SERIE

Sia $\{a_n\}$ succ. numerica

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ si può scrivere come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{termine generale: } a_n$$

$S_1 = a_1 \qquad S_2 = a_1 + a_2 \quad \ldots \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

S_n = somma parziale n-esima di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$\{S_n\}$ successione delle somme parziali di ↗

Def

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se $\{S_n\}$ converge

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$$

Def

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge posit. [negat.] se $\{S_n\}$ diverge positivam. [negat.]

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty\ [-\infty]$$

Def

Una serie è regolare converge o diverge

Attribuiamo alla serie il carattere della successione delle sue somme parziali

Comportamento al limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n$$ Termine generale

$$1 + 2 + 3 + 4 \ldots \qquad \frac{n(n+1)}{2}$$

$\{S_n\}$

Serie geometrica

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \qquad \text{serie geometrica di ragione } q$$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \\ n & q = 1 \end{cases}$$

1° caso $q = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

2° caso $q \neq 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q}$$

- $q > 1$: $+\infty$
- $q = 1$: …
- $-1 < q < 1$: 0
- $q \le -1$: $\nexists$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} - \begin{cases} \text{diverge pos.} & q \ge 1 \\ \text{converge a } \dfrac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ \text{oscilla} & \text{se } q \le -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$\{S_n\}$ succ. somme parziali

- Convergente → Anche la serie è convergente
- Divergente pos/neg → Anche la serie
- Oscilla → Anche la serie

Ovvero il carattere della serie numerica è equivalente al limite di S_n

- Studiare il carattere di una serie ⇓ Vedere se converge / diverge / oscilla

$$S_n = \begin{cases} n & \text{se } q = 1 \\ \dfrac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

Dim: per induzione su n

- Se $n = 1$ la formula è vera
- Supponiamo $1 + q + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$

Vogliamo che $\underbrace{1 + q + \ldots + q^{n-1}}_{\frac{1-q^n}{1-q}} + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$\frac{1-q^n}{1-q} + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

OK

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Vedere se è compreso tra altri elementi

$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è crescente

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} > \log(2) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ldots$$

$$= \log\left(\cancel{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdots \frac{n+1}{\cancel{n}}\right) = \log(n+1)$$

$$S_n > \log(n+1)$$

$\lim \log(n+1) = +\infty$ Per il confronto $\lim S_n = +\infty$

La serie diverge positivamente