Предшественик от определено ниво (част 1)

02.10.2020 г.

(Level Ancestor Query)

лектор: д-р Стефан Герджиков

<u>Коренови дървета</u>:
$T = (V, p, r)$, където V е множество от върхове, $p: \ V \to V$ е функция на бащите (функция на прекия/непосредствен предшественик, наричан още *баща*), а r е корена на дървото.

<u>Рекурсивна дефиниция на кореново дърво</u>:

- $T = \big(\{r\}, \emptyset, r\big)$ е кореново дърво
- Ако $T = (V, p, r)$ е кореново дърво и $u \in V$, $v \notin V$, то $T = (V \cup \{v\}, p', r)$ също е кореново дърво, където $p'(x) = \begin{cases} p(x), & x \neq v \\ u, & x = v \end{cases}$

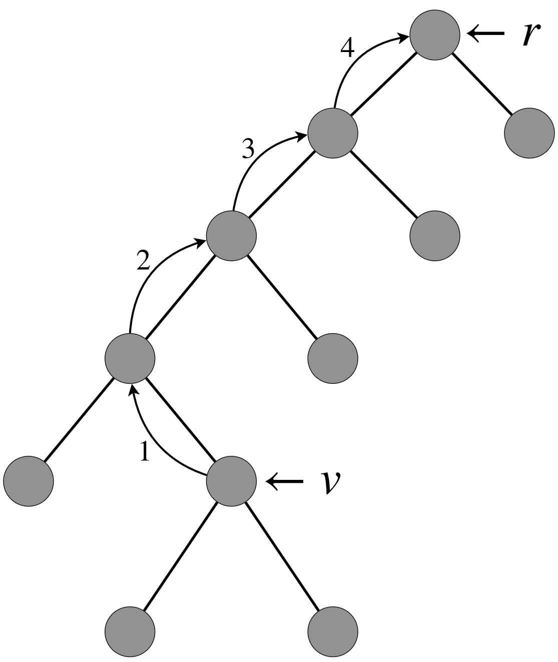
<u>Някои означения:</u>
За връх $u \in V$ на кореновото дърво $T = (V, p, r)$, ще означаваме с $d(u)$ дълбочината на върха u в T, където под дълбочина на даден връх ще разбираме разстоянието от този връх до корена на дървото. Функцията $d(u): \ V \to V$ може да дефинираме рекурсивно по следния начин:

- $d(r) = 0$
- $d(u) = d\big(p(u)\big) + 1$

Височина на кореново дърво $T = (V, p, r)$ ще означаваме с $height(T) = \max\limits_{v \in V} \ d_T(v)$.

<u>Дефиниция</u>:
$T = (V, p, r)$ е кореново дърво. Дефинираме $p^{(n)}: \ V \to V$ за $n \in \mathbb{N}_0$ рекурсивно по n:

1. $p^{(0)}(v) = v$, за $v \in V$
2. $p^{(n+1)}(v) = p\big(p^{(n)}(v)\big)$



$n = 4$

$p^{(4)}(v) = r$

Дефиниция: LA-проблем (предшественик от определено ниво) *Level Ancestor*.
Проблем: $T = (V, p, r)$ е дадено кореново дърво.
Вход: $v \in V, d \in \mathbb{N}_0$.
Изход: $p^{(d)}(v)$, ако $d(v) \geq d$ и $\perp$, иначе ($\perp$ е символа за *bottom* (дъно) или в програмния случай ще е *nullptr* или някаква стойност, с която е недопустимо да се определи връх от дървото).

Дефиниция: Решение на LA-проблема ще наричаме двойка от алгоритми $\mathscr{A}_I$ и $\mathscr{A}_Q$, такива че:

1. $\mathscr{A}_I(T) = I$ (по дадено дърво $T = (V, p, r)$ - построява индекс I)
2. $\mathscr{A}_Q(I, v, d) = \begin{cases} p^{(d)}(v), & d \leq d(v) \\ \perp, & d > d(v) \end{cases}$

Сложност на решението $(\mathscr{A}_I, \mathscr{A}_Q)$ ще наричаме двойката от функции (f_I, f_Q), такива, че времевата сложност на $\mathscr{A}_I$ е $O\big(f_I(|V|)\big)$, а на $\mathscr{A}_I$ е $O\big(f_Q(|V|)\big)$.

Цел: Търсим решение на LA-проблема със сложност $\big(f_I(n), f_Q(v, d)\big) = <O(n), O(1)>$, което означава че, $f_I(n) \in O(n)$, $f_Q(v,d) \in O(1)$.

I. Решение на LA-проблема със сложност $< O(n^2,1) >$

Идея: Ще попълним таблица $table[v][d]$ за $v \in V$ и $d \leq |V|$ по следния начин:

$$table[v][d] = \begin{cases} p^{(d)}(v), & d \leq d(v) \\ \perp, & d > d(v) \end{cases}, \text{ тогава}$$

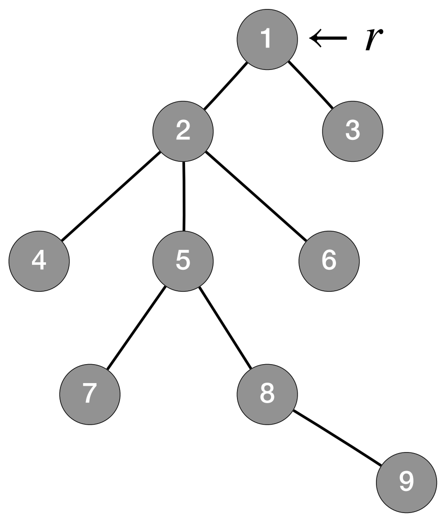
$$\mathscr{A}_Q(v, d) = \begin{cases} table[v][d], & d \leq |V| \\ \perp, & d > |V| \end{cases}$$

Това лесно може да стане по следния начин:

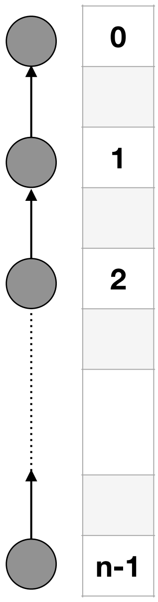
Кода по-долу е имплементиран на програмния език C++ и чака заявки от вида $(v, d) \in \mathbb{N}_0^2$.
За следното дърво:

```
void build() { /// A_I
    table.assign(n + 1, vector<int>(n, -1));
    for (int v = 1; v <= n; ++v) {
        int p = par[v], d = 1;
        while (p != -1) {
            table[v][d++] = p, p = par[p];
        }
    }
}

int query(int v, int d) {
    if (v > n || v < 1 || d >= n || d < 0) return -1;
    else if (d == 0) return v;
    return table[v][d];
}
```



Да разгледаме един частен случай на дърво, а именно такова дърво, в което има само едно листо, т.е. може да се разглежда като свързан списък. С други думи, тъй като няма да добавяме или изваждаме върхове в дървото (няма такова изисване за операции в условието), то това изродено дърво (списък) може да се разглежда и като масив.

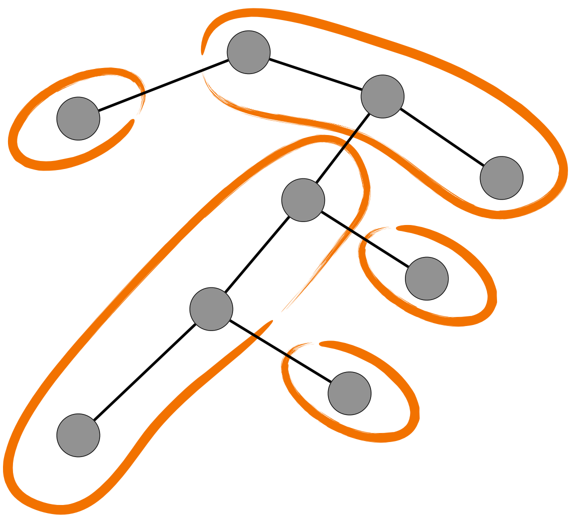


В такъв случай, може да използваме индексирането на масива като дълбочина на връх, тъй като дълбочината на даден връх също е естествено число. Следователно може да създадем следната структура от данни:

$A_I(T)$:
for each v **in** V **do**
$\quad A[d(v)] = v$
done

И да я използваме по следния начин: $A_Q(A, v, d) = \begin{cases} A[d(v) - d], & d \leq d(v) \\ \perp, & d > d(v) \end{cases}$

В този случай имахме линейна сложност по памет и константна сложност за отговаряне на всяка заявка. Може ли по някакъв начин да използваме тази идея от частния случай и да я пренесем и в общия случай?



Дефиниция: Максимален път за кореново дърво $T = (V, p, r)$ ще наричаме $\Pi = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, за който е изпълнено:

1. $p(v_{i-1}) = v_i$, за $1 \leq i \leq k$
2. $height(T_{v_i}) = i$, където T_{v_i} е поддърво на дървото T, което има за корен v_i

Следствие: Ако Π е максимален, то $height(T_{v_0}) = 0$ и v_0 е листо в дървото T.

Дефиниция: Разбиване на $T = (V, p, r)$ на максимални пътища е множеството

$\Pi = \left\{ \Pi_i \right\}_{i=1}^{I}$, което е такова че:

1. Π_i е максимален за $\forall i$
2. $V = \bigcup_{i=1}^{I} \Pi_i$
3. $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$ за $i \neq j$

Тук просто приложихме дефиницията за разбиване от ДС 1, Теория 1, дефиниция 3.

II.1. Намиране на разбиване на максимални пътища за времева сложност с порядък принадлежащ на $O(|V|)$.

Предположения:
1.) Знаем колекцията $Leaves$ от листа на дървото;
2.) За всеки връх знаем неговата дълбочина: $d(v)$ за $\forall v \in V$.

II.2. Сортиране на *листата* по тяхната дълбочина $d(v)$:

За реализирането на този подалгоритъм ще използваме идеята на *counting sort*.

1. Създаваме масив $AL[0 \dots n-1][]$ от $|V| = n$ на брой списъка;
2. $\forall$ листо $\ell \in Leaves: \; AL[d(\ell)].insert(\ell)$;
3. Създаваме сортирания масив $SL[0 \dots |Leaves| - 1]$ от листа.

Псевдо код:

$$
\begin{array}{l}
\textbf{int } k = 0 \\
\textbf{for } d = |V| - 1 \textbf{ down to } 0 \textbf{ do} \\
\quad \textbf{while } AL[d] \neq \emptyset \textbf{ do} \\
\quad\quad \ell \leftarrow AL[d].extract() \\
\quad\quad SL[k] \leftarrow \ell \\
\quad\quad k \leftarrow k + 1 \\
\quad \textbf{done} \\
\textbf{done}
\end{array}
$$

II.3. Разбиване на $T = (V, p, r)$ на максимални пътища:

1. Намираме $SL[0 \ldots |Leaves| - 1]$ от сортирани листа

2. $\prod \leftarrow \emptyset$ \\ множество от максимални пътища

   $mark[0 \ldots |V| - 1]$

   for $v = 0$ **to** $|V| - 1$ **do**

   $\quad mark[v] \leftarrow false$ // маркираме, че не участва в максимален път

   done

3. **for** $\ell = 0$ **to** $|Leaves - 1|$ **do**

   $\quad \Pi \leftarrow \emptyset$

   $\quad v \leftarrow SL[\ell]$

   $\quad$**while** v is defined **and** $mark[v] = false$

   $\quad\quad \Pi \leftarrow \Pi \cup v$

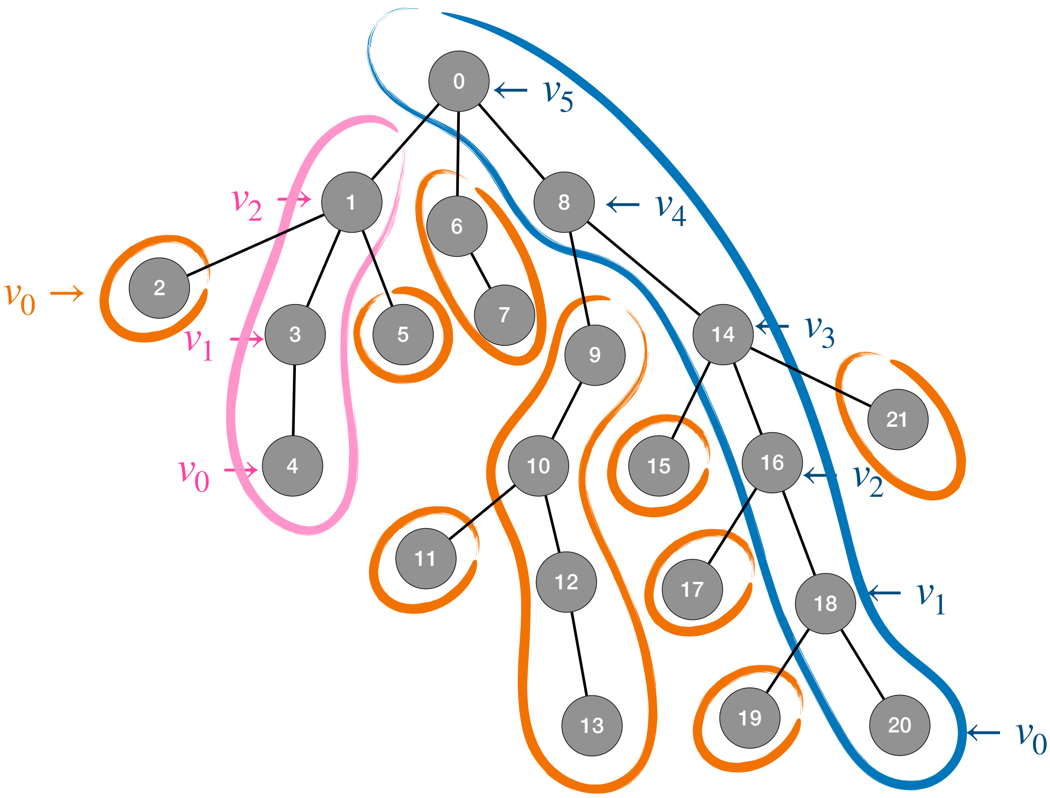
   $\quad\quad mark[v] \leftarrow true$

   $\quad\quad v \leftarrow p(v)$

   $\quad$**done**

   $\quad \prod \leftarrow \prod \cup \Pi$

   done



Времева сложност на описания по-горе алгоритъм: $O(|V|)$.

Обяснение на сложността: Всяка стъпка от тялото на while цикъла съответства на промяна от масива, в който отбелязваме посетените върхове от $mark[v] = false$ към $mark[v] = true$. Нещо повече - веднъж вдигнат флага $mark[v]$ на $true$, никъде след това не се променя. Следователно броят пъти, които се изпълнява while цикъла е $O(|V|)$. Освен това за всяко листо имаме константна работа в тялото на for цикъла, но извън тялото на while цикъла. Тоест общо $O(|V| + |Leaves|) = O(|V|)$, тъй като листата са от порядъка на всички върхове в дървото (не може да са повече).

Разглеждане на инварианти на изградената структура от максимални пътища:

Нека Π_j е пътя построен от нашия алгоритъм при j-тата итерация от for-цикъла.

1.) Ако $v \in \Pi_j$, то $mark[v] = true$ след j-тата итерация на for-цикъла.

2.) Ако $mark[v] = true$ след j-тата итерация на for цикъла, то $mark[p(v)]$ също ще е равно на $true$ след j-тата итерация на for цикъла.

3.) Ако $v \in \Pi_j$, то $p(v) \in \bigcup_{i=0}^{j} \Pi_i$.

4.) Всеки от пътищата Π_j е максимален.

Нека $v \in \Pi_j \Rightarrow mark[v] = true$ при j-тата итерация и освен това $mark[v]$ е $false$ при всяка от итерациите $0, 1, \ldots, j-1$.

Нека ℓ е произволно листо в поддървото T_v. Ако $\ell \in \Pi_i$ с $i < j$, то от 3.) следва, че $p(\ell), p^{(2)}(\ell), \ldots \in \bigcup_{k=0}^{i} \Pi_k$, в частност $v \in \bigcup_{k=0}^{i} \Pi_k \Rightarrow mark[v] = true$ след i-тата итерация на for цикъла. Но $i < j$, което е противоречие с допускането, с допускането, че $i < j$ и с което доказваме, че всяко листо $\ell \in T_v$ има индекс $\geq j$ в масива SL и от това, че масива е сортиран $\Rightarrow d(\ell) \leq d(SL[j])$.

Но за върха $\ell \in T_k$, $d_{T_k}(\ell) = d(\ell) - d(v) \Rightarrow d_{T_v}(SL[j]) = \max_{\ell \in T_v} T_v \Rightarrow$ $height(T_v) = d(SL[j]) - d(v)$, но това е точно позицията в Π_j, на която се записва v.

II.4. Решение на LA-проблема със сложност $< O(n, \sqrt{n}) >$

Нека $\prod = \{\Pi_i\}_{i=1}^{I}$ е разбиване на максимални пътища на входното дърво.

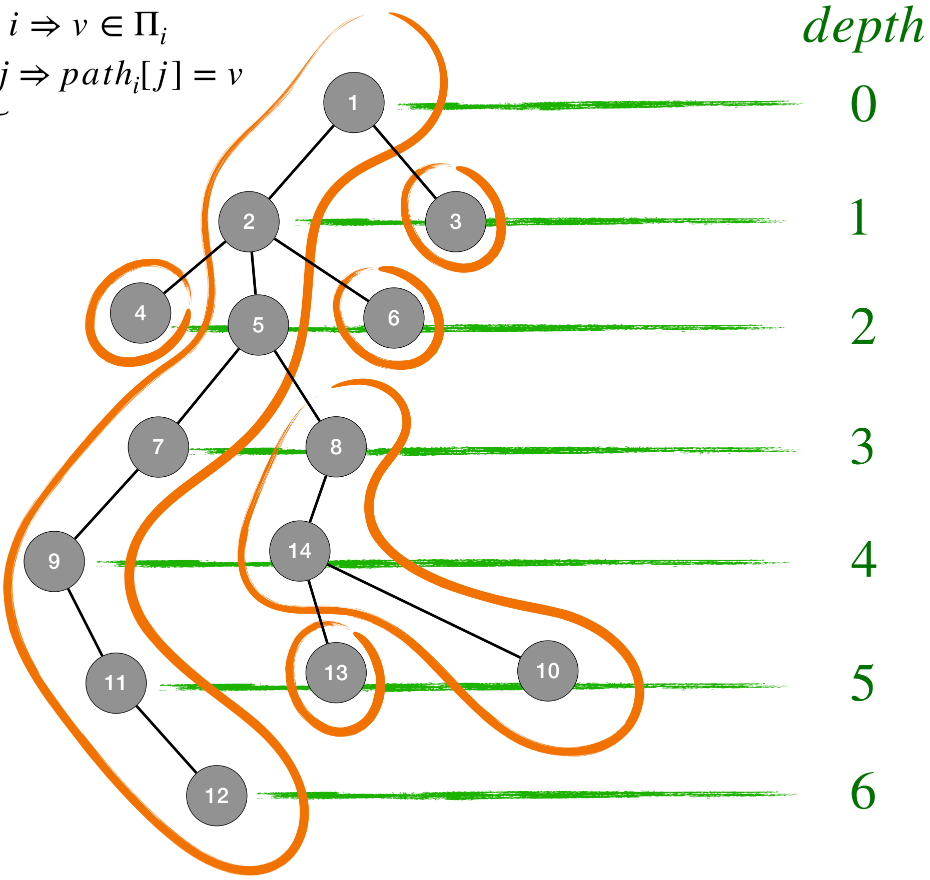
Ще опишем структурата която ще създадем, както и начина, по който ще я използваме:

За всеки път $\Pi_i = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ поддържаме масиви

$path_i[0 \ldots k]$ и
$path_i[j] = v_j$.

За всеки връх $v \in V$:

$index_p(v) = i \Rightarrow v \in \Pi_i$
$\underbrace{index(v)}_{height(v)} = j \Rightarrow path_i[j] = v$



procedure $LAQ_2(v, d)$
- **if** $d > d(v)$ **then return** $\perp$
- $i \leftarrow index_p(v)$
- $u \leftarrow path_i[len[i] - 1]$ // *най-горния връх в максималния път i*
- $d' \leftarrow height(v) - height(u)$ // *height(v) е височината на поддървото с корен v*
- **if** $(d \leq d')$ **then return** $path_i[height(v) + d]$ // *тър. връх се нам. в тек. макс. път*
- **else return** $LAQ_2(p(u), d - d' - 1)$ // *вече сме трав. d-d' върха и 1 за бащата*

done

Времева сложност на алгоритъма: $O(\sqrt{n})$

За домашно - да се помисли и да се аргументира защо е такава сложността. Насоки: да се помисли в следната посоката - какво се случва с дължината на пътя $len[i]$, където $i = index(v)$?