Esercizi di Matematica Discreta - Parte I

7 ottobre 2011

AVVISO: Sia i testi che gli svolgimenti proposti possono contenere errori e/o ripetizioni. Essi sono infatti opera di vari collage e, per ovvie questioni di tempo, non sono stati rivisti. Pertanto non intendono sostituire alcun libro di esercizi. Gli studenti sono quindi pregati di prestare particolare attenzione. Prego infine gli studenti di volermi cortesemente informare sia direttamente che per e-mail (quattrocchi@dmi.unict.it) di qualunque errore o sospetto di errore notato.

Indice

1 Insiemi e relazioni

1. Sia $A = \{0, 1, 2\}$. Si dica se le affermazioni che seguono sono vere o false:

   - $\{0\} \subseteq A$;
   - $0 \in A$;
   - $0 \in A$;
   - $\{\emptyset\} \subseteq A$;
   - $\{\emptyset\} \in A$;
   - $\emptyset \subseteq A$.

2. Siano A, B, C insiemi. Si provi che:

   (a) se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$;

   (b) se $A \subseteq B$, allora $(B - A) \cap A = \emptyset$ e $(B - A) \cup B = B$;

   (c) se $A \subseteq C$, $B \subseteq C$, $A \cap B = \emptyset$, e $A \cup B = C$, allora $A = C - B$;

   (d) se $A \subseteq B$, allora $B - (B - A) = A$;

   (e) se $A, B \subseteq C$, allora $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$ e $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$.

3. Siano A e B due insiemi. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

   (a) $A \cap B = A$;

   (b) $A \subseteq B$;

   (c) $A \cup B = B$.

4. Per ogni $i \in \mathbb{Z}$ sia $A_i = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \geq i\}$. Si provi che $\cup_{i \in \mathbb{Z}} A_i = \mathbb{N}$ e $\cap_{i \in \mathbb{Z}} A_i = \emptyset$.

5. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ sia $A_i = \{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x \neq i\}$. Si provi che $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{Q}$ e $\cap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{Q} - \mathbb{N}$.

6. Siano $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = 5x + 4$ due applicazioni da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   (a) Provare che sia f che g sono biunivoche.

   SVOLGIMENTO. Iniettività: se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) = 3x_1 - 1 \neq 3x_2 - 1 = f(x_2)$ e $g(x_1) = 5x_1 + 4 \neq 5x_2 + 4 = g(x_2)$.
   Suriettività: per ogni $y \in \mathbb{R}$, si ha $3x - 1 = y$ per $x = \frac{y+1}{3}$ e $5x + 4 = y$ per $x = \frac{y-4}{5}$.

   (b) Verificare che $f \circ g \neq g \circ f$.

   SVOLGIMENTO. $f \circ g(x) = 3(5x+4) - 1 = 15x + 11$, $g \circ f(x) = 5(3x-1) + 4 = 15x - 1$. Poichè $15x + 11 \neq 15x - 1$, si ha l'asserto.

(c) Posto $\overline{g}(x) = 5x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, determinare gli eventuali valori di λ per cui $f \circ \overline{g} = \overline{g} \circ f$.

SVOLGIMENTO. $f \circ \overline{g}(x) = 3(5x+\lambda) - 1 = 15x + 3\lambda - 1$; $\overline{g} \circ f(x) = 5(3x-1) + \lambda = 15x - 5 + \lambda$. Devo trovare i valori di λ per cui $15x + 3\lambda - 1 = 15x - 5 + \lambda$. Quindi $\lambda = -2$.

7. Siano $f(x) = 4x + 2$ e $g(x) = 6x - 1$ due applicazioni da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) Provare che sia f che g sono biunivoche.

SVOLGIMENTO. Iniettività: se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) = 4x_1 + 2 \neq 4x_2 + 2 = f(x_2)$ e $g(x_1) = 6x_1 - 1 \neq 6x_2 - 1 = g(x_2)$.
Suriettività: per ogni $y \in \mathbb{R}$, si ha $4x + 2 = y$ per $x = \frac{y-2}{4}$ e $6x - 1 = y$ per $x = \frac{y+1}{6}$.

(b) Verificare che $f \circ g \neq g \circ f$.

SVOLGIMENTO. $f \circ g(x) = 4(6x-1) + 2 = 24x - 2$, $g \circ f(x) = 6(4x+2) - 1 = 24x + 11$. Poichè $24x - 2 \neq 24x + 11$, si ha l'asserto.

(c) Posto $\overline{g}(x) = 6x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, determinare gli eventuali valori di λ per cui $f \circ \overline{g} \neq \overline{g} \circ f$.

SVOLGIMENTO. $f \circ \overline{g}(x) = 4(6x+\lambda) + 2 = 24x + 4\lambda + 2$; $\overline{g} \circ f(x) = 6(4x+2) + \lambda = 24x + 12 + \lambda$. Devo trovare i valori di λ per cui $24x + 4\lambda + 2 = 24x + 12 + \lambda$. Quindi $\lambda = \frac{10}{3}$.

8. Siano $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \lambda x + 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, due applicazioni da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Provare che $f(x)$ è biunivoca.

SVOLGIMENTO. Surietività di f. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(\frac{\alpha + 3}{2}) = \alpha.$$

Iniettività di f. Per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $2x_1 - 3 \neq 2x_2 - 3$.

(b) Determinare gli eventuali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $g(x)$ non è biunivoca.

SVOLGIMENTO. Se $\lambda \neq 0$ si vede facilmente che g è biunivoca (procedere in modo simile al caso precedente). Per $\lambda = 0$, $g(x) = 3$ e tale funzione non è biunivoca.

(c) Determinare gli eventuali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $f \circ g = g \circ f$.

SVOLGIMENTO. Si ha

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(\lambda x + 3) - 3 = 2\lambda x + 3,$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \lambda(2x-3)+3 = 2\lambda x - 3\lambda + 3.$$

Imponendo l'uguaglianza (per ogni x) si ha

$$2\lambda x + 3 = 2\lambda x - 3\lambda + 3$$

da cui segue $\lambda = 0$.

9. Siano f e g le applicazioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definite rispettivamente dalle leggi $f(x) = 3x - 5$ e $g = \lambda x + 28$, ove λ è un parametro reale. Risolvere i seguenti quesiti:
   - esistono valori di λ per cui $f \circ g = g \circ f$? In caso affermativo calcolare tali valori;
   - l'applicazione f è invertibile? In caso di risposta affermativa calcolarne l'applicazione inversa;
   - l'applicazione g è invertibile per ogni valore di λ? In caso di risposta affermativa calcolarne l'applicazione inversa.

10. Siano $f(x) = 2\lambda x + 7$ e $g(x) = 7x - 5$, $\lambda \in \mathbb{R}$, due applicazioni da $\mathbb{R} \ \rightarrow \ \mathbb{R}$.
    (a) Provare che $g(x)$ è biunivoca.
    (b) Determinare gli eventuali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $f(x)$ non è biunivoca.
    (c) Determinare gli eventuali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $f \circ g = g \circ f$.

11. Siano $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $\alpha < \beta$.
    - Provare che $f(x) = (b-a)x + a$ é la legge di una applicazione biiettiva di $[0,1]$ in $[a,b]$.
    - Determinare la legge di f^{-1}.
    - Scrivere la legge di una applicazione biettiva di $[\alpha, \beta]$ in $[a,b]$.

12. Trovare una corrispondenza biunivoca fra un intervallo chiuso (cioé compresi gli estremi) e una retta.

13. Sia A un sottoinsieme inferiormente limitato di $\mathbb{Z}$. Provare che A ha il minimo.

14. Sia $\mathcal{S}$ la seguente relazione su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(n,m)\mathcal{S}(n',m')$ se e solo se $n + m' = m + n'$. Provare che $\mathcal{S}$ è una relazione di equivalenza. Descrivere le classi di equivalenza.

15. Sia $\mathcal{P}$ la seguente relazione su $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$: $(n,m)\mathcal{P}(n',m')$ se e solo se $nm' = mn'$. Provare che $\mathcal{P}$ è una relazione di equivalenza. Descrivere le classi di equivalenza.

16. - Sia $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{R}_1$ la relazione su A così definita: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_1(x_2, y_2)$ se e solo se $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Provare che $\mathcal{R}_1$ è una relazione di equivalenza su A.

      SVOLGIMENTO. Riflessiva: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_1(x_1, y_1) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2$.
      Simmetrica: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_1(x_2, y_2) \implies (x_2, y_2)\mathcal{R}_1(x_1, y_1)$. È vera in quanto $x_1^2 +$

$y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \Longrightarrow x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2$.
Transitiva: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_1(x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2)\mathcal{R}_1(x_3, y_3) \Longrightarrow (x_1, y_1)\mathcal{R}_1(x_3, y_3)$. Anche questa proprietà vale in quanto $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ e $x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 \Longrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$.

- Sia $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{R}_2$ la relazione su A così definita: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2)$ se e solo se $x_1^2+y_1^2 \leq x_2^2+y_2^2$. Provare che $\mathcal{R}_2$ non verifica nè la proprietà simmetrica nè quella antisimmetrica.

  SVOLGIMENTO. Simmetrica: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2) \Longrightarrow (x_2, y_2)\mathcal{R}_2(x_1, y_1)$. Cioè $x_1^2 + y_1^2 \leq x_2^2 + y_2^2 \Longrightarrow x_2^2 + y_2^2 \leq x_1^2 + y_1^2$.
  Posto $(x_1, y_1) = (1, 1)$ e $(x_2, y_2) = (2, 2)$, si ha $x_1^2 + y_1^2 = 2 \leq 8 = x_2^2 + y_2^2 \not\Longrightarrow x_2^2 + y_2^2 = 8 \leq 2 = x_1^2 + y_1^2$. Quindi la proprietà simmetrica non è valida.
  Antisimmetrica: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2)\mathcal{R}_2(x_1, y_1) \Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Cioè $x_1^2 + y_1^2 \leq x_2^2 + y_2^2$ e $x_2^2 + y_2^2 \leq x_1^2 + y_1^2 \Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
  Posto $(x_1, y_1) = (1, 1)$ e $(x_2, y_2) = (\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{4}})$, si ha $x_1^2 + y_1^2 = 2 \leq 2 = x_2^2 + y_2^2$ e $x_2^2 + y_2^2 = 2 \leq 2 = x_1^2 + y_1^2 \not\Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Quindi la proprietà antisimmetrica non è valida.

- Siano $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ le due relazioni su $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definite nei due punti precedenti. Si consideri l'insieme quoziente $B = A/_{\mathcal{R}_1}$ e si definisca su esso la seguente relazione: $\alpha\mathcal{R}_3\beta$ se e solo se comunque presi $(x_1, y_1) \in \alpha$ e $(x_2, y_2) \in \beta$, si ha $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2)$. Provare che $\mathcal{R}_3$ è una relazione d'ordine su B.

  SVOLGIMENTO. Riflessiva: $\alpha\mathcal{R}_3\alpha$. Cioè comunque preso $(x_1, y_1) \in \alpha$, si ha $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_1, y_1)$, ovvero $x_1^2 + y_1^2 \leq x_1^2 + y_1^2$. La proprietà riflessiva risulta ovviamente vera.
  Antisimmetrica: $\alpha\mathcal{R}_3\beta$ e $\beta\mathcal{R}_3\alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$. Cioè comunque presi $(x_1, y_1) \in \alpha$ e $(x_2, y_2) \in \beta$, si ha $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2)$, ovvero $x_1^2+y_1^2 \leq x_2^2+y_2^2$, e $(x_2, y_2)\mathcal{R}_2(x_1, y_1)$, ovvero $x_2^2 + y_2^2 \leq x_1^2 + y_1^2$. Quindi è $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Ne segue che (x_1, y_1) e (x_2, y_2) appartengono ad una stessa classe di equivalenza di $B = A/_{\mathcal{R}_1}$. Essendo $(x_1, y_1) \in \alpha$ e $(x_2, y_2) \in \beta$, ne segue $\alpha = \beta$.
  Transitiva: $\alpha\mathcal{R}_3\beta$ e $\beta\mathcal{R}_3\gamma \Longrightarrow \alpha\mathcal{R}_3\gamma$. Cioè comunque presi $(x_1, y_1) \in \alpha$, $(x_2, y_2) \in \beta$ e $(x_3, y_3) \in \gamma$, si ha $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2)$, ovvero $x_1^2 + y_1^2 \leq x_2^2 + y_2^2$, $(x_2, y_2)\mathcal{R}_2(x_3, y_3)$, ovvero $x_2^2 + y_2^2 \leq x_3^2 + y_3^2$. Quindi è $x_1^2 + y_1^2 \leq x_3^2 + y_3^2$, cioè $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_3, y_3)$, la quale implica $\alpha\mathcal{R}_3\gamma$.

17.
- Sia $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali positivi. Posto $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, si definisca su A la seguente relazione: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_1(x_2, y_2)$ se e solo se $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Provare che $\mathcal{R}_1$ è una relazione di equivalenza su A.

  SVOLGIMENTO. Riflessiva: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_1(x_1, y_1) \Longleftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1}{x_1}$.
  Simmetrica: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_1(x_2, y_2) \Longrightarrow (x_2, y_2)\mathcal{R}_1(x_1, y_1)$. È vera in quanto $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Longrightarrow \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$.
  Transitiva: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_1(x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2)\mathcal{R}_1(x_3, y_3) \Longrightarrow (x_1, y_1)\mathcal{R}_1(x_3, y_3)$. Anche questa proprietà vale in quanto $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ e $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} \Longrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_3}{x_3}$.

- Sia $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e sia $\mathcal{R}_2$ la relazione su A così definita: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2)$ se e solo se $\frac{y_1}{x_1} \leq \frac{y_2}{x_2}$. Provare che $\mathcal{R}_2$ non verifica nè la proprietà simmetrica nè quella antisimmetrica.

  SVOLGIMENTO. Simmetrica: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2) \Longrightarrow (x_2, y_2)\mathcal{R}_2(x_1, y_1)$. Cioè $\frac{y_1}{x_1} \leq \frac{y_2}{x_2} \Longrightarrow \frac{y_2}{x_2} \leq \frac{y_1}{x_1}$.
  Posto $(x_1, y_1) = (1, 1)$ e $(x_2, y_2) = (1, 2)$, si ha $\frac{y_1}{x_1} = 1 \leq 2 = \frac{y_2}{x_2} \not\Longrightarrow \frac{y_2}{x_2} = 2 \leq 1 = \frac{y_1}{x_1}$. Quindi la proprietà simmetrica non è valida.
  Antisimmetrica: $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2)\mathcal{R}_2(x_1, y_1) \Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Cioè $\frac{y_1}{x_1} \leq \frac{y_2}{x_2}$ e $\frac{y_2}{x_2} \leq \frac{y_1}{x_1} \Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
  Posto $(x_1, y_1) = (1, 1)$ e $(x_2, y_2) = (2, 2)$, si ha $\frac{y_1}{x_1} = 1 \leq 1 = \frac{y_2}{x_2}$ e $\frac{y_2}{x_2} = 1 \leq 1 = \frac{y_1}{x_1} \not\Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Quindi la proprietà antisimmetrica non è valida.
- Siano $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ le due relazioni su $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definite nei due punti precedenti. Si consideri l'insieme quoziente $B = A/_{\mathcal{R}_1}$ e si definisca su esso la seguente relazione: $\alpha\mathcal{R}_3\beta$ se e solo se comunque presi $(x_1, y_1) \in \alpha$ e $(x_2, y_2) \in \beta$, si ha $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2)$. Provare che $\mathcal{R}_3$ è una relazione d'ordine su B.

  SVOLGIMENTO. Riflessiva: $\alpha\mathcal{R}_3\alpha$. Cioè comunque preso $(x_1, y_1) \in \alpha$, si ha $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_1, y_1)$, ovvero $\frac{y_1}{x_1} \leq \frac{y_1}{x_1}$. La proprietà riflessiva risulta ovviamente vera.
  Antisimmetrica: $\alpha\mathcal{R}_3\beta$ e $\beta\mathcal{R}_3\alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$. Cioè comunque presi $(x_1, y_1) \in \alpha$ e $(x_2, y_2) \in \beta$, si ha $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2)$, ovvero $\frac{y_1}{x_1} \leq \frac{y_2}{x_2}$, e $(x_2, y_2)\mathcal{R}_2(x_1, y_1)$, ovvero $\frac{y_2}{x_2} \leq \frac{y_1}{x_1}$. Quindi è $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Ne segue che (x_1, y_1) e (x_2, y_2) appartengono ad una stessa classe di equivalenza di $B = A/_{\mathcal{R}_1}$. Essendo $(x_1, y_1) \in \alpha$ e $(x_2, y_2) \in \beta$, ne segue $\alpha = \beta$.
  Transitiva: $\alpha\mathcal{R}_3\beta$ e $\beta\mathcal{R}_3\gamma \Longrightarrow \alpha\mathcal{R}_3\gamma$. Cio comunque presi $(x_1, y_1) \in \alpha$, $(x_2, y_2) \in \beta$ e $(x_3, y_3) \in \gamma$, si ha $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_2, y_2)$, ovvero $\frac{y_1}{x_1} \leq \frac{y_2}{x_2}$,
  $(x_2, y_2)\mathcal{R}_2(x_3, y_3)$, ovvero $\frac{y_2}{x_2} \leq \frac{y_3}{x_3}$. Quindi è $\frac{y_1}{x_1} \leq \frac{y_3}{x_3}$, cioè $(x_1, y_1)\mathcal{R}_2(x_3, y_3)$, la quale implica $\alpha\mathcal{R}_3\gamma$.

2 Matrici e sistemi lineari

1. Studiare il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta. Si ricordi che per ridurre la matrice é sufficiente usare ripetutamente le seguenti regole: 1) $R_i \to \lambda R_i + \mu R_j$, con $\lambda \neq 0$ e $i \neq j$; 2) $R_i \leftrightarrow R_j$. Se una matrice é ridotta gli elementi scelti come speciali saranno sottolineati.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_2 \to -2R_2 + R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -3 & 4 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 0 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to R_1 + 3R_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & 0 & 10 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 0 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 0 & 5 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Si ottiene così il seguente sistema, equivalente a quello assegnato,

$$\begin{cases} x = 1 - 5z \\ y = -2z \end{cases}$$

Quindi le soluzioni cercate sono $(x, y, z) = (-5z + 1, -2z, z)$ $\forall z \in \mathbb{R}$.

2. Studiare il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2y = 2 \\ x + y = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Procediamo come nell'Esercizio 1.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to -2R_2 + R_1} \\ \boxed{R_3 \to -2R_3 + R_1} \\ \boxed{R_4 \to -2R_4 + R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_3 \to -7R_3 + R_2} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_2} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \boxed{R_4 \to 14R_4 + R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \underline{2} & 3 & 4 \\ 0 & \underline{7} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-28} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La matrice incompleta e la completa hanno un numero differente di elementi speciali. Quindi il sistema é impossibile. Si osservi che il sistema associato alla matrice ridotta é

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 7z = 0 \\ 0 = -28 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il quale é, ovviamente, impossibile.

3. Studiare il sistema lineare:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 7x - 2y + 7z = 5 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ 5x - y + 6z = 3 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Procediamo come nell'Esercizio 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - 7R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 2R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - R_1} \\ \boxed{R_5 \to R_5 - 5R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & -14 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 9 & -9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_3 \to -4R_3 + R_2} \\ \boxed{R_4 \to -4R_4 + R_2} \\ \boxed{R_5 \to 4R_5 - 3R_2} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & -14 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_4 \to R_4 + R_3} \\ \boxed{R_5 \to R_5 - R_3} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \underline{12} & -14 & -2 \\ 0 & 0 & \underline{6} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to 7R_3 + 3R_2} \\ \boxed{R_1 \to -R_3 + 2R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -4 & 0 & 4 \\ 0 & \underline{36} & 0 & -20 \\ 0 & 0 & \underline{6} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_1 \to 9R_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{18} & 0 & 0 & 16 \\ 0 & \underline{36} & 0 & -20 \\ 0 & 0 & \underline{6} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{18}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{36}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{6}R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 0 & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & \underline{1} & 0 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & \underline{1} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si ottiene così il seguente sistema, equivalente a quello assegnato,

$$\begin{cases} x = \frac{8}{9} \\ y = -\frac{5}{9} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Pertanto il sistema assegnato ha una ed una sola soluzione data da $(\frac{8}{9}, -\frac{5}{9}, -\frac{1}{3})$.

4. Studiare il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Il sistema è omogeneo quindi ammette sempre almeno la soluzione banale $(0,0,0)$. Nel ridurre il sistema è sufficiente scrivere solo la matrice incompleta in quanto la colonna dei termini noti è sempre formata da elementi uguali a 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{R_3 \to R_3 + R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \underline{-1} \\ \underline{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{R_1 \to -2R_1 + R_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \underline{2} \\ \underline{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline R_1 \to \frac{1}{2}R_1 \\ \hline R_2 \to \frac{1}{2}R_2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$$

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \underline{1} \\ \underline{1} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si ottiene così il seguente sistema, equivalente a quello assegnato,

$$\begin{cases} z = -\frac{1}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{cases}$$

che ha le ∞^1 soluzioni $(x,y,z) = (-\frac{3}{2}y, y, -\frac{1}{2}y)\ \forall y \in \mathbb{R}$.

5. Risolvere i seguenti sistemi lineari:

(a) $$\begin{cases} 2x - 5y - 3z = -1 \\ x + 6y - 7z = \frac{-19}{30} \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 2x - y - z - 4t = 9 \\ 4x - 3z - t = 0 \\ 8x - 2y - 5z - 9t = 18 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - y = 0 \\ 4x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x + 2y + z - 3t = 0 \\ x + y - 2t = 0 \\ -6x + 3y + 5z + t = 0 \end{cases}$$

6. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z + 3t = 1 \\ 5x - 2y + 5z - 3t = k + 1 \\ 8x - 4y + (2k+7)z + (4k+4)t = 5 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Procediamo come nell'Esercizio 1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & -3 & k+1 \\ 8 & -4 & 2k+7 & 4k+4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{|c|}\hline R_2 \to R_2 - R_1 \\ \hline R_3 \to R_3 - 2R_2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & k \\ 0 & 0 & 2k-1 & 4k-2 & 3 \end{array}\right).$$

Se $k = \frac{1}{2}$ si ha $2k-1 = 4k-2 = 0$, e il sistema é impossibile in quanto il numero degli elementi speciali della matrice incompleta é diverso da quello della completa. Se $k \neq \frac{1}{2}$, possiamo scrivere

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & \underline{-2} & 4 & 3 & 1 \\ \underline{1} & 0 & 1 & -6 & k \\ 0 & 0 & \underline{2k-1} & 4k-2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{|c|}\hline R_2 \to -\frac{1}{2k-1} R_3 + R_2 \\ \hline R_1 \to -\frac{4}{2k-1} R_3 + R_1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & \underline{-2} & 0 & -5 & \frac{2k-13}{2k-1} \\ \underline{1} & 0 & 0 & -8 & \frac{2k^2-k-3}{2k-1} \\ 0 & 0 & \underline{2k-1} & 4k-2 & 3 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to -4R_2 + R_1} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \underline{-2} & 0 & 27 & \frac{-8k^2+6k-1}{2k-1} \\ \underline{1} & 0 & 0 & -8 & \frac{2k^2-k-3}{2k-1} \\ 0 & 0 & \underline{2k-1} & 4k-2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{|c|}\hline R_1 \to -\frac{1}{2} R_1 \\ \hline R_3 \to \frac{1}{2k-1} R_3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \underline{1} & 0 & -\frac{27}{2} & \frac{-8k^2+6k-1}{-4k+2} \\ \underline{1} & 0 & 0 & -8 & \frac{2k^2-k-3}{2k-1} \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 & \frac{3}{2k-1} \end{array}\right) \text{ quindi } \begin{cases} x = \frac{2k^2-k-3}{2k-1} + 8t \\ y = \frac{-8k^2+6k-1}{-4k+2} + \frac{27}{2}t \\ z = \frac{3}{2k-1} - 2t \end{cases}.$$

Pertanto, per ogni $k \neq \frac{1}{2}$, il sistema assegnato ha le ∞^{-1} soluzioni

$$\left(\frac{2k^2-k-3}{2k-1} + 8t, \frac{-8k^2+6k-1}{-4k+2} + \frac{27}{2}t, \frac{3}{2k-1} - 2t, t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

7. Studiare, al variare del parametro reale k, il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + ky + 2z = 2 \\ x + (1+k)y = 3 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Procediamo come nell'Esercizio 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & k & 2 & 2 \\ 1 & 1+k & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \boxed{R_2 \to R_2 + (-2)R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1+k & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_2 \leftrightarrow R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 0 & 3 \\ 0 & k & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Caso $\boldsymbol{k = 0}$. Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \underline{1} & 1 \\ \underline{1} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \boxed{R_1 \to R_1 - R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & \underline{1} & -2 \\ \underline{1} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ da cui}$$

$\begin{cases} z = y - 2 \\ x = -y + 3 \end{cases}$. Pertanto il sistema assegnato ha le ∞^1 soluzioni $(3-y, y, y-2)$, al variare di y in $\mathbb{R}$.

Caso $\boldsymbol{k \neq 0}$. Abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \underline{1} & 1 \\ \underline{1} & 1+k & 0 & 3 \\ 0 & \underline{k} & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \boxed{R_2 \to -kR_2 + (1+k)R_3} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \underline{1} & 1 \\ \underline{-k} & 0 & 0 & -3k \\ 0 & \underline{k} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_1 \to kR_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \underline{k} & -2k \\ \underline{-k} & 0 & 0 & -3k \\ 0 & \underline{k} & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{k}R_1} \\ \boxed{R_2 \to -\frac{1}{k}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{k}R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \underline{1} & -2 \\ \underline{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ da cui } \begin{cases} z = -2 \\ x = 3 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Quindi, se $k \neq 0$, il sistema assegnato ha una ed una sola soluzione data da $(3, 0, -2)$.

8. Studiare, al variare del parametro reale k, i seguenti sistemi lineari:

(a) $\begin{cases} kx - 5y - 3z = -1 \\ x + 6y - (k-1)z = \frac{-19}{30} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - y - z - kt = 9 \\ 4x - 3kz - t = 0 \\ 8kx - 2y - 5z - 9t = 18 \end{cases}$

(c) $$\begin{cases} x+ky+z=0 \\ 2x+ky-3z=0 \\ x-y=0 \\ 4x+5y+2kz=0 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} (k-1)x+2y+z-3t=0 \\ x+y-2kt=0 \\ -6kx+3y+5z+t=0 \end{cases}$$

9. Dire se la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
é invertibile e, in caso affermativo, trovare A^{-1}.

SVOLGIMENTO. Svolgeremo l'esercizio in tre modi differenti.

PRIMO METODO. La matrice A é invertibile se e solo se esiste una ed una sola matrice
$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$
tale che $A \cdot B = I_3$. In tal caso avremo $A^{-1} = B$. Quindi
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x_1-y_1+2z_1 & x_2-y_2+2z_2 & x_3-y_3+2z_3 \\ x_1+3y_1+z_1 & x_2+3y_2+z_2 & x_3+3y_3+z_3 \\ 2x_1+y_1-z_1 & 2x_2+y_2-z_2 & 2x_3+y_3-z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
da cui si hanno i tre sistemi
$$\begin{cases} x_1-y_1+2z_1=1 \\ x_1+3y_1+z_1=0 \\ 2x_1+y_1-z_1=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2-y_2+2z_2=0 \\ x_2+3y_2+z_2=1 \\ 2x_2+y_2-z_2=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3-y_3+2z_3=0 \\ x_3+3y_3+z_3=0 \\ 2x_3+y_3-z_3=1 \end{cases}. \qquad (1)$$

Ovviamente A é invertibile se e solo se tutti e tre i precedenti sistemi hanno una ed una sola soluzione. Risolviamo il primo sistema. In modo analogo si risolveranno gli altri due

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 2R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to 4R_3 - 3R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -17 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to 17R_2 - R_3} \\ \boxed{R_1 \to 17R_1 + 2R_3} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 17 & -17 & 0 & 7 \\ 0 & 68 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -17 & -5 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to 4R_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 68 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 68 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -17 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{68}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{68}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{-17}R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} \end{array}\right), \text{ quindi}$$

$$x_1 = \frac{4}{17}, \quad y_1 = -\frac{3}{17}, \quad z_1 = \frac{5}{17}$$

é la soluzione del primo sistema. Analogamente, le soluzioni degli altri due sistemi sono

$$x_2 = -\frac{1}{17}, \quad y_2 = \frac{5}{17}, \quad z_2 = \frac{3}{17}, \quad e$$

$$x_3 = \frac{7}{17}, \quad y_3 = -\frac{1}{17}, \quad z_3 = -\frac{4}{17}.$$

Pertanto

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{7}{17} \\ -\frac{3}{17} & \frac{5}{17} & -\frac{1}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{3}{17} & -\frac{4}{17} \end{pmatrix}.$$

SECONDO METODO. In effetti questo metodo non é altro che il precedente ove risolviamo contemporaneamente i tre sistemi in (1):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - 2R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to 4R_3 - 3R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & -5 & -3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to 17R_2 - R_3} \\ \boxed{R_1 \to 17R_1 + 2R_3} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & -17 & 0 & 7 & -6 & 8 \\ 0 & 68 & 0 & -12 & 20 & -4 \\ 0 & 0 & -17 & -5 & -3 & 4 \end{array}\right) \quad \boxed{R_1 \to 4R_1 + R_2} \quad \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 68 & 0 & 0 & 16 & -4 & 28 \\ 0 & 68 & 0 & -12 & 20 & -4 \\ 0 & 0 & -17 & -5 & -3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{R_1 \to \frac{1}{68}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{68}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{-17}R_3} \end{array} \quad \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{7}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{5}{17} & -\frac{1}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & \frac{3}{17} & -\frac{4}{17} \end{array}\right) \text{ e quindi } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{7}{17} \\ -\frac{3}{17} & \frac{5}{17} & -\frac{1}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{3}{17} & -\frac{4}{17} \end{pmatrix}.$$

TERZO METODO. Ricordiamo il seguente teorema: *Una matrice A di ordine n é invertibile se e solo se $det\, A \neq 0$. Posto inoltre $A = (a_{ij})$ e $A^{-1} = (b_{ij})$, si ha*

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{det\, A}$$

essendo A_{ji} il complemento algebrico dell'elemento a_{ji} di A.

Abbiamo $det\, A = -17$. Pertanto A é invertibile. Per determinare A^{-1} calcoliamo i complementi algebrici:

$A_{11} = (-1)^2(-3-1) = -4, \quad A_{12} = (-1)^3(-1-2) = 3, \quad A_{13} = (-1)^4(1-6) = -5,$

$A_{21} = (-1)^3(1-2) = 1, \quad A_{22} = (-1)^4(-1-4) = -5, \quad A_{23} = (-1)^5(1+2) = -3,$

$A_{31} = (-1)^4(-1-6) = -7, \quad A_{32} = (-1)^5(1-2) = 1, \quad A_{33} = (-1)^6(3+1) = 4.$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{7}{17} \\ -\frac{3}{17} & \frac{5}{17} & -\frac{1}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{3}{17} & -\frac{4}{17} \end{pmatrix}.$$

10. Siano date le seguenti matrici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare i determinanti di A e di B.

(b) Calcolare il determinante della matrice prodotto $A \cdot B$ e confrontarne il risultato col prodotto del determinante di A col determinante di B.

SVOLGIMENTO. Si ha

$$det\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&3&1\\2&1&-1\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&4&-1\\0&3&-5\end{pmatrix}=1(-1)^2det\begin{pmatrix}4&-1\\3&-5\end{pmatrix}=-17.$$

$$det\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&-1\\3&0&0\end{pmatrix}=3(-1)^4det\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}=-3.$$

Pertanto $det\,A\cdot det\,B=51$. Calcoliamo ora il determinante di $A\cdot B$:

$$det\,A\cdot B=det\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&3&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}1&-1&0\\12&6&-3\\6&-1&2\end{pmatrix}=$$

$det\begin{pmatrix}1&0&0\\12&18&-3\\6&5&2\end{pmatrix}=1(-1)^2det\begin{pmatrix}18&-3\\5&2\end{pmatrix}=51$. Com'era prevedibile per il teorema di Binet.

11. Siano date le seguenti matrici.

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-5&3&-4\\1&9&2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3&-4&5\\1&2&3\\6&-1&-2\end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare i determinanti di A e di B.

(b) Calcolare il determinante della matrice prodotto $A\cdot B$ e confrontarne il risultato col prodotto del determinante di A col determinante di B.

(c) Dire se A e B sono invertibili e, in caso affermativo, calcolare le matrici inverse.

12. Calcolare il determinante della matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&6&-1&0\\3&2&1&5\\-1&-3&-5&-7\end{pmatrix}.$$

Dire inoltre se A é invertibile e, in caso affermativo, calcolare il determinante della matrice inversa.

13. Sia data la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&k&3&4\\3&6&-1&0\\3&2&1&5\\-1&-3&-5&k\end{pmatrix}.$$

Determinare i valori del parametro reale k per cui il determinante di A risulti diverso dallo zero.

14. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & -3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ 6 & 10 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

15. Sia data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & -3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ 6 & k & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli eventuali valori del parametro reale k per cui A risulti invertibile. Per questi valori calcolare il determinante della matrice inversa.

16. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare (non é necessario calcolare esplicitamente le eventuali soluzioni, é sufficiente indicarle come rapporto di determinanti):

$$\begin{cases} kx - ky + 2z = 1 \\ -x + y + kz = 2 \\ -kx + z = 3 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Il sitema precedente può essere studiato col teorema di Rouché-Capelli. Per trovare il rango delle matrici completa e incompleta useremo il metodo di riduzione per righe. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta. (Si ricordi che per ridurre la matrice é sufficiente usare ripetutamente la seguente regola $R_i \to \lambda R_i + \mu R_j$, essendo $\lambda \neq 0$ e $i \neq j$).

Conviene distinguere subito i casi: $k = 0$ e $k \neq 0$.

Caso $k = 0$. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \boxed{R_3 \to -2R_3 + R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

La matrice incompleta ha rango 2 mentre la completa ha rango 3. Pertanto il sistema é impossibile.

Caso $\boldsymbol{k \neq 0}$. $\left(\begin{array}{ccc|c} k & -k & 2 & 1 \\ -1 & 1 & k & 2 \\ -k & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $\boxed{R_2 \to R_2 + \frac{1}{k}R_1}$ $\longrightarrow$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k & -k & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k^2+2}{k} & \frac{2k+1}{k} \\ -k & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Si ottiene così, scambiando la seconda con la terza riga, una matrice ridotta. Quindi, per $k \neq 0$, sia la matrice completa che quella incompleta hanno rango 3. Per il teorema di Cramer, il sistema ha una e una sola soluzione data da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -k & 2 \\ \frac{2k+1}{k} & 0 & \frac{k^2+2}{k} \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -k & 2 \\ 0 & 0 & \frac{k^2+2}{k} \\ -k & 0 & 1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & \frac{2k+1}{k} & \frac{k^2+2}{k} \\ -k & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -k & 2 \\ 0 & 0 & \frac{k^2+2}{k} \\ -k & 0 & 1 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} k & -k & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2k+1}{k} \\ -k & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -k & 2 \\ 0 & 0 & \frac{k^2+2}{k} \\ -k & 0 & 1 \end{vmatrix}}.$$

17. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare (non é necessario calcolare esplicitamente le eventuali soluzioni, é sufficiente indicarle come rapporto di determinanti):

$$\begin{cases} 2x + ky - z = 1 \\ x + y = 2 \\ x - y + kz = 3 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Nella soluzione del sistema assegnato applicheremo il teorema di Rouché-Capelli. Per trovare il rango delle matrici completa e incompleta useremo il metodo di riduzione per righe. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta. (Si ricordi che per ridurre la matrice é sufficiente usare ripetutamente la seguente regola $R_i \to \lambda R_i + \mu R_j$, essendo $\lambda \neq 0$ e $i \neq j$).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & k & 3 \end{array}\right) \boxed{R_3 \to R_3 + kR_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1+2k & k^2-1 & 0 & 3+k \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 - (1+2k)R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & k^2-2k-2 & 0 & 1-3k \end{array}\right).$$

Per $k = 1 \pm \sqrt{3}$, si ha $k^2 - 2k - 2 = 0$ e $1 - 3k \neq 0$. Quindi, per questi valori di k, il sistema é impossibile in quanto la matrice incompleta ha rango 2 mentre la completa ha rango 3.

Sia $k \neq 1 \pm \sqrt{3}$. Per il teorema di Cramer, il sistema ha una e una sola soluzione data da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1-3k & k^2-2k-2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & k^2-2k-2 & 0 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-3k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & k^2-2k-2 & 0 \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & k^2-2k-2 & 1-3k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & k^2-2k-2 & 0 \end{vmatrix}}.$$

18. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} kx + y + (k+1)z + 1 = 0 \\ 2kx + 4y + (2k+5)z = 0 \\ kx + y + (2k+1)z + 2 - k = 0 \\ kx + 3y + 4z + k - 2 = 0 \\ 2kx + 4y + (2k+5)z = 0 \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Risolviamo il sistema assegnato col teorema di Rouché-Capelli. Per trovare il rango delle matrici completa e incompleta useremo il metodo di riduzione per righe. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & k+1 & -1 \\ 2k & 4 & 2k+5 & 0 \\ k & 1 & 2k+1 & k-2 \\ k & 3 & 4 & 2-k \\ 2k & 4 & 2k+5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & k+1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & k & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sia la matrice completa che quella incompleta sono ridotte. Per $k = 0$ il rango della matrice incompleta é 2 mentre quello della completa é 3. Quindi il sistema é impossibile. Per $k \neq 0$ il sistema ammette soluzioni. Esso equivale al seguente

$$\begin{cases} kx + y + (k+1)z = -1 \\ 2y + 3z = 2 \\ kz = k - 1 \end{cases}$$

che si risolve facilmente.

19. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare (non é necessario calcolare esplicitamente le eventuali soluzioni, é sufficiente indicarle come rapporto di determinanti):

$$\begin{cases} kx - y + 2kz = 2 \\ x - 2y + 3z = -1 \\ x + (k-3)z = 4 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Si può studiare per mezzo del teorema di Rouché-Capelli. Per trovare il rango delle matrici completa e incompleta useremo il metodo di riduzione per righe. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta. (Si ricordi che per ridurre la matrice é sufficiente usare ripetutamente la seguente regola $R_i \to \lambda R_i + \mu R_j$, essendo $\lambda \neq 0$ e $i \neq j$).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 2k & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & k-3 & 4 \end{array}\right) \boxed{R_2 \to R_2 + (-2)R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 2k & 2 \\ 1-2k & 0 & 3-4k & -5 \\ 1 & 0 & k-3 & 4 \end{array}\right).$$

Quindi -1 é l'elemento speciale della prima riga. Ancora la matrice non é ridotta. Ovviamente conviene che anche l'elemento speciale della seconda riga appartenga alla matrice incompleta. Possiamo cosí scegliere fra $1-2k$ e $3-4k$. Procediamo in modo che $1-2k$ diventi un elemento speciale. Ciò sarà possibile per quei valori di k per cui $1-2k \neq 0$ (si ricordi che l'elemento speciale deve essere diverso dallo zero). Si hanno cosí due casi $k = \frac{1}{2}$ e $k \neq \frac{1}{2}$.

Caso $\boldsymbol{k = \frac{1}{2}}$. La matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & \frac{-5}{2} & 4 \end{array}\right)$$

che é ridotta (basta scambiare fra loro la seconda e terza riga).

Poichè sia la matrice completa che quella incompleta hanno rango 3, il sistema é possibile e, per il teorema di Cramer, ha una sola soluzione. Essa é

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & \frac{-5}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-5}{2} \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & \frac{-5}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-5}{2} \end{vmatrix}}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-5}{2} \end{vmatrix}}.$$

Caso $\boldsymbol{k \neq \frac{1}{2}}$. Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 2k & 2 \\ 1-2k & 0 & 3-4k & -5 \\ 1 & 0 & k-3 & 4 \end{array}\right) \quad \boxed{R_3 \to R_3 + (\tfrac{1}{2k-1})R_2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 2k & 2 \\ 1-2k & 0 & 3-4k & -5 \\ 0 & 0 & \frac{2k^2-11k+6}{2k-1} & \frac{9-8k}{1-2k} \end{array}\right), \text{ che é ridotta.}$$

Per $k = \frac{11\pm\sqrt{73}}{4}$, si ha $\frac{2k^2-11k+6}{2k-1} = 0$ e $\frac{9-8k}{1-2k} \neq 0$. Pertanto, per questi due valori di k, il sistema risulta impossibile essendo il rango della matrice incompleta uguale a due mentre quello della completa uguale a tre.

Per $k \neq \frac{11\pm\sqrt{73}}{4}$ (e $k \neq \frac{1}{2}$), si ha $\frac{2k^2-11k+6}{2k-1} \neq 0$. Quindi sia la matrice completa che quella incompleta hanno rango 3. Il sistema é possibile e, per il teorema di Cramer, ha una sola soluzione. Essa é

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2k \\ -5 & 0 & 3-4k \\ \frac{9-8k}{1-2k} & 0 & \frac{2k^2-11k+6}{2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -1 & 2k \\ 1-2k & 0 & 3-4k \\ 0 & 0 & \frac{2k^2-11k+6}{2k-1} \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} k & 2 & 2k \\ 1-2k & -5 & 3-4k \\ 0 & \frac{9-8k}{1-2k} & \frac{2k^2-11k+6}{2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -1 & 2k \\ 1-2k & 0 & 3-4k \\ 0 & 0 & \frac{2k^2-11k+6}{2k-1} \end{vmatrix}},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} k & -1 & 2 \\ 1-2k & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{9-8k}{1-2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & -1 & 2k \\ 1-2k & 0 & 3-4k \\ 0 & 0 & \frac{2k^2-11k+6}{2k-1} \end{vmatrix}}.$$

20. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x-y+3z+2t=k \\ 4x+7z+5t=2k+1 \\ 6x-3y+(3k+3)z+(k+4)t=2+3k \end{cases}.$$

SVOLGIMENTO. Si può studiare per mezzo del teorema di Rouché-Capelli. Per trovare il rango delle matrici completa e incompleta useremo il metodo di riduzione per righe. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & k \\ 4 & 0 & 7 & 5 & 2k+1 \\ 6 & -3 & 3k+3 & k+4 & 3k+2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & k \\ 4 & 0 & 7 & 5 & 2k+1 \\ 0 & 0 & 3k-6 & k-2 & 2 \end{array}\right).$$

Quindi sia la matrice completa che quella incompleta sono ridotte. Se $k = 2$ si ha $3k - 6 = k - 2 = 0$, e il sistema é impossibile in quanto la matrice incompleta ha rango 2 mentre la completa ha rango 3. Se $k \neq 2$ il sistema ammette soluzioni. Poichè

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3k-6 \end{vmatrix} = 12k - 24 \neq 0,$$

si hanno ∞^1 soluzioni che si ottengono facilmente risolvendo (o per sostituzione o usando il teorema di Cramer) il seguente sistema nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -2t + k \\ 4x + 7z = -5t + 2k + 1 \\ (3k-6)z = 2 - (k-2)t \end{cases}.$$

21. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare (non é necessario calcolare esplicitamente le eventuali soluzioni, é sufficiente indicarle come rapporto di determinanti):

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + kz = -1 \\ (k^2+2)x + 2y + (k-1)z = k \end{cases}$$

TRACCIA DELLO SVOLGIMENTO. Le matrici completa e incompleta del sistema possono scriversi nel seguente modo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & k & -1 \\ k^2+2 & 2 & k-1 & k \end{array}\right).$$

Questa matrice puo essere ridotta alla seguente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & k & -1 \\ k^2-1 & 0 & 0 & k+1 \end{array}\right).$$

La precedente matrice é ridotta se $k \neq 0$. Allora

- per $k = 0$, la matrice diventa

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

  da cui si ottiene la matrice ridotta

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

  In tal caso il sistema é impossibile;
- per $k = -1$, il sistema ha ∞^1 soluzioni;
- per $k = 1$, il sistema é impossibile;
- per $k \neq \pm 1$, il sistema ha 1 e 1 sola soluzione.

Si omette di indicare le soluzioni essendo, tale calcolo, estremamente facile.

22. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare (non é necessario calcolare esplicitamente le eventuali soluzioni, é sufficiente indicarle come rapporto di determinanti):

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + y + 2kz = k^2 \\ x + 3y + k^2 z = -k^2 \end{cases}.$$

TRACCIA DELLO SVOLGIMENTO. Le matrici completa e incompleta del sistema possono scriversi nel seguente modo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ 1 & 1 & 2k & k^2 \\ 1 & 3 & k^2 & -k^2 \end{array}\right).$$

Questa matrice puo essere ridotta alla seguente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & -1 & k & k^2 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 \end{array}\right).$$

Allora

- per $k = 0$ il sistema ha ∞^1 soluzioni,
- per $k \neq 0$, il sistema ha 1 ed 1 sola soluzione.

Si omette di indicare le soluzioni essendo, tale calcolo, estremamente facile.

23. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare (non é necessario calcolare esplicitamente le eventuali soluzioni, é sufficiente indicarle come rapporto di determinanti):

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 0 \\ -x + z = -1 \\ k^2x + y + (k+1)z = k \end{cases}.$$

TRACCIA DELLO SVOLGIMENTO. Le matrici completa e incompleta del sistema possono scriversi nel seguente modo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & k & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ k^2 & 1 & k+1 & k \end{array}\right).$$

Questa matrice puo essere ridotta alla seguente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & k & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ k^2-1 & 0 & 0 & k+1 \end{array}\right).$$

Allora

- per $k = -1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni,
- per $k = 1$ il sistema é impossibile,
- per $k \neq 1, -1$, il sistema ha 1 ed 1 sola soluzione.

Si omette di indicare le soluzioni essendo, tale calcolo, estremamente facile.

24. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare (non é necessario calcolare esplicitamente le eventuali soluzioni, é sufficiente indicarle come rapporto di determinanti):

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + y + (k+1)z = k \\ x + 2y + (k^2+k-1)z = k+1 \end{cases}.$$

TRACCIA DELLO SVOLGIMENTO. Le matrici completa e incompleta del sistema possono scriversi nel seguente modo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ 1 & 1 & k+1 & k \\ 1 & 2 & k^2+k-1 & k+1 \end{array}\right).$$

Questa matrice puo essere ridotta alla seguente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & -1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k^2-1 & k+1 \end{array}\right).$$

Allora

- per $k=-1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni,
- per $k=1$ il sistema é impossibile,
- per $k \neq 1,-1$, il sistema ha 1 ed 1 sola soluzione.

Si omette di indicare le soluzioni essendo, tale calcolo, estremamente facile.

25. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare (non é necessario calcolare esplicitamente le eventuali soluzioni, é sufficiente indicarle come rapporto di determinanti):

$$\begin{cases} kx-y+2z=0 \\ kx+y+z=1 \\ (2k-3)x-y+2z=2 \\ 4kx+6z=2 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Si può studiare per mezzo del teorema di Rouché-Capelli. Per trovare il rango delle matrici completa e incompleta useremo il metodo di riduzione per righe. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 2 & 0 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 2k-3 & -1 & 2 & 2 \\ 4k & 0 & 6 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & 3 & 1 \\ k-3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi sia la matrice completa che quella incompleta sono ridotte. Se $k=3$ si ha $k-3=0$, e il sistema é impossibile in quanto la matrice incompleta ha rango 2 mentre la completa ha rango 3. Se $k \neq 3$ il sistema ammette soluzioni. Poichè

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 2 \\ 2k & 0 & 3 \\ k-3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3(k-3) \neq 0,$$

si ha, per ogni $k \neq 3$, esattamente una soluzione che si ottiene facilmente risolvendo (o per sostituzione o usando il teorema di Cramer) il seguente sistema nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} kx - y + 2z = 0 \\ 2kx + 3z = 1 \\ (k-1)z = 2 \end{cases} .$$

26. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare (non é necessario calcolare esplicitamente le eventuali soluzioni, é sufficiente indicarle come rapporto di determinanti):

$$\begin{cases} 3x + ky + z = 1 \\ 3x + (k-1)y + (k+2)z = 3 \\ 6x + 2ky + (k+1)z = 3 \\ 9x + 3ky + 3z = 3 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Si può studiare per mezzo del teorema di Rouché-Capelli. Per trovare il rango delle matrici completa e incompleta useremo il metodo di riduzione per righe. Nella notazione seguita viene scritta la matrice completa, separando con una linea verticale la colonna dei termini noti, così a sinistra si evidenzia la matrice incompleta.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & k & 1 & 1 \\ 3 & k-1 & k+2 & 3 \\ 6 & 2k & k+1 & 3 \\ 9 & 3k & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & k & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k+1 & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi sia la matrice completa che quella incompleta sono ridotte. Se $k = 1$ si ha $k - 1 = 0$, e il sistema é impossibile in quanto la matrice incompleta ha rango 2 mentre la completa ha rango 3. Se $k \neq 1$ il sistema ammette soluzioni. Poichè

$$\begin{vmatrix} 3 & k & 1 \\ 0 & -1 & k+1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = -3(k-1) \neq 0,$$

si ha, per ogni $k \neq 1$, esattamente una soluzione che si ottiene facilmente risolvendo (o per sostituzione o usando il teorema di Cramer) il seguente sistema nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} 3x + ky + z = 1 \\ -y + (k+1)z = 2 \\ (k-1)z = 1 \end{cases} .$$

27. Studiare, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare (non é necessario calcolare esplicitamente le eventuali soluzioni, é sufficiente indicarle come rapporto di determinanti):

(a) $$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ x - y + t = 0 \\ 2x + 3y - kt = 1 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 4x - ky - z = 1 \\ kx - y + 3z = 2 \\ -x + y - 3z = -1 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x - ky - 2kz = 3 \\ 2x - 3y + kz = 1 \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} kx - y + 2z = 0 \\ kx + y + z = 1 \\ (2k - 3)x - y + 2z = 2 \\ 4kx + 6z = 2 \end{cases}$$

(f) $$\begin{cases} x - y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 2x - kz = -1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

(g) $$\begin{cases} (1 - k)x + y + z = 0 \\ 2x + (2 - k)y + 2z = 0 \\ x + y + (1 - k)z = 0 \end{cases}$$

(h) $$\begin{cases} x - ky - z = 0 \\ kx - y - z = 0 \\ x - (1 - k)y - 2z = 0 \\ 3x + ky - z = 0 \end{cases}$$

(i) $$\begin{cases} 3x + ky + z = 1 \\ 3x + (k - 1)y + (k + 2)z = 3 \\ 6x + 2ky + (k + 1)z = 3 \\ 9x + 3ky + 3z = 3 \end{cases}$$

(j) $$\begin{cases} 2x - y + 3z + 2t = k \\ 4x + 7z + 5t = 2k + 1 \\ 6x - 3y + (3k+3)z + (k+4)t = 2 + 3k \end{cases}$$

(k) $$\begin{cases} 4x - 2y + 4z + 3t = 1 \\ 5x - 2y + 5z - 3t = k + 1 \\ 8x - 4y + (2k+7)z + (4k+4)t = 5 \end{cases}$$

(l) $$\begin{cases} kx + y + (k+1)z + 1 = 0 \\ 2kx + 4y + (2k+5)z = 0 \\ kx + y + (2k+1)z + 2 - k = 0 \\ kx + 3y + 4z + k - 2 = 0 \\ 2kx + 4y + (2k+5)z = 0 \end{cases}$$

28. Sia S un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite. Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
    (a) Il sistema può essere impossibile.
    (b) Se il numero n delle incognite é maggiore del numero m delle equazioni, il sistema ammette infinite soluzioni.
    (c) Se $n \leq m$ e il rango della matrice incompleta coincide col numero m delle equazioni, il sistema ammette una ed una sola soluzione.
    (d) Se $n \leq m$ e il rango della matrice incompleta é minore di m, il sistema ammette infinite soluzioni.

3 Geometria lineare del piano

1. Si dica se i tre punti P, Q e R sono allineati nei seguenti casi:
    (a) $P \equiv (0,5)$, $Q \equiv (2,7)$, $R \equiv (1,4)$;
    (b) $P \equiv (1,3)$, $Q \equiv (0,0)$, $R \equiv (4,12)$;
    (c) $P \equiv (-1,-2)$, $Q \equiv (-2,0)$, $R \equiv (1,4)$.
2. Si trovi la retta r per $P \equiv (1,7)$ parallela a $s)\ 2x - 3y + 4 = 0$.
3. Si trovi la retta r per $P \equiv (1,-2)$ parallela a $s)\ 2x - 3y - 8 = 0$.
4. Si trovi la retta r per $P \equiv (1,7)$ ortogonale a $s)\ 2x - 3y + 4 = 0$.
5. Si trovi la retta r per $P \equiv (1,-2)$ ortogonale a $s)\ 2x - 3y - 8 = 0$.
6. Si stabilisca per quali $k \in \mathbb{R}$ le rette $r)\ kx + y - 1 = 0$ e $s)\ 2x - ky - 8 = 0$ sono
    (a) parallele;

(b) ortogonali.

7. Si trovino, se esistono, i punti della retta $r)\ 4x - 3y = 2$ che distano 4 dall'origine delle coordinate.

8. Si trovino, se esistono, i punti della retta $r)\ 4x - 3y = 2$ che distano 1 dal punto $P \equiv (5, 1)$.

9. Si trovi la distanza di P da r nei casi seguenti:

   (a) $P \equiv (1, 3)$, $r)\ 2x - 3y + 4 = 0$;

   (b) $P \equiv (1, 2)$, $r)\ 2x - 3y + 4 = 0$;

   (c) $P \equiv (-3, 1)$, $r)\ \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -3t + 4 \end{cases}$.

10. Si trovino le rette per $P \equiv (2, 3)$ che hanno distanza 2 da $Q \equiv (-1, -1)$.

11. Si trovino le rette parallele ad $r)\ 2x + 3y = 1$ che hanno distanza 2 da $Q \equiv (-1, 4)$.

12. Si calcoli la distanza tra $r)\ 2x - 3y + 4 = 0$ e $s)\ 4x - 6y + 14 = 0$.

13. Si calcoli la distanza tra $r)\ 2x - 3y + 4 = 0$ e $s)\ 3x - 6y + 14 = 0$.

14. Si verifichi se $P \equiv (2, 4)$, $Q \equiv (-2, 3)$ e $R \equiv (3, 1)$ sono vertici di un triangolo e, in caso affermativo, si calcoli l'area di tale triangolo.

15. Si trovi l'asse del segmento PQ, essendo $P \equiv (2, 4)$, $Q \equiv (-2, 3)$.

16. Nel piano siano date le rette:

$$r)\ \ x + 3y + 3 = 0 \quad \text{e} \quad s)\ \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 3t + 8 \end{cases}.$$

   Determinare:

   (a) Le coordinate del centro C del fascio individuato da r e s.

   (b) Le coordinate del punto B simmetrico di C rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

   (c) Le rette del fascio parallele agli assi cartesiani.

   (d) La retta m del fascio parallela alla congiungente l'origine col punto $A \equiv (1, 2)$.

   (e) La retta n del fascio perpendicolare alla retta di equazione $3x - 4y + 3 = 0$.

   (f) La retta t simmetrica di m rispetto all'asse x.

   (g) La retta p simmetrica di n rispetto all'asse y.

   SVOLGIMENTO:

(a) **Le coordinate del centro C del fascio individuato da r e s.**

Il centro del fascio coincide col punto intersezione delle rette r e s. Si ha $C \equiv (0, -1)$.

(b) **Le coordinate del punto B simmetrico di C rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.**

Si ha $B \equiv (1, 0)$.

(c) **Le rette del fascio parallele agli assi cartesiani.**

Le rette richieste hanno equazioni $x = 0$ e $y = -1$.

(d) **La retta m del fascio parallela alla congiungente l'origine col punto $A \equiv (1, 2)$.**

La retta congiungente l'origine col punto A ha coefficiente angolare 2. Quindi m ha equazione $y + 1 = 2x$.

(e) **La retta n del fascio perpendicolare alla retta di equazione $3x - 4y + 3 = 0$.**

La retta n ha equazione $y + 1 = -\frac{4}{3}x$.

(f) **La retta t simmetrica di m rispetto all'asse x.**

La retta m passa per i due punti $(0, -1)$ e $(\frac{1}{2}, 0)$. Quindi la retta t passa per i punti $(0, 1)$ e $(\frac{1}{2}, 0)$. La sua equazione è $2x + y - 1 = 0$.

(g) **La retta p simmetrica di n rispetto all'asse y.**

La retta n passa per i due punti $(0, -1)$ e $(\frac{3}{4}, 0)$. Quindi la retta p passa per i punti $(0, -1)$ e $(-\frac{3}{4}, 0)$. La sua equazione è $4x - 3y - 3 = 0$.

17. Nel piano é data la retta r di equazione $y = x + 2$. Determinare le equazioni delle eventuali rette uscenti dal punto $P \equiv (1, 0)$ e formanti con l'asse delle ascisse e la retta r un triangolo di area 4.

18. Sia s) $3x - 4y = 0$. Si determini la retta r ottenuta ruotando s di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ attorno all'origine delle coordinate e in verso antiorario.

19. Sia s) $3x - 4y + 3 = 0$. Si determini la retta r ottenuta ruotando s di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ attorno all'origine delle coordinate e in verso antiorario.

20. Sia s) $3x - 4y + 3 = 0$. Si determini la retta r ottenuta ruotando s di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ attorno a $P \equiv (2, 1)$ e in verso antiorario.

21. Nel piano siano dati i punti $A \equiv (2, 1)$ e $B \equiv (1, 5)$. Si determini:

(a) l'equazione della retta r passante per i punti A e B;

(b) l'equazione della retta s ottenuta ruotando r intorno ad A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{12}$ nel verso antiorario;

(c) le coordinate del punto C intersezione di s con la retta di equazione $x = 1$;

(d) l'area del triangolo ABC.

SVOLGIMENTO:

(a) L'equazione della retta r é $4x + y - 9 = 0$.

(b) La rotazione nel verso antiorario intorno al punto A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{12}$ ha la seguente legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & -\sin\frac{\pi}{12} \\ \sin\frac{\pi}{12} & \cos\frac{\pi}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(y-1) + 2 \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(x-2) + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}(y-1) + 1 \end{pmatrix}.$$

Il punto B viene quindi ruotato nel punto

$B' \equiv \left(\frac{-5\sqrt{6}+3\sqrt{2}+8}{4}, \frac{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}+4}{4}\right)$.

Poiché s coincide con la retta passante per i punti A e B', la sua equazione é

$$\frac{x-2}{-5\sqrt{6}+3\sqrt{2}} = \frac{y-1}{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}}.$$

(c) $C \equiv \left(1, \frac{8\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{5\sqrt{6}-3\sqrt{2}}\right)$.

(d) L'area del triangolo ABC si ottiene dividendo per due il prodotto della lunchezza di BC (base) per la distanza di A dalla retta $x = 1$ (altezza). Con facili calcoli si ottiene

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{8\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{5\sqrt{6}-3\sqrt{2}}\right).$$

22. Nel piano siano dati i punti $A \equiv (4, 0)$ e $B \equiv (0, 6)$. Si determini:

(a) l'equazione della retta r passante per i punti A e B;

(b) l'equazione della retta s ottenuta ruotando r intorno ad A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ nel verso antiorario;

(c) le coordinate del punto C intersezione di s con l'asse delle ordinate;

(d) l'area del triangolo ABC.

SVOLGIMENTO:

(a) L'equazione della retta r é $3x + 2y - 12 = 0$.

(b) La rotazione nel verso antiorario intorno al punto A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ha la seguente legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-4 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-4 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 4 - 2\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Il punto B viene quindi ruotato nel punto

$B' \equiv \left(4 - 5\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Poiché s coincide con la retta passante per i punti A e B', la sua equazione é

$$x + 5y - 4 = 0.$$

(c) $C \equiv \left(0, \frac{4}{5}\right)$.

(d) L'area del triangolo ABC si ottiene dividendo per due il prodotto della lunchezza di BC (base) per la distanza di A dall'asse delle ordinate (altezza). Quindi

$$\text{Area}(ABC) = \left(6 - \frac{4}{5}\right) \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}.$$

23. Nel piano siano dati i punti $A \equiv (2, 0)$ e $B \equiv (0, 5)$. Si determini:

(a) l'equazione della retta r passante per i punti A e B;

(b) l'equazione della retta s ottenuta ruotando r intorno ad A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ nel verso antiorario;

(c) le coordinate del punto C intersezione di s con l'asse delle ordinate;

(d) l'area del triangolo ABC.

SVOLGIMENTO:

(a) L'equazione della retta r é $5x + 2y - 10 = 0$.

(b) La rotazione nel verso antiorario intorno al punto A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ha la seguente legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 - \sqrt{3} \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \end{pmatrix}.$$

Il punto B viene quindi ruotato nel punto

$B' \equiv \left(-\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{5\sqrt{3}-2}{2}\right)$.

Poiché s coincide con la retta passante per i punti A e B', la sua equazione é

$$(5\sqrt{3} - 2)x + (5 + 2\sqrt{3})y - 10\sqrt{3} + 4 = 0.$$

(c) $C \equiv \left(0, \frac{10\sqrt{3}-4}{5+2\sqrt{3}}\right)$.

(d) L'area del triangolo ABC si ottiene dividendo per due il prodotto della lunchezza di BC (base) per la distanza di A dall'asse delle ordinate (altezza). Quindi

$$\text{Area}(ABC) = \left(5 - \frac{10\sqrt{3} - 4}{5 + 2\sqrt{3}}\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}.$$

24. Nel piano siano dati i punti $A \equiv (3, 0)$ e $B \equiv (0, 5)$. Si determini:

(a) l'equazione della retta r passante per i punti A e B;

(b) l'equazione della retta s ottenuta ruotando r intorno ad A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ nel verso antiorario;

(c) le coordinate del punto C intersezione di s con l'asse delle ordinate;

(d) l'area del triangolo ABC.

SVOLGIMENTO:

(a) L'equazione della retta r é $5x+3y-15=0$.

(b) La rotazione nel verso antiorario intorno al punto A di un angolo $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ha la seguente legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{6-3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Il punto B viene quindi ruotato nel punto

$B' \equiv \left(3-4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Poiché s coincide con la retta passante per i punti A e B', la sua equazione é

$$x+4y-3=0.$$

(c) $C \equiv \left(0, \frac{3}{4}\right)$.

(d) L'area del triangolo ABC si ottiene dividendo per due il prodotto della lunchezza di BC (base) per la distanza di A dall'asse delle ordinate (altezza). Quindi

$$\text{Area}(ABC) = \left(5-\frac{3}{4}\right)\cdot 3 \cdot \frac{1}{2}.$$

25. Nel piano siano dati i punti $A \equiv (3,0)$ e $B \equiv (0,7)$. Si determini:

 (a) l'equazione della retta r passante per i punti A e B;
 (b) l'equazione della retta s ottenuta ruotando r intorno ad A di un angolo $\alpha=\frac{\pi}{4}$ nel verso antiorario;
 (c) le coordinate del punto C intersezione di s con l'asse delle ordinate;
 (d) l'area del triangolo ABC.

SVOLGIMENTO:

(a) L'equazione della retta r é $7x + 3y - 21 = 0$.

(b) La rotazione nel verso antiorario intorno al punto A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ha la seguente legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{6-3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Il punto B viene quindi ruotato nel punto

$B' \equiv \left(3 - 5\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

Poiché s coincide con la retta passante per i punti A e B', la sua equazione é

$$2x + 5y - 6 = 0.$$

(c) $C \equiv \left(0, \frac{6}{5}\right)$.

(d) L'area del triangolo ABC si ottiene dividendo per due il prodotto della lunchezza di BC (base) per la distanza di A dall'asse delle ordinate (altezza). Quindi

$$\text{Area}(ABC) = \left(7 - \frac{6}{5}\right) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}.$$

26. Nel piano siano dati i punti $A \equiv (1, 0)$ e $B \equiv (0, 3)$. Si determini:

   (a) l'equazione della retta r passante per i punti A e B;

   (b) l'equazione della retta s ottenuta ruotando r intorno ad A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ nel verso antiorario;

   (c) le coordinate del punto C intersezione di s con l'asse delle ordinate;

   (d) l'area del triangolo ABC.

SVOLGIMENTO:

(a) L'equazione della retta r é $3x + y - 3 = 0$.

(b) La rotazione nel verso antiorario intorno al punto A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ha la seguente legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Il punto B viene quindi ruotato nel punto

$B' \equiv \left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right).$

Poiché s coincide con la retta passante per i punti A e B', la sua equazione é

$$(3-\sqrt{3})(x-1) - (3\sqrt{3}+1)y = 0.$$

(c) $C \equiv \left(0, \frac{\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}+1}\right).$

(d) L'area del triangolo ABC si ottiene dividendo per due il prodotto della lunchezza di BC (base) per la distanza di A dall'asse delle ordinate (altezza). Quindi

$$\text{Area}(ABC) = \left(3 - \frac{\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}+1}\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}.$$

27. Nel piano siano dati i punti $A \equiv (4,0)$ e $B \equiv (0,8)$. Si determini:

(a) l'equazione della retta r passante per i punti A e B;

(b) l'equazione della retta s ottenuta ruotando r intorno ad A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ nel verso antiorario;

(c) le coordinate del punto C intersezione di s con l'asse delle ordinate;

(d) l'area del triangolo ABC.

SVOLGIMENTO:

(a) L'equazione della retta r é $2x + y - 8 = 0$.

(b) La rotazione nel verso antiorario intorno al punto A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ha la seguente legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-4 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-4 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 4 - 2\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Il punto B viene quindi ruotato nel punto

$B' \equiv \left(-6\sqrt{2}+4, 2\sqrt{2}\right).$

Poiché s coincide con la retta passante per i punti A e B', la sua equazione é

$$x + 3y - 4 = 0.$$

(c) $C \equiv \left(0, \frac{4}{3}\right).$

(d) L'area del triangolo ABC si ottiene dividendo per due il prodotto della lunchezza di BC (base) per la distanza di A dall'asse delle ordinate (altezza). Quindi

$$\text{Area}(ABC) = \left(8 - \frac{4}{3}\right) \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}.$$

28. Nel piano siano dati i punti $A \equiv (2, 0)$ e $B \equiv (0, 4)$. Si determini:

(a) l'equazione della retta r passante per i punti A e B;

(b) l'equazione della retta s ottenuta ruotando r intorno ad A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ nel verso antiorario;

(c) le coordinate del punto C intersezione di s con l'asse delle ordinate;

(d) l'area del triangolo ABC.

SVOLGIMENTO:

(a) L'equazione della retta r é $2x + y - 4 = 0$.

(b) La rotazione nel verso antiorario intorno al punto A di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ha la seguente legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 - \sqrt{3} \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \end{pmatrix}.$$

Il punto B viene quindi ruotato nel punto

$B' \equiv \left(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1\right)$.

Poiché s coincide con la retta passante per i punti A e B', la sua equazione é

$$(2\sqrt{3} - 1)x + (\sqrt{3} + 2)y - 4\sqrt{3} + 2 = 0.$$

(c) $C \equiv \left(0, \frac{4\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right)$.

(d) L'area del triangolo ABC si ottiene dividendo per due il prodotto della lunchezza di BC (base) per la distanza di A dall'asse delle ordinate (altezza). Quindi

$$\text{Area}(ABC) = \left(4 - \frac{4\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2}\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}.$$

29. Sia s la retta di equazione $2x - 3y = 1$. Scrivere l'equazione della retta s' ottenuta applicando ad s una riflessione nella retta r di equazione $x + y = 1$.

SVOLGIMENTO. Sia α l'angolo che r forma col semiasse positivo delle ascisse. Posto $P_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La retta r ha coefficiente angolare $m = -1$. Pertanto $\tan\alpha = -1$ e

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = 0,$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = -1.$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1+1 \\ -x_1+1 \end{pmatrix},$$

Sostituendo nell'equazione di s otteniamo

$$s') \quad 2(-y_1+1) - 3(-x_1+1) = 1.$$

30. Sia s la retta di equazione $x - 2y = 1$. Scrivere l'equazione della retta s' ottenuta applicando ad s una riflessione nella retta r di equazione $2x + 3y = 1$.

SVOLGIMENTO. Sia α l'angolo che la retta r forma col semiasse positivo delle ascisse. Posto $P_0 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in r$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ y_1 - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La retta r ha coefficiente angolare $m = -\frac{2}{3}$. Pertanto $\tan\alpha = -\frac{2}{3}$ e

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{5}{13},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = -\frac{12}{13}.$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13}(x_1-2) - \frac{12}{13}y_1 + 2 \\ -\frac{12}{13}(x_1-2) - \frac{5}{13}y_1 \end{pmatrix},$$

$$s') \quad \frac{5}{13}(x_1-2) - \frac{12}{13}y_1 - 2\left(-\frac{12}{13}(x_1-2) - \frac{5}{13}\right) = 3.$$

4 Geometria lineare dello spazio

1. Si trovi l'equazione del piano π passante per i tre punti:

   (a) $P \equiv (2,0,0)$, $Q \equiv (0,3,0)$ e $R \equiv (0,0,5)$;

   (b) $P \equiv (2,3,-1)$, $Q \equiv (9,3,0)$ e $R \equiv (5,0,0)$.

2. Si trovi il piano passante per P e r nei seguenti casi:

   (a) $P \equiv (2,3,1)$, $\quad r) \quad \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$;

(b) $P \equiv (-2,3,1)$, $\quad r) \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 2t+3 \\ z = -t+1 \end{cases}$.

3. Determinare il piano passante per $P \equiv (-1,2,4)$ ed ortogonale alla retta r nei seguenti casi:

   (a) $r) \begin{cases} 2x+y-z=2 \\ -3x+2y+3z=0 \end{cases}$;

   (b) $r) \begin{cases} x = -t+2 \\ y = 2t \\ z = 3t-4 \end{cases}$;

   (c) $r) \begin{cases} 2x+y-z=-4 \\ -3x+2y+3z=19 \end{cases}$.

4. Determinare la distanza fra il punto P e la retta r nei seguenti casi:

   (a) $P \equiv (2,3,1)$, $\quad r) \begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$;

   (b) $P \equiv (-2,3,1)$, $\quad r) \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 2t+3 \\ z = -t+1 \end{cases}$.

5. Determinare gli eventuali valori di k per cui il piano $\alpha)\ 2x-ky+3z=1$

   e la retta $r) \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 2t+3 \\ z = kt+1 \end{cases}$ sono paralleli.

6. Calcolare la retta per $P \equiv (2,-1,3)$ e ortogonale a $r) \begin{cases} x+4y-2z=3 \\ 3x-y+2z=1 \end{cases}$.

7. Date le rette

   $$r) \begin{cases} x+3y+z=-1 \\ y+z=0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s) \begin{cases} x = -\frac{7}{2}t+\frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = t \end{cases},$$

   provare che sono complanari e determinare un piano che le contiene.

8. Nello spazio sono assegnati il piano π di equazione $x+3y-2z+1=0$, la retta $r) \begin{cases} x = 3+t \\ y = 1-t \\ z = 1+2t \end{cases}$ e il punto $A \equiv (-1,1,0)$. Determinare:

(a) La retta per A e parallela ad r.
(b) La retta per A e perpendicolare a π.
(c) Il piano per A e parallelo a π.
(d) Il piano per A e perpendicolare a r.
(e) Il piano per A e contenente r.
(f) Il piano contenente r e ortogonale a π.
(g) La retta per A ortogonale e incidente con r.
(h) La proiezione ortogonale di r su π.
(i) Le distanze di A da π e da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il vettore $(1,-1,2)$ è parallelo alla retta r. Quindi la retta richiesta ha equazioni $\begin{cases} x+1=t \\ y-1=-t \\ z=2t \end{cases}$.

(b) Il vettore $(1,3,-2)$ è ortogonale a π. Quindi la retta richiesta ha equazioni $\begin{cases} x+1=t \\ y-1=3t \\ z=-2t \end{cases}$.

(c) Il vettore $(1,3,-2)$ è ortogonale a π. Quindi il piano richiesto ha equazione $x+1+3(y-1)-2z=0$.

(d) Il vettore $(1,-1,2)$ è ortogonale al piano richiesto. Pertanto esso ha equazione $x+1-(y-1)+2z=0$.

(e) Il fascio di piani per r è dato da $\lambda(x+y-4)+\mu(2x-z-5)=0$. Sostituendo al posto di x e y, rispettivamente l'ascissa e l'ordinata di A si ottiene $4\lambda+7\mu=0$. Possiamo porre $\lambda=1$ e $\mu=-\frac{4}{7}$. IL piano richiesto ha quindi equazione $x-7y-4z+8=0$.

(f) Il piano generico del fascio per r è $(\lambda+2\mu)x+\lambda y-\mu z-4\lambda-5\mu=0$. Quindi il vettore $(\lambda+2\mu,\lambda,-\mu)$ è ortogonale ad esso. Poichè $(1,3,-2)$ è ortogonale al piano π, bisogna imporre la condizione che $(\lambda+2\mu,\lambda,-\mu)$ sia ortogonale a $(1,3,-2)$, cioè che si annulli il loro prodotto scalare. Si ottiene $\lambda+\mu=0$. Quindi l'equazione del piano richiesta è $x-y-z-1=0$.

(g) La retta richiesta si ottiene come intersezione del piano per A e contenente r (punto e con il piano per A e perpendicolare a r (punto d). Quindi essa ha equazioni $\begin{cases} x-7y-4z+8=0 \\ x-y+2z+2=0 \end{cases}$.

(h) Questa retta si ottiene come intersezione del piano contenente r e ortogonale a π (punto f) col piano π stesso. Quindi la retta richiesta è $\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+3y-2z+1=0 \end{cases}$.

(i) La distanza di A da π è $\frac{|-1+3-0+1|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{3}{\sqrt{1+9+4}}$.

La distanza di A da r coincide con la distanza fra A e il punto T intersezione di r col piano per A e ortogonale r (punto d). Si ha $T \equiv (2, 2, -1)$. Quindi la distanza di A da r è $\sqrt{(-1-2)^2 + (1-2)^2 + 1} = \sqrt{11}$.

9. Siano dati il punto $P \equiv (0, 1, 0)$ e le rette

$$r) \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = -1 \end{cases}, \qquad s) \quad \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

e il piano α) $2x - y + 3z = 0$. Trovare:

(a) la proiezione ortogonale di s su α;

(b) le eventuali rette per P ed incidenti r ed s;

(c) la retta passante per P e parallela ad s;

(d) la retta passante per P, parallela ad α ed incidente r;

(e) la retta passante per P, parallela ad α ed ortogonale ad s;

(f) la distanza di P da s;

(g) la distanza di P da α;

(h) il punto P' simmetrico di P rispetto ad α;

(i) il punto P' simmetrico di P rispetto ad s;

(j) la retta simmetrica di s rispetto ad α.

10. Siano dati il punto $P \equiv (-1, 2, 1)$, la retta

$$r) \quad \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 4 \\ z = -t - 1 \end{cases} \qquad \text{e il piano } \alpha) \ x + 2y - 3z = 1.$$

Trovare la retta s tale che: s é parallela ad α, s passa per P, s é incidente r.

11. Nello spazio sono assegnate le rette

$$\text{r)} \quad \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 4 \\ z = -t - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{s)} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t - 1 \end{cases}.$$

(a) Verificare se r ed s si intersecano o no.

(b) Nel caso r e s hanno intersezione vuota dire se sono parallele o sghembe.

(c) Calcolare la distanza fra r ed s.

12. Nello spazio sono assegnati il punto $A \equiv (2,0,1)$, la retta r di equazione $z + 2y = 2z + 3y - x = 0$. Determinare:

    (a) le equazioni del piano α passante per A ed ortogonale ad r;

    (b) le coordinate del punto O', simmetrico di $O \equiv (0,0,0)$ rispetto al piano α.

13. Nello spazio sono assegnati il punto $A \equiv (1,2,0)$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}.$$

Determinare:

    (a) l'equazione del piano π passante per A ed ortogonale alla retta r;

    (b) le equazioni della retta s passante per A e parallela ad r;

    (c) il punto simmetrico di $O \equiv (0,0,0)$ rispetto a π.

14. Nello spazio sono assegnati il punto $A \equiv (2,3,1)$, il piano π di equazione $2x - 3y + 2z = 1$ e la retta r di equazioni $y = x + z = 2 - 2x$. Determinare le equazioni della retta s passante per A, parallela a π ed incidente r.

15. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}, \quad s) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (2,-1,0).$$

Determinare:

    (a) L'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

    (b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti sia r che s.

    (c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

    (d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(x + y + z - 3) + \mu(-x + 2y + 3z) = 0.$$

Imponendo il passaggio per A si ha

$$\lambda = -2\mu$$

da cui $\mu = 1$ e $\lambda = -2$. Detto α il piano per A e r, la sua equazione é

$$-3x + z + 6 = 0.$$

Analogamente si ottiene che il piano β per A e per s ha equazione

$$3x + y + 3z - 5 = 0$$

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s, é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazioni

$$\begin{cases} -3x + z + 6 = 0 \\ 3x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases}.$$

(c) Il punto improprio della retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -3x' + z' + 6t' = 0 \\ 3x' + y' + 3z' - 5t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Esso é $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 0)$. Quindi, essendo $\mathbf{v} = (\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1)$ parallelo ad r, il piano per A ed ortogonale ad r ha equazione

$$\frac{1}{3}(x-2) - \frac{4}{3}(y+1) + z = 0,$$

$$x - 4y + 3z = 6.$$

(d) Il punto B intersezione della retta r col piano passante per A ed ortogonale ad essa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 6 \\ x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$B \equiv \left(\frac{30}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13}\right) \quad \text{e}$$

$$d(A, r) = |AB| = \sqrt{\left(2 - \frac{30}{13}\right)^2, \left(-1 + \frac{3}{13}\right)^2, \left(-\frac{12}{13}\right)^2}.$$

16. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} x+y+z=3 \\ -x+2y+3z=0 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+2z=4 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (1,1,1).$$

Determinare:

(a) L'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti sia r che s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

17. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -x+3y+2z=3 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x-y+z=2 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (1,1,-2).$$

Determinare le eventuali rette passanti per A e incidenti sia r che s.

18. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -x+3y+2z=3 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x-y+z=2 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (0,0,0).$$

Determinare le eventuali rette passanti per A e incidenti sia r che s.

19. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+2t \\ z=2+t \end{cases}, \quad s) \begin{cases} x=3t \\ y=4+t \\ z=5+t \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (5,-4,0).$$

Determinare le eventuali rette passanti per A e incidenti sia r che s.

20. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+2t \\ z=2+t \end{cases}, \quad s) \begin{cases} x=3t \\ y=4+t \\ z=5+t \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (1,0,0).$$

Determinare le eventuali rette passanti per A e incidenti sia r che s.

21. Determinare la distanza fra le rette r ed s nei seguenti casi:

(a) $$r) \begin{cases} x+3y+z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s) \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t \\ z=-t \end{cases};$$

(b) $r) \begin{cases} 3x+2z=7 \\ 3y-z=-2 \end{cases}$ e $s) \begin{cases} x=-2t-1 \\ y=t+3 \\ z=3t \end{cases}$;

(c) $r) \begin{cases} x+2z=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ e $s) \begin{cases} 3y-2z=1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

22. Nello spazio sono assegnati il punto $A \equiv (1,1,1)$, la retta r di equazione $x+2y-1 = 2x+3y-z=0$. Determinare:

    (a) le equazioni del piano α passante per A ed ortogonale ad r;

    (b) le coordinate del punto Ω', simmetrico di $\Omega \equiv (2,0,4)$ rispetto ad α.

23. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} x-y+2z=1 \\ y+3z=2 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} -x-y+2z=2 \\ 2x+2y=3 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (1,1,1).$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti sia la retta r che la retta s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(x-y+2z-1)+\mu(y+3z-2)=0.$$

Imponendo il passaggio per A si ha

$$\lambda=-2\mu$$

da cui $\mu=1$ e $\lambda=-2$. Detto α il piano per A e r, la sua equazione é

$$-2x+3y-z=0.$$

Analogamente si ottiene che il piano β per A e per s ha equazione

$$3x+3y+2z-8=0$$

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s, é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazioni

$$\begin{cases} -2x+3y-z=0 \\ 3x+3y+2z-8=0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che questa retta interseca sia r che s.

(c) Il punto improprio della retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x'-y'+2z'-t'=0 \\ y'+3z'-2t'=0 \\ t'=0 \end{cases}$$

Esso é $(-5,-3,1,0)$. Quindi, essendo $\mathbf{v}=(-5,-3,1)$ parallelo ad r, il piano per A ed ortogonale ad r ha equazione

$$-5(x-1)-3(y-1)+z-1=0,$$

$$-5x-3y+z+7=0.$$

(d) Il punto B intersezione della retta r col piano passante per A ed ortogonale ad essa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -5x-3y+z+7=0 \\ x-y+2z-1=0 \\ y+3z-2=0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$B \equiv \left(1, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \quad \text{e}$$

$$d(A,r)=|AB|=\sqrt{(1-1)^2+\left(1-\frac{4}{5}\right)^2+\left(1-\frac{2}{5}\right)^2}.$$

24. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2y+z=2 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} 2x+2y+z=3 \\ x-y+3z=0 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (1,1,1).$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti sia la retta r che la retta s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(x-y+2z-4)+\mu(2y+z-2)=0.$$

Imponendo il passaggio per A si ha

$$2\lambda=\mu$$

da cui $\mu=2$ e $\lambda=1$. Detto α il piano per A e r, la sua equazione é

$$x+3y+4z-8=0.$$

Analogamente si ottiene che il piano β per A e per s ha equazione

$$4x+8y-3z-9=0$$

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s, é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazioni

$$\begin{cases} x+3y+4z-8=0 \\ 4x+8y-3z-9=0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che questa retta interseca sia r che s.

(c) Il punto improprio della retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x'-y'+2z'-4t'=0 \\ 2y'+z'-2t'=0 \\ t'=0 \end{cases}$$

Esso é $(5,1,-2,0)$. Quindi, essendo $\mathbf{v}=(5,1,-2)$ parallelo ad r, il piano per A ed ortogonale ad r ha equazione

$$5(x-1)+y-1-2(z-1)=0,$$

$$5x+y-2z-4=0.$$

(d) Il punto B intersezione della retta r col piano passante per A ed ortogonale ad essa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 5x + y - 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z - 4 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$B \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{15}, \frac{22}{15}\right) \quad \text{e}$$

$$d(A, r) = |AB| = \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{15}\right)^2 + \left(1 - \frac{22}{15}\right)^2}.$$

25. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 3z = 2 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 2z = 3 \end{cases} \qquad \text{e il punto } A \equiv (1, 1, 1).$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti sia la retta r che la retta s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(2x - y - z - 1) + \mu(x + 3y + 3z - 2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per A si ha

$$\lambda = 5\mu$$

da cui $\mu = 1$ e $\lambda = 5$. Detto α il piano per A e r, la sua equazione é

$$11x - 2y - 2z - 7 = 0.$$

Analogamente si ottiene che il piano β per A e per s ha equazione

$$2x - y + 3z - 4 = 0$$

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s, é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazioni

$$\begin{cases} 11x - 2y - 2z - 7 = 0 \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases} .$$

Si verifica facilmente che questa retta interseca sia r che s.

(c) Il punto improprio della retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x' - y' - z' - t' = 0 \\ x' + 3y' + 3z' - 2t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Esso é $(0, -1, 1, 0)$. Quindi, essendo $\mathbf{v} = (0, -1, 1)$ parallelo ad r, il piano per A ed ortogonale ad r ha equazione

$$-(y - 1) + z - 1 = 0,$$

$$-y + z = 0.$$

(d) Il punto B intersezione della retta r col piano passante per A ed ortogonale ad essa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \\ x + 3y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$B \equiv \left(\frac{5}{7}, \frac{3}{14}, \frac{3}{14}\right) \quad \text{e}$$

$$d(A, r) = |AB| = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{7}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{14}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{14}\right)^2}.$$

26. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ -x + z = 2 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ 3x + 3y + 2z = -1 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (1, 1, 1).$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti sia la retta r che la retta s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(2x + y + 3z - 3) + \mu(-x + z - 2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per A si ha

$$3\lambda = 2\mu$$

da cui $\mu = 3$ e $\lambda = 2$. Detto α il piano per A e r, la sua equazione é

$$x + 2y + 9z - 12 = 0.$$

Analogamente si ottiene che il piano β per A e per s ha equazione

$$12x - 15y - 7z + 10 = 0$$

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s, é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazioni

$$\begin{cases} x + 2y + 9z - 12 = 0 \\ 12x - 15y - 7z + 10 = 0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che questa retta interseca sia r che s.

(c) Il punto improprio della retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x' + y' + 3z' - 3t' = 0 \\ -x' + z' - 2t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Esso é $(1, -5, 1, 0)$. Quindi, essendo $\mathbf{v} = (1, -5, 1)$ parallelo ad r, il piano per A ed ortogonale ad r ha equazione

$$x - 1 - 5(y - 1) + z - 1 = 0,$$

$$x - 5y + z + 3 = 0.$$

(d) Il punto B intersezione della retta r col piano passante per A ed ortogonale ad essa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 5y + z + 3 = 0 \\ 2x + y + 3z - 3 = 0 \\ -x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$B \equiv \left(-\frac{20}{27}, \frac{19}{27}, \frac{34}{27}\right) \quad \text{e}$$

$$d(A, r) = |AB| = \sqrt{\left(1 + \frac{20}{27}\right)^2 + \left(1 - \frac{19}{27}\right)^2 + \left(1 - \frac{34}{27}\right)^2}.$$

27. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 3z = 2 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} -x - y + 2z = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (1, 1, 1).$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti sia la retta r che la retta s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(2x - y - z - 1) + \mu(x + 3y + 3z - 2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per A si ha

$$\lambda = 5\mu$$

da cui $\mu = 2$ e $\lambda = 1$. Detto α il piano per A e r, la sua equazione é

$$11x - 2y - 2z - 7 = 0.$$

Analogamente si ottiene che il piano β per A e per s ha equazione

$$3x + 3y + 2z - 8 = 0$$

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s, é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazioni

$$\begin{cases} 11x - 2y - 2z - 7 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 8 = 0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che questa retta interseca sia r che s.

(c) Il punto improprio della retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x' - y' - z' - t' = 0 \\ x' + 3y' + 3z' - 2t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Esso é $(0, -1, 1, 0)$. Quindi, essendo $\mathbf{v} = (0, -1, 1)$ parallelo ad r, il piano per A ed ortogonale ad r ha equazione

$$-(y - 1) + z - 1 = 0,$$

$$-y + z = 0.$$

(d) Il punto B intersezione della retta r col piano passante per A ed ortogonale ad essa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \\ x + 3y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$B \equiv \left(\frac{5}{7}, \frac{3}{14}, \frac{3}{14}\right) \quad \text{e}$$

$$d(A, r) = |AB| = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{7}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{14}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{14}\right)^2}.$$

28. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2y + z = 2 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ 3x + 3y + 2z = -1 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (1, 1, 1).$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti sia la retta r che la retta s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(x - y + 2z - 4) + \mu(2y + z - 2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per A si ha

$$2\lambda = \mu$$

da cui $\mu = 2$ e $\lambda = 1$. Detto α il piano per A e r, la sua equazione é

$$x + 3y + 4z - 8 = 0.$$

Analogamente si ottiene che il piano β per A e per s ha equazione

$$12x - 15y - 7z + 10 = 0$$

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s, é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazioni

$$\begin{cases} x + 3y + 4z - 8 = 0 \\ 12x - 15y - 7z + 10 = 0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che questa retta interseca sia r che s.

(c) Il punto improprio della retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x' - y' + 2z' - 4t' = 0 \\ 2y' + z' - 2t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Esso é $(5, 1, -2, 0)$. Quindi, essendo $\mathbf{v} = (5, 1, -2)$ parallelo ad r, il piano per A ed ortogonale ad r ha equazione

$$5(x - 1) + y - 1 - 2(z - 1) = 0,$$

$$5x + y - 2z - 4 = 0.$$

(d) Il punto B intersezione della retta r col piano passante per A ed ortogonale ad essa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 5x + y - 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z - 4 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$B \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{15}, \frac{22}{15}\right) \quad \text{e}$$

$$d(A, r) = |AB| = \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{15}\right)^2 + \left(1 - \frac{22}{15}\right)^2}.$$

29. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ -x + z = 2 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 2z = 3 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (1, 1, 1).$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti sia la retta r che la retta s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(2x + y + 3z - 3) + \mu(-x + z - 2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per A si ha

$$3\lambda = 2\mu$$

da cui $\mu = 1$ e $\lambda = \frac{2}{3}$. Detto α il piano per A e r, la sua equazione é

$$x + 2y + 9z - 12 = 0.$$

Analogamente si ottiene che il piano β per A e per s ha equazione

$$2x - y + 3z - 4 = 0$$

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazioni

$$\begin{cases} x + 2y + 9z - 12 = 0 \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che questa retta interseca sia r che s.

(c) Il punto improprio della retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x' + y' + 3z' - 3t' = 0 \\ -x' + z' - 2t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Esso é $(1, -5, 1, 0)$. Quindi, essendo $\mathbf{v} = (1, -5, 1)$ parallelo ad r, il piano per A ed ortogonale ad r ha equazione

$$x - 1 - 5(y - 1) + z - 1 = 0,$$

$$x - 5y + z + 3 = 0.$$

(d) Il punto B intersezione della retta r col piano passante per A ed ortogonale ad essa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 5y + z + 3 = 0 \\ 2x + y + 3z - 3 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$B \equiv \left(-\frac{20}{27}, \frac{19}{27}, \frac{34}{27}\right) \quad \text{e}$$

$$d(A, r) = |AB| = \sqrt{\left(1 + \frac{20}{27}\right)^2 + \left(1 - \frac{19}{27}\right)^2 + \left(1 - \frac{34}{27}\right)^2}.$$

30. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y + 3z = 2 \end{cases}, \quad s) \begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (1, 1, 1).$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti sia la retta r che la retta s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(x - y + 2z - 1) + \mu(y + 3z - 2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per A si ha

$$\lambda = -2\mu$$

da cui $\mu = 1$ e $\lambda = -2$. Detto α il piano per A e r, la sua equazione é

$$-2x + 3y - z = 0.$$

Analogamente si ottiene che il piano β per A e per s ha equazione

$$-4x - 8y + 3z + 9 = 0$$

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s, é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazioni

$$\begin{cases} -2x + 3y - z = 0 \\ -4x - 8y + 3z + 9 = 0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che questa retta interseca sia r che s.

(c) Il punto improprio della retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x' - y' + 2z' - t' = 0 \\ y' + 3z' - 2t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Esso é $(-5, -3, 1, 0)$. Quindi, essendo $\mathbf{v} = (-5, -3, 1)$ parallelo ad r, il piano per A ed ortogonale ad r ha equazione

$$-5(x - 1) - 3(y - 1) + z - 1 = 0,$$

$$-5x - 3y + z + 7 = 0.$$

(d) Il punto B intersezione della retta r col piano passante per A ed ortogonale ad essa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -5x - 3y + z + 7 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$B \equiv \left(1, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \quad \text{e}$$

$$d(A, r) = |AB| = \sqrt{\left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2}.$$

31. Nello spazio sono assegnati il punto $A \equiv (2, 3, 1)$, il piano π di equazione $2x - 3y + 2z = 1$ e la retta r di equazioni $y = x + z = 2 - 2x$. Determinare le equazioni della retta s passante per A, parallela a π ed incidente r.

    SVOLGIMENTO. Il vettore $\overline{v} = (2, -3, 2)$ é ortogonale al piano π. L'equazione del piano α passante per A e parallelo a π é quindi $2(x - 2) - 3(y - 3) + 2(z - 1) = 0$. L'equazione del fascio di piani per r é

    $$\lambda(x - y + z) + \mu(2 - 2x - y) = 0.$$

    Si determini l'equazione del piano β del fascio passante per il punto A:

    $$\lambda(2 - 3 + 1) + \mu(2 - 4 - 3) = 0$$

    da cui si ha $\mu = 0$, quindi l'equazione di β é $x - y + z = 0$ (si noti che ad essa si poteva pervenire semplicemente osservando che le coordinate di A verificano una delle due equazioni di r). La retta s ha quindi equazioni

    $$\begin{cases} 2(x - 2) - 3(y - 3) + 2(z - 1) = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

32. Nello spazio sono assegnati il punto $A \equiv (4, 1, 2)$, il piano π di equazione $6x + 2y + 3z = 2$ e la retta r di equazioni $2x - 4 = 3y + 3 = 6z - 12$. Determinare le equazioni della retta s passante per A, parallela a π ed incidente r.

    TRACCIA DELLO SVOLGIMENTO. Il vettore $\overline{v} = (6, 2, 3)$ é ortogonale al piano π. L'equazione del piano α passante per A e parallelo a π é quindi $6(x - 4) + 2(y - 1) + 3(z - 2) = 0$. L'equazione del fascio di piani per r é

    $$\lambda(2x - 6z + 8) + \mu(3y - 6z + 15) = 0.$$

Si determini l'equazione del piano β del fascio passante per il punto A:

$$\lambda(8-12+8)+\mu(3-12+15)=0$$

da cui si ha $\lambda=3$ e $\mu=-2$, quindi l'equazione di β é $x-y-z-1=0$. La retta s ha quindi equazioni

$$\begin{cases} 6(x-4)+2(y-1)+3(z-2)=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases}.$$

33. Nello spazio sono assegnati il punto $P_0 \equiv (-2,1,3)$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 3x+2y-2z=2 \\ x-y+z=1 \end{cases}.$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano α passante per P_0 ed ortogonale alla retta r;

(b) le equazioni della retta s passante per P_0 e parallela ad r;

(c) il punto simmetrico di $D \equiv (2,4,3)$ rispetto a α.

TRACCIA DELLO SVOLGIMENTO.

(a) Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} t'=0 \\ 3x'+2y'-2z'-2t'=0 \\ x'-y'+z'-t'=0 \end{cases},$$

si ottiene che il punto improprio della retta r é $(0,1,1,0)$. Quindi il vettore $\overline{v}=(0,1,1)$ é parallelo a r. Il piano α cercato é il luogo geometrico dei punti $P \equiv (x,y,z)$ dello spazio tali che $\overline{v}\cdot(P-P_0)=0$. Cioè $(0,1,1)\cdot(x+2,y-1,z-3)=0$, così l'equazione di α é data da $y+z-4=0$.

(b) Le equazioni di s in forma parametrica sono

$$\begin{cases} x=-2+0\cdot t \\ y=1+1\cdot t \\ z=3+1\cdot t \end{cases}.$$

oppure, ricordando che $\overline{v}=(0,1,1)$ é parallelo a r, possiamo scrivere direttamente le equazioni di s in forma cartesiana:

$$\begin{cases} x=-2 \\ \frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1} \end{cases}.$$

(c) Calcoliamo le equazioni della retta ρ passante per D e perpendicolare ad α. A tale scopo si ricordi che il vettore $\overline{v} = (0, 1, 1)$ é ortogonale ad α e quindi parallelo a ρ. Pertanto le equazioni di ρ in forma cartesiana sono

$$\begin{cases} x = 2 \\ \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{1} \end{cases}.$$

Calcoliamo le coordinate del punto M, intersezione della retta ρ col piano α, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases}.$$

Si ottiene $M \equiv (2, \frac{5}{2}, \frac{3}{2})$. Indicato con $D' \equiv (x, y, z)$ il punto simmetrico di D rispetto ad α, si vede subito che M é il punto medio del segmento di estremi D e D'. Pertanto, ricordando la formula delle coordinate del punto medio di un segmento, abbiamo $M \equiv (\frac{x+2}{2}, \frac{y+4}{2}, \frac{z+3}{2})$. Dall'uguaglianza

$$(2, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}) = (\frac{x+2}{2}, \frac{y+4}{2}, \frac{z+3}{2}),$$

si ricavano le coordinate (x, y, z) del punto D'.

34. Nello spazio sono date le rette:

$$r) \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}, \quad s) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases} \quad \text{e il punto } A \equiv (2, -1, 0).$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) La retta passante per A e incidente entrambe le rette r e s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(x + y + z - 3) + \mu(-x + 2y + 3z) = 0.$$

Imponendo il passaggio per A si ha

$$\lambda = -2\mu$$

da cui $\mu = 1$ e $\lambda = -2$. Il piano per A e r ha cosí equazione

$$-3x + z + 6 = 0.$$

Analogamente si ottiene che il piano per A e per s ha equazione

$$3x + y + 3z - 5 = 0$$

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazione

$$\begin{cases} -3x + z + 6 = 0 \\ 3x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases}.$$

(c) Il punto improprio della retta r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -3x' + z' + 6t' = 0 \\ 3x' + y' + 3z' - 5t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}.$$

Esso é $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 0)$. Quindi, essendo $\mathbf{v} = (\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1)$ parallelo ad r, il piano per A ed ortogonale ad r ha equazione

$$\frac{1}{3}(x-2) - \frac{4}{3}(y+1) + z = 0,$$

$$x - 4y + 3z = 6.$$

(d) Il punto B intersezione della retta r col piano passante per A ed ortogonale ad essa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 6 \\ x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$B \equiv \left(\frac{30}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13}\right) \quad \text{e}$$

$$d(A, r) = |AB| = \sqrt{\left(2 - \frac{30}{13}\right)^2 + \left(-1 + \frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{12}{13}\right)^2}.$$

35. Nello spazio sono date le rette:

$$r)\ \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 2t \end{cases} \quad , \quad s)\ \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e il punto } A \equiv (0,0,1).$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano passante per A e per la retta r e quella del piano passante per A e per s.

(b) Le eventuali rette passanti per A e incidenti entrambe le rette r e s.

(c) Il piano passante per A e perpendicolare ad r.

(d) La distanza di A da r.

SVOLGIMENTO:

(a) L'equazione cartesiana di r é

$$\begin{cases} y = -1 \\ -2x + z = 0 \end{cases} .$$

Il fascio di piani per r é dato da

$$\lambda(y+1) + \mu(z - 2x) = 0$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli. Imponendo il passaggio per il punto A si ottiene

$$\lambda + \mu = 0,$$

quindi possiamo porre $\lambda = 1$ e $\mu = -1$. Pertanto il piano α per il punto A e la retta r é $2x + y - z + 1 = 0$.

Il punto A appartiene ad uno dei due piani che definiscono s. Quindi il piano β per A e s é $x - z + 1 = 0$.

(b) Se una retta passa per A ed é incidente sia con r che con s é pure complanare con entrambe. Quindi deve giacere sia nel piano α che nel piano β. Nel nostro caso, esiste una e una sola retta soddisfacente queste condizioni. Essa ha equazione

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Si verifica facilmente che questa retta interseca sia r che s.

(c) Il punto improprio di r é $(1,0,2,0)$. Quindi il piano richiesto ha equazione $x + 2(z-1) = 0$ (si ricordi che il vettore $(1,0,2)$ é parallelo ad r).

(d) Il punto B intersezione di π con r si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x+2z-2=0 \\ y+1=0 \\ -2x+z=0 \end{cases}.$$

Si ha $B \equiv (\frac{2}{5}, -1, \frac{4}{5})$ e

$$d(A,r) = d(A,B) = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{4}{5}-1\right)^2}.$$

36. Nello spazio sono assegnati il punto $A \equiv (1,2,0)$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x-2z=0 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases}.$$

Determinare:

(a) l'equazione del piano π passante per A ed ortogonale alla retta r;

(b) le equazioni della retta s passante per A e parallela ad r;

(c) il punto simmetrico di $O \equiv (0,0,0)$ rispetto a π.

SVOLGIMENTO:

(a) Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} t'=0 \\ x'-2z'=0 \\ 2x'-3y'+z'-t'=0 \end{cases},$$

si ottiene che il punto improprio della retta r é $(2, \frac{5}{3}, 1, 0)$. Quindi il vettore $\overline{v} = (2, \frac{5}{3}, 1)$ é parallelo a r. Il piano π cercato é il luogo geometrico dei punti $P \equiv (x,y,z)$ dello spazio tali che $\overline{v} \cdot (P-A) = 0$. Cioè $(2, \frac{5}{3}, 1) \cdot (x-1, y-2, z) = 0$, così l'equazione di π é data da $6x+5y+3z-16=0$.

(b) L'equazione di s in forma parametrica é

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot t \\ y = 2 + \frac{5}{3} \cdot t \\ z = 0 + 1 \cdot t \end{cases}.$$

oppure, ricordando che $\overline{v} = (2, \frac{5}{3}, 1)$ é parallelo a r, possiamo scrivere direttamente l'equazione di r in forma cartesiana:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{\frac{5}{3}} = \frac{z}{1}.$$

(c) Calcoliamo l'equazione della retta ρ passante per O e perpendicolare a π. A tale scopo si ricordi che il vettore $\overline{v} = (2, \frac{5}{3}, 1)$ é ortogonale a π e quindi parallelo a ρ. Pertanto l'equazione in forma cartesiana di ρ é

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{5}{3}} = \frac{z}{1},$$

oppure

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 3y - 5z = 0 \end{cases}.$$

Calcoliamo le coordinate del punto M intersezione della retta ρ col piano π, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 3y - 5z = 0 \\ 6x + 5y + 3z - 16 = 0 \end{cases}.$$

Si ottiene $M \equiv (\frac{48}{35}, \frac{8}{7}, \frac{24}{35})$. Indicato con $O' \equiv (x, y, z)$ il punto simmetrico di O rispetto a π, si vede subito che M é il punto medio del segmento di estremi O e O'. Pertanto, ricordando la formula delle coordinate del punto medio di un segmento, abbiamo $M \equiv (\frac{x+0}{2}, \frac{y+0}{2}, \frac{z+0}{2})$. Dall'uguaglianza

$$(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}) = (\frac{48}{35}, \frac{8}{7}, \frac{24}{35}),$$

si ricavano le coordinate (x, y, z) del punto O'.

37. Nello spazio sono assegnati il piano $\pi)\ \ x + 2y - z = 0$, la retta $r)\ \ \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ e il punto $A \equiv (1, 1, 0)$. Determinare:

(a) La retta s passante per A, ortogonale a π.

(b) La retta t passante per A, parallela a π e complanare con r.

SVOLGIMENTO. Equazione della retta s

$$\begin{cases} x - 1 = t \\ y - 1 = 2t \\ z = -t \end{cases}.$$

L'equazione del piano per A e parallelo a π é $x + 2y - z - 3 = 0$. Il fascio di piani per r é dato da $\lambda(x - y) + \mu(z - 2) = 0$. Cerco il piano del fascio passante per A: $\lambda(1 - 1) + \mu(-2) = 0$. Pertanto esso ha equazione $x - y = 0$. La retta t é

$$\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

38. Nello spazio sono assegnate le rette

$$r) \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s) \quad \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 2t \end{cases} .$$

Determinare la minima distanza fra r e s.

SVOLGIMENTO 1. La retta r ha la seguente forma parametrica

$$r) \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} .$$

I vettori $\overline{u} = (1, 1, 0)$ e $\overline{v} = (1, 0, 2)$ sono paralleli rispettivamente ad r e ad s. Poichè $\overline{u}$ e $\overline{v}$ non sono proporzionali, le rette r ed s non sono parallele. Quindi o si intersecano in un punto oppure sono sghembe. L'eventuale punto intersezione di r con s corrisponde ad un unica soluzione del seguente sistema (si noti che è necessario distinguere il parametro di s da quello di r)

$$\begin{cases} t = t' \\ t = -1 \\ 2t' = 0 \end{cases}$$

Il precedente sistema è impossibile. Quindi le rette sono sghembe. Allora esiste un'unica retta p ortogonale sia ad r che ad s, che interseca entrambe. Se P_0 e Q_0 sono i punti di intersezione di p con r ed s rispettivamente, la distanza $d(P_0, Q_0)$ si chiama distanza tra r ed s.

La retta p si trova come segue: si considerano il punto generico $P \equiv (t, t, 0)$ di r e il punto generico $Q \equiv (t', -1, 2t')$ di s e si impone al vettore $Q - P$ di essere ortogonale sia ad $\overline{u}$ che a $\overline{v}$. Cioè si risolve il sistema lineare nelle incognite t e t':

$$\begin{cases} (Q - P) \cdot \overline{u} = 0 \\ (Q - P) \cdot \overline{v} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} -9t' - 1 = 0 \\ 5t' - t = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha l'unica soluzione $(t, t') = (-\frac{5}{9}, -\frac{1}{9})$. I punti $P_0 \equiv (-\frac{5}{9}, -\frac{5}{9}, 0)$ e $Q_0 \equiv (-\frac{1}{9}, -1, -\frac{2}{9})$ individuano la retta p, e quindi $d(r, s) = d(P_0, Q_0) = \frac{2}{3}$.

SVOLGIMENTO 2. Le rette r ed s sono sghembe (vedi Svolgimento 1). La distanza fra r ed s può anche essere definita come la distanza fra un punto di s e il piano α contenente r e parallelo ad s. Il fascio di piani per r è $\lambda(x - y) + \mu z = 0$. Essendo $\overline{v} = (1, 0, 2)$ il vettore parallelo ad s e $\overline{w} = (\lambda, -\lambda, \mu)$ il vettore ortogonale al piano generico del fascio, poniamo $\overline{v} \cdot \overline{w} = 0$. Ne segue $\lambda + 2\mu = 0$ e il piano α ha equazione $-2x + 2y + z = 0$. Il punto $R_0 \equiv (0, -1, 0)$ appartiene ad s. Quindi $d(r, s) = d(R_0, \alpha) = \frac{2}{3}$.

5 Spazi vettoriali

1. Siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ tre vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K. Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

   (a) Se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti, allora essi risultano a due a due linearmente indipendenti.

   (b) Se per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_j$ sono linearmente indipendenti, allora tutti e tre i vettori sono linearmente indipendenti.

   (c) Se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti, allora, per ogni $\lambda, \mu \in K$, $\mu \neq 0$, i vettori $\mathbf{v}_1$, $\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ risultano linearmente indipendenti.

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3, 0)$. Determinare una base e le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

   SVOLGIMENTO. Sia $(x, y, z, t) \in Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Allora esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = (x, y, z, t)$$

   o, equivalentemente,

$$(\lambda_1 + 2\lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 0) = (x, y, z, t).$$

   In altre parole il sottospazio $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ coincide con l'insieme dei vettori $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ per cui il sistema, nelle variabili λ_1, λ_2 e λ_3 (si noti che x, y, z e t sono i termini noti),

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 - \lambda_3 = y \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = z \\ 0 = t \end{cases}$$

   ammette soluzioni. Quindi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 2 & 1 & 3 & z \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 - 2R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z - 2x \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right) \boxed{R_3 \to R_3 - R_2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x-y \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right).$$

Pertanto $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ha dimensione 2, una sua base é $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e le sue equazioni sono

$$\begin{cases} z-2x-y=0 \\ t=0 \end{cases}.$$

3. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (0,1,-1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (2,-1,3,0)$. Determinare una base e le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

   SVOLGIMENTO. Procedendo come nell'Esercizio 2 si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \\ -1 & 1 & 3 & z \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \\ -1 & 0 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right) \boxed{R_3 \to R_3 + R_2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x+y \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right).$$

   Pertanto $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ha dimensione 2, una sua base é $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e le sue equazioni sono

$$\begin{cases} z-x+y=0 \\ t=0 \end{cases}.$$

4. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dalle equazioni: $2x-y+3z=0$, $x+y=0$.

   SVOLGIMENTO. Il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ definito dalle equazioni assegnate è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

   il quale ha le ∞^1 soluzioni $(x,-x,x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Quindi $W = \{(x,-x,-x) = x(1,-1,-1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, cioè $W = Span\{(1,-1,-1)\}$. Una sua base é data da $(1,-1,-1)$.

5. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione: $2x-y+3z=0$.

   SVOLGIMENTO. Il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione assegnata è dato dall'insieme delle sue soluzioni. Esso é dato dalle ∞^2 terne ordinate $(x, 2x+3z, z)$ $\forall x, z \in \mathbb{R}$. Quindi $W = \{(x, 2x+3z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$. Si ha inoltre

$$(x, 2x+3z, z) = (x, 2x, 0) + (0, 3z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1).$$

   Così $W = Span\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\}$. I vettori $(1, 2, 0), (0, 3, 1)$, essendo indipendenti, formano una base di W.

6. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni: $2x-y+3z=0$, $x+y=0$.

   SVOLGIMENTO. Il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni assegnate è dato dall'insieme delle soluzioni, nelle variabili x, y, z e t, del sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

   il quale ha le ∞^2 soluzioni $(x, -x, -x, t)$ $\forall x, t \in \mathbb{R}$. Quindi $W = \{(x, -x, -x, t) \mid x, t \in \mathbb{R}\}$. Si ha inoltre

$$(x, -x, -x, t) = (x, -x, -x, 0) + (0, 0, 0, t) = x(1, -1, -1, 0) + t(0, 0, 0, 1).$$

   Così $W = Span\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. I vettori $(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)$, essendo indipendenti, formano una base di W.

7. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione: $2x-y+3z=0$.

   SVOLGIMENTO. Il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione assegnata è dato dall'insieme delle sue soluzioni. Esso é dato dalle ∞^3 quaterne ordinate $(x, 2x+3z, z, t)$ $\forall x, z, t \in \mathbb{R}$. Quindi $W = \{(x, 2x+3z, z, t) \mid x, z, t \in \mathbb{R}\}$. Si ha inoltre $(x, 2x+3z, z, t) = (x, 2x, 0, 0) + (0, 3z, z, 0) + (0, 0, 0, t) = x(1, 2, 0, 0) + z(0, 3, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$. Così $W = Span\{(1, 2, 0, 0), (0, 3, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. I vettori $(1, 2, 0, 0)$, $(0, 3, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, essendo indipendenti, formano una base di W.

8. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, 0, 1, 0)$. Determinare una base e le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

   SVOLGIMENTO. Procedendo come nell'Esercizio 2 si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 0 & 0 & t \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & -1 & z-x \\ 1 & 0 & 0 & t \end{array}\right) \boxed{R_4 \to R_4 - R_1} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & -1 & z-x \\ 0 & 0 & -2 & t-x \end{array}\right).$$

Pertanto $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ha dimensione 3, una sua base é $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e la sua equazione é $y = 0$.

9. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -2, 2, 6)$ e $\mathbf{v}_3 = (5, -5, 5, 15)$. Determinare una base e le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

   SVOLGIMENTO. Procedendo come nell'Esercizio 2 si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ -1 & -2 & -5 & y \\ 1 & 2 & 5 & z \\ 3 & 6 & 15 & t \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 + R_1} \\ \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \\ \boxed{R_4 \to R_4 - 3R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & 0 & 0 & y+x \\ 0 & 0 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & t-3x \end{array}\right).$$

   Pertanto $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ha dimensione 1, una sua base é $\mathbf{v}_1$ e le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - x = 0 \\ t - 3x = 0 \end{cases}.$$

10. Determinare una base e le equazioni dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

    (a) $Span\{(0, 1, 2, 3, 0), (-1, -1, -2, -3, 0), (1, 1, 1, 1, 4)\}$;

    (b) $Span\{(0, 1, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 1, 2), (1, 0, 0, 0, 3), (1, 3, 3, 3, 3)\}$;

    (c) $Span\{(1, 1, 1, 1, 1), (-1, -1, -2, -3, 0)\}$.

11. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni: $2x+3y+z+t = 0$, $x - y + t = 0$, $3x + 2y + z + 2t = 0$.

    SVOLGIMENTO. Il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni assegnate è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ 3x + 2y + z + 2t = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline R_2 \to -2R_2 + R_1 \\ \hline R_3 \to -2R_3 + 3R_1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi (2) equivale a

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 0 \\ 5y + z - t = 0 \end{cases}$$

il quale ha le ∞^2 soluzioni $(y - t, y, t - 5y, t)$ $\forall y, t \in \mathbb{R}$. Quindi $W = \{(y - t, y, t - 5y, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\}$. Si ha inoltre $(y - t, y, t - 5y, t) = (y, y, -5y, 0) + (-t, 0, t, t) = y(1, 1, -5, 0) + t(-1, 0, 1, 1)$. Così $W = Span\{(1, 1, -5, 0), (-1, 0, 1, 1)\}$. I vettori $(1, 1, -5, 0)$, $(-1, 0, 1, 1)$, essendo indipendenti, formano una base di W.

12. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni:

    (a) $2x - y + t = 0$, $x + z - t = 0$;

    (b) $x - y + t = 0$, $2x - y + 4t = 0$;

    (c) $x - 2y + 3z - t = 0$;

    (d) $x + y - t = 0$;

    (e) $x + y = 0$;

    (f) $x = 0$.

13. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -2, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (4, -4, 2, 7)$. Determinare una base e le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

    Procedendo come nell'Esercizio 2 si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & x \\ -1 & -2 & -4 & y \\ 1 & 0 & 2 & z \\ 3 & 1 & 7 & t \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \hline R_2 \to R_2 + R_1 \\ \hline R_4 \to 2R_4 - R_1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & x \\ 0 & 0 & 0 & x + y \\ 1 & 0 & 2 & z \\ 5 & 0 & 10 & 2t - x \end{array}\right) \boxed{R_4 \to R_4 - 5R_3} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & x \\ 0 & 0 & 0 & x+y \\ 1 & 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 0 & 2t-x-5z \end{array}\right).$$

Pertanto $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ha dimensione 2, una sua base é $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2t-x-5z=0 \end{cases}.$$

14. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (2,1,-1,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,-1,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (4,2,-2,6)$. Determinare una base e le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

    SVOLGIMENTO. Procedendo come nell'Esercizio 2 si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ -1 & -1 & -2 & z \\ 3 & 1 & 6 & t \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to R_2 + R_1} \\ \boxed{R_3 \to 2R_3 + R_1} \\ \boxed{R_4 \to 4R_4 + 3R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & x \\ 0 & -2 & 0 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 2z+2y \\ 0 & 0 & 0 & t+3z-x+2y \end{array}\right).$$

    Pertanto $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ha dimensione 2, una sua base é $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e le sue equazioni si ottengono annullando l'ultima riga,

$$\begin{cases} 2z+2y=0 \\ t+3z-x+2y=0 \end{cases}.$$

15. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (-1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,-1,2)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,1)$ e $\mathbf{v}_4 = (-1,2,4)$.
    (a) Determinare una base di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4)$ e $Span(\mathbf{v}_2)$.
    (b) Determinare le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4)$.

16. Siano dati in $\mathbb{R}^5$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,-1,2,3,1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,0,1,2,2)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,1,1,1)$, $\mathbf{v}_4 = (2,-2,4,6,2)$ e $\mathbf{v}_5 = (2,1,-1,0,3)$. Determinare una base e le eventuali equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$.

17. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (4,4,4,4)$, $\mathbf{v}_2 = (3,3,3,0)$, $\mathbf{v}_3 = (2,2,0,0)$, $\mathbf{v}_4 = (1,0,0,0)$ e $\mathbf{v}_5 = (1,2,3,4)$. Determinare una base e le eventuali equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$.

18. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (2,0,1,0)$. Determinare una base e le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

19. Determinare le componenti dei vettori $(1,2,2), (1,2,4) \in \mathbb{R}^3$ rispetto la base $A = [\mathbf{v}_1 = (2,2,2), \mathbf{v}_2 = (-1,0,3), \mathbf{v}_3 = (2,1,2)]$.

SVOLGIMENTO.

PRIMO METODO. Bisogna determinare una terna di numeri reali (α, β, γ) in modo tale che

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{v}_3 = (1, 2, 2)$$

e un'altra terna (che per comodità continuo ad indicare con (α, β, γ)) tale che

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{v}_3 = (1, 2, 4).$$

Poichè $\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{v}_3 = (2\alpha - \beta + 2\gamma, 2\alpha + \gamma, 2\alpha + 3\beta + 2\gamma)$, possiamo risolvere contemporaneamente i due sistemi precedenti nel seguente modo:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + 2\gamma = (1, 1) \\ 2\alpha + \gamma = (2, 2) \\ 2\alpha + 3\beta + 2\gamma = (2, 4) \end{cases}$$

da cui si ottiene facilmente che

$$\begin{cases} \alpha = (\frac{11}{8}, \frac{9}{8}) \\ \beta = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ \gamma = (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}) \end{cases}$$

Quindi $(1, 2, 2) = (\frac{11}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4})_A$, e $(1, 2, 4) = (\frac{9}{8}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4})_A$.

SECONDO METODO. Cerchiamo la matrice di cambiamento di base $P^{E,A}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 - 4R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to 4R_2 + R_3} \\ \boxed{R_1 \to -2R_1 + R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to -2R_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & -3 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{8}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{4}R_2} \\ \boxed{R_3 \to \frac{1}{4}R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Quindi

$$P^{E,A} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & 1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$P^{E,A}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}\frac{11}{8}\\\frac{1}{4}\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}_A\,,\quad P^{E,A}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}\frac{9}{8}\\\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}_A.$$

20. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $\mathbf{v}_1=(1,0,1)$, $\mathbf{v}_2=(0,1,1)$, $\mathbf{v}_3=(1,-1,2)$ e $\mathbf{u}=(3,1,2)$. Dire se $B=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e, in tal caso, determinare le componenti di $\mathbf{u}$ rispetto la base B.

SVOLGIMENTO.
PRIMO METODO. Poichè

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&1&2\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

B è una base. Sia $\mathbf{u}=(\alpha,\beta,\gamma)_B$. Si ha $(3,1,2)=\mathbf{u}=\alpha\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2+\gamma\mathbf{v}_3=(\alpha+\gamma,\beta-\gamma,\alpha+\beta+2\gamma)$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=3\\\beta-\gamma=1\\\alpha+\beta+2\gamma=2\end{cases}$$

si ottiene $\alpha=4$, $\beta=0$ e $\gamma=-1$. Quindi $\mathbf{u}=(4,0,-1)_B$.

SECONDO METODO. Cerchiamo la matrice di cambiamento di base $P^{E,B}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\boxed{R_3\to R_3-R_1}\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3\to R_3-R_2}\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&2&-1&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\boxed{R_2\to 2R_2+R_3}\\\boxed{R_1\to -2R_1+R_3}\end{array}\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&0&-3&-1&1\\0&2&0&-1&1&1\\0&0&2&-1&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\boxed{R_1\to -\frac{1}{2}R_1}\\\boxed{R_2\to \frac{1}{2}R_2}\\\boxed{R_3\to \frac{1}{2}R_3}\end{array}\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

Quindi

$$P^{E,B}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad\text{e}\quad P^{E,B}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}_E=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}_B.$$

21. Determinare le componenti dei vettori $(2,-1,1),(3,2,4) \in \mathbb{R}^3$ rispetto la base $A = [\mathbf{v}_1 = (1,1,2), \mathbf{v}_2 = (-1,0,3), \mathbf{v}_3 = (2,3,1)]$.

SVOLGIMENTO.
PRIMO METODO. Bisogna determinare una terna di numeri reali (α,β,γ) in modo tale che
$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 = (2,-1,1)$$
e un'altra terna (che per comodità continuo ad indicare con (α,β,γ)) tale che
$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 = (3,2,4).$$
Poichè $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 = (\alpha - \beta + 2\gamma, \alpha + 3\gamma, 2\alpha + 3\beta + \gamma)$, possiamo risolvere contemporaneamente i due sistemi precedenti nel seguente modo:
$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = (2,3) \\ \alpha + 3\gamma = (-1,2) \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = (1,4) \end{cases}$$
da cui si ottiene facilmente che
$$\begin{cases} \alpha = (\frac{7}{2}, \frac{25}{8}) \\ \beta = (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{8}) \\ \gamma = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{8}) \end{cases}$$
Quindi $(2,-1,1) = (\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})_A$, e $(3,2,4) = (\frac{25}{8}, -\frac{5}{8}, -\frac{3}{8})_A$.

SECONDO METODO. Cerchiamo la matrice di cambiamento di base $P^{E,A}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to -R_2 + R_1} \\ \boxed{R_3 \to -2R_1 + R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_3 \to R_3 + 5R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{R_2 \to -8R_2 + R_3} \\ \boxed{R_1 \to 4R_1 + R_3} \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -4 & 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to 2R_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & -9 & -7 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \boxed{R_1 \to \frac{1}{8}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{8}R_2} \\ \boxed{R_3 \to -\frac{1}{8}R_3} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

Quindi

$$P^{E,A} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

$$P^{E,A} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}_A, \quad P^{E,A} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} \frac{25}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}_A.$$

22. Determinare le componenti dei vettori $(2, -1, 1), (3, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$ rispetto la base $A = [\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 3), \mathbf{v}_3 = (2, 3, 1)]$.

23. Determinare le componenti dei vettori $(1, 2, 2), (1, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$ rispetto la base $A = [\mathbf{v}_1 = (2, 2, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 3), \mathbf{v}_3 = (2, 1, 2)]$.

24. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_1 = (0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1)$.
    (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ formano due basi di $\mathbb{R}^2$.
    (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.
    (c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (4, 1)_A$.

SVOLGIMENTO
(a) Sia A che B sono due basi in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \text{ e } \ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

(b) Per determinare la matrice di cambiamento di base $P^{A,B}$. usiamo due metodi differenti.

PRIMO METODO. Le componenti di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ nella base B si trovano nel seguente modo:

$$(1, -2) = \mathbf{v}_1 = \alpha_{11}\mathbf{u}_1 + \alpha_{12}\mathbf{u}_2 = \alpha_{11}(0, 1) + \alpha_{12}(-1, 1) = (-\alpha_{12}, \alpha_{11} + \alpha_{12})_B.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -\alpha_{12} = 1 \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} = -2 \end{cases},$$

si ottiene

$$\alpha_{11} = -1, \quad \alpha_{12} = -1.$$

Analogamente

$$(1, 0) = \mathbf{v}_2 = \alpha_{21}\mathbf{u}_1 + \alpha_{22}\mathbf{u}_2 = \alpha_{21}(0, 1) + \alpha_{22}(-1, 1) = (-\alpha_{22}, \alpha_{21} + \alpha_{22})_B.$$

Risolvendo il sistema
$$\begin{cases} -\alpha_{22} = 1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} = 0 \end{cases},$$
si ottiene
$$\alpha_{21} = 1, \quad \alpha_{22} = -1.$$
Pertanto $\mathbf{v}_1 = (-1,-1)_B$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1)_B$ e
$$P^{A,B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Adesso cerchiamo la matrice di cambiamento di base $P^{B,A}$. Ovviamente $P^{B,A}$ può essere ottenuta come inversa di $P^{A,B}$. Noi procediamo, invece, in modo analogo al precedente. Le componenti di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ nella base A si ottengono nel seguente modo:
$$(0,1) = \mathbf{u}_1 = \beta_{11}\mathbf{v}_1 + \beta_{12}\mathbf{v}_2 = \beta_{11}(1,-2) + \beta_{12}(1,0) = (\beta_{11} + \beta_{12}, -2\beta_{11})_A.$$
Risolvendo il sistema
$$\begin{cases} \beta_{11} + \beta_{12} = 0 \\ -2\beta_{11} = 1 \end{cases},$$
si ottiene
$$\beta_{11} = \frac{-1}{2}, \quad \beta_{12} = \frac{1}{2}.$$
Analogamente
$$(-1,1) = \mathbf{u}_2 = \beta_{21}\mathbf{v}_1 + \beta_{22}\mathbf{v}_2 = \beta_{21}(1,-2) + \beta_{22}(1,0) = (\beta_{21} + \beta_{22}, -2\beta_{21})_A.$$
Risolvendo il sistema
$$\begin{cases} \beta_{21} + \beta_{22} = -1 \\ -2\beta_{21} = 1 \end{cases},$$
si ottiene
$$\beta_{21} = \frac{-1}{2}, \quad \beta_{22} = \frac{-1}{2}.$$
Pertanto $\mathbf{u}_1 = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})_A$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})_A$ e
$$P^{B,A} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

SECONDO METODO. Per determinare $P^{A,B}$ procediamo nel seguente modo:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \boxed{R_1 \to R_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$
$$\boxed{R_2 \to R_2 - R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right). \text{ Quindi } P^{A,B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora $P^{B,A}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_2 \to 2R_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{R_1 \to R_1 - \tfrac{1}{2}R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \boxed{R_2 \to \tfrac{1}{2}R_2} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).\ \text{Quindi } P^{B,A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(c) Indicato con $(y_1, y_2)_B$ il vettore $(4,1)_A$ nella base B, si ha

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_B = P^{A,B} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}_B.$$

25. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (2,4)$, $\mathbf{v}_2 = (3,0)$, $\mathbf{u}_1 = (1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1)$.
   (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ formano due basi di $\mathbb{R}^2$.
   (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.
   (c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (3,2)_A$.

SVOLGIMENTO
(a) Sia A che B sono due basi in quanto

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

(b) Cerco la matrice di cambiamento di base $P^{A,B}$ mediante due differenti metodi.

PRIMO METODO. Le componenti di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ nella base B si trovano nel seguente modo:

$$(2,4) = \mathbf{v}_1 = \alpha_{11}\mathbf{u}_1 + \alpha_{12}\mathbf{u}_2 = \alpha_{11}(1,2) + \alpha_{12}(2,1) = (\alpha_{11} + 2\alpha_{12}, 2\alpha_{11} + \alpha_{12})_B.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \alpha_{11} + 2\alpha_{12} = 2 \\ 2\alpha_{11} + \alpha_{12} = 4 \end{cases},$$

si ottiene

$$\alpha_{11} = 2, \quad \alpha_{12} = 0.$$

Analogamente

$$(3,0) = \mathbf{v}_2 = \alpha_{21}\mathbf{u}_1 + \alpha_{22}\mathbf{u}_2 = \alpha_{21}(1,2) + \alpha_{22}(2,1) = (\alpha_{21} + 2\alpha_{22}, 2\alpha_{21} + \alpha_{22})_B.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \alpha_{21} + 2\alpha_{22} = 3 \\ 2\alpha_{21} + \alpha_{22} = 0 \end{cases},$$

si ottiene

$$\alpha_{21} = -1, \quad \alpha_{22} = 2.$$

Pertanto $\mathbf{v}_1 = (2,0)_B$, $\mathbf{v}_2 = (-1,2)_B$ e

$$P^{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo ora $P^{B,A}$. Ovviamente $P^{B,A}$ può essere ottenuta come l'inversa di $P^{A,B}$. Noi procediamo, invece, in modo analogo al precedente. Le componenti di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ nella base A si ottengono come segue:

$$(1,2) = \mathbf{u}_1 = \beta_{11}\mathbf{v}_1 + \beta_{12}\mathbf{v}_2 = \beta_{11}(2,4) + \beta_{12}(3,0) = (2\beta_{11} + 3\beta_{12}, 4\beta_{11})_A.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2\beta_{11} + 3\beta_{12} = 1 \\ 4\beta_{11} = 2 \end{cases},$$

si ottiene

$$\beta_{11} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{12} = 0.$$

Analogamente

$$(2,1) = \mathbf{u}_2 = \beta_{21}\mathbf{v}_1 + \beta_{22}\mathbf{v}_2 = \beta_{21}(2,4) + \beta_{22}(3,0) = (2\beta_{21} + 3\beta_{22}, 4\beta_{21})_A.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2\beta_{21} + 3\beta_{22} = 2 \\ 4\beta_{21} = 1 \end{cases},$$

si ottiene

$$\beta_{21} = \frac{1}{4}, \quad \beta_{22} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{2}, 0)_A$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})_A$ e

$$P^{B,A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

SECONDO METODO. Per determinare $P^{A,B}$ procediamo nel seguente modo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1} \quad \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$\boxed{R_1 \to 2R_2 + 3R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \hline R_1 \to \frac{1}{3}R_1 \\ \hline R_2 \to -\frac{1}{3}R_2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$. Quindi $P^{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Determiniamo ora $P^{B,A}$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \boxed{R_2 \to -2R_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{array}\right)$

$\boxed{R_1 \to 2R_1 + R_2} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \hline R_1 \to \frac{1}{4}R_1 \\ \hline R_2 \to -\frac{1}{6}R_2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$. Quindi $P^{B,A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) Indicato con $(y_1, y_2)_B$ il vettore $(3,2)_A$ nella base B, si ha

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_B = P^{A,B} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}_B.$$

26. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,-1)$, $\mathbf{u}_1 = (0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1)$.
    (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ formano due basi di $\mathbb{R}^2$.
    (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.
    (c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (4,1)_A$.

27. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (-1,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,6)$, $\mathbf{u}_1 = (4,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1)$.
    (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ formano due basi di $\mathbb{R}^2$.
    (b) Determinare le componenti di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ rispetto la base A.
    (c) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A e provare che sono una l'inversa dell'altra.

28. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,-2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (2,0,0)$, $\mathbf{u}_1 = (0,1,-2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,-2)$, $\mathbf{u}_3 = (1,0,1)$.
    (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ formano due basi di $\mathbb{R}^3$.
    (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.

(c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (3, 2, 3)_A$.

29. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (-1, 3, 5)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 6, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -1, 3)$, $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 2, 1)$.

   (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ formano due basi di $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determinare le componenti di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ rispetto la base A.

   (c) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.

30. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, 3)$, $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0)$.

   (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ formano due basi di $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.

   (c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (3, 2, 3)_A$.

31. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la base $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, essendo $\mathbf{v}_1 = (2, 3, 5)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)$. Determinare le componenti di $\mathbf{w} = (4, 2, 1)_A$ rispetto la base $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, essendo $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 2, 1)$.

32. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{u}_1 = (2, -2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (-2, 0, -1)$.

   (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ formano due basi di $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.

   (c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (3, 2, 3)_A$.

TRACCIA DELLO SVOLGIMENTO.
(a) Sia A che B sono due basi in quanto

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$(b) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \boxed{R_2 \to R_2 + R_1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}\boxed{R_2 \to R_2 + 2R_3} \\ \boxed{R_1 \to R_1 + 2R_3}\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c}\boxed{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \\ \boxed{R_2 \to \frac{1}{2}R_2}\end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right). \text{ Quindi } P^{A,B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In modo simile si determina $P^{B,A}$.

(c) Indicato con $(y_1, y_2, y_3)_B$ il vettore $(3, 2, 3)_A$ nella base B, si ha

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_A .$$

33. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$.
    (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ formano due basi di $\mathbb{R}^3$.
    (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.
    (c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (3, 2, 3)_A$.
34. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, 3)$, $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0)$.
    (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ formano due basi di $\mathbb{R}^3$.
    (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.
    (c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (3, 2, 3)_A$.
35. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, 0)$, $\mathbf{u}_1 = (0, 1, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, -2)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$.
    (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ formano due basi di $\mathbb{R}^3$.
    (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.
    (c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (3, 2, 3)_A$.
36. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -2, 4, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 2, 0)$. Determinare una base e le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
37. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$, $\mathbf{u}_1 = (2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$.
    (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ formano due basi di $\mathbb{R}^2$.
    (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.

(c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (4,1)_A$.

38. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,0,2,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (2,-1,3,0)$. Determinare una base e le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$.

39. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,-2)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0)$, $\mathbf{u}_1 = (0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,1)$.

    (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ e $B = (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ formano due basi di $\mathbb{R}^2$.

    (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.

    (c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (4,1)_A$.

40. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (0,1,-1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (2,-1,3,0)$. Determinare una base e le equazioni di $Span(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$.

41. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (0,2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,2)$.

    (a) Provare che $A = (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ e $B = (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ formano due basi di $\mathbb{R}^2$.

    (b) Determinare le matrici di cambiamento di base dalla base A alla base B e dalla base B alla base A.

    (c) Calcolare le componenti, nella base B, del vettore $\mathbf{w} = (4,1)_A$.

6 Applicazioni lineari

1. Sia
$$M = \begin{pmatrix} h & h & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & h & 1 \end{pmatrix}$$
la matrice associata, rispetto le basi canoniche, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Al variare del parametro reale h, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

SVOLGIMENTO. Si verifica facilmente che il determinante di M è $h(2-h)$. Quindi se $h \neq 0,2$, f è un automorfismo ($Kerf = \{(0,0,0)\}$).

Per $h = 0$ si ha
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Quindi $Kerf = \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è data dal vettore $(0,1,0)$. Sempre per $h = 0$ gli elementi speciali della matrice ridotta si trovano nella prima e terza colonna quindi una base di Imf è $[(0,-1,2),(1,1,1)]$.

Per $h = 2$ si ha

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $Kerf = \{(z, -\frac{3}{2}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è data dal vettore $(1, -\frac{3}{2}, 1)$. Sempre per $h = 2$ gli elementi speciali della matrice ridotta si trovano, per esempio, nella prima e terza colonna quindi una base di Imf é $[(2, -1, 2), (2, 0, 2)]$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (3x - ky + 2z, 6x + (1 - 2k)y + (4 + k)z, -3x + ky + (k^2 - k - 2)z)$. Al variare del parametro reale k, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

   SVOLGIMENTO. Si ha, denotando con E la base canonica,

$$M_f^{E,E} = \begin{pmatrix} 3 & -k & 2 \\ 6 & 1-2k & 4+k \\ -3 & k & k^2-k-2 \end{pmatrix}.$$

   Pertanto $M_f^{E,E}$ $\boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -k & 2 \\ 0 & 1 & k \\ -3 & k & k^2-k-2 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\boxed{R_3 \to R_3 + R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -k & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k^2-k \end{pmatrix}.$$

   Per $k = 0, 1$, si ha $k^2 - k = 0$ e $M_f^{E,E}$ ha rango 2. Quindi $\dim Kerf = 3 - 2 = 1$ e $\dim Imf = 2$. Per $k \neq 0, 1$, $M_f^{E,E}$ ha rango 3.

   Caso $\mathbf{k = 0}$. Per trovare una base di $Kerf$ é sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

   Pertanto $Kerf = \{(\frac{-2}{3}z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é data dal vettore $(\frac{-2}{3}, 0, 1)$. Una base di Imf é data dai due vettori le cui componenti sono le colonne di $M_f^{E,E}$ che corrispondono alle due colonne della matrice ridotta contenenti i due elementi speciali. Essi sono $(3, 6, -3)$ e $(0, 1, 0)$.

   Caso $\mathbf{k = 1}$. Per trovare una base di $Kerf$ é sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

Pertanto $Kerf = \{(-z,-z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é data dal vettore $(-1,-1,1)$. Una base di Imf é data dai due vettori le cui componenti sono le colonne di $M_f^{E,E}$ che corrispondono alle due colonne della matrice ridotta contenenti i due elementi speciali. Essi sono $(3,6,-3)$ e $(-1,-1,1)$.

Caso $\mathbf{k \neq 0, 1}$. Si ha $k^2 - k \neq 0$ e $M_f^{E,E}$ ha rango 3. Quindi dim$Kerf = 3 - 3 = 0$, cioè $Kerf = \{\mathbf{0}\}$, e dim$Imf = 3$, quindi $Imf = \mathbb{R}^3$ e una sua base può essere la stessa base canonica E.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x,y,z) = (2x + ky - z, x + y, x - y + kz)$. Al variare del parametro reale k, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x,y,z) = (kx - ky + 2z, -x + y + kz, -kx + z)$. Al variare del parametro reale k, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

5. Studiare, al variare del parametro reale k, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x,y,z,t) = (x + 2y - t, x + 3y + (k-1)z + (k+1)t, x + 2y + kz + t)$.

SVOLGIMENTO. La matrice associata ad f è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & k-1 & k+1 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Riducendo M per righe si ottiene

$$M \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k-1 & k+2 \\ 0 & 0 & k & 2 \end{pmatrix}.$$

Avendo M rango 3, si ha $dim\, Ker(f) = 1$ e $dim\, Im(f) = 3$.

Una base di $Ker(f)$ si ottiene risolvendo (rispetto alle incognite x, y, t) il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ y + (k+2)t = (1-k)z \\ 2t = -kz \end{cases}$$

Quindi $(\frac{-2k^2-k-4}{2}, \frac{k^2+2}{2}, 1, -\frac{k}{2})$ è una base di $Ker(f)$.

Una base di $Im(f)$ è data dai vettori corrispondenti a un minore di ordine 3 di M che ha determinante diverso dallo zero. Per esempio dai vettori le cui componenti sono tate dalla prima, seconda e quarta colonna di M.

6. Sia
$$M = \begin{pmatrix} h & 2h & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ h & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
la matrice associata, rispetto le basi canoniche, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Al variare del parametro reale h, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

SVOLGIMENTO. Si ha
$$M \longrightarrow \begin{pmatrix} h & 2h & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2h & 0 \end{pmatrix}$$
Per $h = 1$, M ha rango 2 e $Kerf = \{(x, 2x, -\frac{5}{3}x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è data dal vettore $(1, 2, -\frac{5}{3})$. Sempre per $h = 1$, gli elementi speciali della matrice ridotta si trovano, per esempio, nella seconda e terza colonna. Quindi una base di Imf è $[(2, 1, 2), (3, 0, 3)]$.

Per $h \neq 1$, M ha rango 3. Pertanto f è un automorfismo (il nucleo di f contiene solo il vettore nullo).

7. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y)$. Verificare che $A = [\mathbf{v}_1 = (2, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)]$ é una base di $\mathbb{R}^3$ e $B = [\mathbf{w}_1 = (2, 1), \mathbf{w}_2 = (-1, 1)]$ é una base di $\mathbb{R}^2$. Determinare $M_f^{A,B}$.

SVOLGIMENTO. A e B sono due basi in quanto le matrici $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hanno rispettivamente rango 3 e 2. Si ha $f(\mathbf{v}_1) = (5, 1)$, $f(\mathbf{v}_2) = (-1, 0)$ e $f(\mathbf{v}_3) = (0, 1)$. Adesso bisogna trovare le componenti dei vettori $(5, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, 1)$ rispetto la base B. Da
$$\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 = (5, 1)$$
segue $\alpha = 2$ e $\beta = -1$ e quindi il vettore $(5, 1)$ espresso nella base B é $2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$. Analogamente si procede con gli altri due vettori e si ottiene
$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{v}_2) = -\frac{1}{3}\mathbf{w}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{v}_3) = \frac{1}{3}\mathbf{w}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{w}_2 \end{cases}$$
e $M_f^{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (3x - y + 2z, 6x + y + 4z, -3x + y + z)$. Determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

9. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (x - 2y + 3z, 6x - y - z)$. Determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

10. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (x - 2y + 3z, 6x - y - z, x - z, y - z)$. Determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

11. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (x + y + 2z, -x + 3z, 2x + 2y + 4z, y + 5z)$. Determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

12. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (2x + y + 3z, 2x + 5z, 6x + 3y + 9z, 4x + y + 8z)$. Determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

13. Sia
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & h \\ 2 & h & 3 & 2 \\ -1 & 2h & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
la matrice associata, rispetto le basi canoniche, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Al variare del parametro reale h, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

SVOLGIMENTO. Si ha
$$M \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & h \\ 0 & h & 1 & 2-2h \\ 0 & 2h & 1 & 2+h \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & h \\ 0 & h & 1 & 2-2h \\ 0 & h & 0 & 3h \end{pmatrix}$$
Per $h = 0$, M ha rango 2 quindi $dim\ Imf = 2$ e $dim\ Kerf = 4 - 2 = 2$. Si vede facilmente che le equazioni di $Kerf$ sono
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases}.$$
Si ha così $Kerf = \{(-z, y, z, -\frac{1}{2}z) \quad | \quad y, z \in \mathbb{R}\}$, e una sua base é data da $[(0, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, -\frac{1}{2})]$. Sempre per $h = 0$, gli elementi speciali della matrice ridotta si trovano nella prima e terza colonna. Ne segue che una base di Imf é $[(1, 2, -1), (1, 3, 0)]$. Per trovare l'equazione di Imf si consideri $(x, y, z) \in Imf$ e si riduca per righe la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \\ -1 & 0 & z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 0 & y-3x \\ 0 & 0 & z-y+3x \end{pmatrix}.$$

Essendo (x, y, z) combinazione lineare dei vettori $(1, 2, -1), (1, 3, 0)$ (formanti una base di Imf), l'equazione di Imf é $z - y + 3x = 0$.

Per $h \neq 0$, M ha rango 3 quindi $dim\ Imf = 3$, cioè f é suriettiva ($Imf = \mathbb{R}^3$), e $dim\ Kerf = 4 - 3 = 1$. Si vede facilmente che le equazioni di $Kerf$ sono

$$\begin{cases} y + 3t = 0 \\ z - (5h - 2)t = 0 \\ x - (2 - 6h)t = 0 \end{cases} .$$

Si ha così $Kerf = \{((2 - 6h)t, -3t, (5h - 2)t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, e una sua base é data da $[(2 - 6h, -3, 5h - 2, 1)]$.

14. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definita, rispetto le basi canoniche mediante la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & k & 1 + k & k - 1 \\ 2 & k & -1 & k \end{pmatrix} .$$

SVOLGIMENTO. Denotando con E la base canonica, la matrice $M_f^{E,E}$ può essere ridotta alla seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & k & k - 2 & k + 2 \\ 0 & 0 & -1 - k & 0 \end{pmatrix} .$$

Si noti che la matrice precedente é ridotta per ogni valore di k. Infatti, se $k = 0$ come elemento speciale della seconda riga si può prendere 2, mentre, se $k \neq 0$, come elemento speciale possiamo prendere k.

Allora $M_f^{E,E}$ ha rango 2 per $k = -1$ e rango 3 per $k \neq -1$. Determiniamo adesso una base di Imf e $Kerf$.

Caso $\mathbf{k = 0}$. Si ha dim $Kerf = 1$, dim $Imf = 3$. Per trovare una base di $Kerf$ é sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + z - t = 0 \\ -2z + 2t = 0 \\ -z = 0 \end{cases} .$$

Pertanto una base di $Kerf$ é data dal vettore $(0, 1, 0, 0)$. Una base di Imf é data dai tre vettori le cui componenti sono le colonne di $M_f^{E,E}$ che corrispondono alle tre colonne della matrice ridotta contenenti i tre elementi speciali. Essi sono $(1, 3, 2)$, $(1, 1, -1)$ e $(-1, -1, 0)$.

Caso $\mathbf{k \neq 0, -1}$. Si ha dim $Kerf = 1$, dim $Imf = 3$. Per trovare una base di $Kerf$ é sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + z - t = 0 \\ ky + (k-2)z + (k+2)t = 0 \\ -(1+k)z = 0 \end{cases} .$$

Pertanto una base di $Kerf$ é data dal vettore $(1, -\frac{k+2}{k}, 0, 1)$. Una base di Imf é data dai tre vettori le cui componenti sono le colonne di $M_f^{E,E}$ che corrispondono alle tre colonne della matrice ridotta contenenti gli elementi speciali. Essi sono $(1, 3, 2)$, $(0, k, k)$ e $(1, 1+k, -1)$.

Caso $\mathbf{k = -1}$. Si ha dim $Kerf = 2$, dim $Imf = 2$. Per trovare una base di $Kerf$ é sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + z - t = 0 \\ -y - 3z + t = 0 \end{cases} .$$

Pertanto $Kerf = \{(-z + t, -3z + t, z, t) \mid t, z \in \mathbb{R}\}$. Una base di $Kerf$ é $\{(-1, -3, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$. Una base di Imf é data dai due vettori le cui componenti sono le colonne di $M_f^{E,E}$ che corrispondono alle due colonne della matrice ridotta contenenti gli elementi speciali. Essi sono, per esempio, $(1, 3, 2)$ e $(0, -1, -1)$.

15. Siano $A = [\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)]$ e $B = [\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, -1), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 2, 2), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 2), \mathbf{u}_4 = (0, 0, 0, 1)]$ basi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, rispettivamente. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita mediante le immagini dei vettori della base A, dalle assegnazioni

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) = (2, 2, 0, 1)_B \\ f(\mathbf{v}_2) = (1, 2, 5, 3)_B \\ f(\mathbf{v}_3) = (2, 2, 4, 0)_B \end{cases}$$

Determinare la dimensione, le equazioni ed una base di $Kerf$ e Imf.

SVOLGIMENTO.

$$M_f^{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pertanto $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & x \\ 2 & 2 & 2 & y \\ 0 & 5 & 4 & z \\ 1 & 3 & 0 & t \end{array}\right)$ $\begin{array}{c} \boxed{R_2 \to -R_2 + R_1} \\ \boxed{R_4 \to -2R_4 + R_1} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 0 & x-y \\ 0 & 5 & 4 & z \\ 0 & -5 & 2 & x-2t \end{array}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{c} R_3 \to 5R_2 + R_3 \end{array}} \quad \boxed{R_4 \to -5R_2 + R_4} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 4 & 5(x-y)+z \\ 0 & 0 & 2 & -4x+5y-2t \end{array}\right) \boxed{R_4 \to -2R_4 + R_3} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 4 & 5(x-y)+z \\ 0 & 0 & 0 & 13x-15y+4t+z \end{array}\right).$$ Pertanto Imf ha dimensione 3 ed equazione $13x - 15y + 4t + z = 0$. Una base di Imf é data dai vettori $(2,2,0,1)_B$, $(1,2,5,3)_B$ e $(2,2,4,0)_B$. Il nucleo $Kerf$ ha dimensione 0. Quindi $Kerf = \{(0,0,0)_A\}$.

16. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito mediante le immagini dei vettori della base $A = [\mathbf{v}_1 = (1,2,3), \mathbf{v}_2 = (0,1,2), \mathbf{v}_3 = (1,0,1)]$, dalle assegnazioni

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) = (2,4,6)_E \\ f(\mathbf{v}_2) = (1,2,5)_E \\ f(\mathbf{v}_3) = (2,2,4)_E \end{cases}$$

Determinare la dimensione, le equazioni ed una base di $Kerf$ e Imf.

17. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x,y,z) = (x + 2y + (1+k)z, ky, x + 2kz)$. Al variare del parametro reale k, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

SVOLGIMENTO. Si ha, denotando con E la base canonica,

$$M_f^{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+k \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2k \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$M_f^{E,E} \; \boxed{R_3 \to R_3 - R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & -2 & k-1 \end{pmatrix}.$$

Per $k = 0$, la matrice ha rango 2 e diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $dim\, Kerf = 3 - 2 = 1$ e $dim\, Imf = 2$. Per trovare una base di $Kerf$ é sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases}.$$

Pertanto $Ker f = \{(0, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é data dal vettore $(0, 1, -2)$. Una base di $Im f$ é data dai due vettori le cui componenti sono le colonne di $M_f^{E,E}$ che corrispondono alle due colonne della matrice ridotta contenenti i due elementi speciali. Essi sono, per esempio, $(1, 0, 1)$ e $(2, 0, 0)$.

Per $k = 1$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \boxed{R_3 \to R_3 + 2R_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $dim\, Ker f = 3 - 2 = 1$ e $dim\, Im f = 2$. Per trovare una base di $Ker f$ é sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Pertanto $Ker f = \{(-2z, 0, z) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é data dal vettore $(-2, 0, 1)$. Una base di $Im f$ é data dai due vettori le cui componenti sono le colonne di $M_f^{E,E}$ che corrispondono alle due colonne della matrice ridotta contenenti i due elementi speciali. Essi sono, per esempio, $(1, 0, 1)$ e $(2, 1, 0)$.

Per $k \neq 0, 1$, $M_f^{E,E}$ ha rango 3. Quindi $dim\, Ker f = 3 - 3 = 0$, cioè $Ker f = \{\mathbf{0}\}$, e $dim\, Im f = 3$, quindi $Im f = \mathbb{R}^3$ e una sua base può essere la stessa base canonica E.

18. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (x + z, 2x + ky + 2z, x + (1 + k)y)$. Al variare del parametro reale k, determinare $Ker f$, $Im f$ e una loro base.

    SVOLGIMENTO. Si ha, denotando con E la base canonica,

$$M_f^{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & 2 \\ 1 & 1+k & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$M_f^{E,E} \boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1+k & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k = 0$, la matrice ha rango 2 e diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $dim\,Kerf = 3 - 2 = 1$ e $dim\,Imf = 2$. Per trovare una base di $Kerf$ é sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Pertanto $Kerf = \{(x, -x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é data dal vettore $(1, -1, -1)$. Una base di Imf é data dai due vettori le cui componenti sono le colonne di $M_f^{E,E}$ che corrispondono alle due colonne della matrice ridotta contenenti i due elementi speciali. Essi sono, per esempio, $(1, 2, 1)$ e $(1, 2, 0)$.

Per $k \neq 0$, $M_f^{E,E}$ ha rango 3. Quindi $dim\,Kerf = 3 - 3 = 0$, cioè $Kerf = \{\mathbf{0}\}$, e $dim\,Imf = 3$, quindi $Imf = \mathbb{R}^3$ e una sua base può essere la stessa base canonica E.

19. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (kx - ky + 2z, -x + y + kz, -kx + z)$. Al variare del parametro reale k, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

SVOLGIMENTO. Si ha, denotando con E la base canonica,

$$M_f^{E,E} = \begin{pmatrix} k & -k & 2 \\ -1 & 1 & k \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conviene distinguere subito i casi $k = 0$ e $k \neq 0$.

Sia $k = 0$.

$$M_f^{E,E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{R_3 \to R_3 - \tfrac{1}{2}R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k = 0$, la matrice ha rango 2. Quindi $dim\,Kerf = 3 - 2 = 1$ e $dim\,Imf = 2$. Per trovare una base di $Kerf$ é sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}.$$

Pertanto $Kerf = \{(x, x, 0) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base é data dal vettore $(1, 1, 0)$. Una base di Imf é data dai due vettori le cui componenti sono le colonne di $M_f^{E,E}$ che corrispondono alle due colonne della matrice ridotta contenenti i due elementi speciali. Essi sono, per esempio, $(0, -1, 0)$ e $(2, 0, 1)$.

Per $k \neq 0$, si ha

$$M_f^{E,E} \quad \boxed{R_2 \to R_2 + \frac{1}{k}R_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} k & -k & 2 \\ 0 & 0 & \frac{k^2+2}{k} \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$M_f^{E,E}$ ha rango 3. Quindi dim$Kerf = 3 - 3 = 0$, cioè $Kerf = \{\mathbf{0}\}$, e dim$Imf = 3$, quindi $Imf = \mathbb{R}^3$ e una sua base può essere la stessa base canonica E.

20. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (kx - 2y + 3z, 6x - (1 + k)y - z, x - z, y - kz)$. Determinare, al variare del parametro reale k, $Kerf$, Imf e una loro base.

21. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (3x - y + 2kz, kx + y + 4z, (k - 3)x + y + z)$. Determinare, al variare del parametro reale k, $Kerf$, Imf e una loro base.

22. Sia
$$\begin{pmatrix} h & 2h & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ h & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
la matrice associata, rispetto le basi canoniche, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Determinare, al variare del parametro reale h, $Kerf$ e Imf e una loro base.

23. Sia
$$\begin{pmatrix} h & h & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & h & 1 \end{pmatrix}$$
la matrice associata, rispetto le basi canoniche, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Determinare, al variare del parametro reale h, $Kerf$ e Imf e una loro base.

24. Sia
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & h \\ 2 & h & 3 & 2 \\ -1 & 2h & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
la matrice associata, rispetto le basi canoniche, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Al variare del parametro reale h, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

25. Studiare, al variare di $h \in R$, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita rispetto le basi canoniche mediante la seguente matrice:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & h \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & h \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

26. Studiare, al variare di $h \in R$, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita rispetto le basi canoniche mediante la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & h \\ -1 & h & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

27. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (3x - ky + 2z, 6x + (1 - 2k)y + (4 + k)z, -3x + ky + (k^2 - k - 2)z)$. Al variare del parametro reale k, determinare $Ker\, f$, $Im\, f$ e una loro base.

28. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (x + 2y + (1 + k)z, ky, x + 2kz)$. Al variare del parametro reale k, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

29. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (x + z, 2x + ky + 2z, x + (1 + k)y)$. Al variare del parametro reale k, determinare $Kerf$, Imf e una loro base.

30. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y)$. Verificare che $A = [\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)]$ é una base di $\mathbb{R}^3$ e $B = [\mathbf{w}_1 = (1, 3), \mathbf{w}_2 = (2, 2)]$ é una base di $\mathbb{R}^2$. Determinare $M_f^{A,B}$.

SVOLGIMENTO. A e B sono due basi in quanto le matrici $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ hanno rispettivamente rango 3 e 2. Per determinare $M_f^{A,B}$ usiamo due metodi differenti.

PRIMO METODO. Si ha $f(\mathbf{v}_1) = (3, -1)$, $f(\mathbf{v}_2) = (-1, -1)$ e $f(\mathbf{v}_3) = (3, 0)$. Adesso bisogna trovare le componenti dei vettori $(3, -1)$, $(-1, -1)$ e $(3, 0)$ rispetto la base B. Procedendo in modo simile all'Esercizio 19, si ha

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = (3, -1, 3) \\ 3\alpha + 2\beta = (-1, -1, 0) \end{cases}$$

e quindi $\alpha = (-2, 0, -\frac{3}{2})$ e $\beta = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$. Da cui segue

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) = -2\mathbf{w}_1 + \frac{5}{2}\mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{v}_2) = -\frac{1}{2}\mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{v}_3) = -\frac{3}{2}\mathbf{w}_1 + \frac{9}{4}\mathbf{w}_2 \end{cases}$$

e $M_f^{A,B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$.

SECONDO METODO. $M_f^{E_3,E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si ha

$$M_f^{A,B} = P^{E_2,B} M_f^{E_3,E_2} P^{A,E_3}.$$

La matrice di cambiamento di base (dalla base A alla base E_3) é immediata

$$P^{A,E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo la matrice di cambiamento di base (dalla base E_2 alla base B)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right), \text{ quindi}$$

$$P^{E_2,B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$M_f^{A,B} = P^{E_2,B} M_f^{E_3,E_2} P^{A,E_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

31. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y)$. Verificare che $A = [\mathbf{v}_1 = (2, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)]$ é una base di $\mathbb{R}^3$ e $B = [\mathbf{w}_1 = (2, 1), \mathbf{w}_2 = (-1, 1)]$ é una base di $\mathbb{R}^2$. Determinare $M_f^{A,B}$.

32. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita, rispetto le basi canoniche, dalle equazioni $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y)$. Verificare che $A = [\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)]$ é una base di $\mathbb{R}^3$ e $B = [\mathbf{w}_1 = (1, 3), \mathbf{w}_2 = (2, 2)]$ é una base di $\mathbb{R}^2$. Determinare $M_f^{A,B}$.

33. Sia $A = [\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)]$ una base in $\mathbb{R}^3$, e $B = [\mathbf{w}_1 = (1, 3), \mathbf{w}_2 = (2, 2)]$ una base in $\mathbb{R}^2$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita dall'equazione:
$$f\left((x, y, z)_A\right) = (x + 2y - z, x - y)_B$$

rispetto le basi A e B. Determinare $M_f^{E_3,E_2}$.

SVOLGIMENTO.
PRIMO METODO. Bisogna determinare $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$, $f(\mathbf{e}_3)$ nella base E_2. Abbiamo due possibilità:

(a) Determiniamo $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ nella base A:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1,0,0) = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \beta_1\mathbf{v}_2 + \gamma_1\mathbf{v}_3 = \alpha_1(1,2,2) + \beta_1(-1,0,0) + \gamma_1(1,1,0) = \\ &= (\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1, 2\alpha_1 + \gamma_1, 2\alpha_1),\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_2 = (0,1,0) = \alpha_2\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \gamma_2\mathbf{v}_3 = (\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2, 2\alpha_2 + \gamma_2, 2\alpha_2),$$

$$\mathbf{e}_3 = (0,0,1) = \alpha_3\mathbf{v}_1 + \beta_3\mathbf{v}_2 + \gamma_3\mathbf{v}_3 = (\alpha_3 - \beta_3 + \gamma_3, 2\alpha_3 + \gamma_3, 2\alpha_3).$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_i - \beta_i + \gamma_i = (1,0,0) \\ 2\alpha_i + \gamma_i = (0,1,0) \\ 2\alpha_i = (0,0,1)\end{array}\right. ,$$

$$\alpha_i = \left(0,0,\frac{1}{2}\right), \quad \beta_i = \left(-1,1,-\frac{1}{2}\right), \quad \gamma_i = (0,1,-1),$$

$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = \dfrac{1}{2},\ \beta_1 = -1,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = -\dfrac{1}{2},\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1,\ \gamma_3 = -1.$

Abbiamo quindi

$$\mathbf{e}_1 = (0,-1,0)_A, \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,1)_A, \quad \mathbf{e}_3 = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)_A.$$

Essendo $f\left((x,y,z)_A\right) = (x+2y-z, x-y)_B$, abbiamo

$f(\mathbf{e}_1) = f\left((0,-1,0)_A\right) = (-2,1)_B,$

$f(\mathbf{e}_2) = f\left((0,1,1)_A\right) = (1,-1)_B,$

$f(\mathbf{e}_3) = f\left(\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)_A\right) = \left(\frac{1}{2},1\right)_B.$

Ora, determiniamo $(-2,1)_B$, $(1,-1)_B$ e $\left(\frac{1}{2},1\right)_B$ in base E_2:

$(-2,1)_B = -2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = -2(1,3) + (2,2) = (0,-4) = (0,-4)_{E_2},$

$(1,-1)_B = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = (1,3) - (2,2) = (-1,1) = (-1,1)_{E_2}.$

$\left(\frac{1}{2},1\right)_B = \frac{1}{2}\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \frac{1}{2}(1,3) + (2,2) = \left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)_{E_2}.$

In conclusione

$$M_f^{E_3,E_2} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ -4 & 1 & \frac{7}{2}\end{array}\right).$$

(b) Invece di determinare $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in base A come fatto prima, possiamo determinare direttamente $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$ ed $f(\mathbf{e}_3)$ nel seguente modo:

$$f(1,2,2) = f(\mathbf{v}_1) = f\left((1,0,0)_A\right) = (1,1)_B,$$

$$f(-1,0,0) = f(\mathbf{v}_2) = f\left((0,1,0)_A\right) = (2,-1)_B,$$

$$f(1,1,0) = f(\mathbf{v}_3) = f\left((0,0,1)_A\right) = (-1,0)_B,$$

Dalle precedenti relazioni, essendo

$$f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) = f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_2) + 2f(\mathbf{e}_3),$$

$$f(\mathbf{v}_2) = f(-\mathbf{e}_1) = -f(\mathbf{e}_1),$$

$$f(\mathbf{v}_3) = f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2),$$

abbiamo

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_2) + 2f(\mathbf{e}_3) = (1,1)_B \\ -f(\mathbf{e}_1) = (2,-1)_B \\ f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = (-1,0)_B \end{cases},$$

che ha soluzioni

$$f(\mathbf{e}_1) = (-2,1)_B, \quad f(\mathbf{e}_2) = (1,-1)_B, \quad f(\mathbf{e}_3) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)_B.$$

Per determinare $(-2,1)_B$, $(1,-1)_B$ e $\left(\frac{1}{2},1\right)_B$ in base E_2 si proceda come in (a).

SECONDO METODO. Si ha

$$M_f^{E_3,E_2} = P^{B,E_2} M_f^{A,B} P^{E_3,A}.$$

La matrice di cambiamento di base (dalla base B alla base E_2) é immediata

$$P^{B,E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo la matrice di cambiamento di base (dalla base E_3 alla base A):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right), \text{ quindi } P^{E_3,A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_f^{E_3,E_2} = P^{B,E_2} M_f^{A,B} P^{E_3,A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ -4 & 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

34. Siano $A = [\mathbf{v}_1 = (1,2,2), \mathbf{v}_2 = (-1,0,0), \mathbf{v}_3 = (1,1,0)]$, $C = [\mathbf{u}_1 = (-1,1,1), \mathbf{u}_2 = (0,2,0), \mathbf{u}_3 = (0,0,1)]$,
$B = [\mathbf{w}_1 = (1,3), \mathbf{w}_2 = (2,2)]$,
$D = [\mathbf{z}_1 = (1,2), \mathbf{z}_2 = (0,1)]$.

(a) Verificare che A e C sono due basi in $\mathbb{R}^3$ e che B e D sono due basi in $\mathbb{R}^2$.

(b) Assegnata l'applicazione f avente equazione

$$f((x,y,z)_A) = (x+2y-z, x-y)_B,$$

determinare $M_f^{C,D}$.

SVOLGIMENTO. Il quesito 1 si verifica facilmente. Risolviamo il quesito 2. Determiniamo $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ nella base A:

$\mathbf{u}_1 = (-1,1,1) = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \beta_1\mathbf{v}_2 + \gamma_1\mathbf{v}_3 = \alpha_1(1,2,2) + \beta_1(-1,0,0) + \gamma_1(1,1,0) = (\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1, 2\alpha_1 + \gamma_1, 2\alpha_1)$,

$\mathbf{u}_2 = (0,2,0) = \alpha_2\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \gamma_2\mathbf{v}_3 = (\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2, 2\alpha_2 + \gamma_2, 2\alpha_2)$,

$\mathbf{u}_3 = (0,0,1) = \alpha_3\mathbf{v}_1 + \beta_3\mathbf{v}_2 + \gamma_3\mathbf{v}_3 = (\alpha_3 - \beta_3 + \gamma_3, 2\alpha_3 + \gamma_3, 2\alpha_3)$,

$$\begin{cases} \alpha_i - \beta_i + \gamma_i = (-1,0,0) \\ 2\alpha_i + \gamma_i = (1,2,0) \\ 2\alpha_i = (1,0,1) \end{cases},$$

$$\alpha_i = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad \beta_i = \left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right), \quad \gamma_i = (0,2,-1)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2},\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = \frac{1}{2},\ \beta_1 = \frac{3}{2},\ \beta_2 = 2,\ \beta_3 = -\frac{1}{2},\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 2,\ \gamma_3 = -1.$$

Abbiamo quindi

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)_A, \quad \mathbf{u}_2 = (0,2,2)_A, \quad \mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)_A.$$

Essendo $f((x,y,z)_A) = (x+2y-z, x-y)_B$, abbiamo

$f(\mathbf{u}_1) = f\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)_A\right) = \left(\frac{7}{2}, -1\right)_B,$

$f(\mathbf{u}_2) = f\left((0, 2, 2)_A\right) = (2, -2)_B,$

$f(\mathbf{u}_3) = f\left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)_A\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)_B.$

Ora, determiniamo $\left(\frac{7}{2}, -1\right)_B$, $(2, -2)_B$ e $\left(\frac{1}{2}, 1\right)_B$ in base D:

$\left(\frac{7}{2}, -1\right)_B = \frac{7}{2}(1, 3) - (2, 2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right) = \alpha_1\mathbf{z}_1 + \beta_1\mathbf{z}_2 = \alpha_1(1, 2) + \beta_1(0, 1) =$

$= (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1),$

$(2, -2)_B = 2(1, 3) - 2(2, 2) = (-2, 2) = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2),$

$\left(\frac{1}{2}, 1\right)_B = \frac{1}{2}(1, 3) + (2, 2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3)$

$$\begin{cases} \alpha_i = \left(\frac{3}{2}, -2, \frac{5}{2}\right) \\ 2\alpha_i + \beta_i = \left(\frac{17}{2}, 2, \frac{7}{2}\right) \end{cases},$$

$$\alpha_i = \left(\frac{3}{2}, -2, \frac{5}{2}\right), \quad \beta_i = \left(\frac{11}{2}, 6, -\frac{3}{2}\right).$$

Abbiamo quindi

$f(\mathbf{u}_1) = \left(\frac{7}{2}, -1\right)_B = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)_D$, $f(\mathbf{u}_2) = (2, -2)_B = (-2, 6)_D,$

$f(\mathbf{u}_3) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)_B = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)_D$. Pertanto

$$M_f^{C,D} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} & 6 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$