Dimostriamo che se $E, F \in \mathcal{F} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{F}$

$$E, F \in \mathcal{F} \to \bar{E}, \bar{F} \in \mathcal{F} \to \bar{E} \cup \bar{F} \in \mathcal{F} \to$$

$$\to \overline{\bar{E} \cup \bar{F}} \in \mathcal{F} \quad \text{Per De Morgan} \quad \overline{\bar{E} \cup \bar{F}} = E \cap F$$

Quindi $E \cap F \in \mathcal{F}$ se $E, F \in \mathcal{F}$

Proposizione 1: $P[E]$, quanto vale $P[\bar{E}]$? $1 - P[E]$

$$P[\Omega] = 1 \qquad \Omega = E \cup \bar{E}$$

$$P[E \cup \bar{E}] = P[\bar{E}] + P[E]$$

$$1 = P[\bar{E}] + P[E]$$

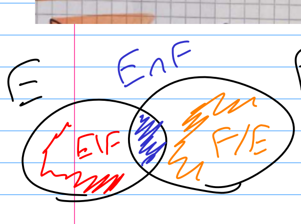
$$P[\bar{E}] = 1 - P[E]$$

Proposizione 2: Se $F \subseteq E \Rightarrow P[F] \leq P[E]$

$$F \subseteq E \to E = F \cup (E \setminus F)$$

$$P[F \cup (E \setminus F)] = \underbrace{P[F] + P[E \setminus F]}_{P[E]} \geq P[F]$$

Proposizione 3: $P[E \cup F] = P[E] + P[F] - P[E \cap F]$



$$E \cup F = (E \setminus F) \cup (E \cap F) \cup (F \setminus E)$$

$$P[(E \setminus F) \cup (E \cap F) \cup (F \setminus E)] =$$

$$= P[E \setminus F] + P(E \cap F) + P[F \setminus E] =$$

$$\boxed{\begin{aligned} E \setminus F &= E \setminus (E \cap F) \\ F \setminus E &= F \setminus (E \cap F) \end{aligned}} \quad NB$$

$$= P(E) - \cancel{P(E \cap F)} + \cancel{P(E \cap F)} + P(F) - P(E \cap F)$$

$$P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Teorema (Formula delle probabilità totali oppure legge delle alternative)
Sia $\{E_i\}$ una partizione di Ω, sia F un evento qualsiasi contenuto in Ω.
Allora la $P[F] = \sum_{i=1}^{M} P[F \mid E_i]\, P[E_i]$

NB: $P[F \mid E] = \dfrac{P[F \cap E]}{P[E]}$

$$P[F \cap E] = P[F \mid E] \cdot P[E]$$

$$F = F \cap \Omega = F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{M} E_i \right) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{M} (F \cap E_i)$$

$$P[F] = P\left(\bigcup_{i=1}^{M} (F \cap E_i) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^{M} P(F \mid E_i)\, P(E_i)$$

Teorema (Formula di Bayes)
Dato un evento F e data una partizione $\{E_i\}$ di Ω, si ha
$$P[E_h \mid F] = \frac{P[F \mid E_h] \cdot P[E_h]}{\sum_i P[F \mid E_i] \cdot P[E_i]}$$

$$P[E_h \cap F] = P[E_h \mid F]\, P[F] = P[F \mid E_h]\, P[E_h]$$

$$P[E_h \mid F] = \frac{P[F \mid E_h]\, P[E_h]}{P[F]}$$

$$P[F] = \sum_i P[F \mid E_i]\, P[E_i]$$

Proprietà: Se E è indipendente da F allora F è indipendente da E
$P[E \mid F] = P[E] \Longrightarrow P[F \mid E] = P[F]$

$$P[E \cap F] = P[E \mid F]\, P[F] = \underline{P[E]\, P[F]}$$

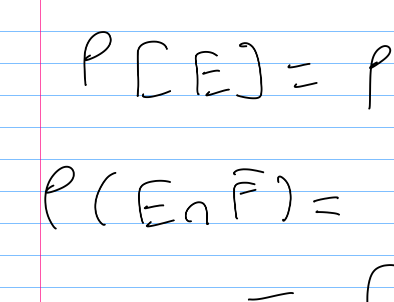
$$// \quad = \underline{P[F \mid E]\, P[E]}$$

$$\cancel{P[E]}\, P[F] = P[F \mid E]\, \cancel{P[E]}$$

cvd

Proposizione: Se E ed F sono indipendenti allora sono indipendenti anche E ed $\bar{F}$

$$P[E \mid F] = P[E]$$
$$\Downarrow$$
$$P[E \mid \bar{F}] = P[E]$$



$$E = (E \cap \bar{F}) \cup (E \cap F)$$

$$P[E] = P(E \cap \bar{F}) + \underline{P(E \cap F)} =$$

Per Hp $\to$ $= P(E) + P(F)$

$$P(E) \cdot P(F) + P(E \cap \bar{F})$$

$$P[E] = P(E) \cdot P(F) + P(E \cap \bar{F})$$

$$P(E \cap \bar{F}) = P[E] - P(F)\, P(E) =$$

$$= [1 - P(F)]\, P(E)$$

$P(E \cap \bar{F}) = P(\bar{F})\, P(E)$ ovvero E e $\bar{F}$ indip.

$P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\, dx$

$$I_a = (-\infty, a) \quad I_b = (-\infty, b) \quad I_{ab} = (a, b)$$

$$P(X \in I_b) = P(I_b) = P(I_a \cup I_{ab}) =$$

$$= P(I_a) + P(I_{ab})$$

$$P(I_b) = P(I_a) + P(I_{ab})$$

$$P(I_{ab}) = P(I_b) - P(I_a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b f_X(x)\, dx$$

Proprietà
$Var[X] = E[X^2] - \mu^2$

$$Var[X] = E[(X - \mu)^2] =$$

$$= E[(X - \mu)^2] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} x_i^2 - 2 x_i \bar{x} + \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{M} \left[\sum_{i=1}^{M} x_i^2 + \sum_{i=1}^{M} \bar{x}^2 - 2 \bar{x} \sum_{i=1}^{M} x_i \right]$$

$$\frac{1}{M} \left[\sum_{i=1}^{M} x_i^2 + M \bar{x}^2 - 2 \bar{x} \sum_{i=1}^{M} x_i \right]$$

$$\overline{x^2} + \bar{x}^2 - 2 \bar{x}\, \bar{x} =$$

$$= \overline{x^2} + \bar{x}^2 - 2 \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$$E[X^2] - m^2$$

Proprietà densità della distr. Binomiale
$P[X = K] = \binom{M}{K} p^K q^{M-K}$ Per ogni K tra 0 e M

- Prob k successi? p^k
- Prob $M-k$ insuccessi? q^{M-k}
- Come possono essere distribuiti? $\binom{M}{K}$

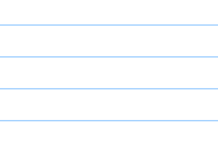
$$\binom{M}{k} p^k q^{M-k}$$

Densità della geometrica
$P[X = k] = p\, q^{k-1}$

- Prob $k-1$ insuccessi? q^{k-1}
- Prob che il k-esimo lancio abbia successo? p

- $p\, q^{k-1}$

$P[X = i + j \mid X > i] = P[X = j]$
"Assenza di memoria" Manca una dipendenza dai valori precedenti



$$P[X = i + j \mid X > i] = \frac{P[(X = i + j) \cap (X > i)]}{P[X > i]} =$$

$$= \frac{P(X = i + j)}{P(X > i)} = \frac{p\, q^{i+j-1}}{q^i} = p\, q^{j-1}$$
$$\downarrow$$
$$Geo(j)$$

$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

$$E(X + Y) = \sum_i z_i\, P(X + Y = z_i) =$$

$$= \sum_i \sum_j (x_i + y_j)\, P(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$= \sum_i x_i\, P(X = x_i) + \sum_j y_j\, P(Y = y_j)$$

✓

$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]\, E[Y]$

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{M} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\frac{1}{M} \sum_i x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \bar{y}$$

$$\frac{1}{M} \left[\sum_i x_i y_i - \bar{y} \sum_i x_i - \bar{x} \sum_i y_i + \sum_i \bar{x} \bar{y} \right]$$

$$\overline{xy} - \bar{y}\, \bar{x} - \cancel{\bar{x}}\, \bar{y} + \cancel{\bar{x}}\, \bar{y}$$

$$E(XY) - E(X)\, E(Y)$$

Proprietà
Se X e Y sono indipendenti allora sono incorrelate
Non è detto il viceversa.

Incorrelate $\equiv Cov(X, Y) = 0$

NB: $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)\, E(Y)$

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j\, P(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j\, P(X)\, P(Y) =$$

$$= \sum_i x_i\, P(X) \cdot \sum_j y_j\, P(Y) =$$

$$= E(X)\, E(Y) \quad ✓$$

Teorema: Sia X variabile aleatoria continua e sia $Y = g(X)$. Se g è una funzione invertibile nel supporto I di X e h è la sua inversa allora:

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

Dim:

$$Y = g(X)$$

$$X = g^{-1}(y) = h(y)$$

$$h'(y) = dx/dy$$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(g(X) \leq t) =$$

$$= \int_{g(x) \leq t} f_X(x)\, dx = \int_{y \leq t} f_X(h(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| dy$$

$$= \int_{y \leq t} f_X(h(y))\, |h'(y)|\, dy$$

$$F_Y(t) = \int_{y \leq t} f_X(h(y))\, |h'(y)|\, dy$$

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\, |h'(y)|$$

Proposizione Valore atteso e varianza della media campionaria

Se la popolazione X è dotata di media e varianza $E[X] = m$ e $Var[X] = v$. Dato un campione iid $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si ha:

$$E[\bar{X}_n] = m, \quad Var[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} v$$

$$E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{n} E[X_1 + X_2 + \ldots X_n]$$

$$= \frac{1}{n} n E[X] = E[X] = m$$

$$Var[\bar{X}_n] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n}\right] =$$

$$\frac{1}{n^2} Var[X_1 + X_2 + \ldots X_n] = \frac{1}{n^2} n\, Var[X] =$$

$$= \frac{1}{n} v$$