Формални степенни редове

Нека K е поле.

Формален степенен ред:

$$F(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \dots$$
$$= \sum_{i \geq 0} s_i x^i$$

- $F(x) = \sum s_i x^i$ и $G(x) = \sum t_i x^i$ са равни, ако $s_i = t_i \quad \forall i$.

- Полиномите (т.е. елементите на $K[x]$) са формални степенни редове, при които коефициентите s_i са нула от някое място нататък.

- Събиране на формални степенни редове

$$F(x) + G(x) = \sum (s_i + t_i)\, x^i$$

- Умножение на формални степенни редове

$$F(x)\, G(x) = \sum r_i \cdot x^i ,$$

където $\quad r_k = \sum_{j=0}^{k} s_j\, t_{k-j}$.

- Нула

$$0 = \sum_{i \geq 0} 0 x^i$$

- Единица

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$$

- $\quad - F(x) = \sum (-s_i)\, x^i$

Thm. Формалните степенни редове над K образуват пръстен по отношение на така дефинираните операции. Този пръстен означаваме с

$$K[[x]].$$

- $K[x]$ е подпръстен на $K[[X]]$
- $K[X]$ е област на цялост (комутативен пръстен с 1 без делители на нулата)

Thm. Елементът $F(x)=\sum_{i\geq 0} s_i x^i$ е обратим в $K[[x]]$ тогава и само тогава, когато $s_0 \neq 0$.

$$F(x) = \sum s_i x^i \;; \quad G(x) = \sum t_i x^i$$

$$F(x)\,G(x) = s_0 t_0 + (s_1 t_0 + s_0 t_1)\,x + (s_2 t_0 + s_1 t_1 + s_0 t_2)\,x^2 + (s_3 t_0 + s_2 t_1 + s_1 t_2 + s_0 t_3)\,x^3 + \ldots$$

$$s_0 t_0 = 1$$
$$s_1 t_0 + s_0 t_1 = 0$$
$$s_2 t_0 + s_1 t_1 + s_0 t_2 = 0$$
$$\vdots$$

Ако $s_0 \neq 0$ то t_i еднозначно се определят от s_i.

<u>Пример.</u>

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$