LIMITI

Def.:

In $\mathbb{R}^2$ $\quad f: A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0) \in DA$ $\quad f$ converge a $l \in \mathbb{R}$ per $(x,y) \to (x_0,y_0)$ e si scrive

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \quad \text{se e solo se:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in A \cap I_\delta(x_0,y_0) \quad (x,y) \neq (x_0,y_0)$$
$$|f(x,y) - l| < \varepsilon$$

Esempio:

$f(x,y) = k \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = k$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \cap I_\delta(x_0,y_0) \quad (x,y) \neq (x_0,y_0)$$
$$|f(x,y) - k| < \varepsilon$$

$f(x,y)$ cosicché che è costante (k)

$$|0| < \varepsilon \quad \checkmark$$

δ arbitrario

Esempio

$f(x,y) = x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \cap I_\delta \quad (x,y) \neq (x_0,y_0)$$
$$|f(x,y) - x_0| < \varepsilon$$
$$|x - x_0| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| = \sqrt{(x-x_0)^2} \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon$$

Distanza euclidea tra (x,y) e (x_0,y_0) è $< \varepsilon$ come volevamo

Definizione

f diverge positivamente (neg.) per $(x,y) \to (x_0,y_0)$ e si scrive $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$ $(-)$

Se e solo se:

$$\forall k > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in I_\delta(x_0,y_0) \cap A$$
$$(x,y) \neq (x_0,y_0) \to f(x,y) > k$$
$$(< -k)$$

Esempio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$$

$$\forall k > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x,y) \in I_\delta(0,0) \cap \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{x^2+y^2} > k$$

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$

Distanza euclidea tra (x,y) e $(0,0)$

$$\downarrow$$
$$x^2+y^2 < \frac{1}{k}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

ovvero per $\delta = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ho finito

- Il limite se c'è è unico
- Se una funzione per $(x,y) \to (x_0,y_0)$ ha limite positivo (neg.) esiste almeno un intorno di (x_0,y_0) in cui f è positiva (neg.)

Teorema del confronto

$f, g, h : A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x_0,y_0) \in DA$

Se $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y) \quad \forall (x,y) \in A \setminus \{(x_0,y_0)\}$

e $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = l$

Segue che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

Teorema sul limite delle funzioni composte

$g: A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad A \neq \emptyset$

$\varphi: I \to \mathbb{R} \quad I \subseteq \mathbb{R}^2 \quad I \neq \emptyset$

$$A \ni (x,y) \to \underset{\in I}{g(x,y)} \to \varphi(g(x,y))$$

Se

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$
- $\exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in A \cap I_\delta(x_0,y_0) \quad (x,y) \neq (x_0,y_0)$
  $\to g(x,y) \neq t_0$
- $\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Segue che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(g(x,y)) = l$

Esempio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

è funzione composta in (x^2+y^2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0 \quad [t_0]$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{ovvero} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

Esempio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^3}-1}{xy^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^3}-1}{xy^2 \cdot y} \cdot y =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^3}-1}{xy^3} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$

funzione composta in xy^3

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^3 = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = \ln e = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^3}-1}{xy^3}\, y = 0$$

Teorema sul limite della restrizione

$A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad A \neq \emptyset \quad E \subset A$

$(x_0,y_0) \in DA \quad (x_0,y_0) \in DE$

$f: A \to \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{|E}(x,y) = l$

Applicando?

$E_1, E_2 \subset A \qquad (x_0,y_0) \in DE_1, DE_2, DA$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{|E_1}(x,y) = l \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{|E_2}(x,y) = \mu$$

$l \neq \mu$ allora non esiste il limite di f per $(x,y) \to (x_0,y_0)$

Esempio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

$$E = \{(x,y) : x = 0, y \neq 0\}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E}(x,y) = 0$$

; Faccio la stessa cosa con altre restrizioni, sempre $\lim = 0$

Quindi forse $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

Si può sfruttare il Teorema dei Carabinieri

$$\underset{\downarrow\, 0}{0} \leq \underset{\downarrow\, 0}{\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right|} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}|y| \leq \underset{\downarrow\, 0}{|y|}$$

per i carabinieri