Programmazione lineare

Ricerca operativa

Giovanni Righini

Università degli Studi
di Milano

Programmazione lineare (PL)

Un problema è di programmazione lineare (Linear Programming) quando:

- le variabili hanno un dominio continuo;
- i vincoli sono equazioni e disequazioni lineari;
- la funzione obiettivo è una funzione lineare delle variabili.

Nella sua forma generale un problema di PL si presenta così:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize/minimize } z &= cx && (1)\\
\text{subject to } A_1 x &\geq b_1 && (2)\\
A_2 x &\leq b_2 && (3)\\
A_3 x &= b_3 && (4)\\
x' &\geq 0 && (5)\\
x'' &\text{ libere} && (6)
\end{aligned}
$$

I vincoli possono essere di tipo $\leq$, $\geq$ o $=$.
Alcune variabili possono essere vincolate a valori non-negativi.

Forma alle disuguaglianze

I problemi di PL possono essere riformulati nella forma "alle disuguaglianze", che è utile per l'interpretazione geometrica del problema.

Per passare dalla forma generale alla forma alle disuguaglianze, occorre eliminare dal modello i vincoli di uguaglianza e le variabili libere.

Eliminazione vincoli di uguaglianza

I vincoli di uguaglianza si possono eliminare semplicemente per sostituzione. Ad esempio:

$$
\begin{array}{llllll}
\textit{maximize} & z = & 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & \\
s.t. & & 2x_1 & -x_2 & -x_3 & \leq 8 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 & & \geq -6 \\
 & & & x_2 & -2x_3 & = 1 \\
 & & & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Da $x_2 - 2x_3 = 1$ si ricava $x_2 = 2x_3 + 1$.
Sostituendo x_2 nel modello si ottiene:

$$
\begin{array}{lllll}
\textit{maximize} & z = & 3x_1 & +x_3 & -2 \\
s.t. & & 2x_1 & -3x_3 & \leq 9 \\
 & & 3x_1 & +4x_3 & \geq -8 \\
 & & & 2x_3 & \geq -1 \\
 & & & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Eliminazione variabili libere

Le variabili libere si possono eliminare sostituendole con la differenza tra due variabili non-negative. Ad esempio, ponendo $x_1 = x_4 - x_5$ nel modello:

$$\begin{array}{llll} \textit{maximize}\ \ z = & 3x_1 & +x_3 & -2 \\ s.t. & 2x_1 & -3x_3 & \leq 9 \\ & 3x_1 & +4x_3 & \geq -8 \\ & & 2x_3 & \geq -1 \\ & & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

si ottiene

$$\begin{array}{lllll} \textit{maximize}\ \ z = & +x_3 & +3x_4 & -3x_5 & -2 \\ s.t. & -3x_3 & +2x_4 & -2x_5 & \leq 9 \\ & 4x_3 & +3x_4 & -3x_5 & \geq -8 \\ & 2x_3 & & & \geq -1 \\ & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Forma alle disuguaglianze

$$
\begin{array}{llrrrl}
\textit{maximize} & z = & +x_3 & +3x_4 & -3x_5 & -2 \\
s.t. & & -3x_3 & +2x_4 & -2x_5 & \leq 9 \\
 & & 4x_3 & +3x_4 & -3x_5 & \geq -8 \\
 & & 2x_3 & & & \geq -1 \\
 & & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

I termini costanti nella f.o. possono essere trascurati.
I vincoli ridondanti possono essere eliminati.
Tutte le disequazioni devono essere coerenti in segno e opposte all'obiettivo:

- massimizzazione con vincoli di $\leq$;
- minimizzazione con vincoli di $\geq$.

$$
\begin{array}{llrrrl}
\textit{maximize} & w = & +x_3 & +3x_4 & -3x_5 & \\
s.t. & & -3x_3 & +2x_4 & -2x_5 & \leq 9 \\
 & & -4x_3 & -3x_4 & +3x_5 & \leq 8 \\
 & & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Rappresentazione matriciale

$$\begin{array}{llllll} \textit{maximize} & w = & +x_3 & +3x_4 & -3x_5 & \\ s.t. & & -3x_3 & +2x_4 & -2x_5 & \leq 9 \\ & & -4x_3 & -3x_4 & +3x_5 & \leq 8 \\ & & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Lo stesso modello si può rappresentare in modo più compatto usando la notazione matriciale.

$$\begin{array}{llll} \textit{maximize} & w = & c^T x & \\ s.t. & & Ax & \leq b \\ & & x & \geq 0 \end{array}$$

dove

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Interpretazione geometrica della PL

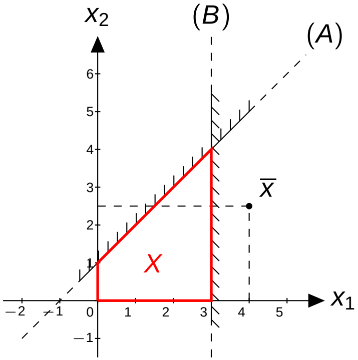
Ogni soluzione x è un assegnamento di valore alle variabili. Quindi corrisponde ad un punto in uno spazio continuo ad n dimensioni, dove n è il numero di variabili nel modello.

Ogni vincolo di uguaglianza $ax = b$ corrisponde ad un iperpiano.
Ogni vincolo di disuguaglianza $ax \leq b$ corrisponde ad un semispazio.

Il sistema dei vincoli nel modello alle disuguaglianze corrisponde all'intersezione dei corrispondenti semispazi.
L'intersezione di semispazi è un poliedro.

I semispazi sono convessi.
L'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.
Quindi i poliedri sono convessi.

Interpretazione geometrica della PL



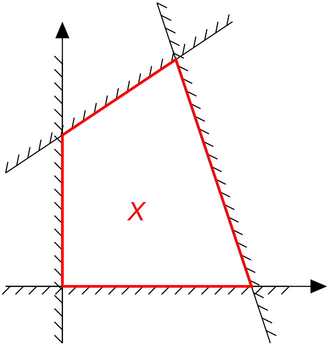
$$n = 2$$

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

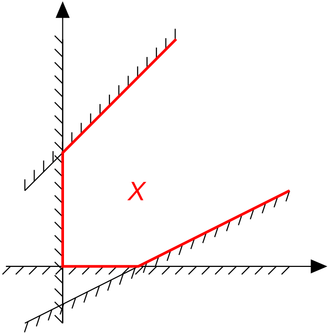
Regione ammissibile:

$$X = \begin{cases} -x_1 + x_2 & \leq 1 \quad (A) \\ x_1 & \leq 3 \quad (B) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Interpretazione geometrica della PL

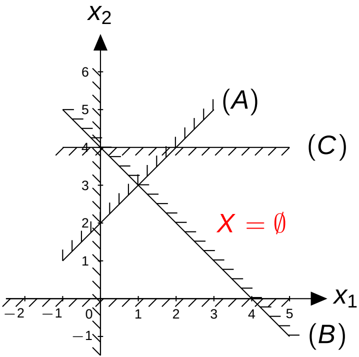


Poliedro limitato (politopo)



Poliedro illimitato

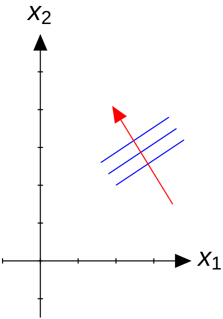
Interpretazione geometrica della PL



Poliedro vuoto

$$X = \begin{cases} -x_1 + x_2 & \leq 2 \quad (A) \\ x_1 + x_2 & \leq 4 \quad (B) \\ x_2 & \geq 4 \quad (C) \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

Interpretazione geometrica della PL



minimize $z = 2x_1 - 3x_2$

Poiché la funzione obiettivo è lineare, tutte le soluzioni equivalenti giacciono su uno stesso iperpiano.

La funzione obiettivo corrisponde ad un fascio di iperpiani paralleli, ordinati come i corrispondenti valori dell'obiettivo.

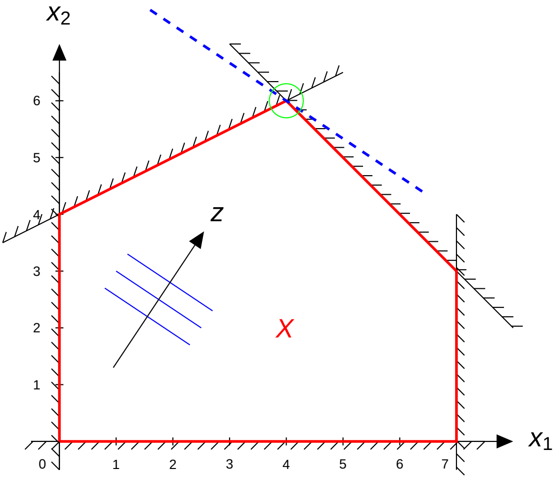
La direzione di ottimizzazione (cioè minimizzazione o massimizzazione) definisce l'ordinamento degli iperpiani del fascio.

Interpretazione geometrica della PL

Per la convessità del poliedro che rappresenta la regione ammissibile e per la linearità delle curve di livello della funzione obiettivo, possono darsi tre casi:

- il poliedro è vuoto: non esistono soluzioni ammmissibili;
- il poliedro è illimitato nella direzione di ottimizzazione: non esiste un valore ottimo finito;
- esiste almeno un vertice del poliedro che corrisponde al valore ottimo.

Interpretazione geometrica della PL



Forma standard

$$
\begin{array}{llrrrl}
\textit{maximize} \;\; w = & +x_1 & +3x_2 & -3x_3 & \\
s.t. & -3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & \leq 9 \\
 & -4x_1 & -3x_2 & +3x_3 & \leq 8 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

La funzione obiettivo viene posta in forma di minimizzazione.

Tutti i vincoli di disuguaglianza vengono posti in forma di uguaglianza, introducendo opportune variabili non-negative di scarto (*slack*) o di *surplus*.

$$
\begin{array}{llrrrrrl}
\textit{minimize} \;\; z = & -x_1 & -3x_2 & +3x_3 & & & \\
s.t. & -3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & & = 9 \\
 & -4x_1 & -3x_2 & +3x_3 & & +x_5 & = 8 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & \geq 0
\end{array}
$$

Forma standard

Mettendo in forma standard un problema alle disuguaglianze con m vincoli e n variabili si ottiene un modello con m vincoli e $n+m$ variabili, tutte non-negative.

Il sistema dei vincoli è un sistema di m equazioni lineari in $n+m$ variabili.
Se non ci sono vincoli ridondanti, la matrice dei coefficienti ha rango m.
Il sistema quindi ha una soluzione univocamente determinabile se eliminiamo gli n gradi di libertà in eccesso, fissando n variabili.

Ad ogni variabile nulla nella forma standard corrisponde un vincolo attivo nella forma alle disuguaglianze.

Fissare n variabili a 0 nella forma standard corrisponde a scegliere un punto in cui n vincoli sono attivi nella forma alle disuguaglianze.

Soluzioni di base

Una base è un sottinsieme di m variabili scelte tra le $n + m$ della forma standard.

$$[B \mid N]$$

Il numero di basi è combinatorio: cresce esponenzialmente con m e n.

Una volta scelta la base, il sistema si può riscrivere come

$$Bx_B + Nx_N = b$$

La soluzione del sistema $m \times m$ che si ottiene dopo aver fissato a 0 tutte le n variabili fuori base è una soluzione di base.
Per ottenerla bisogna invertire la matrice B formata dalla base.

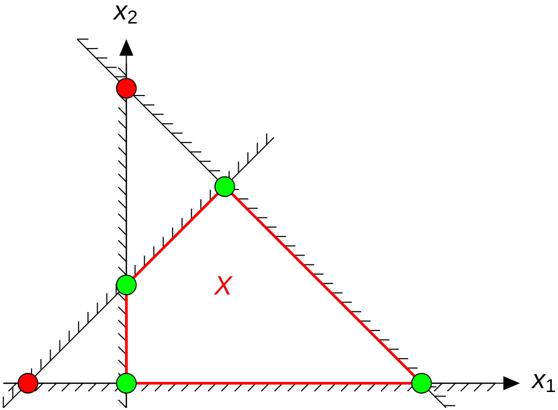
$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

da cui

$$x_N = 0 \quad x_B = B^{-1}b.$$

Soluzioni di base

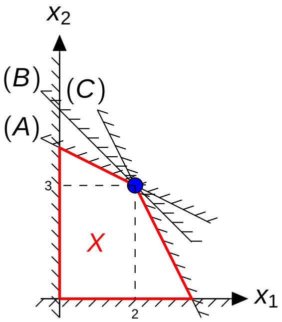
Tutti i vertici del poliedro sono soluzioni di base ma non è detto il viceversa: esistono anche soluzioni di base non ammissibili (quando $x_B \ngeq 0$).



Degenerazione

Quando una variabile in base risulta avere valore nullo, si ha degenerazione: più soluzioni di base coincidono.

In altri termini, più di n vincoli sono attivi nello stesso punto in uno spazio ad n dimensioni.



$$
\begin{array}{llllll}
\textit{minimize} & z = & -x_1 & -x_2 & & \\
s.t. & & x_1 & +2x_2 & \leq 8 & (A) \\
 & & x_1 & +x_2 & \leq 5 & (B) \\
 & & 2x_1 & +x_2 & \leq 7 & (C) \\
 & & x_1, & x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

La soluzione $x = [2\ 3\ 0\ 0\ 0]$ corrisponde alle basi $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}$.

Teorema fondamentale della PL

Dato un problema lineare in forma standard

$$z = \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

con A di rango m

- se esiste una soluzione ammissibile,
  esiste anche una soluzione ammissibile di base;
- se esiste una soluzione ottima,
  esiste anche una soluzione ottima di base.

Perciò un problema lineare nel continuo può essere risolto come problema combinatorio (discreto), limitandosi a considerare solo le soluzioni di base.

Metodi risolutivi

La complessità computazionale della programmazione lineare è polinomiale, tramite l'algoritmo dell'ellissoide (Khachiyan, 1979).
Il metodo di gran lunga più diffuso per risolvere i problemi di PL però è l'algoritmo del simplesso (Dantzig, 1947).

L'algoritmo del simplesso non dà garanzia di terminare in un numero di iterazioni limitato da un polinomio nelle dimensioni dell'esempio, ma in pratica è molto veloce. Ne esistono diverse versioni e molte implementazioni, anche estremamente sofisticate.

L'algoritmo garantisce di terminare in un numero finito di passi, garantendo una di queste tre situazioni:

- la soluzione corrente è ottima;
- non esiste soluzione ammissibile (problema inammissibile);
- non esiste soluzione ottima finita (problema illimitato).

L'algoritmo del simplesso procede iterativamente da una soluzione di base ad una adiacente.