

## Тема "Предел ф-ции"

1. Предложить пример ф-ции не имеющей предела в нуле и в бесконечностях.

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} + \sin x$$

$\sin x$  не имеет пределов в бесконечностях.

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow$$

$\sin \frac{1}{x}$  также не имеет пределов в нуле

2. Привести пример ф-ции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней

$\operatorname{sgn}(x)$  не имеет предела в 0, хотя определен в этой точке.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in [-\varepsilon, \varepsilon]: \operatorname{sgn}(x) = -1 \parallel \operatorname{sgn}(x) = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  предела в точке 0 не существует

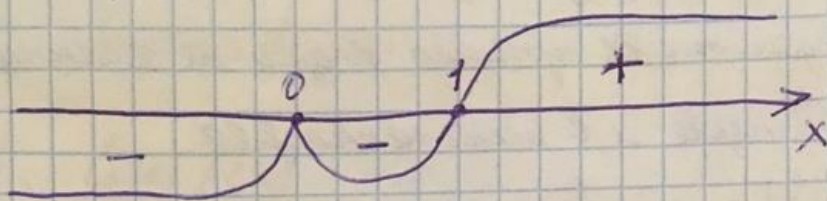
3. Исследовать  $f(x) = x^3 - x^2$

а. Область опред. и обл. значений:  $(-\infty; +\infty)$

б. Нули ф-ции и их кратность:

$$x_{1,2} = 0, \quad x_3 = 1.$$

с. Врезки знакостоянства.



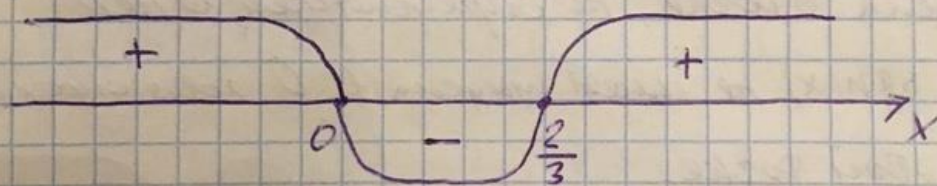
$$f(x) < 0 : x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$$

$$f(x) > 0 : x \in (1; +\infty)$$

д. Интервалы монотонности:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3} -$$

- Точки локального экстремумов



р-ция возрастает  $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$

р-ция убывает  $x \in (0, \frac{2}{3})$

е. Истинность р-ции

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2$$

р-ция общего вида.



в. Ограниченность ф-ции:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

ф-ция неограничена

г. Периодичность - ф-ция периодична

4. Найти пределы

$$а. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3x - 2)}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$б. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} =$$

$$\cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{3}{2}$$

## Тема "Теорема о пределах"

1. Найти пределы:

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2 \cdot 2x} = \frac{1}{2}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arcsin(x))}{\arcsin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arcsin(x))}{\arcsin(x)} = 1$$