DERIVATE DIREZIONALI

$A \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad f : A \to \mathbb{R}$

$g_1(t) \quad g_2(t) \quad : (a,b) \to \mathbb{R}$

$(g_1(t), g_2(t)) \in A \quad \forall t \in (a,b)$

Ovvero si può costruire $f(g_1(t), g_2(t))$ e le do un nome $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ che si dice fnc composta tramite g_1, g_2 e f

① Continuità di $F(t)$

- g_1, g_2 continue in $t_0 \in (a,b)$

$x_0 = g_1(t_0) \qquad y_0 = g_2(t_0)$

- f continua in (x_0, y_0) $[f(g_1(t_0), g_2(t_0))]$

$\Downarrow$

F è continua in t_0

② Derivabilità di $F(t)$

- g_1, g_2 derivabili in $t_0 \in (a,b)$

$x_0 = g_1(t_0) \qquad y_0 = g_2(t_0)$

- f differenziabile in $\underset{\in \mathring{A}}{(x_0, y_0)}$ $[f(g_1(t_0), g_2(t_0))]$

$\Downarrow$

F è derivabile in t_0

$F'(t_0) = f_x(x_0,y_0)\,g_1'(t_0) + f_y(x_0,y_0)\,g_2'(t_0)$

NB $x_0 = g_1(t_0) \qquad y_0 = g_2(t_0)$

- Questa quantità è uguale a questo prodotto scalare

$\nabla f(x_0,y_0) \cdot (g_1'(t_0), g_2'(t_0))$

- Andiamo verso le direzionali ...

- $v(v_1, v_2)$ con modulo 1 $[\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$

[v si dice versore o direzione]

- $(x_0, y_0) \in \mathring{A} \iff \exists \delta > 0 : I_\delta(x_0, y_0) \subseteq A$

Osservo che:

la retta passante in (x_0, y_0) e parallela a v ha queste eq. parametriche

$x = x_0 + t v_1$
$y = y_0 + t v_2$

Voglio che:

$F(t) = f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2)$

Perché questo accada occorre che:

$(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) \in A$ ovvero

$(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) \in I_\delta(x_0, y_0)$ ovvero

$\sqrt{(\cancel{x_0} + t v_1 - \cancel{x_0})^2 + (\cancel{y_0} + t v_2 - \cancel{y_0})^2} < \delta$

$\sqrt{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} < \delta$

$\sqrt{t^2 \underbrace{(v_1^2 + v_2^2)}_{1}} < \delta$

$\sqrt{t^2} < \delta \qquad |t| < \delta$

Segue che per t che va da $-\delta$ a δ $(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) \in A$ e si può definire $F(t) = f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2)$ con $t \in]-\delta, +\delta[$

- F è composta tramite $g_1(t) = x_0 + t v_1$ e $g_2(t) = y_0 + t v_2$ e $f(x,y)$

- Se esiste $F'(0)$ ...

$\exists \lim_{t \to 0} \dfrac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) - f(x_0, y_0)}{t}$

allora f si dice dotata di derivata direzionale in (x_0, y_0) lungo v

$F'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial v} = D_v(x_0, y_0)$ è la derivata direzionale di F in (x_0, y_0) lungo v

In altre ...

Se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora $F'(0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$

Teorema

$(x_0, y_0) \in \mathring{A}$

f differenziabile in (x_0, y_0)

v direzione in $\mathbb{R}^2$

$\Downarrow$

$\exists\, D_v(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$

- Ricavare versore da retta / vettore

- VETTORE

$v(\underset{v_1}{\tfrac{1}{2}}, \underset{v_2}{\tfrac{1}{2}}) \qquad |v| \neq 1$

Calcolare $|v|$ $\qquad |v| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

Calcolare $\hat{v}$ $\qquad \hat{v} = \left(\dfrac{v_1}{|v|}, \dfrac{v_2}{|v|}\right) =$

$= \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}, \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- Retta

$\underset{a}{4}x + \underset{b}{3}y \underset{c}{- 7} = 0$

Direzione $(b, -a) \qquad (3, -4)$

Trovare versore di $(b, -a)$

$|v| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\hat{v} = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$

- Data $ax + by + c = 0$

il vettore direzione è $v : (b, -a)$

il versore è

$\hat{v} = \left(\dfrac{b}{|v|}, \dfrac{-a}{|v|}\right)$ con $|v| = \sqrt{b^2 + (-a)^2} =$

$= \sqrt{b^2 + a^2}$