Eq. lineari del 1° ordine

$a, g : I \to \mathbb{R}$ $\quad I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$$y' + a(x)\,y = g(x)$$

$\downarrow$

$$y' = -a(x)\,y + g(x)$$: forma normale.

$a(x)$: coefficiente

$g(x)$: termine noto

è una V.S.

Risolviamo l'EOA $\quad y' = -a(x)\,y$

$\downarrow$

$$y(x) = k\,e^{-A(x)} \quad \forall x \in I \qquad k \in \mathbb{R} \qquad A(x) \in \int a(x)\,dx$$

caratterizzazione dell'integrale generale dell'eq. omog.

Motivo ?

Soluzioni 1^a categ.

Soluzioni 2^a categoria

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$

$$y(y) = 0 \longleftrightarrow \varphi(x) = 0$$

$$A(x) = \int a(x)\,dx$$

$$\updownarrow$$

$$D\left[\ln|y(x)|\right] = D\left[-A(x)\right]$$

$$\ln|y(x)| = -A(x) + K$$

$$y(x) = \pm e^{-A(x)+K}$$

$$y(x) = \pm c\, e^{-A(x)}$$

$$y(x) = k\, e^{-A(x)}$$ con $$A(x) = \int a(x)\,dx$$

Risoluzione EC

Siano y_1, y_2 soluzioni in (α, β) di

$$y' = -a(x)\,y + g(x)$$

$y_1 - y_2$ è soluzione dell'EOA

- $y_1' = -a(x)\,y_1 + g(x)$
  $y_2' = -a(x)\,y_2 + g(x)$ $\Longrightarrow$ $\underline{y_1' - y_2' = -a(x)(y_1 - y_2)}$

$$D[y_1 - y_2] = -a(x)\,[y_1 - y_2]$$

Caratterizzazione delle soluzioni di EC

Sia $\bar{y}(x)$ soluzione di EC

Tutte e sole le soluzioni di EC sono nella forma

$$\bar{y}(x) + \underbrace{k\,e^{-A(x)}}_{\text{Soluzione EOA}}$$

Dimostrazione

Mettiamo $\bar{y}(x) + Ke^{-A(x)}$ al posto di y nella eq e vediamo se fa $g(x)$

$$D\left(\bar{y}(x) + Ke^{-A(x)}\right) + a(x)\left(\bar{y}(x) + Ke^{-A(x)}\right) =$$

$$= \bar{y}'(x) + \underbrace{\cancel{Ke^{-A(x)}(-a(x))}} + a(x)\bar{y}(x) + \underbrace{\cancel{K a(x) e^{-A(x)}}} =$$

$$= \bar{y}'(x) + a(x)\bar{y}(x) = g(x)$$

Perché $\bar{y}$ l'abbiamo supposta soluzione

Provo che queste sono le uniche

Sia (per assurdo) $y_1(x)$ soluzione di EC.

$y_1 - \bar{y}$: soluzione di EOA

$$\Downarrow$$

$$y_1(x) - \bar{y}(x) = Ke^{-A(x)}$$

$$y_1(x) = \bar{y}(x) + Ke^{-A(x)}$$

c.v.d.

Per trovare integrale generale

METODO VARIAZIONE COSTANTI

Cerchiamo $\bar{y}(x)$ $\quad \bar{y}(x) = \gamma(x)\, e^{-A(x)}$ $\quad \gamma : I \to \mathbb{R}$ derivabile

$$\bar{y}'(x) = \gamma'(x)\, e^{-A(x)} + \gamma(x)\, e^{-A(x)}\,(-a(x))$$

Avendo $\bar{y}'$ e $\bar{y}$ li metto nell'eq. originale per trovare $\gamma(x)$

$$\underbrace{\gamma'(x)\, e^{-A(x)} + \gamma(x)\, e^{-A(x)}(-a(x))}_{\bar{y}'} + \underbrace{\gamma(x)\, e^{-A(x)}\, a(x)}_{a(x)\, y} = \underbrace{g(x)}_{g(x)}$$

Trovo $\gamma(x)$ $\qquad \gamma'(x)\, e^{-A(x)} = g(x)$

$$\gamma(x) \in \int g(x)\, e^{A(x)}\, dx$$

Trovato $\gamma(x)$

$\bar{y}(x) = \gamma(x)\, e^{-A(x)}$ è una sol. di EC

Integrale generale di EC.

$$\bar{y}(x) + k\, e^{-A(x)} = \gamma(x)\, e^{-A(x)} + k\, e^{-A(x)}$$

$$e^{-A(x)}\,(\gamma(x) + k)$$