SERIE TELESCOPICHE

$\{x_n\}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1})$$

$$(x_1 - \cancel{x_2}) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_3}) + (\cancel{x_3} - x_4) \dots (x_n - x_{n+1}) \dots\dots$$

$$S_n = x_1 - x_{n+1}$$

Se $\lim x_n = l$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1}) = x_1 - l$

Se $\lim x_n = +\infty \; [-\infty]$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1}) = -\infty \; [+\infty]$

Se $\nexists \lim (x_n) \Rightarrow$ la serie oscilla

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \qquad x_n = \frac{1}{n} \to 0$$

Serie di Mengoli $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - 0$

Criterio di convergenza di Cauchy

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu, \; p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$

CN di convergenza

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim a_n = 0$

Non vale il viceversa

Operazioni con le serie

$\{a_n\}$ $\quad \{b_n\}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + b_n$$

$A_n = a_1 + a_2 \dots + a_n$

$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$T_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) =$

$= A_n + B_n$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

- Se una è convergente e l'altra è divergente positivamente? [negativamente] la serie somma è divergente posit. [negat.]
- Se entrambe divergono con stesso segno la serie somma diverge con stesso segno
- Se entrambe convergono, la serie converge alla somma.
- Se entrambe divergono, ma con segni diversi. Non si può dire nulla

Molt. per scalari

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$

- Se $\lambda = 0$ converge a 0

$A_n = a_1 + \dots + a_n$

$W_n = \lambda (a_1 + \dots + a_n) = \lambda A$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda A$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \; [-\infty] \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ $\;\lambda > 0$: diverge pos. [neg.]; $\;\lambda < 0$: diverge pos [neg]

SERIE RESTO

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (1) $\quad$ fissiamo $k \in \mathbb{N}$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Potrei ottenere un'altra serie sopprimendo i primi k termini.

$a_{k+1} + a_{k+2} \dots + a_{k+n} + \dots$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{k+n} \qquad \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n \; (2)$$

Si dice serie resto k-esimo di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

(1) A_n $\qquad$ (2) S_n

$S_n = a_{k+1} + a_{k+2} \dots + a_{k+n} =$

$= \underbrace{a_1 + a_2 + \dots a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+n}}_{A_{k+n}}$

$- \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)}_{A_k}$

$S_n = A_{k+n} - A_k$

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A \Rightarrow \lim A_{k+n} = A$

$\lim S_n = A - A_k$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n = A - A_k$$

Proprietà

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge posit. [neg] $\Rightarrow \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$ diverg. pos. [neg]

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ oscilla $\Rightarrow \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$ oscilla

Teorema

Data una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ogni serie resto ha il suo stesso carattere

In particolare se si parla di convergenza ...

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n = A - (a_1 + \dots + a_k)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \Leftrightarrow$$ diverge positivamente per la serie armonica

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \qquad \sum_{n=1+3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$ $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Serie a termini non negativi

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema

Ogni serie a termini non negativi è regolare (converge o diverge posit.)

Dim.

$\{S_n\} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

S_n è monotona non decrescente

Per il teorema sulle successioni

$\Downarrow$

S_n ha limite: converge o diverge posit.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ $\quad$ o converge o diverge posit.

$\lim a_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Non rispetta la CN, sicuramente non converge $\Longrightarrow$ diverge posit.

Serie a termini non positivi

Converge o diverge negativamente