Tarea 1 (Viernes 6 de septiembre)
Galo Salvador Díaz Andrade

Problem 1. Identificar las dimensiones de las constantes λ, v, m y φ en la teoría de Klein-Gordon

$$S = \int d^2x[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)] \tag{1}$$

Con un potencial tipo sombrero mexicano:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \, , v^2 = \frac{m^2}{\lambda} \tag{2}$$

La densidad lagrangiana debe de tener unidades de energía sobre tiempo por distancia, ya que estamos en 1 + 1 dimensiones. A su vez estmos usando unidades naturales por lo que el tiempo tiene unidades de distancia. ϕ y v deben de tener las mismas unidades por lo tanto:

$$v^4\lambda = \frac{m^4}{\lambda} = \frac{[E]}{[L]^2} \tag{3}$$

Y de la densidad lagrangiana:

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \frac{[\phi]^2}{[L]^2} = \frac{[E]}{[L]^2} \tag{4}$$

Esto implica que $[\phi] = [E] = [v]$
Por lo tanto:

$$[v^4][\lambda] = [E]^4[\lambda] = \frac{[E]}{[L]^2} \tag{5}$$

Es decir $[\lambda] = \frac{1}{[L]^2[E]^3}$
y por lo tanto m:

$$\frac{[m]^4}{[\lambda]} = [m^4][E]^3[L]^2 = \frac{[E]}{[L]^2} \tag{6}$$

Entoces tenemos que:

$$[\phi] = [v] = [E] \, , [\lambda] = \frac{1}{[L]^2[E]^3} \, , [m] = \frac{1}{[E]^{1/2}} \tag{7}$$

Problem 2. Buscar las soluciones estáticas de la teoría de sine-Gordon

$$S = \int d^2x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{2m^4}{\lambda}\sin^2\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2m}\phi\right)\right] \tag{8}$$

En la solución estática $\phi = \phi(x)$

$$E(t_1 - t_2) = \int d^2x \left[+\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi)\right] = \int d^2x \left[+\frac{1}{2}\dot{x}^2 - U(x)\right] \tag{9}$$

Aplicando conservación de energía y colocandonos incialmente en un mínimo de energía E = 0

$$E = \frac{1}{2}\dot{x} + U(x) = \frac{1}{2}\phi' - V(\phi) = 0 \tag{10}$$

Esto nos deja con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2V(\phi)}\,, \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{\pm 1}{\sqrt{2V(\phi)}} d\phi = x - x_0 \tag{11}$$

Sustituyendo el potencial de sine-Gordon:

$$\int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{\pm\sqrt{\lambda}}{2m^2} \frac{1}{sin(\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{2m})} d\phi = x - x_0 \tag{12}$$

Tomamos $x_0 = 0$ y realizamos la sustitución $s = \frac{\sqrt{\lambda}\phi}{2m}$

$$\int_0^{s(x)} \frac{-1}{m\sin(s)} ds = \frac{1}{m} \ln\left|\tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{4m}\right)\right| = x \tag{13}$$

Despejamos ϕ:

Tomamos exponentes de ambos lados, tomando el caso positivo

$$e^{xm} = \tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{4m}\right) \tag{14}$$

$$\frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \arctan(e^{xm}) = \phi \tag{15}$$

Para la energía necesitamos ϕ'

$$\phi' = \frac{4m^2 \mathrm{e}^{mx}}{\sqrt{\lambda}\,(\mathrm{e}^{2mx} + 1)} \tag{16}$$

$$E = \int \frac{1}{2}\left(\frac{4m^2\mathrm{e}^{mx}}{\sqrt{\lambda}(1 + \mathrm{e}^{2mx})}\right)^2 = \int \frac{8m^4\mathrm{e}^{2mx}}{\lambda(1 + \mathrm{e}^{2mx})^2} dx = -\frac{4m^3}{\lambda\,(\mathrm{e}^{2mx} + 1)} \tag{17}$$

Evaluando desde menos infinito a inifinito:

$$E = -\frac{4m^3}{\lambda\,(\mathrm{e}^{2mx} + 1)}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{4m^3}{\lambda} \tag{18}$$

La ecuación para una onda propagandose a v_0

$$\phi = \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \arctan\!\left(e^{\gamma(x + v_0 t)m}\right) \tag{19}$$

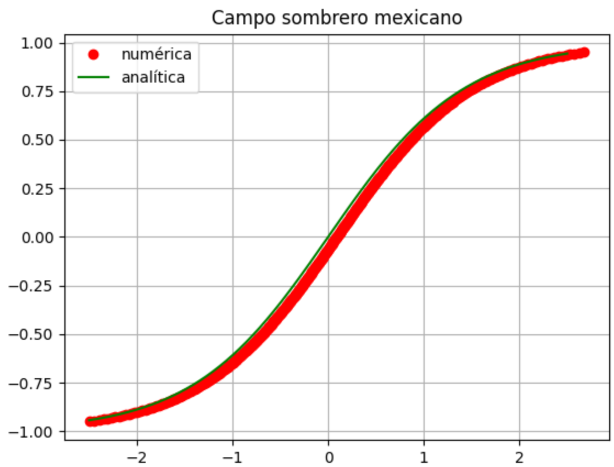

Figure 1: Campo para el sombrero mexicano

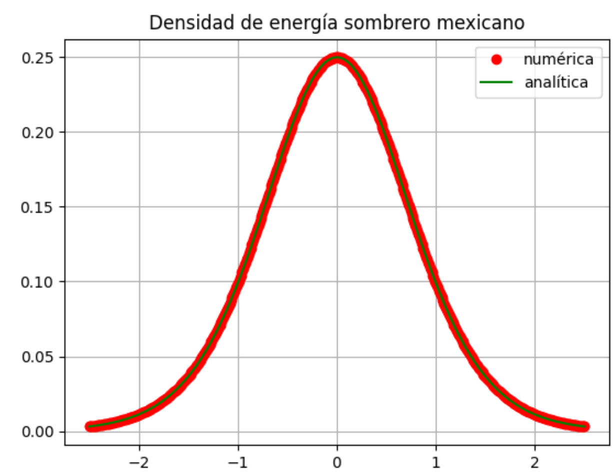

Figure 2: Densidad de energía para el sombrero mexicano

Problem 3. Resolver numéricamente la ecuación del movimiento para las soluciones estáticas de la teoría de Klein-Gordon con potencial del tipo sombrero mexicano, y sine-gordon. A su vez graficar la desnidad de energía y la masa total de los objetos. Compara con las soluciones analíticas.

La energía total obtenida númericamente para el sombrero mexicano desde $x_0 = -10$ a $x_1 = 10$ es de $0.9428 \approx \frac{2\sqrt{2}}{3}$ que es el resultado analítico.
Para Sine-Gordon

La energía total obtenida númericamente para Sine-Gordon desde $x_0 = -10$ a $x_1 = 10$ es de $3.999 \approx 43$ que es el resultado analítico. Recordar que estamos haciendo todos los parametros iguales a 1

Problem 4. Escribir un código que les permita evolucionar en el tiempo la ecuación de Klein-Gordon.

Problem 5. Para la teoría libre, la teoría $\lambda_\varphi 4$, el potencial mexicano y la teoría de sine-Gordon, evolucionar datos iniciales arbitrarios y ver qué sucede. De los que eligieron, ¿hay alguno que evolucione sin dispersarse?

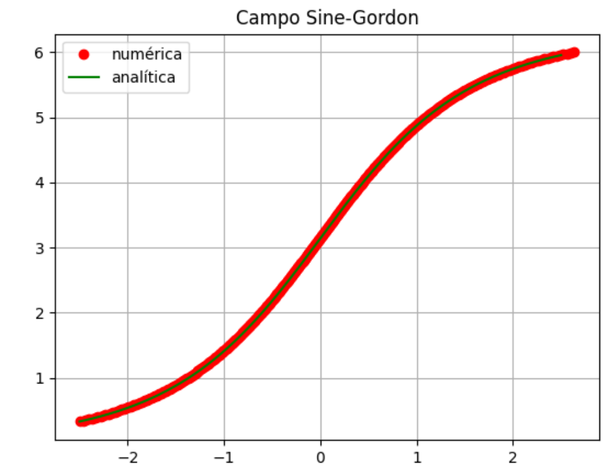

Figure 3: Campo para Sine-Gordon

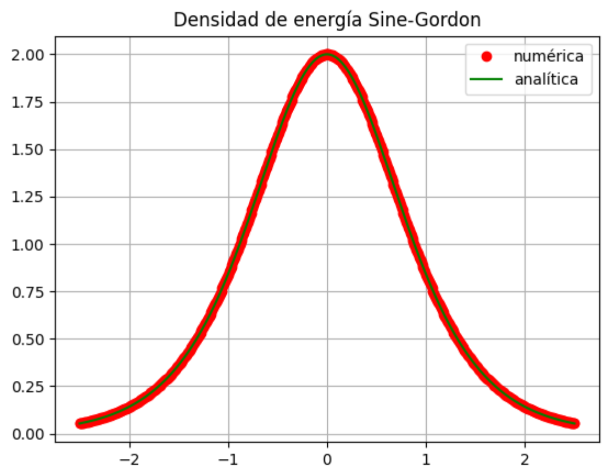

Figure 4: Densidad de energía para Sine-Gordon

- Teoría Libre No parece haber dispersión, la forma inicial tiende a mantenerse, cabe destacar que esto solo parece ocurrir en el caso en el que la velocidad inicial es 0, para el caso en el que las condiciones inciales de velocidad son diferente de cero hay excepciones. Se usó una función $\sin$ y esta se dividió en dos ondas cada una viajando en dirección contraria.

- Klein Gordon Se evolucionó una gaussiana y una funcion racional de la forma $\frac{1}{x^2+1}$, las dos presentan dispersión, no se logró encontrar una condición inicial que no la presentara.

- Teoría $\lambda_\varphi 4$ En un principio parecía que gran parte de las soluciones parecen romperse completamente muy rapidamente, pero esto era debido a que los límites en el eje y eran muy bajos, se subieron los límites en y, las funciones se estabilazaron, pero sigue habiendo dispersión.

- Sombrero mexicano, tome una función racional de la forma $\frac{1}{x^4+1}$ pero con las fronteras fijas en 1 y -1, que son las condiciones necesarias para este potencial, y pues como es de esperarse la función se rompía totalmente. Las condicines de la forma $\tanh(x)$ parecen estables como era de esperarse, hay pequeñas variaciones en la forma, pero probablemnte provienen de errores numéricos. Tambien se probo con una función Heaviside y esta si se mostraba inestable, aunque parecia poco a poco querer evolucionar hacia una $\tanh(x)$

- Sine Gordon. Primero se ultilizó una gaussiana, la cual se fué dispersando, para luego aumentar su amplitud de forma repentina. A su vez la velocidad de propagación empieza muy pequeña y va creciendo, hay que considerar tambien que la gussiana no cumple las condiciones de frontera de 0 cuando $x = 0, x \to -\infty$ y $x = 2\pi, x \to +\infty$. Para la solución de un solitón la solución parece estable, pero al ser una función que depende de una exponencial los errores númericos se acomulan rapidamente. Por lo tanto requiere de una mayor cantidad de nodos y de fronteras muy alejadas y aun asi tiende a romperse tras dejar correr cierto tiempo.

Problem 6. . La condiciones no presentan dispersión y representan un kink y un antikink respectivamente, al aumentar v_0 el kink comienza a moverse hacia la derecha cada vez a mayor velocidad, si $v_0 = 0$ es estático. El antikink es similar, solo que este tiene las condiciones de frontera en infinito invertidas.
El perfil de los campos:

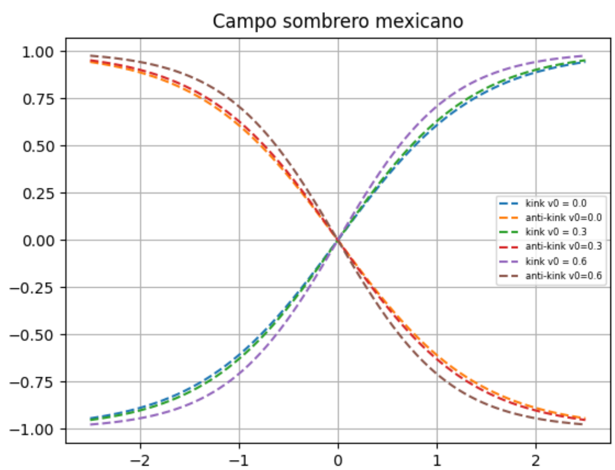

Figure 5: Perfil de los campos.

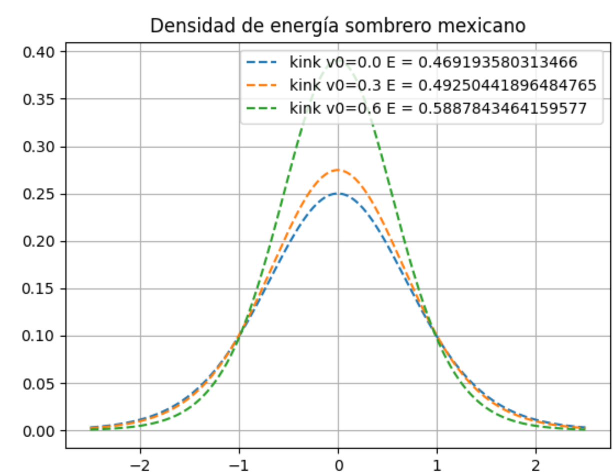

Figure 6: Perfil de los campos.

Tanto el antikink como el el kink tienen la misma densidad de energía y coinciden con las expresiones analíticas. Al aumentar v_0 la energía total aumenta en concordancia con la expresión analítica. Al momento de evolucionar temporalmente la densidad de energía ambas se mueven hacia la derecha y tienen un comportamiento similar, la energía total varia mucho a cada instante pero esto se debe al número de nodos ultilizados.

Problem 7. La solución no se rompe totalmente ante la perturbación, pero, las fluctuaciones si se ven significativamente incrementadas respecto a la solución no perturbada.

Problem 8. Se puede observar que si le ponemos la velocidad inicial de un antikink a un kink y viceseversa lo que provoca es que se cambia la dirección del movimiento de la densidad de energía. Usando esto se pueden colisionar dos solitones. Las ondas no sobreviven en lo absoluto, esto se puede ver facilmente notando que la suma de un kink y un anti-kink ya no cumple las condiciones de frontera, pues esta suma es 0 en $\pm\infty$. No se cumple el principio de superposisción.