett vektorrum, eller hitta ett exempel som motbevisar det.

7. $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : a+b+c=2 \right\}$

8. $\left\{ \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} : 5r-1=s+2t \right\}$

9. $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{matrix} a-2b=4c \\ 2a=c+3d \end{matrix} \right\}$

10. $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{matrix} a+3b=c \\ b+c+a=d \end{matrix} \right\}$

11. $\left\{ \begin{bmatrix} b-2d \\ 5+d \\ b+3d \\ d \end{bmatrix} : b,d \in \mathbb{R} \right\}$

12. $\left\{ \begin{bmatrix} b-5d \\ 2b \\ 2d+1 \\ d \end{bmatrix} : b,d \in \mathbb{R} \right\}$

13. $\left\{ \begin{bmatrix} c-6d \\ d \\ c \end{bmatrix} : c,d \in \mathbb{R} \right\}$

14. $\left\{ \begin{bmatrix} -a+2b \\ a-2b \\ 3a-6b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$

31. Definiera $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ som $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}$.

a) Visa att T är en linjär transformation. [*Hint:* För godtyckliga polynom $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ i $\mathbb{P}_2$, beräkna $T(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ och $T(c\mathbf{p})$.]

b) Hitta ett polynom $\mathbf{p}$ i $\mathbb{P}_2$ som spänner upp kärnan till T och beskriv värdemängden till T.

32. Definiera en linjär transformation $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ som $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(0) \end{bmatrix}$. Hitta polynom $\mathbf{p}_1$ och $\mathbf{p}_2$ i $\mathbb{P}_2$ som spänner upp kärnan till T och beskriv värdemängden till T.

33. Låt $M_{2\times 2}$ vara vektorrummet av alla 2×2 matriser och definiera $T\colon M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ som $T(A) = A + A^T$.

a) Visa att T är en linjär transformation.

b) Låt B vara godtyckligt element ur $M_{2\times 2}$ så att $B^T = B$. Hitta ett A i $M_{2\times 2}$ så att $T(A) = B$.

c) Visa att värdemängden till T är mängden av alla B i $M_{2\times 2}$ där $B^T = B$.

d) Beskriv kärnan till T.

35. Låt V och W vara vektorrum och låt $T\colon V \to W$ vara en linjär transformation. Givet ett delrum U till V, låt $T(U)$ beteckna mängden av alla bilder på formen $T(\mathbf{x})$ där $\mathbf{x} \in U$. Visa att $T(U)$ är ett delrum till W.