## Serie assolutamente convergenti

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è detta assolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente

### Teorema

Ogni serie assolutamente convergente è convergente

### Dim:

Hp: $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge

Ts: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

$$a_n = \underbrace{a_n + |a_n|} - |a_n|$$

$$a_n + |a_n| = \begin{cases} 0 & a_n < 0 \\ 2|a_n| & a_n \geq 0 \end{cases}$$

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n + |a_n|]$ è a termini non negativi ed è maggiorata da

$\sum_{n=1}^{+\infty} 2|a_n|$ che converge dato che per ipotesi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + |a_n|$ converge

$$a_n = \underbrace{a_n + |a_n|}_{\text{Converge}} - \underbrace{|a_n|}_{\text{Converge (Hp)}}$$

$\Downarrow$

Converge

Assoluta convergenza $\Longrightarrow$ Convergenza

$\not\Longleftarrow$

## Serie a segni alterni

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad a_n \begin{cases} \geq 0 \ (\leq 0) & \text{se } n \text{ dispari} \\ \leq 0 \ (\geq 0) & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$

(e' a termini non tutti nulli)

### Teorema

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a segni alterni

$\{|a_n|\}$ monotona

$\Big| \longrightarrow$ La serie non può divergere

### Dim

Sia $a_n \begin{cases} \geq 0 & n \text{ pari} \\ \leq 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$

$\{|a_n|\}$ decrescente ($|a_n| \geq |a_{n+1}| \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Consideriamo $\{s_n\}$ succ delle somme parziali

$$s_{2n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$$

$$s_{2n+2} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}}_{s_{2n}} + \underbrace{\overset{-|a_{2n+1}|}{\overset{||}{a_{2n+1}}}}_{\leq 0} + \underbrace{\overset{|a_{2n+2}|}{\overset{||}{a_{2n+2}}}}_{\geq 0}$$

$$s_{2n+2} = s_{2n} - |a_{2n+1}| + |a_{2n+2}|$$

Dato che $\{|a_n|\}$ decrescente

$$-|a_{2n+1}| + |a_{2n+2}| \leq 0$$

Dato questo possiamo capire che

$s_{2n+2} \leq s_{2n}$ ovvero $\{s_{2n}\}$ è decrescente

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$s_{2n-1} = a_1 + \dots + a_{2n-1}$$

$$s_{2n+1} = \underbrace{a_1 + \dots + a_{2n-1}}_{s_{2n-1}} + \underbrace{\overset{|a_{2n}|}{\overset{||}{a_{2n}}}}_{\geq 0} + \underbrace{\overset{-|a_{2n+1}|}{\overset{||}{a_{2n+1}}}}_{\leq 0}$$

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + |a_{2n}| - |a_{2n+1}|$$

Noi sappiamo che $\{|a_n|\}$ è decrescente

$$|a_{2n}| - |a_{2n+1}| \geq 0$$

$s_{2n+1} \geq s_{2n-1}$ ovvero $\{s_{2n-1}\}$ è crescente

• Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ fosse divergente posit. [neg.]

$\{s_n\}$ divergerebbe positivamente. [neg.]

Ma se una successione è divergente posit. [neg.] lo sono anche le sue estratte.

$\{s_{2n}\}$ è decrescente quindi non può esserlo. Ovvero necessariamente la serie non diverge

[ $\{s_{2n-1}\}$ è crescente quindi non può esserlo la serie non diverge ]

### Corollario

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ segni alterni

$\{|a_n|\}$ crescente

$\Bigg\| \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è oscillante

### Dim:

Per il teorema la serie non diverge

Se fosse convergente

$\Downarrow$

$\lim a_n = 0$

$\Updownarrow$

$\lim |a_n| = 0$ Noi sappiamo $\{|a_n|\}$ è crescente

$$\lim |a_n| = \sup\{|a_n|\}$$

$$0 = \sup\{|a_n|\}$$

ovvero $|a_n| \leq 0$ ovvero $a_n = 0$

Ma noi abbiamo per ipotesi una serie a segni alterni e quindi fatta da termini non tutti nulli. Assurdo

### Teorema di Leibniz

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a segni alterni

$\{|a_n|\}$ è decrescente

i) $\lim a_n \neq 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ oscilla

ii) $\lim a_n = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad s_n = a_1 + \dots + a_n$$

$$|S - s_n| \leq |a_{n+1}| \ \forall n$$

$\downarrow$

Errore di approssimazione

$$S \simeq s_n$$

### Dim

Per il teorema la serie non diverge

i) $\lim a_n \neq 0$ Oscilla

ii) $\lim a_n = 0$

Sfruttando la dimostrazione del teorema precedente

Prendiamo la succ delle somme parziali $\{s_n\}$

Prendiamo $\{s_{2n}\}$ decrescente

$\{s_{2n-1}\}$ crescente

$$s' = \lim s_{2n} \qquad s'' = \lim s_{2n-1}$$

$$\begin{array}{ccccc} s_{2n} & = & s_{2n-1} & + & a_{2n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s' & & s'' & & 0 \end{array}$$

ovvero $s' = s''$ accade solo se $s', s'' \in \mathbb{R}$

Abbiamo dimostrato che $\{s_{2n}\}$ e $\{s_{2n-1}\}$ convergono allo stesso numero.

$\{s_n\}$ converge a quel numero

Quindi la serie converge.