- $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} x^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

- Se $x=0$ la serie è a termini nulli $\Rightarrow$ converge con somma zero.
- Se $x \neq 0$ la serie è a termini positivi quando $x>0$, a segni alterni se $x<0$
- Studio la convergenza assoluta.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} |x|^n$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a segni alterni

devo studiare la monotonia di $\{|a_n|\}$

$$|a_{n+1}| \gtrless |a_n| \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ o anche DEFINITIV.}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \overset{?}{\gtrless} 1$$

Applico il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} |x|^{n+1}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1} |x|^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{(n+2)\sqrt{n}} |x| = |x|$$

1) Se $|x|<1$ la serie (*) converge

2) Se $|x|>1$ la serie (*) div. positiv.

1) $\Rightarrow$ se $|x|<1 \iff -1<x<1$ la serie data è assolutamente convergente e quindi convergente.

2) Se $|x|>1 \iff x>1 \vee x<-1$

- se $x>1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} |x|^n$ $\quad (x>0)$

e quindi la serie data è divergente positiv.

- Se $x<-1$ la serie è a segni alterni.

Devo studiare la monotonia della successione

$$\Big\{ \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n+1} |x|^n}_{|a_n|} \Big\}$$

Abbiamo trovato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| > 1$$

siamo in questo caso!

Per il teorema della permanenza del segno generalizzato:

$$\exists\, \nu \in \mathbb{N}: \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \quad \forall n > \nu$$

$$\Updownarrow$$

$$|a_{n+1}| > |a_n| \quad \forall n > \nu$$

$\{|a_n|\}$ è definitivamente CRESCENTE

$\Downarrow$ Criterio 1.

$\sum_{n=\nu+1}^{+\infty} a_n$ è oscillante

$$\Updownarrow$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è oscillante.

RESTANO da studiare i casi $x = \pm 1$

- Se $x=1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 1 \quad \text{se } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ che diverge.}$$

- Se $x=-1$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

È a segni alterni e non è assolutamente convergente perché la serie dei valori assoluti è:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ che diverge (vedi caso precedente)

Studio la monotonia di

$$\left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right\}.$$

Vedo se è decrescente:

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \overset{?}{>} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$$

$$(n+2)\sqrt{n} \overset{?}{>} (n+1)\sqrt{n+1}$$

$$(n+2)^2 n \overset{?}{>} (n+1)^2 (n+1)$$

$$(n^2+4n+4)n \overset{?}{>} n^3+3n^2+3n+1$$

$$\cancel{n^3}+4n^2+4n \overset{?}{>} \cancel{n^3}+3n^2+3n+1$$

$$n^2 + \underbrace{n-1}_{\geq 1} \overset{?}{>} 0 \qquad \text{VERA } \forall n \in \mathbb{N}$$

Applico il criterio di Leibnitz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$$

$\Downarrow$

La serie converge.