Esercizi

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

Non c'è [illegible]

$A : \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\neq(0,0)\}$

$E_1 = \{(x,y)\in A : x=0, y\neq 0\}$

$f_{|E_1} = \frac{y^2}{y^2} = 1 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} = 1$

$E_2 = \{(x,y)\in A : x\neq 0, y=0\}$

$f_{|E_2} = \frac{x^3}{x^2} = x \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|E_2} = 0$

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

$E_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0, y\neq 0\}$

$f_{E_1} = \frac{y^4}{y^2} = y^2$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{E_1} = 0$

$E_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \; x\neq 0, x=y\}$

$f_{E_2} = \frac{\cancel{2}x^4}{\cancel{2}x^2} = x^2$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$

$E_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R} \; y=mx$

$f_{|E_3} = \frac{x^4+m^4x^4}{x^2+m^2x^2} = \frac{x^{\cancel{4}2}(m^4+1)}{\cancel{x^2}(m^2+1)} \qquad \lim \to 0$

$0 \leq \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{x^4+y^4+2(xy)^2}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x^2+y^2}}$

$x^4+y^4 \leq x^4+y^4+2(xy)^2 = (x^2+y^2)^2$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x\log y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$

$E_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0, y\neq 0\}$

$\lim_{(x,y)\to(0,1)} 0 = 0$

Se c'è limite è 0.

$0 \leq \left|\frac{x\log y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}\right| \leq \left|\frac{\cancel{x}\log y}{\cancel{x}}\right| \to 0$

$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$E_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0, y\neq 0\}$

$f_{E_1} = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$

Se c'è limite è 0

$0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{xy}{|x|}\right| \qquad |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |y| \to 0$

(5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin x \sin y \log(x^4+y^4)$

$E_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R} : x=0, y\neq 0\}$

$f_{E_1} = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{E_1} = 0$

Se c'è limite è 0

$E_2 = \{ \; x=y \; \}$

$\sin x \sin x \log(2x^4)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin^2 x \log(2x^4) = -\infty$ Non c'è li

(6) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\log(1+x)$

$E_1 = \{x=0, y\neq 0\}$

$f_{E_1} = 0 \qquad \lim = 0$

$E_2 = \{x=y\}$

$f_{E_2} = \log(y+1) \qquad \lim f_{E_2} = 0$

Se c'è limite è 0

$0 \leq \left|\frac{x}{y}\log(x+1)\right| \leq \left|\frac{x}{y}x\right| = \left|\frac{x}{y}\right|\sqrt{x^2} =$

$= \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} \leq \frac{\sqrt{\cancel{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} \to 0$

(7) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2}-1}{x^4+y^2}$

$E_1 = \{x=0, y\neq 0\}$

$f_{E_1} = 0 \qquad \lim \to 0$

$E_2 = \{x=y\}$

$f_{E_1} = \frac{e^{y^3}-1}{y^4+y^2} = \frac{e^{y^3}-1}{y^2(y^2+1)}$ Non può fare 0

(8) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+3y}{x^2-y^2}$

$x^2 \neq y^2$

$\sqrt{x^2} \neq \sqrt{y^2}$

$|x| \neq |y|$

$f_{x=0} \; \frac{3y}{-y^2} = -\frac{3}{y}$

$\lim \to -\infty$

$f_{y=0} \; \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \frac{2}{x} \qquad \lim \to +\infty$

(9) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{3x^2+2y^2}$

$E_1 = \{x=0, y\neq 0\}$

$f_{E_1} = 0 \qquad \lim \to 0$

$E_2 = \{y=0, x\neq 0\} \qquad f_{E_2} = 0 \qquad \lim \to 0$

$E_3 = \{x=y\}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x^2)}{5x^2} = \frac{1}{5}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\sin(x^2) =$

$= 0.$

E_m

$y = mx \qquad \frac{\sin^2(mx^2)}{3x^2+2m^2x^2} = \frac{\sin^2(mx^2)}{x^2(3+2m^2)}$

$f_{E_m} = m\frac{\sin(mx^2)}{mx^2}\sin(mx^2)\frac{1}{3+2m^2}$

(9) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{3x^2+2y^2}$

$0 \leq \left|\frac{\sin^2(xy)}{(3x^2+2y^2)}\right| \leq \frac{|\sin(xy)\sin(xy)|}{3x^2+2y^2} \leq$

$\leq \frac{|xy|\cdot|xy|}{3x^2+2y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{3x^2+2y^2} =$

$= \frac{(x^2+y^2)^2}{3x^2+2y^2} = \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{3x^2+2y^2} \leq$

$\leq \frac{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x^2+y^2}} = x^2+y^2 \to 0$