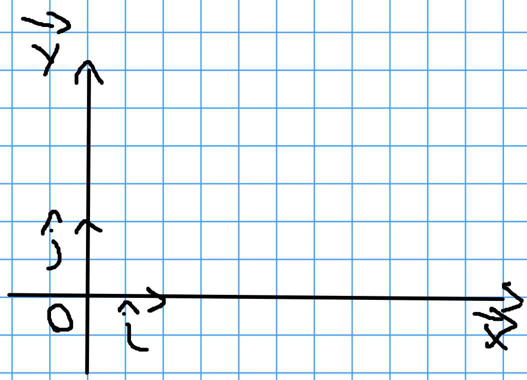
Trasformazioni geometriche

DEF: Si definisce trasformazione geometrica piana una corrispondenza biunivoca tra punto e piano (cioe' che associa ad un punto del piano uno ed un solo punto del piano stesso, e viceversa).

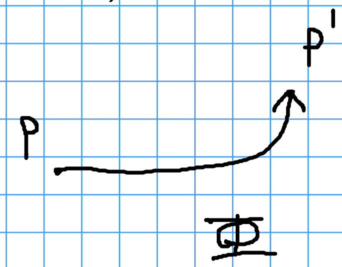
OSS: Si parla anche di corrispondenza biunivoca tra piani distinti



$(O, \hat{i}, \hat{j})$

$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$P(x,y) \longrightarrow P'(x',y')$



Allora

$\Phi(P) = P'$

$$\Phi : \begin{cases} x' = \varphi(x,y) \\ y' = \psi(x,y) \end{cases}$$

$P' \equiv$ trasformato o immagine di P mediante Φ

$P = \Phi^{-1}(P')$

$P \equiv$ antitrasformato o controimmagine di P' mediante Φ

AFFINITA'

DEF: Si definisce affinita' una trasformazione geometrica piana che trasforma rette in rette conservando il parallelismo

Un punto $U \in \mathbb{R}^2$ si dice PUNTO UNITO (FISSO) per una trasformazione Φ se $\Phi(U) = U$

Una figura geometrica si dice GLOBALMENTE unita se ha come trasformata se stessa

T = affinita' $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \quad (x',y')$

Si prova che:

$$T: \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

φ, ψ sono LINEARI

Per l'invertibilita' risulta: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

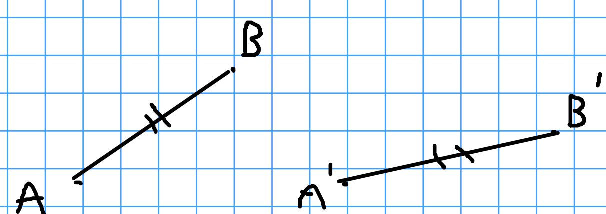
$$\Updownarrow$$

$$ad - bc \neq 0$$

$$\boxed{T^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{d}{\det A} x' + \dfrac{-b}{\det A} y' + \dfrac{-d}{\det A} p + \dfrac{b}{\det A} q \\[2ex] y = \dfrac{-c}{\det A} x' + \dfrac{a}{\det A} y' + \dfrac{c}{\det A} p + \dfrac{-a}{\det A} q \end{cases}}$$

ISOMETRIE

DEF: Si definisce isometria una affinita' che conserva le distanze

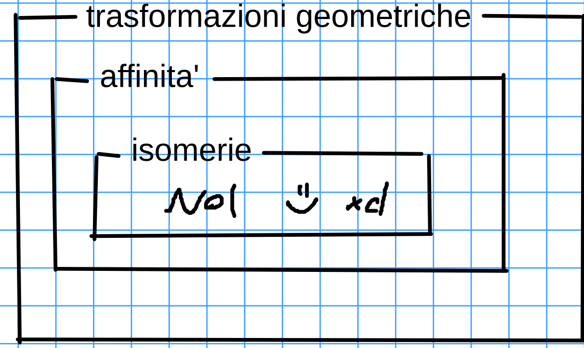


$$d(A,B) = d(A',B')$$

Es. (Identita')

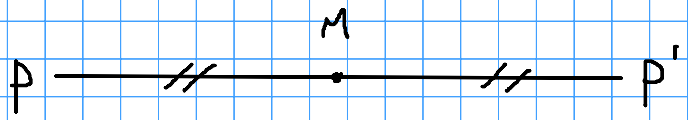
$$I: \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 \neq 0$$

Esercizi



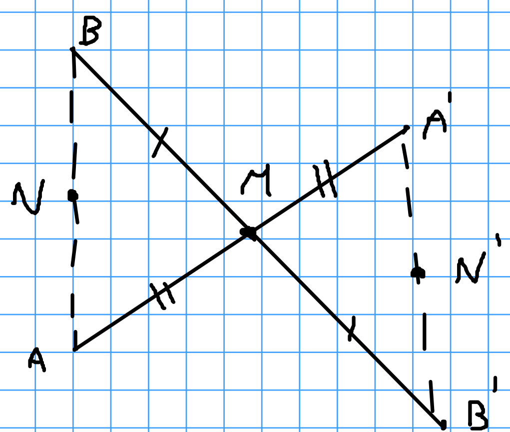
Simmetria centrale

DEF: Si fissi un punto M nel piano.
La simmetria centrale di centro M Sm e' la trasformazione geometrica che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che M e' il punto medio di PP'



$M \equiv$ unico punto unito

Sm e' una isometria



$\overset{\triangle}{AMB}$, $\overset{\triangle}{A'MB'}$

$AM \cong A'M$ (per def. di S_M)

$BM \cong B'M$ //

$\overset{\triangle}{AMB} \cong \overset{\triangle}{A'MB'}$ (perché opposti al vertice)

Formule

$M(a,b)$, $P(x,y)$, $P'(x',y') = S_M(P)$

$$\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} = a \\ \dfrac{y+y'}{2} = b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

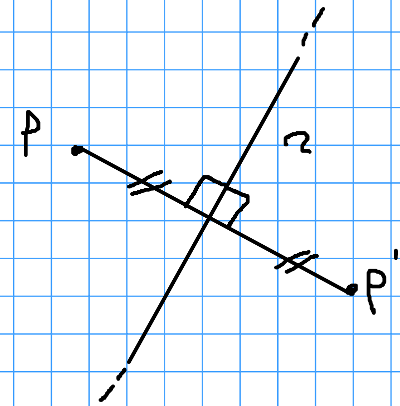
$$\det A = 1 \neq 0$$

Punti uniti:

$P \in \mathbb{R}^2$; $S_M(P) = P$; $\begin{cases} x = 2a - x \\ y = 2b - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$; $P(a,b) \equiv M$

SIMMETRIA ASSIALE

DEF: Sia r una retta del piano.
Due punti P e P' si dicono simmetrici rispetto a r se r e' asse del segmento PP', cioe':



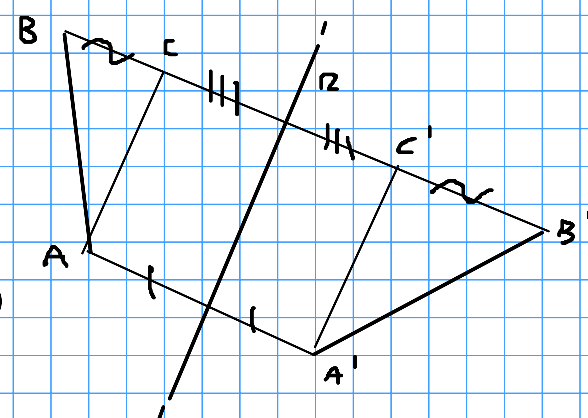
$\rightarrow r \perp PP'$;

$\rightarrow$ r passa per il punto medio di PP'.

Si definisce simmetria assiale di asse r la trasformazione geometrica di Sr che ad ogni punto P associa il suo punto simmetrico P' rispetto a r

OSS:
Sr e' involutoria
Se Q $\in$ r $\Rightarrow$ Sr(Q) = Q

Sr e' una isometria



$\overset{\triangle}{ACB}$ $\qquad$ $\overset{\triangle}{A'C'B'}$

$AC \cong A'C'$ (distanza tra rette parallele)

$BC \cong B'C'$ (perche' differenza di segmenti congruenti)

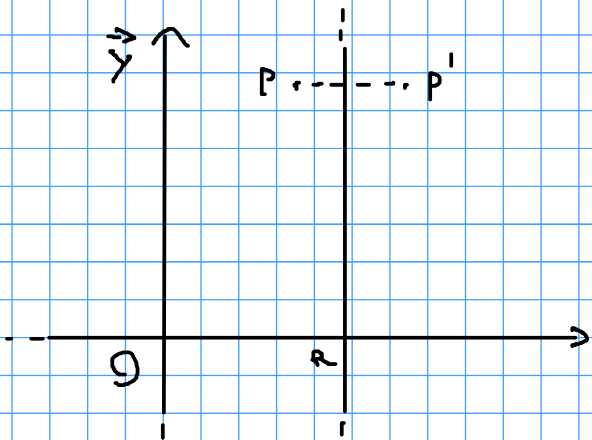
$A\hat{C}B \cong A\hat{C}B = 90°$ (per costruzione)

$\Downarrow$

$\overset{\triangle}{ACB} \cong \overset{\triangle}{A'C'B'} \Rightarrow AB \cong A'B'$

Equazione

1) Simmetria rispetto a r: x = a



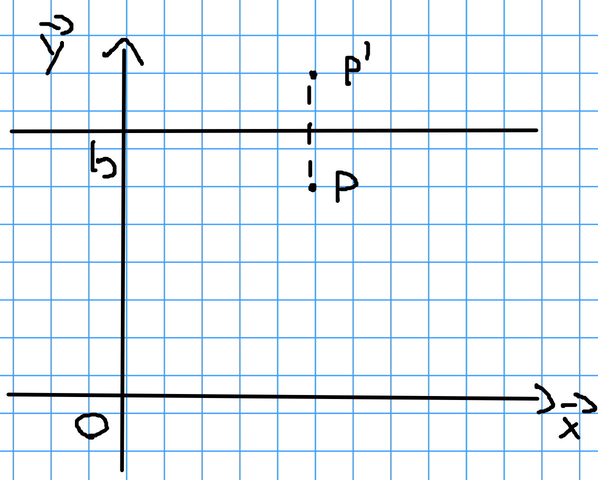
$$P(x,y)$$

$$P'(x',y') = S_r(P)$$

$$S_r = \begin{cases} y' = y \\ \dfrac{x+x'}{2} = a \end{cases} ; \quad \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases} \qquad S_r^{-1}: \begin{cases} x = 2a - x' \\ y = y' \end{cases} ;$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \det A = 1 \neq 0$$

2) Simmetria rispetto a r: y = b



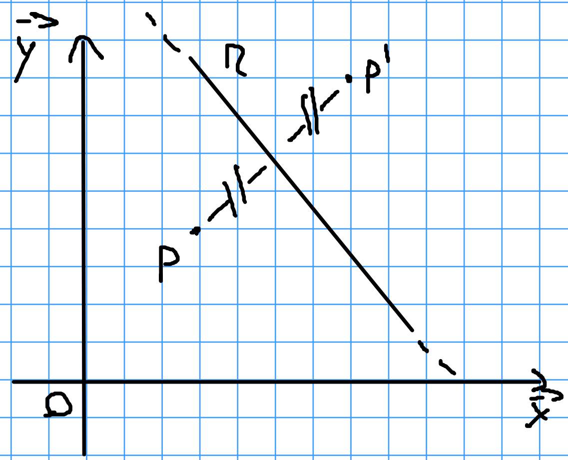
$$P(x,y)$$

$$P'(x',y') = S_r(P)$$

$$S_r = \begin{cases} x' = x \\ \dfrac{y+y'}{2} = b \end{cases} ; \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases} ; \qquad S_r^{-1} = \begin{cases} x = x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 \neq 0$$

3) Simmetria rispetto a r: y = mx + q, m =/= 0



$P(x, y)$

$P'(x', y') = S_r(P)$

1) Il punto medio di PP' deve appartenere a r

$\Updownarrow$

$$M\left(\frac{x+x'}{2} ; \frac{y+y'}{2}\right) \in r \iff \frac{y+y'}{2} = m\,\frac{x+x'}{2} + q$$

2) La retta r $\perp$ PP', $m \neq 0$

$\Updownarrow$

I coefficienti angolari di PP' e r devono essere opposti e reciproci

$\Updownarrow$

$$\frac{y'-y}{x'-x} = -\frac{1}{m}$$

$$S_r : \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \implies S_r : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+m^2}\left[(1-m^2)\,x + 2my - 2mq\right] \\ y' = \dfrac{1}{1+m^2}\left[2mx + (m^2-1)\,y + 2q\right] \end{cases} ;$$

CASI PARTICOLARI

1) Simmetria rispetto a r: y = x

$$m=1,\ q=0;\quad S_r=\begin{cases} x'=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1y=y \\ y'=\frac{1}{2}\left[2x\right]=x \end{cases} \Rightarrow S_{y=x}\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases};$$

2) Simmetria rispetto a r: y = -x

$$m=1,\ q=0;$$

$$S_r:\begin{cases} x'=\frac{1}{2}(-2y)=-y \\ y'=\frac{1}{2}(-2x)=-x \end{cases};\Rightarrow S_{y=x}\begin{cases} x'=-y \\ y'=-x \end{cases};$$