Equazione diff. 1° ordine

$B \neq \emptyset$ $\quad B \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad F: B \to \mathbb{R}$

Eq. diff. 1° ordine

$F(x, y, y') = 0$ ricerca f.ni

$y: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$:

i) y derivabile in (α, β)

ii) $(x, y(x), y'(x)) \in B \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

iii) $F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Mi riconduco alla forma normale

$F(x,y,y') \longrightarrow y' = f(x,y)$ dom $f = A$

Risolverla vuol dire

trovare $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$:

i) y derivabile in (α, β)

ii) $(x, y(x)) \in A \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

iii) $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Eq. 2° ordine

$B \subseteq \mathbb{R}^4$ $B \neq \emptyset$ $F : B \to \mathbb{R}$

Eq diff. di 2° ordine

$F(x, y, y', y'') = 0$ è il

problema della ricerca delle

funzioni $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$

Con 3 condizioni

i) y derivabile 2 volte (almeno) in (α, β)

ii) $(x, y(x), y'(x), y''(x)) \in B \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

iii) $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Mi riconduco alla forma normale

$$y'' = f(x, y, y')$$

$f : A \to \mathbb{R}$
$A \subseteq \mathbb{R}^3$

Le soluzioni sono le funzioni

$y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$:

i) y derivabile 2 volte (almeno) in (α, β)

ii) $(x, y(x), y'(x)) \in A \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

iii) $f(x, y(x), y'(x)) = y''(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Problema di Cauchy
(con eq. diff. 1° ordine)

Data un'eq. diff. chiamo problema di Cauchy la ricerca di una particolare soluzione dell'eq. tale che vengano rispettate le condizioni iniziali

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & \leftarrow \text{eq. diff.} \\ y(x_0) = y_0 & \leftarrow \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

Procedimento: Risolvo l'eq.
Essa sarà in funzione di x e un parametro k (la costante).
Si pone $x = x_0$ e $y(x) = y_0$
Fatto questo possiamo ricavare il valore di k per la particolare soluzione

Problema di Cauchy (2° ordine)

Dato (x_0, y_0, y'_0) si dice problema di Cauchy relativo a $y'' = f(x, y, y')$ *

la ricerca di una particolare soluzione di * tale che $y(x_0) = y_0$ $y'(x_0) = y'_0$

$$\boxed{\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}}$$

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ → Condizioni iniziali

Problema di Cauchy

Equazione diff. di ordine n

$B \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ $F: B \to \mathbb{R}$

$B \neq 0$

forma implicita

$$\underbrace{F(x, y, y' \ldots y^{n})}_{n+2\text{-upla}} = 0$$

La risoluzione di tale eq. consiste nella ricerca di funzioni $y(x): (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$

Tale che:

(i) y derivabile almeno n volte in (α, β)

(ii) $(x, y(x), y'(x) \dots y^n(x)) \in B$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$

(iii) $F(x, y(x), y'(x) \dots y^n(x)) = 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$

Scriviamo l'eq nella forma normale

$$y^n = f(x, y, y' \dots y^{n-1})$$

$f : A \to \mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Le sue soluzioni sono le fni $y(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$:

(i) y derivabile almeno n volte in (α, β)

(ii) $(x, y(x), y'(x) \dots y^{n-1}(x)) \in A$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$

(iii) $f(x, y, y'(x) \dots y^{n-1}(x)) = y^n$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$

Problema di Cauchy. Dato $(x_0, y_0, y'_0 \dots y_0^{n-1})$

$$\begin{cases} y^n = f(x, y, y', \dots y^{n-1}) & \text{— eq. diff ordine } n \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

Condizioni iniziali

x_0 : punto iniziale