1. Исследовать на монотонность и ограниченность 4 последовательности, найти 5-й по счету член

I. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$

a. $a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - n - 1 - 2^n + n = 2^n(2-1) - 1 =$

$= 2^n - 1 > 0 \ \forall n \in [1; +\infty) \Rightarrow$ монотонно возр.

в. $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n - n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2^n - n)\frac{2^n+n}{2^n+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{2n}-n^2}{2^n+n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n(2^n - \frac{n^2}{2^n}\to 0)}{2^n(1+\frac{n}{2^n}\to 0)} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty \Rightarrow$ неогр.

c. $a_5 = 2^5 - 5 = 27$

II. $\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$

a. $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{1-n-1} - \frac{1}{1-n} = \frac{1-n+n}{n(n-1)} =$

$= \frac{1}{n(n-1)} > 0 \ \forall n \in [2; +\infty) \Rightarrow$ монотонно возр.

в. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\to 0}{\frac{1}{n}\to 0 - 1} = 0 \Rightarrow$ ограниченна

c. $b_5 = \frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4}$

III $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n} = \sqrt{2n} - 1$

a. $C_{n+1} - C_n = \sqrt{2(n+1)} - 1 - \sqrt{2n} + 1 =$

$= \sqrt{2(n+1)} - \sqrt{2n} > 0 \ \forall n \in [1; +\infty)$, т.к

степенная ф-ция монотонно возрастает на этом интервале => последовательность монотонно возрастает

в. $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{2n} - 1) = +\infty \Rightarrow$ неогр.

c. $C_5 = \sqrt{10} - 1$

IV $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + 1$

a. $d_{n+1} - d_n = \frac{1}{(n+1)^2} + 1 - \frac{1}{n^2} - 1 =$

$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2} = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 0$

$\forall n \in [1; +\infty) \Rightarrow$ монотонно убывает

в. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + 1\right) = 1 \Rightarrow$ ограниченна

c. $d_5 = \frac{1}{25} + 1 = 1\frac{1}{25}$

2. Найти 12-й член неявно заданной последовательности:

$a_1 = 128,\ a_{n+1} - a_n = 6$

Это арифметическая прогрессия, причём $d = 6$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$. Тогда:

$a_{12} = 128 + 11 \cdot 6 = 128 + 66 = 194$