Equazione a variabili separate

$$y' = X(x)\, Y(y)$$

$X: (a, b) \to \mathbb{R}$

$Y: (c, d) \to \mathbb{R}$

Soluzione:

$$y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$

i) $y(x)$ derivabile in (α, β)

ii) $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ $\quad y(x) \in (c, d)$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$

iii) $y'(x) = X(x)\, Y(y(x))$ $\quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Soluzioni di 1ª categoria

$$y' = X(x)\, Y(y) \quad *$$

NON applicabile se $Y(y)$ non ha zeri.

Supponiamo che $Y(h) = 0$

Allora $y(x) = h$ è soluzione di $*$ $\forall x \in (a, b)$

Motivo? $y'(x) = 0$ $\quad Y(h) = 0$

$0 = 0$ ✓

$y(x) = h$ si dice soluzione di 1ª categoria per $*$

Es.

$y' = x(y-2)$ $\quad h = 2$ $\quad \boxed{y(x) = 2}$ soluzione

Soluzioni di 2ª categoria $\quad y' = X(x)\,Y(y)$, $\quad X:(a,b)$, $\quad Y:(c,d)$

Soluzioni $y(x) : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$:

$Y(y(x)) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha,\beta)$

$y(x)$ soluzione . $\quad (\alpha,\beta) \subseteq (a,b)$

$y(x) \in (c,d) \quad \forall x \in (\alpha,\beta)$

$\operatorname{Im}(y(x)) = (\gamma,\delta) \subseteq (c,d)$

$$\frac{y'(x)}{Y(y(x))} = X(x)$$

Considero $B(y) \in \int \frac{1}{Y(y)}\,dy$ in (γ,δ)

$A(x) \in \int X(x)\,dx$ in (α,β)

$B(y)$ primitiva di $\frac{1}{Y(y)}$ $\forall y \in (\gamma,\delta)$

$A(x)$ // di $X(x)$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$

$$D[B(y(x))] = \frac{y'(x)}{Y(y(x))} \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$D\,A(x) = X(x)$$

Abbiamo ottenuto

$$D[B(y(x))] = D\,A(x)$$

$$\Downarrow$$

$$B(y(x)) = A(x) + k$$

Attenzione: come ottengo $\underline{B(y(x))}$ ① e $\underline{A(x)}$ ②?

① Calcolo $\int \frac{1}{Y(y)}\,dy$ ... alla fine viene una espressione in y. Metto al posto di y $y(x)$

② Calcolo $\int X(x)\,dx$

① Atomatica $B(y(x)) = A(x) + k$, isolo $y(x)$ così trovo la soluzione.

3ª Categoria di soluzioni $y' = X(x)\,Y(y)$

Sia $y(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ tale che

$x_1, x_2 \in (\alpha, \beta) \to Y(y(x_1)) = 0$

$Y(y(x_2)) \neq 0$