GRADIENTE

- Se esistono $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ il vettore $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ si dice gradiente di f in (x_0, y_0)

- Se $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ e $\exists \nabla f(x_0, y_0)$ e (x_0, y_0) è estremo relativo

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \quad [\text{vettore nullo}]$$

- I punti $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ tale che $\exists \nabla f(x_0, y_0) = 0$ sono detti punti stazionari

- Se $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ è estremo relativo e $\exists \nabla f(x_0, y_0) \Longrightarrow (x_0, y_0)$ è punto stazionario di f

Ma non vale il viceversa ovvero se un punto è stazionario non è detto che sia di estremo relativo

Esempio

$f(x, y) = xy$ Cercare i punti stazionari

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x, y) = y = 0 \\ f_y(x, y) = x = 0 \end{cases}$$

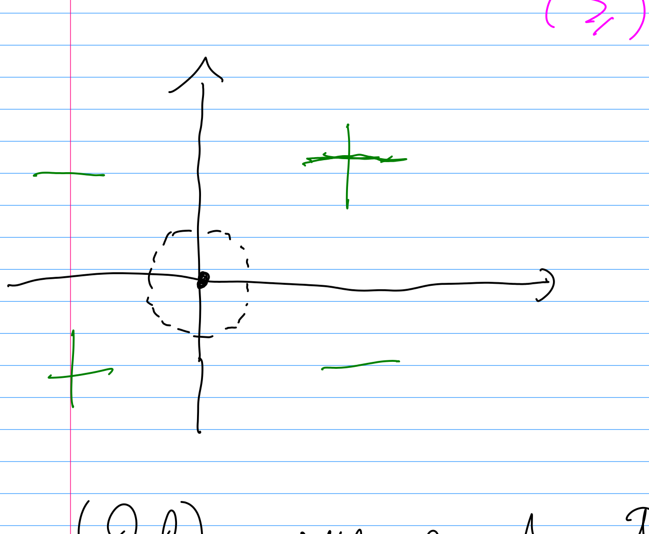
$(0,0)$ è punto stazionario, è un estremo relativo

Se fosse max [min] relativo

$$\Downarrow$$

$$\exists \delta > 0 : f(x, y) \underset{}{\overset{(\geq)}{\leq}} f(0,0) \quad \forall (x, y) \in I_\delta(0,0)$$

$$xy \underset{(\geq)}{\leq} 0$$



In ogni intorno di $(0,0)$ ci sono valori ≥ 0 $(\leq)$ dunque $(0,0)$ non è di max (min)

$(0,0)$ pur essendo stazionario non è di estremo relativo

Matrice Hessiana

- Sia f dotata di derivate seconde in $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

si dice matrice Hessiana $D^2 f(x_0, y_0)$

- Se f_{xy} e f_{yx} sono continue in (x_0, y_0) per il Teorema di Schwartz segue che $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ ovvero la Matrice è simmetrica

Determinante: $H(x_0, y_0)$ si dice Hessiano di f in (x_0, y_0)

Teorema

CONDIZIONE NECESSARIA DEL 2° ORDINE

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

f ha derivate seconde continue in A

$(x_0, y_0) \in A$ punto di max (min) relativo per f

Segue:

- $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ (Teorema di Fermat)
- $f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0$ $(f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0)$
- $H(x_0, y_0) \geq 0$

$$\Updownarrow$$

3 condizioni necessarie affinché (x_0, y_0) sia di max relativo (min)

Teorema

CONDIZIONI SUFFICIENTI DEL 2° ORDINE

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

f ha derivate seconde continue in A

$(x_0, y_0) \in A$

3 cond:

- $\nabla f(x_0, y_0) = 0$
- $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (>0)
- $H(x_0, y_0) > 0$

$\Longrightarrow (x_0, y_0)$ è punto di max relativo (min)

Procedimento per trovare estremi relativi

1) Cercare punti stazionari (x_0, y_0) di f risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

2) Calcolare $H(x_0, y_0)$

- $H(x_0, y_0) > 0 \longrightarrow \begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 & (x_0, y_0) \text{ max} \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 & (x_0, y_0) \text{ min} \end{cases}$

- $H(x_0, y_0) < 0$ Non valgono le CN ovvero (x_0, y_0) non è né di max né min relativo

- $H(x_0, y_0) = 0$ Non si possono applicare né le CN né le CS
  Si deve applicare la definizione

Definizione

$(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ punto stazionario né di min che di max [esempio: $H(x_0, y_0) < 0$] sono detti punti di sella

COME DETERMINARE PUNTI DI MAX e MIN ASSOLUTI ?

- Essi vanno cercati in mezzo a questi 3 insiemi:
  - punti stazionari di f interni ad A
  - punti interni in cui non esiste almeno una delle due derivate parziali
  - punti di ∂A

Studio ∂A

semplice se $\partial A = \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \; t \in [a, b]\}$

In questo caso

$$f_{|\partial A}(x, y) = \underbrace{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}_{\text{Si può chiamare } g(t)}$$

Cercare $\max(g(t))$ e $\min(g(t))$