

## Тема 7. "Ряды"

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д'Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = e^1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \text{сходится} \end{aligned}$$

2. Исследовать на сходимость, используя признак Коши:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{ряд сходится} \end{aligned}$$

3. Исследовать на сходимость, используя признак

Лейбница:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n}$

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n(1 + \frac{\ln n}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$b. |a_n| = \frac{1}{n + \ln n}; |a_{n+1}| = \frac{1}{n+1 + \ln(n+1)}$$

$$|a_{n+1}| < |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{ряд сходится}$$



4. Посмотреть на сходимость, используя признак Раабе:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \left( \left( \frac{3}{2} \right)^n \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} - 1 \right) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \left( \frac{3^n \cdot 2^{n+1} - 2^n \cdot 3^{n+1}}{2^n \cdot 3^{n+1}} \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \left( \frac{6^n \cdot 2 - 6^n \cdot 3}{6^n \cdot 3} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \frac{6^n \cdot (-1)}{6^n \cdot 3} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{3} n \right) = -\infty < -1 \Rightarrow \text{ряд сходится}\end{aligned}$$

5. Разложить ф-цию по Тейлору в точке:

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln 16a^2 + \frac{2}{a}(x-a) - \frac{1}{a^2}(x-a)^2 + \frac{2}{3} \frac{1}{a^3}(x-a)^3 - \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{a^4}(x-a)^4 + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{a^k}(x-a)^k = \\ &= \ln 16a^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k \cdot a^k} (x-a)^k = \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k} (x-1)^k\end{aligned}$$