

Тема: „Производные ф-ций нескольких переменных“

1. Найти обл. опреф. ф-ции:

$$z = \sqrt{1-x^3} + \ln(y^2-1)$$

$$1-x^3 \geq 0 \Rightarrow x^3 \leq 1 \Rightarrow x \leq 1$$

$$y^2-1 > 0 \Rightarrow y^2 > 1 \Rightarrow y \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

2. Найти производные 1-го порядка ф-ции:

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$\frac{dz}{dx} = 3\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \frac{1}{x \ln y}$$

$$\frac{dz}{dy} = -3\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \frac{\ln x}{y \ln^2 y}$$

3. Найти полный дифференциал ф-ции в точке (1; 1)

$$z = \sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2y - \frac{\sin \frac{x}{y}}{y}}{2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} = \frac{2y^2 - \sin \frac{x}{y}}{2y\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} = \frac{2 - \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2x + \frac{x \sin \frac{x}{y}}{y^2}}{2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} = \frac{2 + \sin t}{2\sqrt{2 + \cos t}}$$

$$dz = \frac{2 - \sin t}{2\sqrt{2 + \cos t}} dx + \frac{2 + \sin t}{2\sqrt{2 + \cos t}} dy$$

4. Исследовать на экстремумы ф-цию:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + y - 6 = 0 \\ \frac{dz}{dy} = 2y + x - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ 12 - 4x + x - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2 z}{dx dy} = 1, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow \text{сдв экстремумы}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} > 0 \Rightarrow \text{минимум}$$

(1; 4) - точка минимума