

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

Контролно по Бързи алгоритми върху структури от данни
1.12.2022 г.

Задача 1. За свързан неориентиран претеглен граф $G = (V, E, c)$, $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ и път π в G , с $Cap_G(\pi)$ бележим максималната стойност на ребро, което участва в π , тоест:

$$Cap_G(\pi) = \begin{cases} \max_{e \in \pi} c(e) & \text{ако } \pi \text{ не е тривиален} \\ \infty & \end{cases}$$

Нека $cap_G : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ е функцията, която на всеки два върха $u, v \in V$ съпоставя най-малката стойност $Cap_G(\pi)$ измежду всички пътища π , които свързват u с v (в графа G), тоест:

$$cap_G(u, v) = \min\{Cap_G(\pi) \mid \pi : u \rightarrow_G^* v\}.$$

Разглеждаме следния проблем $Cap(G, u, v)$:

Дадено: $G = (V, E, c)$, $c : E \rightarrow \mathbb{R}$

Вход: $u, v \in V$

Изход: $cap_G(u, v)$

- (0,2 т.) Нека $s \in V$ е фиксиран връх, който е даден предварително. Да се предложи алгоритъм, който обработва входните данни $G = (V, E, c)$ и $s \in V$ за време $O(|V| \log |V| + |E|)$ и отговаря на всяка заявка от вида $Cap(G, s, v)$ за време $O(1)$.
- (0,4 т.) Да се предложи алгоритъм, който обработва входните данни $G = (V, E, c)$ за време $O(|V| \log |V| + |E|)$ и отговаря на всяка заявка от вида $Cap(G, u, v)$ за време $O(1)$.
- (0,5 т.) Да се предложи алгоритъм, който обработва входните данни $G = (V, E, c)$ за време $O(|V| \log |V| + |E|)$, използва $O(|V|)$ допълнителна памет и отговаря на всяка заявка от вида $Cap(G, u, v)$ за време $O(1)$.
- (0,5 т.) Да разгледаме следния динамичен вариант на проблема $Cap(G, u, v)$, който ще бележим с $Cap^+(G, u, v, u', v', x)$:

Дадено: $G = (V, E, c)$, $c : E \rightarrow \mathbb{R}$

Вход: $u, v, u', v' \in V$ и $x \in \mathbb{R}$

Изход: $cap_{G'}(u, v)$,

където $G' = (V, E', c')$ е графът с ребра $E' = E \cup \{u', v'\}$ и ценова функция $c' : E' \rightarrow \mathbb{R}$:

$$c'(e) = \begin{cases} c(e), & \text{ако } e \neq \{u', v'\} \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$

Да се предложи алгоритъм, който обработва входните данни $G = (V, E, c)$ за време $O(|V| \log |V| + |E|)$ и отговаря на всяка заявка от вида $Cap^+(G, u, v, u', v', x)$ за време $O(1)$.

Забележка: Алгоритмите, разглеждани по време на курса, могат да използват без допълнителна верификация.

Забележка: Обърнете внимание, че пътищата, посредством които се дефинира понятието $Cap_G(\pi)$ не са задължително прости. Тогава, лесно се съобразява, че $cap_G(v, v) = \min\{c(\{u, v\}) \mid \{u, v\} \in E\}$. Ако изясните това съображение и скицирате как то може да бъде имплементирано ефективно, може да се концентрирате на случая, когато при всички заявки върховете $u, v \in V$ са различни.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

Контролно по Бързи алгоритми върху структури от данни
1.12.2022 г.

Задача 1. За свързан неориентиран претеглен граф $G = (V, E, c)$, $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ и път π в G , с $Cap_G(\pi)$ бележим максималната стойност на ребро, което участва в π , тоест:

$$Cap_G(\pi) = \begin{cases} \max_{e \in \pi} c(e) & \text{ако } \pi \text{ не е тривиален} \\ \infty & \end{cases}$$

Нека $cap_G : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ е функцията, която на всеки два върха $u, v \in V$ съпоставя най-малката стойност $Cap_G(\pi)$ измежду всички пътища π , които свързват u с v (в графа G), тоест:

$$cap_G(u, v) = \min\{Cap_G(\pi) \mid \pi : u \rightarrow_G^* v\}.$$

Разглеждаме следния проблем $Cap(G, u, v)$:

Дадено: $G = (V, E, c)$, $c : E \rightarrow \mathbb{R}$

Вход: $u, v \in V$

Изход: $cap_G(u, v)$

- (0,2 т.) Нека $s \in V$ е фиксиран връх, който е даден предварително. Да се предложи алгоритъм, който обработва входните данни $G = (V, E, c)$ и $s \in V$ за време $O(|V| \log |V| + |E|)$ и отговаря на всяка заявка от вида $Cap(G, s, v)$ за време $O(1)$.
- (0,4 т.) Да се предложи алгоритъм, който обработва входните данни $G = (V, E, c)$ за време $O(|V| \log |V| + |E|)$ и отговаря на всяка заявка от вида $Cap(G, u, v)$ за време $O(1)$.
- (0,5 т.) Да се предложи алгоритъм, който обработва входните данни $G = (V, E, c)$ за време $O(|V| \log |V| + |E|)$, използва $O(|V|)$ допълнителна памет и отговаря на всяка заявка от вида $Cap(G, u, v)$ за време $O(1)$.
- (0,5 т.) Да разгледаме следния динамичен вариант на проблема $Cap(G, u, v)$, който ще бележим с $Cap^+(G, u, v, u', v', x)$:

Дадено: $G = (V, E, c)$, $c : E \rightarrow \mathbb{R}$

Вход: $u, v, u', v' \in V$ и $x \in \mathbb{R}$

Изход: $cap_{G'}(u, v)$,

където $G' = (V, E', c')$ е графът с ребра $E' = E \cup \{u', v'\}$ и ценова функция $c' : E' \rightarrow \mathbb{R}$:

$$c'(e) = \begin{cases} c(e), & \text{ако } e \neq \{u', v'\} \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$

Да се предложи алгоритъм, който обработва входните данни $G = (V, E, c)$ за време $O(|V| \log |V| + |E|)$ и отговаря на всяка заявка от вида $Cap^+(G, u, v, u', v', x)$ за време $O(1)$.

Забележка: Алгоритмите, разглеждани по време на курса, могат да използват без допълнителна верификация.

Забележка: Обърнете внимание, че пътищата, посредством които се дефинира понятието $Cap_G(\pi)$ не са задължително прости. Тогава, лесно се съобразява, че $cap_G(v, v) = \min\{c(\{u, v\}) \mid \{u, v\} \in E\}$. Ако изясните това съображение и скицирате как то може да бъде имплементирано ефективно, може да се концентрирате на случая, когато при всички заявки върховете $u, v \in V$ са различни.