Teoria della dualità

Ricerca operativa

Giovanni Righini

Università degli Studi di Milano

Teoria della dualità

La teoria della dualità per la programmazione lineare fu sviluppata da A. Tucker nel 1948, seguendo un'intuizione di J. von Neumann.

Fornisce un punto di vista diverso e molto utile per comprendere e per risolvere i problemi lineari.

E' anche il fondamento su cui si possono progettare algoritmi di ottimizzazione e di approssimazione e dimostrare le loro proprietà.

Si applica anche a problemi non-lineari e a problemi nel discreto, ma nel caso della programmazione lineare si ottengono risultati più forti.

Il problema duale

Ogni problema di PL, che d'ora in poi indichiamo come problema primale, ammette un altro problema di PL, che denominiamo problema duale.
La corrispondenza tra i due può essere stabilita direttamente dalla forma generale, secondo questo schema:

Problema primale	Problema duale
Minimizzazione	Massimizzazione
m vincoli	*m* variabili
n variabili	*n* vincoli
coefficienti della f.o.	termini noti dei vincoli
termini noti dei vincoli	coefficienti della f.o.
matrice dei coefficienti A	matrice dei coefficienti A^T
vincoli di uguaglianza	variabili libere
variabili libere	vincoli di uguaglianza
vincoli di disuguaglianza $\geq$	variabili non-negative
variabili non-negative	vincoli di disuguaglianza $\leq$

Coppie primale-duale

Problema primale P:

$$\begin{aligned} \text{minimize } z = & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ \text{s.t. } & A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \geq b_1 \\ & A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \text{ libere} \end{aligned}$$

Problema duale D:

$$\begin{aligned} \text{maximize } w = & b_1^T y_1 + b_2^T y_2 \\ \text{s.t. } & A_{11}^T y_1 + A_{21}^T y_2 \leq c_1 \\ & A_{12}^T y_1 + A_{22}^T y_2 = c_2 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \text{ libere} \end{aligned}$$

La relazione è simmetrica: il duale del duale di P è P.

Teorema della dualità in forma debole

Data una coppia primale-duale

$$P : \text{maximize } z(x), \text{s.t. } x \in X$$

$$D : \text{minimize } w(y), \text{s.t. } y \in Y$$

per ogni soluzione ammissibile $\overline{x} \in X$ di P e per ogni soluzione ammissibile $\overline{y} \in Y$ di D, si ha

$$z(\overline{x}) \leq w(\overline{y}).$$

Dimostrazione (alle disuguaglianze)

Data una coppia primale-duale

$$P : \text{maximize } z = c^T x, \text{s.t. } Ax \leq b, x \geq 0$$

$$D : \text{minimize } w = b^T y, \text{s.t. } A^T y \geq c, y \geq 0$$

$$\forall \overline{x} \in X, \overline{y} \in Y, c^T \overline{x} \leq b^T \overline{y}.$$

Dimostrazione.

$$A^T \overline{y} \geq c, \overline{x} \geq 0 \Rightarrow \overline{x}^T A^T \overline{y} \geq \overline{x}^T c \Leftrightarrow c^T \overline{x} \leq \overline{x}^T A^T \overline{y}.$$

Analogamente

$$A\overline{x} \leq b, \overline{y} \geq 0 \Rightarrow \overline{y}^T A\overline{x} \leq \overline{y}^T b \Leftrightarrow b^T \overline{y} \geq \overline{y}^T A\overline{x}.$$

In ambo i casi il secondo membro è uno scalare:

$$\overline{x}^T A^T \overline{y} = (\overline{x}^T A^T \overline{y})^T = \overline{y}^T (A^T)^T (\overline{x}^T)^T = \overline{y}^T A\overline{x}.$$

Quindi

$$c^T \overline{x} \leq \overline{x}^T A^T \overline{y} = \overline{y}^T A\overline{x} \leq b^T \overline{y}.$$

Corollari

Corollario 1.
Se $\overline{x} \in X$, $\overline{y} \in Y$ e $z(\overline{x}) = w(\overline{y})$,
allora $\overline{x} = x^*$, $\overline{y} = y^*$, $z(\overline{x}) = z^*$ e $w(\overline{y}) = w^*$.

Corollario 2.
Se un problema di PL P è illimitato, allora il suo duale D è inammissibile.

N.B. Non vale il viceversa.

Teorema fondamentale dell'algebra

Dato un sistema di equazioni lineari $Ax = b$, con A di dimensione $m \times n$ e b di dimensione m, una e una sola di queste alternative è vera:

$$\exists x \in \Re^n : Ax = b$$
$$\exists y \in \Re^m : y^T A = 0, y^T b \neq 0$$

In altri termini, o esiste un certificato di ammissibilità x, la cui esistenza dimostra che il sistema ha soluzione, o esiste un certificato di inammissibilità y, la cui esistenza dimostra che il problema non ha soluzione.

Un risultato simile (teorema delle alternative) si può dimostrare per i sistemi di disequazioni.

Lemma di Farkas

Dato un sistema di equazioni lineari $Ax = b, x \geq 0$, con A di dimensione $m \times n$ e b di dimensione m, una e una sola di queste alternative è vera:

$$\begin{array}{l} (i)\ \ \exists x \in \Re^n : Ax = b, x \geq 0 \\ (ii)\ \exists y \in \Re^m : A^T y \geq 0, b^T y < 0. \end{array}$$

Dimostrazione - parte I: se (i) è vera, (ii) è falsa.
Assumiamo che (i) sia vera. Allora

$$\exists \bar{x} \in \Re^n : A\bar{x} = b, \bar{x} \geq 0.$$

Allora

$$A^T y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}^T A^T y \geq 0.$$

Quindi

$$\bar{x}^T A^T = b^T \quad \Rightarrow \quad b^T y \geq 0.$$

Quindi (ii) è falsa.

Lemma di Farkas

Dimostrazione - parte II: se (i) è falsa, (ii) è vera.
Assumiamo che (i) sia falsa e definiamo il cono

$$C = \{q \in \Re^m : \exists x(q) \in \Re^n : x(q) \geq 0, Ax(q) = q\}.$$

C è convesso. Se (i) è falsa, $b \notin C$.
Quindi, per il teorema dell'iperpiano separatore,

$$\exists y \in \Re^m \backslash \{0\} : q^T y \geq 0 \ \forall q \in C, b^T y < 0.$$

Poiché $q = Ax(q) \ \forall q \in C$,

$$q^T y \geq 0 \ \forall q \in C \ \Rightarrow \ x(q)^T A^T y \geq 0 \ \forall q \in C.$$

Poiché $x(q) \geq 0 \ \forall q \in C$,

$$x(q)^T A^T y \geq 0 \ \forall q \in C \ \Rightarrow \ A^T y \geq 0.$$

Quindi (ii) è vera.

Interpretazione geometrica

Sia a_j la generica colonna della matrice A.

$$Ax = b, \; x \geq 0$$

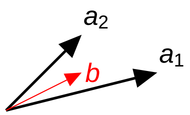
$$b = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j, \; x_j \geq 0 \; \forall j = 1, \ldots, n.$$

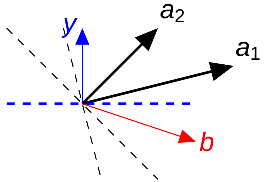
$$A^T y \geq 0, \; b^T y < 0$$

$$a_j^T y \geq 0 \; \forall j = 1, \ldots, n.$$

$$b^T y < 0$$

L'iperpiano $z^T y = 0$ separa b dal cono C.





(i) è vera, (ii) è falsa: $b \in C$.

(i) è falsa, (ii) è vera: $b \notin C$.

Lemma di Farkas: variante

Dato un sistema di disequazioni lineari $Ax \leq b, x \geq 0$, con A di dimensione $m \times n$ e b di dimensione m, una e una sola di queste alternative è vera:

$$(i)\ \exists x \in \Re^n : Ax \leq b, x \geq 0$$
$$(ii)\ \exists y \in \Re^m : A^T y \geq 0, b^T y < 0, y \geq 0.$$

Dimostrazione. Introduciamo variabili di slack non-negative. La condizione (i) diventa:

$$(i) \exists x \in \Re^n, s \in \Re^m : Ax + Is = b, x \geq 0, s \geq 0.$$

Definendo $A' = [A \mid I]$ di dimensioni $(m \times (n+m))$ e $x' = \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}$ di dimensione $(n+m) \times 1$, la condizione (i) diventa

$$(i)\ \exists x' \in \Re^{n+m} : A'x' = b, x' \geq 0.$$

Per il Lemma di Farkas, essa è alternativa alla condizione

$$(ii)\ \exists y \in \Re^m : A'^T y \geq 0, b^T y < 0.$$

Il sistema di disequazioni $A'^T y \geq 0$ equivale a $A^T y \geq 0, y \geq 0$. (c.v.d.)

Teorema della dualità in forma forte

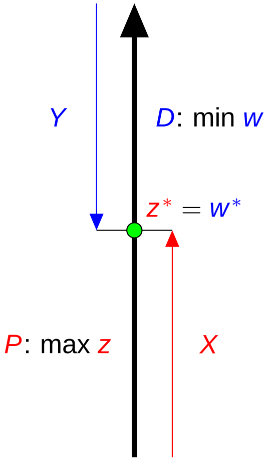
Teorema della dualità forte.
Data una coppia primale-duale

$$P : \text{maximize } z = c^T x, \text{s.t. } Ax \leq b, x \geq 0$$

$$D : \text{minimize } w = b^T y, \text{s.t. } A^T y \geq c, y \geq 0,$$

se uno dei due problemi ammette soluzione ottima finita, allora anche l'altro ammette soluzione ottima finita e i due valori ottimi coincidono.

Teorema della dualità in forma forte



Teorema della dualità in forma forte

Dimostrazione. Sia $y^* \in \Re^m$ la soluzione ottima finita del duale D e sia $w^* = b^T y^*$ il suo valore.

Vogliamo dimostrare che $\exists x^* \in \Re^n : Ax^* \leq b, x^* \geq 0$ e che il suo valore soddisfa la disequazione $c^T x^* \geq b^T y^*$.

Procedendo per assurdo, supponiamo che tale soluzione x^* del primale P non esista e utilizzando il lemma di Farkas, dimostriamo che in tal caso sarebbe violata l'ipotesi di ottimalità di y^*.

Teorema della dualità in forma forte

Assumiamo che

$$\nexists x \in \Re^n : Ax \leq b, x \geq 0, c^T x \geq w^*.$$

Ciò è equivalente ad affermare che

$$\nexists x \in \Re^n : Ax \leq b, -c^T x \leq -w^*, x \geq 0.$$

Definendo

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ -c^T \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} b \\ -w^* \end{bmatrix}$$

rispettivamente di dimensione $(m+1) \times n$ e $(m+1) \times 1$, l'ipotesi equivale a

$$\nexists x \in \Re^n : A'x \leq b', x \geq 0.$$

Per il Lemma di Farkas, ciò implica che

$$\exists y' \in \Re^{m+1} : A'^T y' \geq 0, b'^T y' < 0, y' \geq 0.$$

Teorema della dualità in forma forte

$$\exists y' \in \Re^{m+1} : A'^T y' \geq 0, b'^T y' < 0, y' \geq 0.$$

Sia

$$y' = \left[\begin{array}{c} y \\ \lambda \end{array} \right],$$

con $y \in \Re^m$ e $\lambda \in \Re$. Allora, il sistema

$$A'^T y' \geq 0, b'^T y' < 0, y' \geq 0$$

equivale a

$$A^T y - c\lambda \geq 0, b^T y - w^* \lambda < 0, y \geq 0, \lambda \geq 0.$$

Studiamo separatamente i due casi $\lambda > 0$ e $\lambda = 0$.

Teorema della dualità in forma forte

$$A^T y - c\lambda \geq 0, b^T y - w^*\lambda < 0, y \geq 0, \lambda \geq 0.$$

Caso I: $\lambda > 0$. Dividendo tutte le disequazioni per λ e ponendo

$$\hat{y} = \frac{y}{\lambda},$$

si ha

$$\begin{cases} A^T \hat{y} \geq c \\ b^T \hat{y} < w^* \\ \hat{y} \geq 0 \end{cases}$$

Ciò implica che esista una soluzione ammissibile per il duale, il cui valore è minore del valore minimo, il che genera contraddizione.

Teorema della dualità in forma forte

Caso II: $\lambda = 0$. In tal caso il sistema

$$A^T y - c\lambda \geq 0, b^T y - w^* \lambda < 0, y \geq 0, \lambda \geq 0.$$

diventa

$$A^T y \geq 0, b^T y < 0, y \geq 0.$$

Ponendo $\hat{y} = y^* + y$, e osservando che y^* soddisfa le condizioni

$$A^T y^* \geq c, b^T y^* = w^*, y^* \geq 0,$$

si ottiene

$$A^T \hat{y} \geq c, b^T \hat{y} < w^*, \hat{y} \geq 0.$$

Anche in questo caso si ha una contraddizione, poiché $\hat{y}$ è una soluzione ammissibile per il duale ed il suo valore è minore del valore minimo.

Teorema della dualità in forma forte

Questa dimostrazione per assurdo consente di affermare che

$$\exists x^* \in \Re^n : Ax^* \leq b, x^* \geq 0, c^T x^* \geq w^*.$$

Per il teorema della dualità in forma debole, non è possibile che $c^T x^* > w^*$. Quindi

$$z^* = c^T x^* = b^T y^* = w^*.$$

Teorema fondamentale della dualità lineare.
Data una coppia primale-duale

$$P : \text{maximize } z(x), \text{s.t. } x \in X$$

$$D : \text{minimize } w(x), \text{s.t. } y \in Y,$$

esiste una sequenza finita di passi di pivot che porta l'algoritmo del simplesso a terminare, riconoscendo uno di questi quattro possibili casi:

- soluzione ottima di P e D;
- P è illimitato e D è inammissibile;
- D è illimitato e P è inammissibile;
- sia P che D sono inammissibili.

Scarto complementare

Teorema dello scarto complementare.
Data una coppia primale-duale

$$P : \text{maximize } z = c^T x, \text{s.t. } Ax \leq b, x \geq 0$$

$$D : \text{minimize } w = b^T y, \text{s.t. } A^T y \geq c, y \geq 0,$$

condizione necessaria e sufficiente per l'ottimalità di due soluzioni ammissibili $\overline{x}$ e $\overline{y}$ è che valgano le equazioni seguenti:

$$\overline{y}^T (b - A\overline{x}) = 0$$

$$(A^T \overline{y} - c)\overline{x} = 0$$

N.B. Le condizioni sono significative per i vincoli di disuguaglianza e le loro corrispondenti variabili di slack/surplus. Per i vincoli di uguaglianza sono già implicate dall'ammissibilità delle soluzioni.

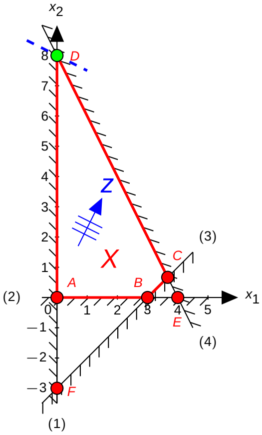
Esempio

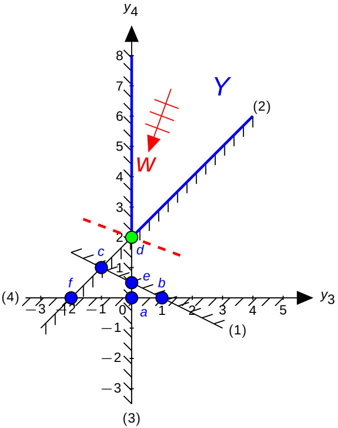
P) $\max z = x_1 + 2x_2$

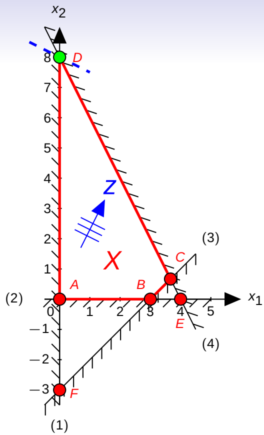
$$\begin{aligned} \text{s.t. } & x_1 - x_2 \leq 3 & [y_3] \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 & [y_4] \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

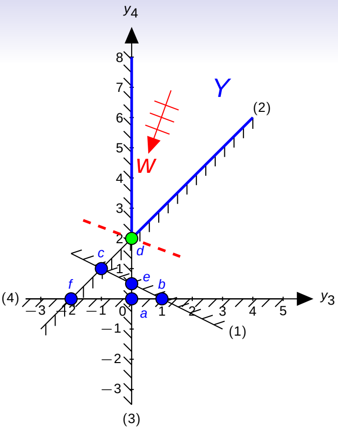
D) $\min w = 3y_3 + 8y_4$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & y_3 + 2y_4 \geq 1 & [x_1] \\ & -y_3 + y_4 \geq 2 & [x_2] \\ & y_3, y_4 \geq 0 & \end{aligned}$$









Sol.	x_1	x_2	x_3	x_4	$\in X$	z
A	0	0	3	8	Y	0
B	3	0	0	2	Y	3
C	$\frac{11}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	Y	5
D	0	8	11	0	Y	16
E	4	0	-1	0	N	4
F	0	-3	0	11	N	-6

Sol.	y_1	y_2	y_3	y_4	$\in Y$	w
a	-1	-2	0	0	N	0
b	0	-3	1	0	N	3
c	0	0	-1	1	N	5
d	3	0	0	2	Y	16
e	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	N	4
f	-3	0	-2	0	N	-6

L'algoritmo del simplesso duale

Dato che i coefficienti di P e D sono gli stessi (ancorché in posizione diversa nei due modelli), entrambi i problemi di una coppia primale-duale si possono rappresentare sullo stesso tableau.

Problema primale

$$\begin{array}{rrrl}
\max z = & 2x_1 & +x_2 & \\
\text{s.t.} & x_1 & -2x_2 \leq 2 & [y_3] \\
 & & x_2 \leq 4 & [y_4] \\
 & x_1 & +x_2 \leq 6 & [y_5] \\
 & x_1, & x_2 \geq 0 &
\end{array}$$

0	-2	-1	0	0	0
2	1	-2	1	0	0
4	0	1	0	1	0
6	1	1	0	0	1

Problema duale

$$\begin{array}{rrrrl}
\min w = & 2y_3 & +4y_4 & +6y_5 & \\
\text{s.t.} & y_3 & & +y_5 \geq 2 & [x_1] \\
 & -2y_3 & +y_4 & +y_5 \geq 1 & [x_2] \\
 & y_3, & y_4, & y_5 \geq 0 &
\end{array}$$

0	0	0	2	4	6
-2	1	0	-1	0	-1
-1	0	1	2	-1	-1

Il tableau ristretto

Problema primale

0	-2	-1	0	0	0
2	1	-2	1	0	0
4	0	1	0	1	0
6	1	1	0	0	1
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

Tableau

0	-2	-1	
2	1	-2	y_3
4	0	1	y_4
6	1	1	y_5
	x_1	x_2	

Tableau ristretto

Problema duale

0	0	0	2	4	6
-2	1	0	-1	0	-1
-1	0	1	2	-1	-1
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Tableau

0	2	4	6	
-2	-1	0	-1	x_1
-1	2	-1	-1	x_2
	y_3	y_4	y_5	

Tableau ristretto

Algoritmo del simplesso duale

E' possibile lavorare sul tableau del problema primale, eseguendo su di esso gli stessi passi di pivot che l'algoritmo del simplesso eseguirebbe se lavorasse sul tableau del problema duale.

L'algoritmo risultante è l'algoritmo del simplesso duale.

Problema primale

0	1	2	0	0	0
2	1	-1	1	0	0
3	0	1	0	1	0
-4	-1	-1	0	0	1

$\mathcal{B}_P = \{3, 4, 5\}$
Inammissibile, poiché $x_5 < 0$.

Problema duale

0	0	0	2	3	-4
1	1	0	-1	0	1
2	0	1	1	-1	1

$\mathcal{B}_D = \{1, 2\}$
Sub-ottima, poiché il costo ridotto di y_5 è negativo.

Algoritmo del simplesso duale

Problema primale

0	1	2	0	0	0
2	1	-1	1	0	0
3	0	1	0	1	0
-4	**-1**	-1	0	0	1

$\mathcal{B}_P = \{3, 4, 5\}$, inammissibile

-4	0	1	0	0	1
-2	0	-2	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	1	0	0	-1

$\mathcal{B}_P = \{1, 3, 4\}$, inammissibile

Problema duale

0	0	0	2	3	-4
1	1	0	-1	0	**1**
2	0	1	1	-1	1

$\mathcal{B}_D = \{1, 2\}$, sub-ottima.

4	4	0	-2	3	0
1	1	0	-1	0	1
1	1	1	2	-1	0

$\mathcal{B}_D = \{2, 5\}$, sub-ottima.

Algoritmo del simplesso duale

Problema primale

-4	0	1	0	0	1
-2	0	**-2**	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	1	0	0	-1

$\mathcal{B}_P = \{1, 3, 4\}$, inammissibile.

-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
3	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

$\mathcal{B}_P = \{1, 2, 4\}$
Ammissibilità raggiunta: stop.

Problema duale

4	4	0	-2	3	0
1	1	0	-1	0	1
1	1	1	**2**	-1	0

$\mathcal{B}_D = \{2, 5\}$, sub-ottima.

1	3	1	0	2	0
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0

$\mathcal{B}_D = \{3, 5\}$
Ottimalità raggiunta: stop.

Algoritmo del simplesso duale

Simplesso primale: conserva l’ammissibilità e persegue l’ottimalità.
Simplesso duale: conserva l’ottimalità e persegue l’ammissibilità.

Nell’algoritmo del simplesso duale le regole di scelta del pivot sono duali:

- la riga del pivot viene scelta prima della colonna: il suo termine noto dev’essere negativo (vincolo violato);
- il pivot dev’essere negativo;
- la colonna del pivot viene scelta minimizzando il valore assoluto del rapporto tra il coefficiente di costo ridotto ed il candidato pivot.

Algoritmo del simplesso duale

L'algoritmo del simplesso duale è particolarmente utile quando la base iniziale è inammissibile e super-ottima.

E' una tipica situazione che si verifica negli *algoritmi "cutting planes"*, che vengono usati per risolvere rilassamenti continui di problemi di programmazione lineare intera o binaria.