Analisi post-ottimale

Ricerca operativa

Giovanni Righini

Università degli Studi
di Milano

Analisi post-ottimale

Dopo aver calcolato la soluzione ottima di un problema, ma prima di prendere una decisione conseguente, è molto importante valutare la robustezza della soluzione.

Infatti, i dati sono spesso affetti da errori, approssimazioni, incertezza, arrotondamenti,...

La domanda cui risponde l'analisi post-ottimale è: quanto è robusta la soluzione ottima rispetto a possibili (piccoli) cambiamenti nel valore dei data che sono stati usati per calcolarla?

Analisi di sensitività

Input: A, b, c.
Output: $\mathcal{B}^*$, x^*, z^*.

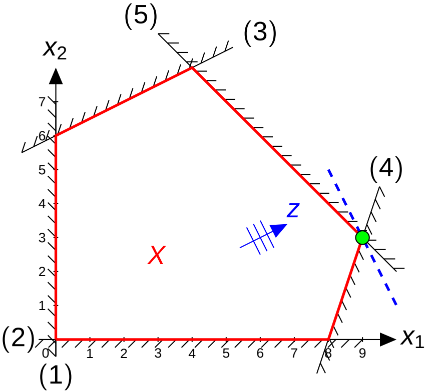
Lo scopo dell'analisi di sensitività è di valutare l'intervallo nel quale può variare ogni coefficiente c_j e b_i senza che cambi la base ottima $\mathcal{B}^*$.

La base $\mathcal{B}^*$ rimane ottima finché valgono le condizioni di ammissibilità e di ottimalità:

- Ammissibilità: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Ottimalità: $\overline{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N \geq 0$.

Le condisioni di ammissibilità dipendono solo da b.
Le condizioni di ottimalità dipendono solo da c.

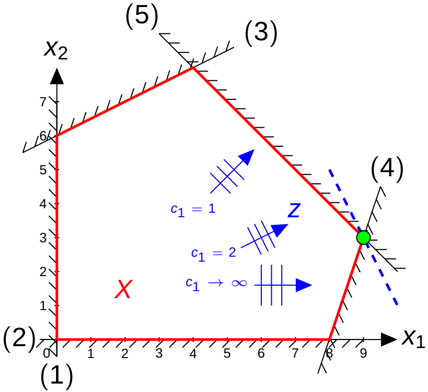
Variazione di un coefficiente c_j



$$
\begin{aligned}
\text{maximize } z = {\color{red}2}x_1 + x_2 & \\
\text{s.t. } -x_1 + 2x_2 \leq 12 & \quad (3) \\
3x_1 - x_2 \leq 24 & \quad (4) \\
x_1 + x_2 \leq 12 & \quad (5) \\
x \geq 0 &
\end{aligned}
$$

$\mathcal{B}^* = \{1, 2, 3\}$.
$x^* = [9\ 3\ 15\ 0\ 0]^T$.
$z^* = 21$.

Variazione di un coefficiente c_j



Quando c_1 decresce, la f.o. ruota in senso antiorario, finché la base ottima cambia per $c_1 = 1$, quando le linee di livello diventano parallele al vincolo (5).
Quando c_1 aumenta, la f.o. ruota in senso orario e le curve di livello tendono a diventare verticali per $c_1 \to \infty$. La base ottima in questo caso non cambia.

Quindi, $\mathcal{B}^* = \{1, 2, 3\}$ è ottima per $1 \leq c_1 < \infty$.
Sebbene $\mathcal{B}^*$ non cambi e x^* non cambi, z^* cambia perché dipende da c_1:

$$z^*(c_1) = x_1^* c_1 + x_2^* = 9c_1 + 3.$$

Variazione di un coefficiente c_j

Tutti i dati (c^* e a^*) necessari per l'analisi di sensitività sono contenuti nel tableau all'ottimo.

Supponiamo di analizzare un problema che nella forma alle disuguaglianze ha

- funzione obiettivo da massimizzare,
- vincoli di disuguaglianza $\leq$.

Consideriamo una colonna $\bar{j}$.

Caso 1: $\bar{j} \in \mathcal{B}$ e $\bar{r}$ è la riga corrispondente.

$$\max\left\{-\infty, \max_{j \in \mathcal{N}} \left\{\frac{-c_j^*}{a_{\bar{r}j}^{*+}}\right\}\right\} \leq \Delta c_{\bar{j}} \leq \min\left\{\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{\frac{-c_j^*}{a_{\bar{r}j}^{*-}}\right\}, +\infty\right\}.$$

Caso 2: $\bar{j} \in \mathcal{N}$

$$\Delta c_{\bar{j}} \leq c_{\bar{j}}^*.$$

Variazione di un coefficiente c_j

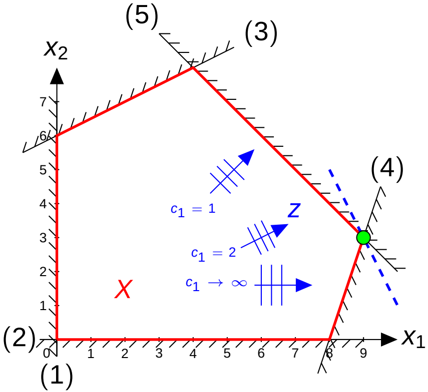


Tableau all'ottimo:

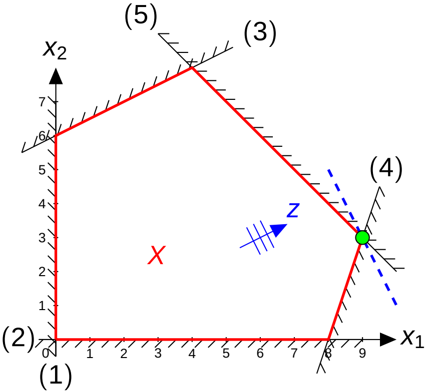
21	0	0	0	1/4	5/4
15	0	0	1	3/4	-5/4
9	1	0	0	1/4	1/4
3	0	1	0	-1/4	3/4

$\bar{j} = 1$, variabile in base, $\bar{r} = 2$.

$$\max\left\{\frac{-1/4}{1/4}, \frac{-5/4}{1/4}\right\} \leq \Delta c_1 < +\infty$$

$$-1 \leq \Delta c_1 < +\infty$$

Variazione di un coefficiente b_i



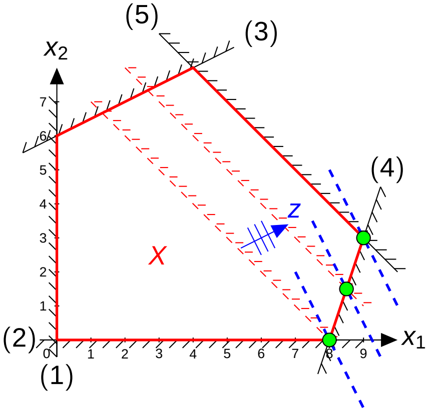
$$
\begin{aligned}
\text{maximize } z = & \; 2x_1 + x_2 & \\
\text{s.t.} \quad -x_1 + 2x_2 & \leq 12 & (3) \\
3x_1 - x_2 & \leq 24 & (4) \\
x_1 + x_2 & \leq {\color{red}12} & (5) \\
x & \geq 0 &
\end{aligned}
$$

$\mathcal{B}^* = \{1, 2, 3\}$.

$x^* = [9\ 3\ 15\ 0\ 0]^T$.

$z^* = 21$.

Variazione di un coefficiente b_i



Quando b_3 decresce, il vincolo (3) trasla verso il basso e a sinistra, finché il vincolo $x_2 \geq 0$ diventa attivo per $b_3 = 8$.
Quando b_3 aumenta, il vincolo (3) trasla verso l'alto e a destra, finché il vincolo (1) diventa attivo per $b_3 = 24$.

Quindi, $\mathcal{B}^* = \{1, 2, 3\}$ è ottima per $8 \leq b_3 \leq 24$.

Benché $\mathcal{B}^*$ non cambi, x^* e z^* cambiano perché dipendono da b_3: $x_1^*(b_3) = 6 + \frac{1}{4}b_3$.
$x_2^*(b_3) = -6 + \frac{3}{4}b_3$.
$z^*(b_3) = 6 + \frac{5}{4}b_3$.

Variazione di un coefficiente b_i

Tutti i dati (b^* e a^*) necessari per l'analisi di sensitività sono contenuti nel tableau all'ottimo.

Supponiamo di analizzare un problema che nella forma alle disuguaglianze ha

- funzione obiettivo da massimizzare,
- vincoli di disuguaglianza $\leq$.

Consideriamo una riga $\bar{i}$ e sia $\bar{j}$ è la colonna della variabile di slack corrispondente.

Caso 1: $\bar{i}$ attivo.

$$\max\left\{-\infty, \max_i\left\{\frac{-b_i^*}{a_{i\bar{j}}^{*+}}\right\}\right\} \leq \Delta b_{\bar{i}} \leq \min\left\{\min_i\left\{\frac{-b_i^*}{a_{i\bar{j}}^{*-}}\right\}, +\infty\right\}.$$

Caso 2: $\bar{i}$ non attivo.

$$\Delta b_{\bar{i}} \geq -x_{\bar{j}}^*.$$

Variazione di un coefficiente b_i

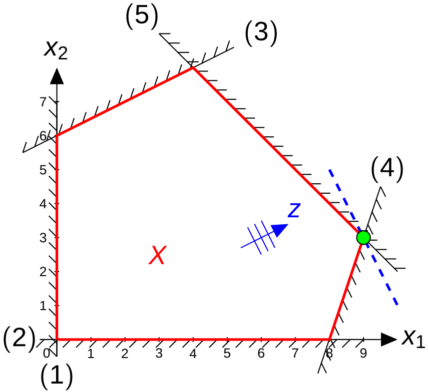


Tableau all'ottimo:

21	0	0	0	1/4	5/4
15	0	0	1	3/4	-5/4
9	1	0	0	1/4	1/4
3	0	1	0	-1/4	3/4

$\bar{i} = 3$, vincolo attivo, $\bar{j} = 5$.

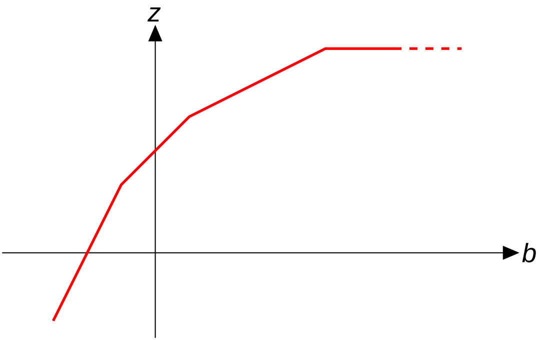
$$\max\left\{\frac{-9}{1/4}, \frac{-3}{3/4}\right\} \leq \Delta b_3 \leq \frac{-15}{-5/4}$$

$$-4 \leq \Delta b_3 \leq 12$$

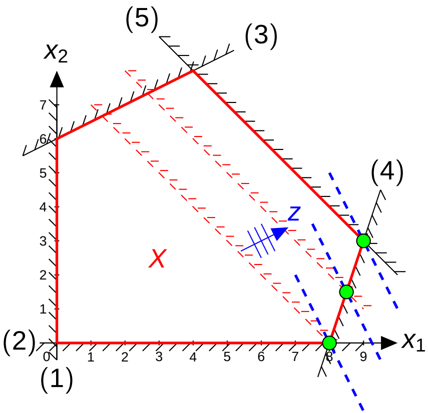
Analisi parametrica

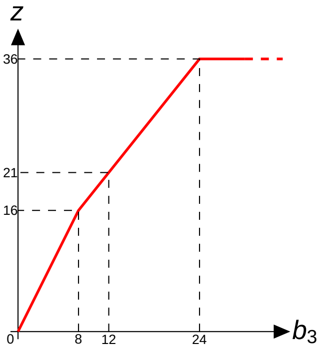
L'analisi parametrica studia come z^* dipende dal valore del termine noto di un vincolo prescelto.

Il risultato è una funzione lineare a tratti: ogni suo segmento corrisponde ad una base ottima ed ogni punto di discontinuità ad un cambio di base.



Analisi parametrica





Interpretazione economica della PL

$$\begin{aligned} \text{maximize } z = \quad & 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 \\ \text{s.t. } \; & 0.5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Interpretazione economica:

- tre prodotti richiedono due risorse;
- le variabili rappresentano le quantità prodotte;
- i coefficienti della f.o. rappresentano i profitti unitari;
- i termini noti rappresentano le quantità di risorsa disponibili.

Tableau all'ottimo:

$$\begin{array}{c|ccccc} 294 & 0 & 9 & 0 & 11 & 1/2 \\ \hline 36 & 1 & 6 & 0 & 4 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}$$

$$\mathcal{B}^* = \{1, 3\} \quad x^* = [36\ 0\ 6\ 0\ 0] \quad z^* = 294$$

Interpretazione economica della PL

$$\begin{aligned} \text{maximize } z = \quad & 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 \\ \text{s.t. } \; & 0.5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

294	0	9	0	11	1/2
36	1	6	0	4	-1
6	0	-1	1	-1	1/2

$$z = 294 - 9x_2 - 11x_4 - \frac{1}{2}x_5.$$

Se diminuisse di un'unità la quantità di risorsa 1 disponibile, z peggiorerebbe di 11 unità.

I c.c.r. delle colonne di slack all'ottimo indicano i prezzi-ombra delle corrispondenti risorse, cioè il massimo prezzo a cui conviene comprare la risorsa e il minimo prezzo a cui conviene venderla.

Il prezzo-ombra di risorse non scarse è nullo.

Interpretazione economica della PL

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } z = \quad & 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 \\
\text{s.t. } \; & 0.5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

294	0	9	0	11	1/2
36	1	6	0	4	-1
6	0	-1	1	-1	1/2

Se si volesse produrre un'unità di prodotto 2, si avrebbe

- un ricavo marginale pari a 14 (valore di c_2)
- un consumo di risorse pari a [2 2], che si traduce in un costo pari a $2 \times 11 + 2 \times \frac{1}{2} = 23$

e quindi un profitto marginale pari a -9 (non conveniente), che è infatti il costo ridotto di x_2.

Interpretazione economica della PL

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } z = \quad & 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 \\
\text{s.t. } \; & 0.5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

294	0	9	0	11	1/2
36	1	6	0	4	-1
6	0	-1	1	-1	1/2

Il coefficiente di costo ridotto di variabili basiche è nullo, perché i ricavi marginali e i costi marginali risultano uguali.

Per esempio, per la variabile x_1 si ha:

$$6 = \frac{1}{2} \times 11 + 1 \times \frac{1}{2}.$$

Costi ridotti

Il costo ridotto $\overline{c}_j$ di ogni variabile x_j è dato da

$$\overline{c}_j = c_j - \sum_i a_{ij} \lambda_i ,$$

dove

- c_j è il coefficiente di x_j nella f.o.,
- a_{ji} è il coefficiente sulla riga i e colonna j nella matrice dei vincoli;
- λ_i è il prezzo-ombra del vincolo i.